דף סיכום בחינה

מזהה סטודנט: [redacted]

מזהה קורס: 20406   שם קורס: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

מספר שאלה	ניקוד מירבי	ציון
1	7.00	7.00
2	7.00	7.00
3	7.00	7.00
4	7.00	7.00
5	24.00	24.00
6	24.00	24.00
7	24.00	24.00
8	24.00	

ציון בחינה סופי : 100.00

הבחינה הבדוקה בעמודים הבאים

הדבק כאן את מדבקת הנבחן [redacted]

מלא את הפרטים בכל המקומות הדרושים

מספר תעודת זהות (9 ספרות)	מספר הקורס	מועד
[redacted]	20406	97

לשימוש הבודק

שאלות סגורות:

שאלה 1:

1) נכון. $f(x)$ רציף ב $(-1,1)$ ו- $-\frac{1}{3} \le \frac{\cos x}{3} \le \frac{1}{3}$
(ובפרט) $-1 < \frac{\cos x}{3} < 1$ ולכן
ההרכבה $f(\frac{\cos x}{3})$ רציפה לכל x.

שאלה 2:

$f(x)$ רציף ב $(-1,1)$ ו $x=0$ בקטע ולכן $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{6}$
שווה ל- $\frac{f(0)}{6} = \frac{6}{6} = 1$. טענה נכונה.

תשובה סופית: 2

שאלה 2: $\int_2^4 (x-1)dx = 4$, $\underbrace{\int_3^4 (x-3)dx}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_2^3 (3-x)dx}_{\frac{1}{2}} = 4+1 = 5$

תשובה סופית: 2

שאלה 3:

1) פולינום ממעלה רביעית ולכן $p(x)\to\infty \Leftarrow x\to\pm\infty$. מכאן ש
מינימום מוחלט קיים, (כי מקדם של x^4 חיובי). טענה נכונה.

2) $p(x)$ הינו "פרבולה" ולכן היא יורדת ואז עולה. מכאן
טענה שגויה.

3) $p'(x) = -4 + 4000x^3 \Rightarrow 4 = 4000x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10}$
מכאן $x=\frac{1}{10}$ מינ מוחלט קיצון
יחיד של $p(\frac{1}{10}) = \frac{7}{10}$ ו $p(x)$ פרבולה ולכן נקודת $p(x)$
תמיד חיובית ואין שורשים.

תשובה סופית: 1

126642

שאלה 4:

$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ מתכנס

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)A_n}{n^2+1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_n + A_n}{n^2+1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot A_n + A_n}{n}$

$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cancel{n}A_n}{\cancel{n}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ כי גדול מתכנס, טורים חיוביים לכן ממבחן ההשוואה הטור:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)A_n}{n^2+1}$ מתכנס.

טענה 1 נכונה

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n!) A_n \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \cos(n!) A_n\right|$

$\le \sum_{n=1}^{\infty} 1\cdot A_n \Rightarrow$ מתכנס כי נתון

לכן $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n!) A_n$ מתכנס בהחלט! ובפרט מתכנס.

טענה נכונה.

תשובה סופית: 5

חשוב! לבדוק את השאלות:

7,6,5

לשימוש הבודק

שאלה 5:

נתון: $f(x)=xe^{-x}-x^2=\frac{x}{e^x}-x^2$

א.1
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^x}-x^2\right)=$$

לפי אריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}-\lim_{x\to\infty}x^2=$$

$$\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}-\infty.$$ נבצע לופיטל על הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\ \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}[x]}{\frac{d}{dx}[e^x]}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}=0$$

• מכאן הגבול הוא:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}-\lim_{x\to\infty}x^2=0-\infty=\boxed{-\infty}$$

~~נחשב את הגבול השני.~~

$$\cancel{\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}-x^2=}$$

~~לפי אריתמטיקה של גבולות:~~

$$\cancel{\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}-\lim_{x\to-\infty}x^2=\text{"}\frac{-\infty}{0}\text{"}-\infty=?}$$

נחשב את הגבול השני:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{x\cdot e^{-x}}_{(*)}-x^2=\underbrace{-\infty\cdot\infty}_{-\infty}-\infty=\boxed{-\infty}$$

(*) $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=\infty$ אך $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ ולכן $-\infty\cdot\infty=-\infty$.

