פתרון מקוצר למטלה 13 , קורס 20406 , סמסטר 2024ג.

כתב: חזי נוימן.

פתרון מקוצר הוא פתרון שמכיל את כל האלמנטים המתמטיים החשובים. הוא מכיל תתי שאלות שאתם נדרשים להשיב עליהן על מנת לחדד נקודות בחומר הלימוד. נכנה זאת קריאה אקטיבית.

שאלה 1

א. הראו כי הפונקציה $u(x)=\frac{3x^2-1}{1+x-x^3}$ רציפה בקטע $[0,1]$ ומצאו את הקדומה העוברת בנקודה $(0,0)$. חשבו השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר איקס.

ב. מצאו קדומה של $\cos^3 x$. חשבו (כולל הסבר ושימוש בקדומה) את $\int_0^{2\pi}\left|\cos^3 x\right|dx$.

פתרון שאלה 1 סעיף א

הפונקציה רציפה כמנת פולינום הרציפים לכל איקס. המכנה אינו מתאפס כי בקטע שלנו $1+x-x^3=1+x(1-x^2)\ge 1>0$.

נחשב קדומה בשיטת ההצבה:

$$U(x)=\int u(x)dx=\int\frac{3x^2-1}{1+x-x^3}dx \underset{\boxed{\substack{y=1+x-x^3\\ dy=(1-3x^2)dx}}}{=} \int\frac{-dy}{y}=-\ln|y|+K=-\ln|1+x-x^3|+K$$

$$=-\ln(1+x-x^3)+K$$

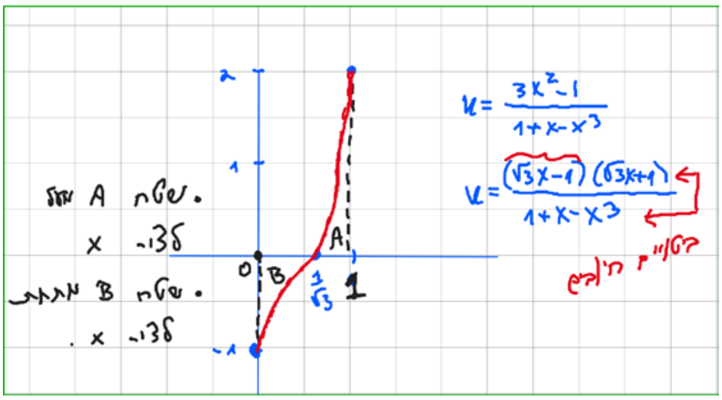
למה מותר להשמיט את הערך המוחלט ?

הקדומה עוברת בנקודה נתונה. נייש זאת ונקבל K=0 .

$$\boxed{U(x)=\int u(x)dx=-\ln(1+x-x^3)}$$

הפונקציה הנתונה u(x) היא פונקציה **בקטע** $[0,1]$. בקטע זה היא מתאפסת בנקודה $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

הגרף שלה **בקטע שלנו** נראה בערך כך:



רואים שיש שני שטחים בין ציר איקס ובין הגרף של הפונקציה. שטח A ושטח B .

$$S_a=\int_{1/\sqrt{3}}^{1} u(x)dx \quad ; \quad S_b=\int_{0}^{1/\sqrt{3}} -u(x)dx$$

למעשה יש לחשב את אותה קדומה שכבר חישבנו !

$$S_a=\int_{1/\sqrt{3}}^{1} u(x)dx=\underbrace{U(1)}_{0}-U(\tfrac{1}{\sqrt{3}})=\ln(1+\tfrac{2}{3\sqrt{3}})$$

$$S_b=\int_{0}^{1/\sqrt{3}} -u(x)dx=-\{U(\tfrac{1}{\sqrt{3}})-U(0)\}=\underbrace{U(0)}_{0}-U(\tfrac{1}{\sqrt{3}})=\ln(1+\tfrac{2}{3\sqrt{3}})$$

