קורס:

חדו"א א (20406) סמסטר 2024ב

תאריך הבחינה. 26.6.2024

מועד הבחינה - מועד 81 . מועד א1 .

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים - חלק א וחלק ב.

עליכם לענות על: שאלות 1-4 בחלק א וכן לענות על 3 שאלות מבין 5-8 בחלק ב.

כל חומר עזר <u>מותר</u> בשימוש

פתרון הבחינה

כתב: חזי נוימן

חלק ראשון - שאלות סגורות 1-4 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{7}$ נקודות

סמנו מהי התשובה הנכונה בעמוד האחרון של המחברת במקום המיועד לכך . לחילופין , ניתן לרשום את התשובות בעמוד הראשון של המחברת בצורה ברורה. **לא נדרש נימוק - רק סימון במחברת מהי התשובה הנכונה.** אם אינכם יודעים את התשובה **כדאי לנחש**. אנו סופרים רק תשובות נכונות ולא מורידים ניקוד על טעויות.

שאלה 1 – שאלה סגורה

עיינו היטב בפונקציות $f\,,g$. אל תמהרו. a,b,c,d קבועים. **מי מהטענות 1,2 נכונה ?**

$$f(x)=\begin{cases} a & x\ge 0 \\ b & x<0 \end{cases} \qquad\qquad g(x)=\begin{cases} c & x>0 \\ d & x\le 0 \end{cases}$$

1. **נתון** כי פונקציית הסכום $f(x)+g(x)$ רציפה בנקודה $x=0$. מהנתון נובע כי כל ארבעת הקבועים **חייבים** להיות שווים אחד לשני.
2. **נתון** כי $\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x))=0$. מהנתון נובע כי לפחות אחד מבין הגבולות הבאים $\lim_{x\to 0} f(x)\ ;\ \lim_{x\to 0} g(x)$ **קיים וחייב להיות שווה ל אפס**.

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1   ב. 2   ג. 1,2   ד. הטענות לא נכונות.

פתרון 1 - ד

נרשום את נוסח הסכום בצורה מפורשת

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} a+c & x>0 \\ a+d & x=0 \\ b+d & x<0 \end{cases}$$

מרציפות בנקודה 0 נסיק כי הגבול מימין שווה לגבול משמאל ושווה לערך הנקודתי. נקבל כי כל שלושת הקבועים שווים. $a+c=a+d=b+d$. מכאן נובע כי a=b וגם c=d אבל לא נובע כי כל הרביעיה שווים אחד לשני. למשל ניקח a=b=0 וניקח c=d=1 . הרביעיה לא שווה אבל הסכום רציף כי הוא פשוט סכום של שתי פונקציות רציפות. לכן **טענה 1 לא נכונה**.
הבחירה a=0,b=1 ו- c=1,d=0 מראה כי גבול המכפלה הוא 0 כי פונקציית המכפלה היא פשוט פונקציית האפס, אבל כל אחד מהגבולות לא קיים. לכן **טענה 2 לא נכונה**.

שאלה 2 – שאלה סגורה

מה השיפוע של גרף הפונקציה $u(x)=0.25\pi-\arctan(\frac{b}{x})$ בנקודה $(1,0)$.

א. $\pi/4$ ב. 0 ג. 0.5 ד. -1

פתרון 2 - ג

נמצא כי b=1 מנתוני השאלה. נציב ונגזור. סיימנו.

שאלה 3 – שאלה סגורה

האינטגרל המוכלל **מתכנס** : $\int_1^{\infty} \frac{(x^2+10)^3 \cdot (3x+2)}{(1+x+x^3)\cdot x^{2n}}dx$. מה התנאי על n שיבטיח זאת ?

א. $n>2.5$ ב. $n>1$ ג. $2<n<3.5$ ד. $n>2$

פתרון 3 - א

בפולינום כאשר איקס מאוד גדול החזקה הגבוהה היא דומיננטית. לאור זאת ניתן לרשום ללא נימוקים מייגעים :

$$\frac{(x^2+10)^3 \cdot (3x+2)}{(1+x+x^3)\cdot x^{2n}} \approx \frac{(x^2)^3 \cdot x}{x^3 \cdot x^{2n}} = \frac{x^7}{x^{2n+3}} = \frac{1}{x^{2n-4}}$$

נדרוש 2n-4>1 ונקבל n>2.5 .

שאלה 4 – שאלה סגורה

מי מבין הטענות הבאות היא טענה נכונה ?

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ הוא טור מתכנס בהחלט אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (3+\sin n)b_n$ הוא טור מתכנס בהחלט.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ הוא טור מתכנס אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3+\sin n+b_n\right)$ הוא טור מתכנס.