126642

2). הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x מאריתמטיקה a
רציפות: x^n, e^{-x}. לפי גבול בפרק 4 לפונקציה רציפה ששואפת
ל $-\infty$ עבור $x\to\pm\infty$ יש MAX מוחלט בקטע $(-\infty,\infty)$.

3) כדי שיהיה לפונקציה MiN מוחלט ~~דרוך~~ בקטע $(-\infty,\infty)$
צריך שיהיה $x_0\in(-\infty,\infty)$ כך ש $f(x)\ge f(x_0)$
לכל $x\ne x_0$ אך $f(x)$ שואפת ל $-\infty$ עבור $x\to\pm\infty$
ולכן תמיד יהיה $c\in(-\infty,\infty)$ כך ש
$f(x_0)>f(c)$ לכל x_0 שנבחר $\Leftarrow$ ולכן
ל $f(x)$ אין מינימום מוחלט בקטע $(-\infty,\infty)$.

א. $f(x)$ גזירה לכל x מאריתמטיקה a גזירות:
e^{-x}, x^n. נגזור את $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}-x^2\right]=x\frac{d}{dx}e^{-x}+e^{-x}\frac{d}{dx}x-\frac{d}{dx}x^2$$

$$=-xe^{-x}+e^{-x}\cdot 1-2x=e^{-x}(1-x)-2x$$

היות ו $f(x)$ גזירה לכל x ונקיים לה
נקודת MAX (x_0,y_0) בהכרח מתקיים $f'(x_0)=0$.

נציב $x=0$ ב $f'(x)$:

$$f'(0)=\underbrace{e^{-0}}_{1}\underbrace{(1-0)-2\cdot 0}_{0}=1\cdot 1=1\neq 0$$

מכאן נקודה $x=0$ היא בהכרח לא מקסימום (מוחלט) ל a $f(x)$.

נציב ב: $f(0)$:

$$f(0)=0\cdot e^{-0}-0^2=0$$

סעיף ב בעמוד הבא

4

~~אך רגע $f(0)=0$ ו- $x=0$ הוא לא המקסימום המוחלט בקטע $(-\infty,\infty)$~~
~~לכן בהכרח קיים $x_0\in(-\infty,\infty)$ כך ש-~~
~~(x_0,y_0) היא נקודת מקסימום מוחלט ב-$(-\infty,\infty)$~~
~~ולכן היא מקסימום~~
~~$f \leq f(x_0)$~~

~~נבדוק $x=\frac{1}{2}$ בנגזרת הנקראת:~~
~~$f'(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-\frac{1}{2}) - 2\cdot\frac{1}{2} \approx 0.6\cdot 0.5-1$~~

ב. נשים ♡ x^2e ו- xe^{-x} קטנים ככל $x\to 0^-$ ש
לכן נחפש x_0 חיובי שלשהו (קרוב ל-0 ככל
האפשר) כך ש- $y_0 = x_0e^{-x} - x_0^2 > 0$ (*)

נציב לפונקציה $x=\frac{1}{2}$:

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{4} \approx \frac{1}{3.3} - \frac{1}{4}$$

$$\approx 0.053 > 0$$

אז $x_0=\frac{1}{2}$ (כלומר $x=\frac{1}{2}$ הוא MAX מוחלט של $f(x)$
ב-$(-\infty,\infty)$) אז מצאנו (x_0,y_0) MAX
מוחלט במקרה ש- $x_0>0$ ו- $y_0>0$. אז $x=\frac{1}{2}$ הוא
לא המקסימום המוחלט של $f(x)$ אז בהכרח
קיים x_0 בקטע $(-\infty,\infty)$ כך ש-

$$0 < 0.053 \approx f(\tfrac{1}{2}) \leq f(x_0)$$

כאשר $x=x_0$ הוא MAX מוחלט. מכאן בהכרח
המקסימום המוחלט של $f(x)$ הוא חיובי ומקיים:
$x_0>0$ ו- $y_0>0$ (*): אם $x<0$ אז $f(x)$
בהכרח שלילי כי $-x^2$ שלילי ו- $e^{-x}\cdot x-1$ שלילי מ-x
כי e^{-x} חיובי לכן $x\cdot x^2$ שואף ל-0 מהר יותר מ $\frac{x}{e^x}$
לכן נחפש x קרוב ל-0. סיימנו.

