קורס:

חדו"א א (20406) סמסטר 2024ב

תאריך הבחינה: 8.7.2024

מועד הבחינה: מועד 84 מועד א4 אקדמי

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים - חלק א וחלק ב.

עליכם לענות על: שאלות 1-4 בחלק א וכן לענות על 3 שאלות מבין 5-8 בחלק ב.

כל חומר עזר מותר בשימוש

פתרון הבחינה

כתב: חזי נוימן

חלק ראשון - שאלות סגורות 1-4 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{7}$ נקודות

סמנו מהי התשובה הנכונה בעמוד האחרון של המחברת במקום המיועד לכך . לחילופין , ניתן לרשום את התשובות בעמוד הראשון של המחברת בצורה ברורה . **לא נדרש נימוק - רק סימון במחברת מהי התשובה הנכונה .** אם אינכם יודעים להשיב כדאי לנחש. סופרים רק תשובות נכונות ולא מורידים ניקוד על טעויות .

שאלה 1 – שאלה סגורה

נגדיר פונקציה: $f(x)=\begin{cases} a & x\ge 0 \\ b & x<0 \end{cases}$. $a\neq b$ קבועים .

קבעו מי מהטענות נכונה ומי לא נכונה. **כמה טענות נכונות יש ?**

A. הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0.5$.

B. הפונקציה $x\cdot f(x)$ לא רציפה בנקודה $x=0$.

C. הפונקציה $x\cdot f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$ והנגזרת היא a .

D. יש קבועים שונים a,b כך שהפונקציה $f(x)$ לא רציפה בנקודה $x=0$ אבל הפונקציה $\dfrac{2}{(f(x)-1)^2}$ רציפה בנקודה $x=0$.

מספר הטענות הנכונות הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3

ד. כל הטענות נכונות ה. כל הטענות לא נכונות

פתרון שאלה 1 – $\boxed{\text{ב}}$

A. **הטענה נכונה**. בסביבת הנקודה x=0.5 הפונקציה קבועה f=a ולכן רציפה

B. **הטענה לא נכונה**. נסמן $g(x)=x\cdot f(x)$. **הפונקציה מוגדרת**, $g(0)=0\cdot a=0$.

הגבול של המכפלה קיים כי:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-} x\cdot f(x)=0\cdot b=0\ ,\ \lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} x\cdot f(x)=0\cdot a=0$$

הנה הוכחנו שהגבול שווה לערך הנקודתי ולכן יש רציפות בנקודה x=0 .

C. **הטענה לא נכונה**. נסמן $g(x)=x\cdot f(x)$. נפעיל את הגדרת הנגזרת ונקבל

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot f(h)}{h}=\lim_{h\to 0} f(h)=\text{no limit}\ .$$

הגבול האחרון לא קיים כי ערכו a מצד אחד וערכו b מצד שני והם שונים.

D. **הטענה נכונה**. למשל a=0 , b=2 .

שאלה 2 – שאלה סגורה

לפניכם שתי טענות העוסקות באינטגרציה. לגבי כל טענה החליטו האם היא נכונה או לא נכונה.

הערה: לעיתים לא נדרש חישוב מלא על מנת להחליט האם טענה היא נכונה או לא נכונה.

1) מתקיים $\int_{-10}^{10} x^2 \cdot \cos(\pi x)dx \cdot 13 = \int_{-10}^{10} (13x^2 + 4x + 5) \cdot \cos(\pi x)dx$.

2) $\int_0^3 x \cdot \cos(\pi x)dx = -\frac{2}{\pi}$.

הטענות הנכונות הן:

א. 1 ב. 2 ג. $1,2$ ד. שתי הטענות לא נכונות.

פתרון שאלה 2 – $\boxed{\text{א}}$

טענה 1 נכונה.

מתקיים:

$$\int_{-10}^{10} (13x^2 + 4x + 5) \cdot \cos(\pi x)dx =$$

$$= \int_{-10}^{10} 13x^2 \cdot \cos(\pi x)dx + \underbrace{\int_{-10}^{10} 4x \cdot \cos(\pi x)dx}_{A} + \underbrace{\int_{-10}^{10} 5 \cdot \cos(\pi x)dx}_{B}$$

אינטגרל B הוא אפס - חישוב ישיר של הקדומה והצבת ערכי הקצה.

אינטגרל A הוא אפס כי $x \cdot \cos(\pi x)$ היא פונקציה אי זוגית.