כל הטענות הנכונות?

א. 1 ב. 2 ג. $1,2$ ד. שתי הטענות לא נכונות

פתרון 4 - א

טענה 1 נכונה.

הוכחה : $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(3+\sin n)b_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |3+\sin n|\cdot|b_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot|b_n| < \infty$

טענה 2 לא נכונה.

נציג דוגמא נגדית. הסבירו לעצמכם מה רשמנו בשורה הבאה.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\sin n+b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\sin n+\frac{1}{n^2}\right) \ge \sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right) \ge \sum_{n=1}^{\infty}(2) = \infty$$

המשך בעמודים הבאים...

חלק שני - שאלות 5-8 . משקל שאלה הוא $\boxed{24}$ נקודות. השיבו על 3 שאלות מלאות בחלק זה

שאלה 5

נגדיר $P(x)=4x+2x^2+(x-1)^4$. פולינום זה מלווה את כל סעיפי השאלה.

(14 נקי) א. הוכיחו כי $(0,1)$ היא **נקודת המינימום המוחלטת** של P ב- $(-\infty,\infty)$.

(10 נקי) ב. הוכיחו כי $\frac{1}{17}\le\int_1^2\frac{dx}{P(x)}\le\frac{1}{6}$.

פתרון 5, סעיף א

$$P(x)=4x+2x^2+(x-1)^4 \qquad P'(x)=4\cdot[1+x+(x-1)^3] \qquad P''(x)=4\cdot[1+3\cdot(x-1)^2]$$

הנגזרת מתאפסת בנקודה x=0 . פשוט מציבים. לכן הנקודה חשודה כקיצון מקומי. אם הייתה עוד נקודת קיצון מקומי אזי הנגזרת הייתה מתאפסת בה. אבל אז לפי רול, הנגזרת השנייה הייתה צריכה להתאפס ביניהן. סתירה כי הנגזרת השנייה חיובית לכל x. לכן אין עוד חשודות כקיצון.

הנקודה x=0 היא קיצון מקומי מהסוג מינימום מקומי כי הנגזרת השנייה חיובית בה.

הנקודה x=0 היא מינימום מקומי יחיד. לכן היא מינימום מוחלט. סיימנו.

פתרון 5, סעיף ב

בקטע הסגור [1,2] הפולינום P עולה כי קטע זה אחרי נקודת המינימום.

לאור זאת: $1\le x\le 2 \quad\Rightarrow\quad 6\le P(x)\le 17 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{17}\le\frac{1}{P(x)}\le\frac{1}{6}$

לפי משפט 5.6.7 ניתן לקבוע $\int_1^2\frac{1}{17}dx\le\int_1^2\frac{1}{P(x)}dx\le\int_1^2\frac{1}{6}dx$

מחשבים אינטגרלים מצד ימין או מצד שמאל ומקבל את הנדרש. זכרו $\int_a^b kdx=kx\Big|_a^b=k(a-b)$.

שאלה 6

(14 נקי) א. 1) הוכיחו כי הפונקציה $g(x)=|x|\cdot(1-\cos x)$ גזירה לכל x .

2) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=|x|+(1-\cos x)$ לא גזירה בנקודה $x=0$.

(10 נקי) ב. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot[1-\cos(\frac{1}{x})]$.

פתרון 6, סעיף 1א

עבור x>0 או x<0 הפונקציה g היא הפולינום x כפול הפונקציה הגזירה 1-cosx . לכן מכפלה זאת גזירה כמכפלת גזירות.

נותר לברר גזירות בנקודה x=0 . הגזירות בנקודה זאת אינה ברורה מראש כי הפונקציה היא מכפלה של אי גזירה בפונקציה גזירה.

תוכלו לרשום את הפונקציה כהטלאה ולהיעזר במשפט עמוד 180 .   סיימנו.

פתרון 6, סעיף א2

נניח בשלילה שהסכום f גזיר בנקודה x=0 . אם כך הפונקציה $f(x)-(1-\cos x)$ גזירה כהפרש פונקציות גזירות בנקודה x=0 . אבל הפרש זה הוא הפונקציה |X| וכידוע פונקציה זאת לא גזירה בנקודה x=0 . סתירה. הנחת השלילה נופלת.   סיימנו.

{דרך נוספת היא לרשום את הפונקציה f כהטלאה ולהיעזר במשפט עמוד 180 }

שאלה 7

(10 נק') א. מצאו את הפונקציה הקדומה של $x^3\cdot e^{-x^2}$ העוברת בנקודה $(0,-1)$.

פרטו את כל חישובי האינטגרלים הנדרשים.