ולכן השטח המבוקש הוא :

$$S_a+S_b=2\cdot\ln(1+\tfrac{2}{3\sqrt{3}})\approx 0.65$$

<u>פתרון שאלה 1 סעיף ב</u>

מציאת הקדומה, שיטת ההצבה :

$$F(x)=\int\cos^3(x)dx=\int\cos^2(x)\cdot\cos x dx$$

$$=\int[1-\sin^2(x)]\cdot\cos x dx \quad \boxed{\text{y=sinx and dy=cosxdx}}$$

$$=\int[1-y^2]dy=y-\frac{y^3}{3}+K=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+K$$

יש דרכים רבות לחישוב האינטגרל המבוקש. זכרו כי מצאנו קדומה ל- $\cos^3(x)$ ולכן המשימה העיקרית שלנו היא להשתחרר מהערך המוחלט.

$$|\cos^3(x)|=|\cos^2(x)\cos(x)|=\cos^2(x)\cdot|\cos(x)|$$

את הפונקציה cosx אנו מכירים ובפרט יודעים מתי היא חיובית ומתי היא שלילית.

נרשום תחומים וכך נוכל להשתחרר סופית מהערך המוחלט על הקוסינוס.

$$x\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right] \quad OR \quad x\in\left[\tfrac{\pi}{2},2\pi\right] \quad\Rightarrow\quad \cos x\geq 0 \quad\Rightarrow\quad |\cos(x)|=\cos x$$

$$x\in\left[\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3\pi}{2}\right] \quad\Rightarrow\quad \cos x\leq 0 \quad\Rightarrow\quad |\cos(x)|=-\cos x$$

נמשיך כך :

$$\int_0^{2\pi}\left|\cos^3 x\right|dx=\int_0^{\pi/2}\left|\cos^3 x\right|dx+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left|\cos^3 x\right|dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\left|\cos^3 x\right|dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos^3 xdx+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}-\cos^3 xdx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos^3 xdx$$

$$=\left[F(x)\right]_0^{\pi/2}+(-1)\cdot\left[F(x)\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}+\left[F(x)\right]_{3\pi/2}^{2\pi}$$

$$=F(\tfrac{\pi}{2})-F(0)+(-1)\cdot\{F(\tfrac{3\pi}{2})-F(\tfrac{\pi}{2})\}+F(2\pi)-F(\tfrac{3\pi}{2})$$

$$=2F(\tfrac{\pi}{2})+F(2\pi)-F(0)-2F(\tfrac{3\pi}{2})$$

כעת נחשב את הביטויים האלה שהרי מצאנו את F .

$$F(x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3} \quad\Rightarrow\quad F(\tfrac{\pi}{2})=\tfrac{2}{3}\ ;\ F(2\pi)=0\ ;\ F(0)=0\ ;\ F(\tfrac{3\pi}{2})=-\tfrac{2}{3}$$

סיכום :

$$\int_0^{2\pi}\left|\cos^3 x\right|dx=2F(\tfrac{\pi}{2})+F(2\pi)-F(0)-2F(\tfrac{3\pi}{2})=\frac{8}{3}$$

☝ שימו לב כי פתרנו את השאלה ללא שימוש בשטחים או סימטריות כלשהן. פשוט חישבנו את האינטגרל.

שאלה 2

חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=x\cos^2(\pi x)$ ובין ציר x בכל אחד מהקטעים הבאים : הקטע $\left[0,\frac{3}{2}\right]$, הקטע $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$. (כדאי לבצע הצבה וכמובן א. בחלקים)

פתרון שאלה 2

נתחיל מהסוף. מתקיים $f(-x)=-f(x)$ כלומר **הפונקציה אי זוגית**. ולכן בכל קטע סימטרי סביב x=0 כלומר קטע מהצורה [-r,r] האינטגרל הוא אפס. סיימנו.

ניגש לעיקר.

ראשית שימו לב שבקטע [0,r] **הפונקציה אי שלילית**. לאור זאת השטח מתחת הגרף ועד ציר איקס הוא פשוט האינטגרל של הפונקציה בקטע המתאים.

כלומר השטח בקטע $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ הוא $S=\int_0^{3/2}x\cos^2(\pi x)dx$. השאלה היא כיצד נחשב אינטגרל זה?

