Домашнее задание 4

Сингулярное Разложение(SVD)

1.Определение:

Сначала ведём понятие спектрального разложения матрицы:

Для квадратной матрицы A,размер n×n, спектральное разложение — Это представление её в виде:

$$A = W\Sigma W^{-1}$$

Где W — матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы, Σ — диагональная матрица с соответствующими собственными значениями на главной диагонали,W^{-1}— обратная матпица W

Если матрица не квадратная,тогда сингулярное разложение надо.

Определение сингулярного разложения:

Сингулярным разложением матрицы M,размер m×n называется разложение следующего вида:

$$M = U\Sigma V^T \ ,$$

где Σ- матрица размера m × n, с неотрицательными элементами, у которой элементы, лежащие на главной диагонали — это сингулярные числа σi (все элементы, не лежащие на главной диагонали, являются нулевыми), а матрицы U ∈ $R^{m\times m}$ и V ∈ $R^{n\times n}$ — это две ортогональные матрицы, состоящие из левых и правых сингулярных векторов соответственно

2.Как получить U、Σ、V^T в SVD:

Известно, что матрица MM^T и M^TM квадратные, т.е. для них можно делать собственное разложение. Полученные собственные значения λ_i и собственные векторы u_i и v_i удовлетворяют следующему уравнению:

Для матрицы U: (MM^T) $u_i = \lambda_\mathrm{i} u_i$,и для матрицы V: (M^TM) $v_i = \lambda_\mathrm{i} v_i$

Для Σ : получим что $\sigma_\mathrm{i} = \sqrt{\lambda_\mathrm{i}}$,где σ_i-соответствующий диагональный элемент на i-ой страке,который называется сингулярным числом.

3. Геометрический смысл сингулярного разложения:

Пусть матрице M поставлен в соответствие линейный оператор. Сингулярное разложение можно переформулировать в геометрических терминах. Линейный оператор, отображающий элементы пространства R^n в себя представим в виде последовательно выполняемых линейных операторов вращения, растяжения и вращения. Поэтому компоненты сингулярного разложения наглядно показывают геометрические изменения при отображении линейным оператором M множества векторов из векторного пространства в себя или в векторное пространство другой размерности.

Метод главных компонент(PCA)

1. **понятие:**

   PCA (анализ основных компонентов), то есть метод анализа основных компонентов, является одним из наиболее широко используемых алгоритмов уменьшения размерности данных.Основная идея PCA заключается в сопоставлении n-мерного объекта с k-мерным. Этот k-мерный объект представляет собой совершенно новый ортогональный объект, также известный как главный компонент, который представляет собой k-мерный объект, реконструированный на основе исходного n-мерного объекта.Задача PCA состоит в том, чтобы последовательно находить набор взаимно ортогональных осей из исходного пространства. Выбор новых осей тесно связан с самими данными.Среди них первый выбор новой оси - это направление с наибольшим отклонением в исходных данных, второй выбор новой оси - это плоскость, ортогональная первой оси, так что отклонение является наибольшим, а третья ось - это плоскость, ортогональная 1-й и 2-й осям с наибольшим отклонением.И так далее, вы можете получить n таких осей.Для новых осей, полученных таким образом, мы обнаружили, что большая часть дисперсии содержится в предыдущих k осях, а дисперсия, содержащаяся в последующих осях, равна почти 0.Следовательно, мы можем игнорировать остальные оси и сохранить только первые k осей, которые содержат большую часть дисперсии.Фактически, это эквивалентно сохранению только размерных объектов, которые содержат большую часть дисперсии, игнорируя при этом размеры объектов, которые содержат почти 0 дисперсий, и реализуя обработку уменьшения размерности объектов данных.

2. **Процесс PCA:**
   a. Стандартизируйте исходные размерные данные (по сути, вам нужно только вычесть среднее значение, вам не нужно стандартизировать дисперсию);
   b. Вычислите ковариационную матрицу многомерных признаков, тем самым получив собственные значения и собственные векторы матрицы;
   c. Отсортируйте собственные значения от больших к малым, выберите первые k главных компонент и найдите соответствующие k собственных векторов;
   d. Спроецируйте исходные размерные данные на выбранные k векторов объектов, и размерность исходного объекта данных станет k-мерной;
   e. Эти k-мерные данные могут быть использованы для представления исходных крупномасштабных данных для последующей обработки и анализа данных.

3. **Связь и разница между SVD и PCA:**

   Вектор проекции является собственным вектором ковариационной матрицы (в смысле разложения по собственным значениям), а также правым сингулярным вектором исходной матрицы данных (в смысле разложения SVD).

   В то же время единственное значение исходной матрицы данных является квадратным корнем из собственных значений ковариационной матрицы.

В приложениях визуализации с уменьшением размерности PCA для рисования обычно зарезервированы 2-3 измерения. Необходимо упорядочить только размер сингулярного значения (собственные значения ковариационной матрицы) и получить соответствующий правый сингулярный вектор.В то же время для SVD-декомпозиции существует множество быстрых решений, которые не вычисляют ковариационную матрицу (превращаются в двухдиагональный массив, а затем выполняют QR-декомпозицию и т.д. [3]). Следовательно, SVD-декомпозиция может быть непосредственно использована для получения правильного сингулярного вектора и сингулярного ценность.

Кроме того, благодаря разложению SVD сингулярные значения, полученные с использованием ковариационной матрицы и матрицы внутреннего произведения, одинаковы. Следовательно, при применении, в соответствии с размерностью данных и количеством выборок, это может быть рационально использовано для нахождения матрицы с меньшим размером для разложения и улучшения вычислительных эффективность.