✓ 5

126642

לשימוש הבודק

שאלה 6: נתון: $\varphi(x)$ רציפה ב-$[0,1]$ ומקיימת $\varphi(0)=1$ ו- $\varphi(1)=0$.

א. נגדיר פונקציית עזר: $f(x)=\varphi(2x)-3x$

אם נראה של-$f(x)$ יש שורש $x=c$ בקטע הסגור $[0,1]$ אז נוכל להסיק שקיים $x=c$ שעבורו:

$$f(c)=\varphi(2c)-3c=0$$

ובפרט, $\varphi(2c)=3c$ שזו הטענה שאני צריך להוכיח.

• $f(x)$ רציפה לכל $x\in[0,1]$, $\varphi(x)$ רציפה בקטע הנתון ו-x רציפה לכל x לכן ההרכבה $\varphi(2x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ וכמו כן גם ההפרש $\varphi(2x)-3x$.

נציב $f(0)$:

$$f(0)=\varphi(2\cdot 0)-3\cdot 0=\varphi(0)-0=1>0$$

נציב $f(\frac{1}{2})$:

$$f(\tfrac{1}{2})=\varphi(2\cdot\tfrac{1}{2})-3\cdot\tfrac{1}{2}=\varphi(1)-\tfrac{3}{2}=0-\tfrac{3}{2}=-\tfrac{3}{2}<0$$

בקטע הסגור $[0,\frac{1}{2}]$ הפונקציה $f(x)$ מחליפה סימן בקצוות הקטע הסגור, לכן ממשפט ערך הביניים ל-$f(x)$ יש שורש $x=c$ בקטע הפתוח $(0,\frac{1}{2})$. היות והקטע הפתוח $(0,\frac{1}{2})$ נמצא בתוך הקטע $[0,1]$ בהכרח ל-$f(x)$ יש שורש בקטע $\Leftarrow$ כלומר קיים $x=c$ שעבורו מתקיים $\varphi(2c)=3c$.

כ"מ"ל.

לשימוש הבודק

ב. נכפיל בצמוד:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\sqrt{1+x}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\sqrt{1-x}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}-1+x}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\sqrt{1-x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-(1+x)(1-x)}{1-x}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}+\underbrace{1-1}_{0}-\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1-(1+x)(1-x)}{\frac{1-\left(\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}\right)^2}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}}{1-x}\cdot\cancel{\frac{1-(1+x)(1-x)}{1-(1+x)(1-x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}}{1-x}=\frac{\sqrt{1-0}\cdot\sqrt{1+0}}{1-0}=\frac{1\cdot 1}{1}=\boxed{1}$$

✓

126642

נא לא לכתוב בשוליים

לשימוש הבודק

שאלה ב:

א.1. לפי כלל השרשרת:

$$\frac{d}{dx}F(\sin x) = \cancel{\frac{d}{dx}}$$

$$\boxed{f(\sin x)\cdot\cos(x)}$$

ב.

נבצע הצבה: $u=\sin x$, $du=\cos x\,dx$

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx =$$

$u\to\sin(0)\to 0,\ u\to\sin(\pi)\to 0$

$$\int_0^0\frac{du}{1+u^2} =$$

(בפועל אין צורך להמשיך כי זה אינטגרל מאפס $\int_a^a=0$. (*))

$$\arctan(u)\Big]_0^0 = 0-0=0$$

הגענו למסקנה לאינטגרל שתמיד שווה ל-0 ללא קשר לאינטגרנד עצמו. השלמנו את החישוב כדי להראות שהאינטגרל אכן שווה ל-0.