טענה 2 לא נכונה. מחשבים בעזרת אינטגרציה בחלקים ומקבלים $-\frac{2}{\pi^2}$

שאלה 3 – שאלה סגורה

הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x . נגדיר $u(x) = |x-1| \cdot g(x)$. מי מבין טענות 1-3 נכונה?

1) אם $g(x)$ רציפה בנקודה $x=1$ אזי $u(x)$ רציפה בנקודה $x=1$.

2) אם $g(x)$ גזירה בנקודה $x=1$ אזי $u(x)$ גזירה בנקודה $x=1$.

3) אם $g(1)=0$ אזי $u(x)$ גזירה בנקודה $x=1$.

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. $1,2$ ה. $1,3$ ו. $2,3$ ז. $1,2,3$ ח. הכל שגוי

למען הסר ספק, נדגיש כך: טענה נכונה היא טענה שנכונה בכל מצב ולכל g המקיימת את התנאים. טענה אינה נכונה אם יש לפחות דוגמא נגדית אחת המראה שאינה נכונה.

פתרון שאלה 3 – $\boxed{\text{א}}$

טענה 1 נכונה. u(x) רציפה כמכפלה של רציפות בנקודה x=1 .

טענה 2 לא נכונה. נבחר g(x)=1 שהיא גזירה לכל איקס. נקבל u(x)=|x-1| . פונקציה זאת לא גזירה בנקודה x=1 .

טענה 3 לא נכונה. נבחר g באופן הבא: g(1)=0 ו- g(x)=2 לכל איקס אחר. רשמו כעת מהי הפונקציה u . קבלו שוב פונקציה u שאינה גזירה בנקודה x=1 .

שאלה 4 – שאלה סגורה

הטור $\sum(2a_n - \frac{(-1)^n}{n})$ הוא טור **מתכנס** . קבעו מי מהטענות נכונה ומי לא נכונה.

1) מנתוני השאלה נסיק כי הטור $\sum(a_n)^2$ **חייב** להיות טור מתכנס.

2) מנתוני השאלה נסיק כי הטור $\sum(2a_n + \frac{1}{n})$ הוא **תמיד** טור מתבדר.

3) לפי נתוני השאלה הטור $\sum(-1)^n a_n$ **תמיד** יהיה טור מתכנס בתנאי .
(זכרו התכנסות בתנאי היא התכנסות אך לא התכנסות בהחלט)

הטענות הנכונות הן:

א. 1 ב. 2 ג. 3

ד. 1,2 ה. 1,3 ו. 2,3

ז. כל הטענות נכונות ח. כל הטענות לא נכונות

פתרון שאלה 4 – $\boxed{\text{ב}}$

טענה 1 לא נכונה. נבחר $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. בדקו כי נתוני השאלה מתקיימים אבל $\sum(a_n)^2 = \infty$.

טענה 2 נכונה. ***מנתוני השאלה ומאריתמטיקת הסכום*** נקבל כי הטור $\sum a_n$ הוא טור מתכנס.
הנה הטיעון בקצרה:

$$\sum a_n = \frac{1}{2}\cdot\sum 2a_n =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sum(2a_n - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n}) = \frac{1}{2}\cdot\sum(2a_n - \frac{(-1)^n}{n}) + \frac{1}{2}\cdot\sum\frac{(-1)^n}{n}$$

הטור שנחקר בתרגיל הוא הטור $\sum(2a_n + \frac{1}{n})$ וכעת רואים כי זהו טור סכום של טור מתכנס וטור מתבדר. לאור זאת הטור הזה תמיד מתבדר.

טענה 3 לא נכונה. נבחר $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$. בדקו כי נתוני השאלה מתקיימים אבל $\sum(-1)^n a_n$. הוא טור חיובי שבוודאי מתכנס בהחלט ולכן לא ניתן לטעון שהוא מתכנס בתנאי.

חלק ב – ענו על 3 שאלות בלבד. משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{24}$ נקודות

שאלה 5

(16 נקי) א. 1) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sin x+x+\pi}$ רציפה בקטע $(0,\infty)$.

2) הוכיחו כי: $\dfrac{1}{3}\le\displaystyle\int_{3\pi/2}^{2\pi}\dfrac{dx}{\pi\sin x+x+\pi}\le\dfrac{1}{6}$.

