פתרון מקוצר למטלה 12 , קורס 20406 , סמסטר 2024ג.

כתב: חזי נוימן.

פתרון מקוצר הוא פתרון שמכיל את כל האלמנטים המתמטיים החשובים. הוא מכיל תתי שאלות שאתם נדרשים להשיב עליהן על מנת לחדד נקודות בחומר הלימוד. נכנה זאת קריאה אקטיבית.

שאלה 1 – גזירות (פרק 3)

א. הגדירו את המושג פונקציה גזירה בנקודה $x = x_0$. ציינו תנאי הכרחי לגזירות בנקודה.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $A(x) = \sqrt{x^2 + x^3}$ רציפה אך לא גזירה בנקודה $x=0$. האם $B(x) = \sqrt{x^2 + x^3} - |x|$ גזירה בנקודה $x=0$?

ג. תהי $g(x)$ גזירה בנקודה $(0,0)$. הוכיחו כי $g'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(h) - g(-h)}{2h}$.

הראו על ידי דוגמא כי אם $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(h) - g(-h)}{2h}$ קיים אין זה אומר כי הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$. [רמז: מהי הפונקציה המאוד מוכרת שאינה גזירה בנקודה $x=0$]

פתרון שאלה 1, סעיף א

תנאי הכרחי לגזירות בנקודה היא רציפות באותה נקודה. פונקציה תקרא גזירה בנקודה x_0 אם הגבול הבא קיים והוא מספר ממשי:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

פתרון שאלה 1, סעיף ב

הפונקציה רציפה בתחום הגדרתה. נמצא מהו תחום ההגדרה, נדרוש $x^2 + x^3 \geq 0$ ולאחר פישוט קל נקבל $1 + x \geq 0$ כלומר $x \geq -1$.

כעת ניתן **לנמק רציפות**.

☟ קראו בעיון. הנימוק מורכב כי הוא מבוסס על הרכבה.

אם נסמן $p(x) = x^2 + x^3$ הפונקציה רציפה לכל $x \geq -1$ כפולינום. פולינום זה מוציא ערכים אי שליליים בתחום הנ״ל כי $p(x) = x^2 + x^3 = x^2 \cdot (1 + x) \geq 0$. הפונקציה שלנו היא הרכבת $\sqrt{\ }$ על ביטוי שהוא אי שלילי. השורש היא רציפה עבור ערכים אי שליליים. לכן ההרכבה מוגדרת היטב ורציפה כהרכבת רציפות.

סיימנו.

נבחן **גזירות בנקודה x=0** .

☟ לא ניתן לגזור לפי כללי הגזירה. נסו לגזור ולהציב x=0 . האם ברו מדוע לא ניתן לפעול לפי הכללים?

ננסה לגזור לפי הגדרת הנגזרת:

$$A'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{A(0+h)}^{A(h)}-A(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+h^3}-\sqrt{0^2+0^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2\cdot(1+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot\sqrt{(1+h)}}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h\cdot\sqrt{(1+h)}}{h}=1\\[2ex] \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h\cdot\sqrt{(1+h)}}{h}=-1\end{cases}$$

הגבול המגדיר את הנגזרת לא קיים ולכן הפונקציה לא גזירה בנקודה x=0 .

הפונקציה B היא הפרש של פונקציות לא גזירות בנקודה x=0 .

נבחן את **קיום הנגזרת** לפי ההגדרה (שהרי לפי הכללים לא ניתן לפעול)

$$B'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{B(0+h)}^{B(h)}-\overbrace{B(0)}^{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+h^3}-|h|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2\cdot(1+h)}-|h|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot\sqrt{(1+h)}-|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot\{\sqrt{(1+h)}-1\}}{h}=0$$

ניתן לפצל לגבול מימין וגבול משמאל. אשאיר לכם פעולה זאת . שימו לב כי הסוגריים המסולסלות לאפס . לכן רשמנו לסיכום כי גבול זה הוא אפס.