ראשית "ננקה את πx" על ידי הצבה.

$$S=\int_0^{3/2}x\cos^2(\pi x)dx \underset{\boxed{\substack{t=\pi x\\ dt=\pi dx}}}{=} \int_0^{3\pi/2}\frac{t}{\pi}\cos^2(t)\frac{dt}{\pi}=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}t\cos^2(t)dt$$

כעת נמיר את הביטוי הריבועי למשהו שאינו ריבועי.

☝ מכירים את הנוסחה הידועה מטריגונומטריה? (הדפסנו אותה בצבע אדום)

$$S=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}t\cos^2(t)dt=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}(t+t\cdot\cos 2t)dt$$

את מה שאנו יודעים לחשב כבר כעת, נחשב.

$$S=\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}(t+t\cdot\cos 2t)dt=\frac{1}{2\pi^2}\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{3\pi/2}+\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}t\cdot\cos 2tdt$$

$$=\frac{9}{16}+\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}t\cdot\cos 2tdt$$

☝ נמקו היטב את קבלת המספר 9/16 .

"ננקה את "2t על ידי הצבה פשוטה.

$$S=\frac{9}{16}+\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2} t\cdot\cos 2t dt \underbrace{=}_{\boxed{\substack{y=2t\\ dy=2dt}}} \frac{9}{16}+\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi}\frac{y}{2}\cdot\cos y\frac{dy}{2}$$

$$=\frac{9}{16}+\frac{1}{8\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi} y\cdot\cos y dy$$

את האינטגרל האחרון נחשב בעזרת אינטגרציה בחלקים. אין כרגע טעם לגרור את כל הקבועים – נתרכז באינטגרל עצמו.

$$\int_0^{3\pi}\underbrace{y}_{w}\cdot\underbrace{\cos}_{u'} y dy=\left[y\cdot\sin y\right]_0^{3\pi}-\int_0^{3\pi}1\cdot\sin y dy=\left[0-0\right]-\left[-\cos y\right]_0^{3\pi}=-2$$

סיכום החישוב:

$$S=\frac{9}{16}+\frac{1}{8\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi} y\cdot\cos y dy=\frac{9}{16}+\frac{1}{8\pi^2}\cdot(-2)=\frac{9}{16}-\frac{1}{4\pi^2}\approx 0.54$$

הזינו בוולפראם אלפא ככה ותוכלו לראות את הגרף ואת התשובה הסופית.

שאלה 3 (💣)

נניח כי $f(x)=f(x+p)$ לכל x. ידוע כי $\int_0^p f(x)dx=k$.

מה ערכו של האינטגרל $\int_{-p/2}^{p/2} f(x)dx$?

זאת שאלה קשה וטריקית !

התחילו כך: $\int_{-p/2}^{p/2} f(x)dx=\int_{-p/2}^{0} f(x)dx+\int_0^{p/2} f(x)dx=\ldots$. באינטגרל על הקטע השלילי

בצעו הצבה **t = -x** . באינטגרל על הקטע החיובי אל תגעו. התקדמו כעת...

פתרון שאלה 3

$$\int_{-p/2}^{p/2} f(x)dx \underset{((\#))}{=} \int_{-p/2}^{0} f(x)dx+\int_0^{p/2} f(x)dx=$$

$$\underbrace{=}_{\boxed{\text{y=-x dy=-dx}}}\int_{p/2}^{0} f(-y)(-dy)+\int_0^{p/2} f(x)dx \underset{((*))}{=} \int_0^{p/2} f(-y)dy+\int_0^{p/2} f(x)dx$$

$$\underset{((**))}{=}\int_0^{p/2} f(p-y)dy+\int_0^{p/2} f(x)dx \underset{\substack{((***))\\ \boxed{z=p-y}}}{=} \int_p^{p/2} f(z)(-dz)+\int_0^{p/2} f(x)dx$$

$$=\int_{p/2}^{p} f(z)(dz)+\int_0^{p/2} f(x)dx=\int_0^{p} f(x)dx=k$$

נסכם

- המעבר הראשון ((#)) הוא פיצול האינטגרל בקטע המלא לאינטגרציה על שני קטעים.