(14 נק') ב. 1) הוכיחו כי למשוואה $\tan x=\frac{1}{x}$ יש שורש אחד ויחיד בקטע הפתוח $(0,\frac{\pi}{2})$.

2) מדוע ניתן להסיק ללא חישוב נוסף כי בקטע הפתוח $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ יש בדיוק שני שורשים.

שימו לב :

בשני הסעיפים 1+2 אסור להשתמש במחשבון כיס לצורך חישוב tan , sin , cos .

היעזרו רק בערכים מוכרים של פונקציות אלה בזוויות ידועות.

פתרון 7, סעיף א

חישוב נחמד עם הצבה ואינטגרציה בחלקים.

$$\boxed{\int x^3\cdot e^{-x^2}dx}=\int x^2\cdot e^{-x^2}\cdot x\cdot dx\underbrace{\overset{\boxed{\substack{y=x^2\\ dy=2{\color{red}xdx}}}}{=}}_{\text{substitution}}\int y\cdot e^{-y}\cdot{\color{red}\frac{dy}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\int y\cdot e^{-y}dy$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\underbrace{y}_{w}\cdot\underbrace{e^{-y}}_{u'}dy=\frac{1}{2}\cdot\left\{\underbrace{y}_{w}\cdot\underbrace{-e^{-y}}_{u}-\int\underbrace{1}_{w'}\cdot\underbrace{-e^{-y}}_{u}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{-y\cdot e^{-y}+\int e^{-y}dy\right\}=\frac{1}{2}\cdot\left\{-y\cdot e^{-y}-e^{-y}+K\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-y}(y+1)+C=\boxed{C-0.5\cdot e^{-x^2}(x^2+1)}$$

פתרון 7, סעיף ב1

נחליף את tan נכפול בהצלבה ונעביר אגפים. מתקבלת המשוואה $x\sin x-\cos x=0$

נעיין בפונקציית העזר : $g(x)=x\sin x-\cos x$.

נציב : $g(0)=-1\quad;\quad g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$

פונקציית העזר רציפה **בקטע הסגור** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (נמקו) ומחליפה סימן בקצוות הקטע. לפי משפט

ערך הביניים, יש לפונקציה **שורש בקטע הפתוח** ! כלומר יש c , $0<c<\frac{\pi}{2}$ עבורו $g(c)=0$.

כלומר $g(c)=c\sin c-\cos c=0$. מתקיים $c\sin c=\cos c$. כעת נקודת המפתח. לפי מיקומו

של c נסיק כי קוסינוס חיובי ובפרט לא מתאפס. ולכן. .....

$$c\sin c=\cos c \;\Rightarrow\; \frac{\sin c}{\cos c}=\frac{1}{c} \;\Rightarrow\; \boxed{\tan c=\frac{1}{c} \quad ; \quad 0<c<\frac{\pi}{2}}$$

נותר להוכיח כי השורש הזה c הוא שורש יחיד. נניח בשלילה שיש עוד שורש בקטע הפתוח.

לפי משפט רול הנגזרת צריכה להתאפס בין השורשים. הנגזרת היא $g'(x)=x\cos x+2\sin x$.

הנגזרת חיובית בקטע הפתוח $(0,\frac{\pi}{2})$ (נמקו) ולכן פונקציית העזר עולה ואינה יכולה לחתוך את

ציר איקס פעמיים. סיימנו.

<u>פתרון 7, סעיף ב2</u>

- מתקיים $I=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})\cup\{0\}$
- המשוואה שלנו היא: $\tan x=\frac{1}{x}$
- הנקודה x=0 אינה שורש כי המשוואה כלל לא מוגדרת בה.
- הנקודה c היא שורש **<u>יחיד</u>** של המשוואה בחלק **<u>החיובי</u>** של הקטע I . כלומר $\tan(c)=\frac{1}{c}$.
- הנקודה **c-** היא שורש של המשוואה.

  הוכחה: $\tan(-c)=\frac{1}{(-c)}\Rightarrow-\tan(c)=-\frac{1}{(c)}\Rightarrow\tan(c)=\frac{1}{c}$
- עד כאן הוכחנו קיום של שני שורשים אחד בחלק החיובי והשני בחלק השלילי .
- נותר להוכיח למה אין עוד שורשים !
- בחלק החיובי הוכחנו קודם שיש שורש יחיד.
- בחלק השלילי אם היה עוד שורש אזי הנקודה הסימטרית בחלק החיובי היתה שורש. ולכן היינו מקבלים שני שורשים בחלק החיובי.
- סתירה.

סיימנו.