(*) לכל $f(x)$ אינטגרבילי מתקיים:

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a)-F(a)=0$$

לשימוש הבודק

ג. נתון: $p > \frac{1}{2}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n \cdot n^p}{n^{2p}}$

נראה ש- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n^p}{n^{2p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{2p}} + \frac{(-1)^n n^p}{n^{2p}}\right)$

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ הוא טור הרמוני מתכנס עבור כל $p>1$. במקרה זה ~~נתון~~ נדרוש $2p>1$, $\Rightarrow \underline{\underline{p>\frac{1}{2}}}$

נתון. מכאן הטור מתכנס כטור הרמוני, ע $2p$.

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^p}{n^{2p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ (לפי חוקי שברים)

~~האם יורד ש~~

מתקיים: $\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{n}$, כלומר $a_n > a_{n+1}$

כלומר הטור יורד,

בנוסף האיבר הכללי a_n שואף ל0 כש $n \to \infty$:

$n \to \infty: \quad \frac{1}{n} \to \frac{1}{\infty} = 0$

לכן זה הוא טור לייבניץ (לפי מבחן לייבניץ) ולכן הוא מתכנס.

מכאן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n^p}{n^{2p}}$ הוא סכום של 2 טורים מתכנסים ולכן גם הוא מתכנס (משפט 11.9.3).

126642

לשימוש הבודק

שאלה 8:

א. נתון: $h(x)=|1-x|\cdot\sin(\pi x)$ בקטע הפתוח $(0,\infty)$

ניגש למשימה השנייה:

כאשר $x>1$ נקבל $|1-x|=-(1-x)=x-1$ ולכן;

עבור $x>1$:

$$h(x)=(x-1)\cdot\sin(\pi x)$$

מתכונות פונקציית הסינוס נקבל ש-$\sin x$ שווה ל-0 רק עבור $x=k\cdot\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ (k שלם).

• מכאן $\sin(\pi x)$ מתאפס עבור כל x שלם ולכן $\sin(\pi x)$ מתאפס אינסוף פעמים בקטע $(1,\infty)$.
כתוצאה מכך $h(x)=(x-1)\sin(\pi x)$ גם כן מתאפסת אינסוף פעמים (כל פעם ש~~sinx~~ $\sin(\pi x)$ מתאפס) $h(x)$ מתאפסת לכן ל-$h(x)$ יש אינסוף שורשים.

• $h(x)$ רציפה וגזירה לכל x בקטע $(1,\infty)$ מאריתמטיקה של אלמנטריות והרכבה של גזירות: $\sin x$ גזיר לכל x ו-πx גזיר לכל x ולכן $\sin(\pi x)$ גזיר לכל x.

• לפי משפט רול בין כל 2 שורשים של $h(x)$ הנגזרת של $h(x)$ חייבת להתאפס (בנקודות גזירות של $h(x)$)
כלומר אם x_1 ו-x_2 הם שורשים של $h(x)$ אז בין כל x_1 ו-x_2 מתקיים $x_0\in(x_1,x_2)$ שעבורו $h'(x_0)=0$ אך יש ל-$h(x)$ אינסוף זוגות של שורשים x_1 ו-x_2 ולכן $h'(x)$ מתאפסת אינסוף פעמים.

סיימתי.

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin(\frac{\pi}{x})}{x^3}dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{\sin(\frac{\pi}{x})dx}{x^3}$

נבצע הצבה

$u=\frac{\pi}{x}$

$du = \frac{-\pi}{x^2}dx$

$\Downarrow$

$dx = \frac{-x^2}{\pi}du, \quad \frac{\pi}{u}=x$

$= \lim_{a\to\infty}\int_\pi^{\pi/a} \frac{\sin(u)}{\cancel{x^3}} \cdot \frac{-\cancel{x^2}}{\pi} du \qquad x = \frac{\pi}{u}$

$= \lim_{a\to\infty}\int_\pi^{\pi/a} -\frac{\sin(u)}{\frac{\pi}{u}\cdot\pi}du = \lim_{a\to\infty}\int_{\pi/a}^{\pi}\frac{1}{\pi^2}u\cdot\sin u\, du$

$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\pi^2}\cdot\int_{\pi/a}^{\pi} u\cdot\sin(u)\,du$