- המעבר השני הוא ההצבה המוצעת בתרגיל באינטגרל הראשון. שימו לב כיצד החלפנו את הגבולות בהתאם להצבה שעשינו.
- המעבר ((*)) הוא היפוך הגבולות ובהתאם סילוק המינוס .
- המעבר ((**)) הוא מעבר משמעותי הוספנו P למשתנה בפונקציה לפי נתוני השאלה .
- המעבר הבא ((***)) הוא הצבה נוספת. שימו לב כיצד גבולות האינטגרל משתנים לפי ההצבה הצבה באינטגרל הראשון.
- המעבר האחרון הוא פשוט איחוד האינטגרל על שני קטעים לקטע אחד.

סיימנו.

שאלה 4 - שימוש במשפט 5.6.7 ועוד אלמנטים.

הוכיחו כי $\frac{1}{\pi} \ge \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}dx \ge \frac{2}{3\pi}$. [רמז : הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ יורדת עבור איקס חיובי]

פתרון שאלה 4

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}dx \le \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{2\pi}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{3\pi} \sin x\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2 = \frac{1}{\pi}$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}dx \ge \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{3\pi}dx = \frac{1}{3\pi}\int_{2\pi}^{3\pi} \sin x\,dx = \frac{1}{3\pi}\cdot 2 = \frac{2}{3\pi}$$

סיימנו.

שאלה 5

א. הוכיחו כי למשוואה $\ln(x) = (x-2)^2$ יש בדיוק שני שורשים.

ב. מצאו קבועים אי שליליים כך ש- $A \le \left|e^{3x} + x - 1\right| \le B$ לכל x בקטע $[-1,1]$. נמקו היטב.

{ הקבועים צריכים להיות הדוקים כלומר A הכי גדול ו B הכי קטן }

פתרון שאלה 5 סעיף א

נגדיר פונקציית עזר $f(x) = \ln(x) - (x-2)^2$.

אם היו שלושה שורשים אזי הנגזרת הראשונה חייבת להתאפס לפחות פעמיים (רול) ולכן הנגזרת השנייה חייבת להתאפס לפחות פעם אחת (רול) .

הנגזרת השנייה היא $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2$ וביטוי זה אינו מתאפס. סתירה. מסקנה : אין שלושה או יותר שורשים. כל שנותר הוא להוכיח שיש שני שורשים.

חשבו את : $f(1)$; $f(2)$; $f(10)$. היעזרו ברציפות ומשפט עה״ב.

סיימנו.

פתרון שאלה 5 סעיף ב

הפונקציה בתוך הערך המוחלט היא פונקציה עולה – בדקו על ידי גזירה. .

פונקציה זאת **עולה** ולכן $A = \underbrace{e^{-3\cdot 1} - 1 - 1}_{f(-1)} \le \underbrace{e^{3x} + x - 1}_{f(x)} \le \underbrace{e^{3\cdot 1} + 1 - 1}_{f(1)} = B$

כלומר מצאנו כי $\underbrace{e^{-3}-2}_{negative} \le e^{3x}+x-1 \le e^3$.

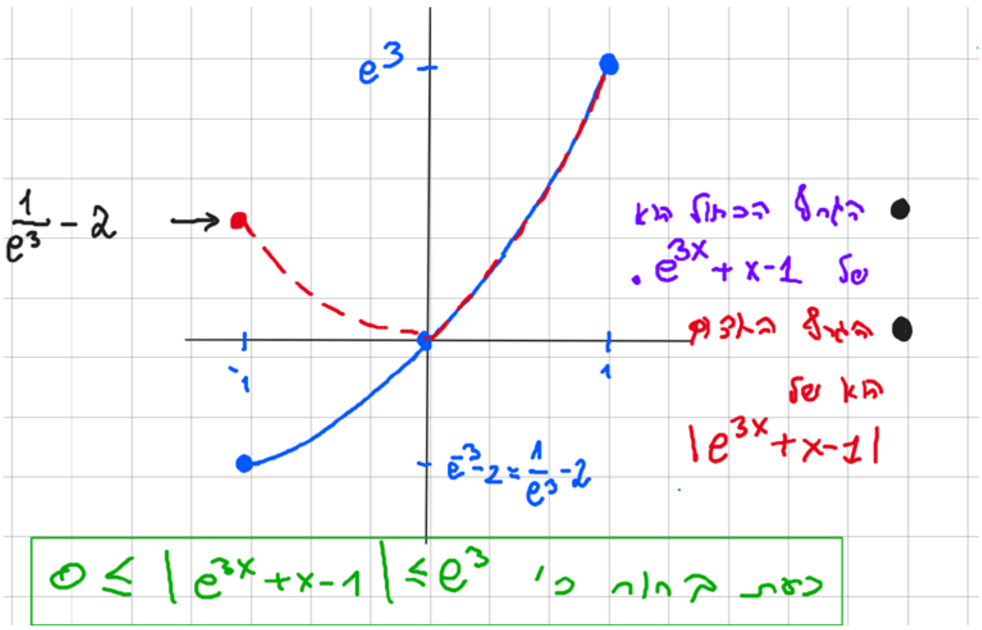
אם נפעיל ערך מוחלט נקבל: $0 \le \left|e^{3x}+x-1\right| \le e^3$. מדוע ?