(8 נקי) ב. נגדיר $g(x)=\dfrac{x+\pi}{\pi\sin x+x+\pi}$. **אברהם** טוען כי g מתאפסת בנקודה $x=-\pi$.

שרה אומרת כי הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x=-\pi$ אבל לדעתה קירוב נהדר לערך הפונקציה בנקודה זאת הוא -0.467 . מי צודק ? **נמקו על בסיס מתמטיקה**.

פתרון שאלה 5א

נעיין במכנה. $u(x)=\pi(1+\sin x)+x$. המחובר הראשון אי שלילי. המחובר השני חיובי. לאור זאת בקטע שלנו המכנה חיובי. אם כך הפונקציה שלנו רציפה כמנת רציפות עם מכנה שאינו מתאפס.

נמשיך להתבונן במכנה בלבד. מתקיים: $u'(x)=\pi\cos x+1$.

נגזרת זאת חיובית כי המחובר הראשון הוא אי שלילי בקטע $[1.5\pi,2\pi]$.

לאור זאת המכנה עולה. נסיק כך: $\underbrace{u(\tfrac{3\pi}{2})}_{\boxed{1.5\pi}}\le u(x)=\pi(1+\sin x)+x\le\underbrace{u(2\pi)}_{\boxed{3\pi}}$.

$$\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{dx}{3\pi}\le\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{dx}{\pi\sin x+x+\pi}\le\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{dx}{1.5\pi}$$

רשמנו מכנה הכי גדול והכי קטן, בהתאמה.

כל שנותר הוא לחשב את האינטגרלים מימין ומשמאל ובזאת הסתיים התרגיל.

הערה: כדאי לדעת בשליפה מהשרוול, $\displaystyle\int_a^b kdx=k(b-a)$.

סיימנו.

פתרון שאלה 5ב

אברהם טועה כי המכנה של g מתאפס בנקודה x=-π . לאור זאת הפונקציה g אינה מוגדרת בנקודה הנ״ל.

שרה צודקת שהפונקציה אינה מוגדרת. ובעניין הקירוב...

מתקיים, לפי כלל לופיטל, $\displaystyle\lim_{x\to-\pi}g(x)=\lim_{x\to-\pi}\frac{x+\pi}{\pi\sin x+x+\pi}=\frac{1}{1-\pi}\approx-0.467$

סיימנו.

שאלה 6

(14 נק') א. הוכיחו כי האינטגרל $J=\int_0^\infty \frac{1}{x^2+|\cos x|}dx$ הוא **אינטגרל מתכנס**. מצאו **חסם** **חיובי** $K_0>0$ כך ש- $J\le K_0$. {רמז: שימו לב $[0,\infty)=[0,1]\cup(1,\infty)$ }

(10 נק') ב. פונקציה $u(x)$ מוגדרת לכל x כך:

אם $x\neq 0$ אזי $u(x)=\frac{x-|x-x^2|}{x}$, אם $x=0$ אזי $u(0)=c$.

כתבו את הפונקציה כהטלאה. האם ניתן למצוא קבוע c עבורו הפונקציה תהייה רציפה בנקודה x=0 . הוכיחו תשובותיכם.

פתרון שאלה 6א

$$J_1=\int_0^1\frac{1}{x^2+|\cos x|}dx\underbrace{\le}_{(A)}\int_0^1\frac{1}{0+|\cos x|}dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{|\cos x|}dx\underbrace{=}_{(B)}\int_0^1\frac{1}{\cos x}dx$$

$$\underbrace{\le}_{(C)}\int_0^1\frac{1}{\cos 1}dx\underbrace{=}_{(D)}\frac{1}{\cos 1}\underbrace{\le}_{(E)}\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}\underbrace{=}_{(F)}2$$

(A) מקטין מכנה , מגדיל את כל השבר.

(B) בקטע שלנו [0,1] הקוסינוס חיובי. ניתן להשמיט ערך מוחלט.

(C) בקטע שלנו [0,1] הקוסינוס פונקציה יורדת. לכן הערך הכי קטן הוא ב x=1 ולכן הצבת ערך זה מגדיל הכי הרבה את השבר.

(D) חישבנו את האינטגרל. קבוע כפול אורך הקטע.

(E) הקוסינוס ממשיך לרדת אחרי x=1 עד ל x=π/3 . לכן אם נרשום π/3 נקטין את המכנה ולכן נגדיל את כל השבר.