א׳ בחלקים: $\begin{cases} t=u, & t'=1 \\ s'=\sin(u), & s=-\cos(u)\end{cases}$

$\cancel{= \lim_{a\to\infty}\frac{1}{\pi^2}[}$

$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\pi^2}\left[-u\cdot\cos(u)\Big|_{\frac{\pi}{a}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{a}}^{\pi} 1\cdot -\cos(u)\,du\right] =$

$\frac{1}{\pi^2}\cdot\lim_{a\to\infty}\left[-\pi\cdot\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + \frac{\pi}{a}\cdot\cos(\frac{\pi}{a}) + \sin(u)\Big|_{\frac{\pi}{a}}^{\pi}\right]$

$\cancel{= \frac{1}{\pi^2}\left[\pi + \frac{\pi}{a}\cdot\cos(\frac{\pi}{a}) + \underbrace{\sin(\pi)}_{0} - \sin(\frac{\pi}{a})\right]}$

~~=~~ המשך חישוב בעמוד הבא...

לשימוש הבודק

126642

לשימוש הבודק

$$\frac{1}{\pi^2}\cdot\lim_{a\to\infty}\left[\pi+\frac{\pi}{a}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{a}\right)+\underbrace{\sin(\pi)}_{0}-\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)\right]$$

$$\boxed{a\to\infty:\frac{\pi}{a}\to 0}$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\pi+\underbrace{0\cdot\cos(0)}_{0}-\underbrace{\sin(0)}_{0}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\cdot\pi=\boxed{\frac{1}{\pi}}$$

לשימוש הבודק

126642

לשימוש הבודק

לשימוש הבודק

126642

לשימוש הבודק

גליון תשובות לשאלות רב-ברירתיות

הקף במעגל את התשובה שבחרת (לכל שאלה יש רק תשובה אחת נכונה).
אם תרצה לבטל תשובה שבחרת, סמן עליה X.
דוגמה לתשובה שבחרת: א ב ג ד ה ו ז ח ט
דוגמה לתשובה שבטלת: א ב ג ד ה ~~ו~~ ז ח ט

שאלה	תשובה
1	א ב ג ד ה ו ז ח ט
2	א ב ג ד ה ו ז ח ט
3	א ב ג ד ה ו ז ח ט
4	א ב ג ד ה ו ז ח ט
5	א ב ג ד ה ו ז ח ט
6	א ב ג ד ה ו ז ח ט
7	א ב ג ד ה ו ז ח ט
8	א ב ג ד ה ו ז ח ט
9	א ב ג ד ה ו ז ח ט
10	א ב ג ד ה ו ז ח ט
11	א ב ג ד ה ו ז ח ט
12	א ב ג ד ה ו ז ח ט
13	א ב ג ד ה ו ז ח ט
14	א ב ג ד ה ו ז ח ט
15	א ב ג ד ה ו ז ח ט
16	א ב ג ד ה ו ז ח ט
17	א ב ג ד ה ו ז ח ט
18	א ב ג ד ה ו ז ח ט
19	א ב ג ד ה ו ז ח ט
20	א ב ג ד ה ו ז ח ט

שאלה	תשובה
21	א ב ג ד ה ו ז ח ט
22	א ב ג ד ה ו ז ח ט
23	א ב ג ד ה ו ז ח ט
24	א ב ג ד ה ו ז ח ט
25	א ב ג ד ה ו ז ח ט
26	א ב ג ד ה ו ז ח ט
27	א ב ג ד ה ו ז ח ט
28	א ב ג ד ה ו ז ח ט
29	א ב ג ד ה ו ז ח ט
30	א ב ג ד ה ו ז ח ט
31	א ב ג ד ה ו ז ח ט
32	א ב ג ד ה ו ז ח ט
33	א ב ג ד ה ו ז ח ט
34	א ב ג ד ה ו ז ח ט
35	א ב ג ד ה ו ז ח ט
36	א ב ג ד ה ו ז ח ט
37	א ב ג ד ה ו ז ח ט
38	א ב ג ד ה ו ז ח ט
39	א ב ג ד ה ו ז ח ט
40	א ב ג ד ה ו ז ח ט

לשימוש פנימי

מספר התשובות הנכונות: ______ ציון: ______

שם הבודק: ______

126642