הגבול המגדיר את הנגזרת קיים וערכו 0. הפונקציה גזירה בנקודה x=0 .

הראינו כי הפרש לא גזירות יכול להיות גזיר.

כנסו לוולפראם אלפא. הזינו את השורות הבאות בנפרד. תוכלו לראות חוד של אי גזירות מול חלקות של גזירות.

plot $\sqrt{x^2+x^3}$ -|x|

plot $\sqrt{x^2+x^3}$

פתרון שאלה 1, סעיף ג

צריך לראות כיצד ניתן לרשום את הגבול שרשמנו בעזרת הגבול המגדיר את הנגזרת.

$$g(0)=0\quad;\quad\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)+g(0)-g(-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(0)-g(-h)}{2h}$$

מימשנו רעיון ראשון והגענו לשני גבולות.

הגבול הראשון הוא בדיוק הגדרת הנגזרת בנקודה x=0 . לכן גבול זה הוא $\frac{g'(0)}{2}$.

הגבול השני מהווה אתגר. נבצע הצבה **t**=-h . אם h שואף ל אפס אזי **t** שואף לאפס.

אם כך :

$$g(0)=0 \quad ; \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)+g(0)-g(-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(0)-g(-h)}{2h}$$

$$=\frac{g'(0)}{2}+\lim_{t\to 0}\frac{g(0)-g(t)}{2(-t)}$$

$$=\frac{g'(0)}{2}+\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{2t}$$

$$=\frac{g'(0)}{2}+\frac{g'(0)}{2}=g'(0)$$

שימו לב כיצד סידרנו אלגברית את הביטוי המסומן עם חץ.

ובכן הוכחנו את הנדרש. הגבול שהצגנו גם הוא שואף לנגזרת של הפונקציה בנקודה $x=0$ אם הפונקציה גזירה בנקודה.

הדוגמא הנגדית הפשוטה היא $g(x)=|x|$. פונקציה זאת לא גזירה בנקודה 0 אבל הגבול בשאלה קיים . הנה ראו :

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(-h)}{2h}\underset{g(x)=|x|}{=}\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{2h}=0$$

כלומר ייתכן שהגבול המיוחד שלנו קיים למרות הפונקציה אינה גזירה.

לכן הגבול הזה אינו יכול להוות את הגדרת הנגזרת אבל אם הנגזרת קיימת גם הוא יכול לשמש לעניין חישוב הנגזרת.

סיימנו.

שאלה 2 – תחומי מונוטוניות, גזירות ואי גזירות. שימושי החשבון הדיפרנציאלי. (פרק 4)

רשמו את הפונקציה $|x-2\sin x|$ כהטלאה בקטע $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ובדקו גזירות הפונקציה $(0,0)$.

[על מנת לרשום כהטלאה תוכלו להיעזר חשבון דיפרנציאלי עבור $y=x-2\sin x$.]

פתרון שאלה 2

השאלה נראית תמימה . היא לא תמימה.

אין לנו כלל גזירה טכני לגזירת ערך מוחלט. אנחנו צריכים לפתוח את הפונקציה להטלאה.

השאלה היא כיצד להטליא אותה ?

לפי הגדרת הערך המוחלט:

$$|x-2\sin x|=\begin{cases} x-2\sin x & x-2\sin x\ge 0 \\ -x+2\sin x & x-2\sin x<0\end{cases}$$

והנה הבעייה הראשונה : לא יודעים לפתור אי שיוויון : $x-2\sin x\ge 0$ ולכן כיצד נמשיך ?

וודאי כי אתם לא יודעים לחלץ את איקס.