המספר החיובי e^3 אינו מושפע. אגף שמאל חייב להיות אפס כי זאת תכונה של ערך מוחלט. חשוב להבין זאת שהרי יש נקודה בה הפונקציה היא אפס , הנקודה x=0 . לכן אלו הם החסמים המבוקשים.

✋ מצאו את הטעות בטיעון הבא.

נפעיל ערך מוחלט ונקבל $\left|e^{-3}-2\right| \le e^{3x}+x-1 \le e^3$ כלומר $2-e^{-3} \le e^{3x}+x-1 \le e^3$.

התמונה הבאה היא ההוכחה בקיצור נמרץ.



שאלה 6 - פונקציות טריגונומטריות הפוכות (סעיפים 8.2 ,8.1)

[אין קשר בין סעיפי השאלה]

א. מצאו את ערכי הקבועים שיבטיחו גזירות לכל איקס עבור הפונקציה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a-x}{x} & x\ge 1\\ b-\arctan x & x<1\end{cases}$$.

ב. חשבו $\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{9x^2+4}$. יש להגיע לתשובה מהצורה $\frac{\pi}{n}$ כאשר n מספר טבעי .

ג. קינוח, אינטגרל עם מספר שלבים. מצאו את $\int \arctan(\sqrt{x})dx$.

פתרון שאלה 6 סעיף א

הנקודה שיש להתייחס אליה היא נקודת ההטלאה x=1 בכל שאר הנקודות הפונקציה מוגדרת היטב , רציפה וגזירה.

תנאי הכרחי לגזירות היא רציפות בנקודה. הגבולות מימין ומשמאל ברי חישוב . נחשב ונשווה.

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) \Rightarrow \frac{a-1}{1} = b - \arctan 1 \Rightarrow \boxed{a-1 = b-\frac{\pi}{4}}$$

נגזור מימין ומשמאל וניעזר במשפט עמוד 180. נקבל ...

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^-} f'(x) \Rightarrow \boxed{-a = -0.5}$$

מצאנו כי עבור הבחירה $b = \frac{\pi-2}{4}$; $a = \frac{1}{2}$ הפונקציה היא רציפה וגזירה בנקודה x=1.

סיימנו.

פתרון שאלה 6 סעיף ב

הציבו $y=3x$ והתקדמו .

פתרון שאלה 6 סעיף ג

התחילו בהצבה $y = \sqrt{x}$ וקבלו $\int \arctan(\sqrt{x})dx = \int 2y \arctan y dy$

התקדמו כעת בעזרת אינטגרציה בחלקים עד לסיום החישוב.

$$\begin{aligned}
\int \arctan(\sqrt{x})dx &= \int \underbrace{2y}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan y}_{v} dy \\
&= \underbrace{y^2}_{u} \cdot \underbrace{\arctan y}_{v} - \int \underbrace{y^2}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{v'} dy \\
&= y^2 \cdot \arctan y - \int \frac{y^2}{1+y^2} dy = y^2 \cdot \arctan y - \int \frac{y^2+1-1}{1+y^2} dy \\
&= y^2 \cdot \arctan y - \int [1 - \frac{1}{1+y^2}] dy \\
&= y^2 \cdot \arctan y - [y - \arctan y] + k \\
&= x \cdot \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + k \\
&= (x+1) \cdot \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + k
\end{aligned}$$

סוף פתרון מטלה 13