דרך נוספת אולי אפילו יותר קלה: אם $T(x)=\tan x-\frac{1}{x}$ אזי בכל קטע שבו הפונקציה מוגדרת

מתקיים $T'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{x^2}$. כלומר הפונקציה עולה. לכן אם יש שורש (ויש) הוא יחיד.

שאלה 8

(12 נקי) א.

1) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} = 1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^4}+\frac{1}{e^9}+\cdots$ הוא טור מתכנס.

2) מצאו חסם חיובי לסכומו, כלומר מצאו C חיובי כך ש- $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} \le C$

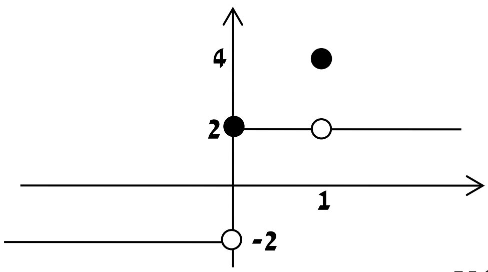
(רשמנו מספר איברים בטור על מנת שלא יהיה ספק בהבנת הנוסחא של האיבר הכללי)

(12 נקי) ב. הפונקציה $U(x)$ מוגדרת לכל איקס.

הגרף של $U(x)$ באיור שלפניכם.

חשבו כל אחד מהגבולות הבאים.

אם הגבול לא קיים הסבירו זאת.



$$\lim_{x\to \mathbf{1}} \frac{U(x)\cdot\sin(\pi x)}{x-1} \quad ; \quad \lim_{x\to \mathbf{0}} \frac{U(x)\cdot\sin(\pi x)}{x-1}$$

פתרון 8, סעיף א

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} = 1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^4}+\frac{1}{e^9}+\cdots$$

$$\le 1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e^4}+\frac{1}{e^5}+\frac{1}{e^6}+\frac{1}{e^7}+\frac{1}{e^8}+\frac{1}{e^9}\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \boxed{\frac{e}{e-1}}$$

הוכחנו התכנסות כי הטור שלנו קטן מטור גיאומטרי מתכנס וגם מצאנו חסם לסכום.

סיימנו.

פתרון 8, סעיף ב

$$\lim_{x\to \mathbf{0}} \frac{U(x)\cdot\sin(\pi x)}{x-1} = \begin{cases} \lim_{x\to \mathbf{0}^+} \frac{U(x)\cdot\sin(\pi x)}{x-1} = \frac{2\cdot\sin(\pi\cdot 0)}{0-1} = \frac{2\cdot 0}{-1} = 0 \\ \lim_{x\to \mathbf{0}^-} \frac{U(x)\cdot\sin(\pi x)}{x-1} = \frac{-2\cdot\sin(\pi\cdot 0)}{0-1} = \frac{-2\cdot 0}{-1} = 0 \end{cases}$$

ובכן הגבול קיים וערכו 0.

שימו לב כי נאלצנו לחשב גבול מימין ומשמאל כי לפונקציה U **אין גבול** כאשר איקס שואף ל 0.

האיור מראה כי יש לה קפיצה בנקודה 0.

$$\lim_{x\to 1}\frac{U(x)\cdot\sin(\pi x)}{x-1}=\underbrace{\lim_{x\to 1}U(x)}_{\boxed{\text{use picture}}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}}_{\boxed{\text{use Lopital}}}=2\cdot(-\pi)=-2\pi$$

ובכן הגבול קיים וערכו -2π .

שימו לב כי לפונקציה **U** **יש גבול** כאשר איקס שואף ל 1 . האיור מראה כי הגבול הוא 2 . לכן יכולנו לפצל גבול של מכפלה למכפלת הגבולות כי כל גבול קיים.

שימו לב לטעות הקלאסית הבאה....

שלב ראשון :
$$\lim_{x\to 1}\frac{U(x)\cdot\sin(\pi x)}{x-1}=\frac{4\cdot\sin(0)}{1-1}=\frac{0}{0}$$

שלב שני : אהה, הגבול מהצורה של אפס חלקי אפס, יופי נעשה לופיטל.

שלב שלישי :
$$\lim_{x\to 1}\frac{U(x)\cdot\sin(\pi x)}{x-1}\underbrace{=}_{LOPITAL}\lim_{x\to 1}\frac{U'(x)\cdot\sin(\pi x)+U(x)\cdot\pi\cos(\pi x)}{1}$$
$$=\frac{0\cdot\sin(0)+4\cdot\pi\cos(0)}{1}=4\pi$$

האם תוכלו להסביר היכן במדויק הטעות או אולי אפילו הטעויות.. .

סיימנו.

<u>סוף הקובץ</u>