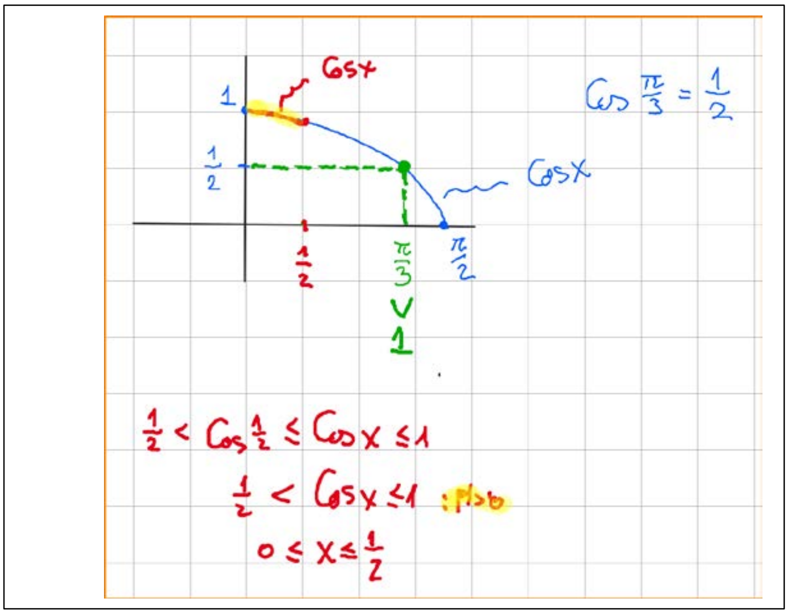
נסמן $y=x-2\sin x$ ונחקור אותה מעט. הנגזרת היא $\frac{dy}{dx}=1-2\cos x$. האם נדע מתי הנגזרת חיובית או שלילית בקטע הנתון $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. ננסה להשיב לפי תכונות של קוסינוס.

האיור מתאר את הגרף של קוסינוס בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ ובתוך קטע זה את הקטע $[0,\frac{1}{2}]$.

עיינו היטב באיור וראו כיצד הראינו בעזרתו כי cosx>1/2 בקטע שלנו.

♥ **<u>זה לב התרגיל, הנימוק הגרפי מדוע cosx>1/2 בקטע שלנו.</u>**

✋ מדוע אין צורך בקטע $[-\frac{1}{2},0]$? מהי התכונה של קוסינוס שמאפשרת זאת?



מה למדנו ?

בכל הקטע $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ מתקיים כי cosx>1/2 ולכן הנגזרת $\frac{dy}{dx}=1-2\cos x<0$. כלומר

פונקציית העזר שהגדרנו **<u>יורדת</u>**. פונקציית עזר זאת עוברת בנקודה (0,0).

הגרף שלה הוא בערך כך ובפרט הוא מדגיש את התחומים שבהם היא חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.

יוצא כי עבור $(-\frac{1}{2},0)$ הפונקציה חיובית ועבור $(0,\frac{1}{2})$ הפונקציה שלילית.

כלומר...
$$|x-2\sin x|=\begin{cases} x-2\sin x & x-2\sin x\ge 0 \\ -x+2\sin x & x-2\sin x<0 \end{cases}=\begin{cases} x-2\sin x & -\frac{1}{2}<x<0 \\ -x+2\sin x & 0\le x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

✋ זה לב התרגיל, למעשה פתרנו את אי השוויון. $x-2\sin x\ge 0$ או המקביל לו בשיטות של חשבון דיפרנציאלי ולא בשיטות אלגבריות.

סיימנו את החלק של כתיבת הפונקציה כהטלאה. **ומה לגבי גזירות בנקודה 0 ?**

נפעיל את משפט עמוד 180.

$$|x-2\sin x|'=\begin{cases} (x-2\sin x)' & -\frac{1}{2}<x<0 \\ (-x+2\sin x)' & 0<x<\frac{1}{2} \end{cases}=\begin{cases} 1-2\cos x & -\frac{1}{2}<x<0 \\ -1+2\cos x & 0<x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

שימו לב כיצד השמטנו את אפס כי שימוש במשפט אומר שאנו גוזרים לפני ואחרי הנקודה.

וכעת נחשב את גבול הנגזרות מימין ומשמאל. אם הן שוות זאת הנגזרת. אם שונות אין גזירות בנקודה.