(F) חישוב ישיר שהרי cos(π/3)=0.5 .

מצאנו חסם יפה לאינטגרל בקטע [0,1] . $J_1=\int_0^1\frac{1}{x^2+|\cos x|}dx\le 2$

$$J_2=\int_1^\infty\frac{1}{x^2+|\cos x|}dx\le\int_1^\infty\frac{1}{x^2+0}dx=\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2-1}=1$$

סיכום:

$$J=\int_0^\infty\frac{1}{x^2+|\cos x|}dx=\int_0^1+\int_1^\infty\le 2+1=3$$

סיימנו.

פתרון שאלה 6ב

על מנת שהפונקציה תהייה רציפה בנקודה x=0 צריך לברר האם יש לה גבול בנקודה זאת.

ניתן לפתוח את הערך המוחלט ואני סומך עליכם בעניין זה.

אראה לכם שניתן לחשב את הגבול גם ללא פתיחת הערך המוחלט.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-|x-x^2|}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{x}{x}-\frac{|x-x^2|}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\left[1-\frac{|x-x^2|}{x}\cdot\frac{|x|}{|x|}\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\left[1-\frac{|x-x^2|}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\left[1-\left|\frac{x-x^2}{x}\right|\cdot\frac{|x|}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\left[1-|1-x|\cdot\frac{|x|}{x}\right]=\begin{cases} x>0\ ,\ 1-|1-0|\cdot1=0\\ x<0\ ,\ 1-|1-0|\cdot(-1)=2\end{cases}$$

אם כך אנו רואים שהגבול לא קיים כי הגבולות מימין ומשמאל שונים.

לאור זאת, מכיוון שהגבול לא קיים, הרי זה לא משנה הקבוע c כלומר לא משנה כיצד נגדיר את הפונקציה בנקודה x=0 , רציפות לא תהייה.

סיימנו.

שאלה 7

(14 נק') א. תהי $f(x)$ גזירה לכל x. נתון כי $a<b<c$ ו- $f(b)>0$, $f(c)<0$, $f(a)<0$.

1) הוכיחו כי לפונקציה יש לפחות שני שורשים.

2) הוכיחו כי לנגזרת יש לפחות שורש אחד.

(10 נק') ב. חשבו $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2-x^3}\,dx$. פרטו את כל שלבי החישוב .

פתרון שאלה 7א

סעיף 1

בכל אחד מבין הקטעים (b,c) ; (a,b) הפונקציה רציפה (כי היא גזירה) וכן מחליפה סימן בקצוות הקטע. לאור זאת יש בכל קטע שורש ומכאן יש לפחות שני שורשים.

סיימנו.

סעיף 2

אם שני השורשים הינם x_1,x_2 אזי בקטע $[x_1,x_2]$ הפונקציה רציפה וגם גזירה . בקצוות הקטע הפונקציה מתאפסת. לפי משפט רול הנגזרת תתאפס לפחות פעם אחת בין נקודות אלה.

סיימנו.

פתרון שאלה 7ב

$$W = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 - x^3}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 \cdot (1-x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1-x}\,dx = \int_{-1}^{1} |x| \cdot \sqrt{1-x}\,dx$$

נפצל את האינטגרל האחרון עם הערך המוחלט לשני מחוברים.

$$W = \int_{-1}^{1} |\mathbf{x}| \cdot \sqrt{1-x}\,dx = \int_{-1}^{0} |\mathbf{x}| \cdot \sqrt{1-x}\,dx + \int_{0}^{1} |\mathrm{x}| \cdot \sqrt{1-x}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (\mathbf{-x}) \cdot \sqrt{1-x}\,dx + \int_{0}^{1} \mathrm{x} \cdot \sqrt{1-x}\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} x \cdot \sqrt{1-x}\,dx + \int_{0}^{1} x \cdot \sqrt{1-x}\,dx$$

שני האינטגרלים בקטעים שונים אבל **הפונקציה זהה**. לכן כדאי למצוא את הקדומה בנפרד.