✋ חשבו וקבלו 2-1 מול 1-2 . **<u>סכמו</u>**- הוכחנו כי אין נגזרת בנקודת ההטלאה 0 .

שאלה 3 – שימושי החשבון הדיפרנציאלי (פרק 4)

הוכיחו כי לכל $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $\tan x \ge x$.

פתרון שאלה 3

נגדיר פונקציית עזר $f(x) = \tan x - x \ge 0$. נרצה להוכיח כי היא מקיימת בקטע שלנו את התכונה $f(x) \ge 0$.

הפונקציה גזירה ומתקיים: $$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

רואים מייד כי הנגזרת חיובית בקטע הפתוח $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ולכן בקטע זה הפונקציה עולה.

הרציפות של הפונקציה בנקודה x=0 מאפשרת לנו לטעון כי הפונקציה עולה גם בקטע יותר גדול הוא הקטע $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

בנקודה x=0 ערך הפונקציה הוא אפס f(0)=0 .

מכיוון שהפונקציה עולה לכל x>0 נקבל f(x)>f(0) כלומר $f(x) = \tan x - x > 0$.

כלומר $\tan x > x$ בקטע הפתוח. מטיעון זה נסיק כי $\tan x \ge x$ בקטע הפתוח.

כל שנותר הוא לציין שבנקודת הקצה x=0 אי השיוויון מתקיים כשיוויון שהרי tan0=0 .

לכן הוכחנו את הנדרש,

לכל $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $\tan x \ge x$.

סיימנו.

האם ברור לכם כי $a > b \Rightarrow a \ge b$ אך לא להיפך.

שאלה 4 - משפט רול (פרק 4)

א. יהי b קבוע שונה מאפס. הוכיחו כי למשוואה $\cos x = bx$ יש פתרון אחד ויחיד בקטע $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. רמז: כדאי להפריד למקרים לפי הסימן של b .

ב. הוכיחו: $q(x) = x^2$ ו- $p(x) = 1 - 3x + x^3$ נחתכים בדיוק שלוש פעמים. נמקו היטב.

פתרון שאלה 4, סעיף א

המשוואה הנתונה שקולה למשוואה: $$\cos x - bx = 0$$

כרגיל נגדיר פונקצית עזר $$g(x) = \cos x - bx$$

הפונקציה רציפה וגזירה. מתקיים: $$g(0) = 1\ ,\ g(\tfrac{\pi}{2}) = -\frac{\pi b}{2}\ ,\ g(-\tfrac{\pi}{2}) = \frac{\pi b}{2}$$

אם b>0 אזי בקצוות הקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$ יש סימנים מנוגדים ולכן לפי ערך הביניים נסיק שיש שורש בקטע הפתוח $(0, \frac{\pi}{2})$.

אם b<0 אזי בקצוות הקטע $[-\frac{\pi}{2},0]$ יש סימנים מנוגדים ולכן לפי ערך הביניים נסיק שיש שורש בקטע הפתוח $(-\frac{\pi}{2},0)$.

הוכחנו בשלב זה כי לכל **b שונה מאפס** יש שורש בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. למעשה צמצמנו את הקטע המלא למחצית הקטע. אבל כרגע זה לא חשוב להמשך התרגיל.

נותר לברר האם ייתכן שיש עוד פתרונות למשוואה?

<u>שוב נפריד למקרים</u>

תחילה נציין כי בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ הקוסינוס הוא חיובי או 0 . המידע הזה מאוד מסייע.

אם b>0 ראשית נעיין במשוואה $\cos x = bx$. מתקיים $\underbrace{\cos x}_{(+)} = \underbrace{b}_{(+)}\, x$ ולכן משיקולים של סימנים נסיק כי רק איקס חיובי יכול לבוא בחשבון כפתרון. אזי אכן הוכחנו כי בקטע הפתוח $(0,\frac{\pi}{2})$ יש שורש. כעת נוכיח כי הוא יחיד. הנגזרת היא $g'(x) = -(\underbrace{\sin x}_{(+)} + \underbrace{b}_{(+)}) < 0$ ולכן הפונקציה יורדת ומכאן שאין אופציה לעוד שורש.

ובכן הוכחנו כי יש שורש יחיד בקטע $(0,\frac{\pi}{2})$ כאשר b חיובי.

☝ **הוכיחו בדיוק באותו אופן** שעבור **b<0** יש שורש יחיד בקטע $(-\frac{\pi}{2},0)$.

<u>פתרון שאלה 4, סעיף ב</u>

חיתוך בין הפולינומים אומר כי $1-3x+x^3 = x^2$ או $1-3x+x^3-x^2 = 0$.

נגדיר פונקציית עזר: $u(x) = 1-3x+x^3-x^2$

הרציפות ברורה שהרי u פולינום. הוכיחו כי יש לפחות שלושה שורשים בעזרת משפט ערך הביניים.

הנגזרת היא: $u'(x) = 3x^2-2x-3$

אם היו ארבעה שורשים הנגזרת היתה חייבת להתאפס לפחות שלוש פעמים. זה לא יכול לקרות כי הנגזרת היא פונקציה ריבועית.

לאור זאת הוכחתם שיש לפחות שלושה פתרונות ולפי רול הוכחנו שאין יותר פתרונות. אם כך יש בדיוק שלוש פתרונות.

סיימנו.

שאלה 5 (כללי) (פרק 4)

הוכיחו כי $3x^2 + \cos(2x) \ge 1$ לכל x.

[הדרכה: חפשו קיצון מוחלט בקטע $(-\infty,\infty)$ להפרש. היעזרו ברול להוכחת יחידות הקיצון]

פתרון שאלה 5

נגדיר $u(x) = 3x^2 + \cos(2x)$.

נכין נגזרות: $u''(x) = 6 - 4\cos(2x)$ $u'(x) = 6x - 2\sin(2x)$

1) הפונקציה שלנו רציפה לכל x. מכיוון שהגבולות בקצה תחום ההגדרה הם אין סוף נסיק ש **יש מינימום מוחלט**.

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = \lim_{x\to\pm\infty} [\underbrace{3x^2}_{\downarrow \infty} + \underbrace{\cos(2x)}_{[-1,1]}] = \infty .$$

2) הפונקציה גזירה לכל x. לכן כל קיצון מקומי או מוחלט (בפונקציה גזירה) חייב לקיים **תנאי הכרחי לקיצון והוא הנגזרת מתאפסת**. ובכן, $u'(x) = \boxed{6x - 2\sin(2x) = 0}$.

המשוואה הזאת לא ניתנת לפתרון אנליטית כלומר לחלץ את איקס בצורה אלגברית.

3) התבוננות במשוואה מראה מייד כי x=0 פתרון! ניחוש נהדר וקל.

4) לפי מבחן הנגזרת השנייה נסיק כי הנקודה היא מינימום מקומי. $u''(0) = 2 > 0$.

5) האם ייתכן כי יש נקודת קיצון נוספת? שוב אם יש עוד קיצון חייבים גם עבורו לדרוש תנאי הכרחי לקיצון, כלומר קיומה של עוד נקודה בה $u'(x_0) = 0$. אם כך אנו במצב בו הנגזרת מתאפסת פעמיים.

6) לפי רול, הנגזרת של $u'(x)$ חייבת להתאפס. כלומר בין 0 ובין xo יש נקודה המאפסת את הנגזרת השנייה. סתירה! הנגזרת השנייה חיובית לכל x: $u''(x) = 6 - \underbrace{4\cos(2x)}_{[-4,4]} > 0$.

7) הוכחנו כי x=0 היא **מינימום מקומי יחיד ולכן זהו מינימום מוחלט**.

8) ובכן, לכל איקס: $u(x) = 3x^2 + \cos(2x) \ge u(0) = 1$

9) הוכחנו כי לכל איקס מתקיים: $3x^2 + \cos(2x) \ge 1$

10) סיימנו.