$$\int x \cdot \sqrt{1-x}\,dx \underbrace{=}_{\boxed{\substack{y=1-x \\ dy=-dx}}} -\int (1-y) \cdot \sqrt{y}\,dy$$

$$= \int (y^{1.5} - y^{0.5})\,dy = \frac{y^{2.5}}{2.5} - \frac{y^{1.5}}{1.5} + K$$

$$= \tfrac{2}{5}(1-x)^{2.5} - \tfrac{2}{3}(1-x)^{1.5} + K = F(x)$$

נחזור ל W :

$$W = \int_{-1}^{1} |x| \cdot \sqrt{1-x}\,dx = -\int_{-1}^{0} x \cdot \sqrt{1-x}\,dx + \int_{0}^{1} x \cdot \sqrt{1-x}\,dx$$

$$= -\{F(0) - F(-1)\} + \{F(1) - F(0)\} = F(1) + F(-1) - 2F(0)$$

$$= \tfrac{2}{5}2^{2.5} - \tfrac{2}{3}2^{1.5} + \tfrac{8}{15}$$

סיימנו.

שאלה 8

(12 נקי) א. הוכיחו כי לכל קבוע c המקיים $|c| < 1$ הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{c^n + 2}$ הוא טור מתכנס.

(12 נקי) ב. ♦ חשבו את האינטגרל הלא מסוים $\int e^{\sin x} \sin(2x)\,dx$. פרטו את כל החישוב.

♦ מה ערך האינטגרל בקטע סגור שאורכו 2π ? נמקו היטב.

פתרון שאלה 8א

נבחן **התכנסות בהחלט** כי זהו <u>**לא**</u> טור חיובי.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{c^n}{c^n + 2} \right| \underbrace{=}_{((A))} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c^n|}{|c^n + 2|} \underbrace{=}_{((B))} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c|^n}{c^n + 2} \underbrace{\leq}_{((C))} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c|^n}{1} \underbrace{=}_{((D))} \sum_{n=0}^{\infty} |c|^n$$

(A) ערך מוחלט של מנה היא מנת הערכים המוחלטים לפי כללי הערך המוחלט.

(B) לפי הנתון על c , הרי -1<c<1 . לאור זאת גם חזקת n מקיימת זאת, כלומר -1<c^n<1 .

לאור זאת אם נוסיף 2 נקבל ביטוי שהוא תמיד חיובי . לכן השמטנו את הערך המוחלט.

(C) אם נרשום -1 במקום c^n הרי שרשמנו משהו שהוא קטן יותר ולכן הגדלנו את כל השבר.

וכאשר רשמנו זאת והוספנו 2 קיבלנו את הקבוע 1.

(D) טריויאלי.

סיכום חלקי: $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{c^n}{c^n + 2} \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |c|^n$.

הטור הגדול באגף ימין הוא טור מתכנס כטור גיאומטרי עם $q = |c|$ ו- $0 \le q < 1$.

לכן הטור הגיאומטרי מתכנס ולפי מבחן ההשוואה הטור מצד שמאל מתכנס.

אם כך הוכחנו התכנסות בהחלט ובפרט הטור הנחקר מתכנס.

סיימנו.

הערה $\frac{1}{1-|c|} = \sum_{n=0}^{\infty} |c|^n \ge \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{c^n}{c^n + 2} \right|$ ואפילו הצלחנו למצוא חסם לסכום טור הערכים המוחלטים.

<u>פתרון שאלה 8ב</u>

חישוב הקדומה. תחילה הצבה.

$$\int e^{\sin x} \sin(2x)dx = 2\int e^{\sin x} \sin(x)\cos(x)dx \underset{\boxed{\substack{y=\sin x \\ dy=\cos x dx}}}{\underbrace{=}} 2\int e^y \cdot y dy$$

נמשיך עם אינטגרציה בחלקים.

$$2 \cdot \int \underset{v}{\underline{y}} \underset{u'}{\underline{e^y}} dy = 2 \cdot y \cdot e^y - 2 \cdot \int 1 \cdot e^y dy = 2ye^y - 2e^y + K = 2e^y(y-1) + K$$

נחזור למשתנה המקורי איקס.

$$\begin{aligned} \int e^{\sin x} \sin(2x)dx &= 2\int e^y \cdot y dy \\ &= 2e^y(y-1) + K \\ &= 2e^{\sin x}(\sin x - 1) + K \end{aligned}$$

סיימנו.

ואם נרצה לחשב $\int_a^{a+2\pi} e^{\sin x} \sin(2x)dx = \left[2e^{\sin x}(\sin x - 1)\right]_a^{a+2\pi} = 0$

מכיוון שמתקיים $\sin(a + 2\pi) = \sin a$

סיימנו.

<u>סוף קובץ</u>