שאלה 6 (כללי) (פרק 4, קיצון מוחלט בקטע סגור)

הפונקציה $f(x)$ רציפה ובעלת נגזרות רציפות בקטע הסגור $[0,1]$.

נתון כי $f(0) = f(1) = 0$ ו- $f(x) = f''(x)$ בקטע. וכיחו כי $f(x) = 0$ בקטע.

{הוכחה על דרך השלילה. נניח כי יש נקודה x_0 בקטע הפתוח ובה הפונקציה חיובית. ... המשיכו לבד. }

פתרון שאלה 6

1. הפונקציה רציפה בקטע סגור ולכן יש לה מקסימום וגם מינימום מוחלטים בקטע זה.
2. אם הפונקציה קבועה בקטע אזי בהכרח f=0 בכל בקטע ובזאת סיימנו את ההוכחה המבוקשת.

3. נניח בשלילה כי הפונקציה לא קבועה בקטע. נניח כי יש נקודה x_0 בקטע הפתוח שבה הפונקציה חיובית. מכיוון שיש מקסימום מוחלט בקטע הסגור ויש נקודה בה הגרף חיובי נסיק כי המקסימום המוחלט נמצא בתוך הקטע (לא בקצוות) והוא חיובי.
4. אם כך יש נקודה x_m בקטע הפתוח שהיא המקסימום המוחלט ו- $\mathbf{f(x_m)>0}$.
5. בנקודת מקסימום מוחלטת בתוך הקטע חייבים להתקיים $f''(x_m) \le 0$ לפי התנאי מסדר שני. ומדוע " כי אם זה לא מתקיים אזי $f''(x_m) > 0$ ואז נקודת זאת היא מינימום וזאת סתירה להגדרתה כמקסימום.
6. כעת כל שנותר הוא לעיין בנתון הבסיס בתרגיל $f(x) = f''(x)$ ולהציב בו את x_m .
7. נקבל $\underbrace{f''(x_m)}_{0 \text{ or } -} = \underbrace{f(x_m)}_{+}$. סתירה.
8. סתירה למה ? סתרנו את הנחת השלילה שיש נקודה בה הגרף חיובי .
9. באופן דומה מניחים בשלילה שיש נקודה בה הגרף שלילי ומקבלים סתירה.
10. ובכן אין נקודה בה הגרף חיובי או שלילי. לכן הגרף זהותית אפס.

מ.ש.ל.

שאלה 7 (כללי) (פרק 4, טבלה 4.6.2)

יהי $p(x)$ פולינום ממעלה 7 , כלומר $a_7 \neq 0$; $p(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + \cdots + a_1x + a_0$.

הוכיחו כי יש נקודה בה הנגזרת השנייה מתאפסת.

פתרון שאלה 7

המקדם a_7 לא אפס לפי נתוני התרגיל. נניח כי מקדם זה חיובי.

הנגזרת היא פולינום ממעלה 6 עם מקדם חיובי : $p'(x) = \underbrace{7a_7}_{+} x^6 + \ldots\ldots$.

הביטוי $p'(x)$ הוא פולינום ולכן רציפה לכל איקס. הביטוי הוא עם חזקה זוגית 6 ומקדם חיובי לחזקה זאת.

לאור כל זאת נסיק כי $\lim_{x\to\pm\infty} p'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} [\underbrace{7a_7}_{+} x^6 + \ldots\ldots] = \infty$.

לפי הטבלה נסיק כי ל $p'(x)$ יש מינימום מוחלט. מכיוון שמדובר בפונקציה גזירה אזי מתקיים התנאי ההכרחי לקיצון והוא נגזרת מתאפסת.

אם כך הוכחנו כי יש נקודה בה $p''(x) = \left(p'(x)\right)'$ מתאפסת.

סיימנו.

הערה : אם המקדם a_7 שלילי תוכלו להוכיח באופן דומה את הנדרש.

כעת באמת סיימנו.

סוף סקירת פתרון מטלה 12