פתרון מקוצר למטלה 12 , קורס 20406 , סמסטר 2024ב.

כתב: חזי נוימן.

פתרון מקוצר הוא פתרון שמכיל את כל האלמנטים המתמטיים החשובים. הוא מכיל תתי שאלות שאתם נדרשים להשיב עליהן על מנת לחדד נקודות בחומר הלימוד. נכנה זאת קריאה אקטיבית.

שאלה 1 – גזירות (פרק 3)

א. הגדירו את המושג פונקציה גזירה בנקודה $x = x_0$. ציינו תנאי הכרחי לגזירות בנקודה.

ב. נסמן $A(x) = |x|^m$. עבור m=1 כולנו יודעים כי הפונקציה לא גזירה בנקודה אפס. הוכיחו כי לכל m טבעי גדול או שווה ל 2 הפונקציה גזירה בנקודה x=0 .

ג. תהי $g(x)$ פונקציה מוגדרת בקטע (-1,1) ומקיימת $g(0)$=3 ו- $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

הראו כי הפונקציה $|x| \cdot g(x)$ היא פונקציה גזירה בנקודה x=0 למרות שהיא מכפלת פונקציות לא גזירות בנקודה הנ"ל .

פתרון שאלה 1, סעיף א

תנאי הכרחי לגזירות בנקודה היא רציפות באותה נקודה. פונקציה תקרא גזירה בנקודה x_0 אם הגבול הבא קיים והוא מספר ממשי :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

פתרון שאלה 1, סעיף ב

אם m טבעי גדול או שווה ל 2 אזי m=2+k כאשר k טבעי או אפס.

האם הטריק ברור לכם?

נשתמש בהגדרת הנגזרת.

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(0+h)-A(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{A(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^m}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{|h|^{2+k}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^2\cdot|h|^k}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\cdot|h|^k}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\cdot|h|^k \underbrace{=}_{k=1,2...} 0\cdot|0|^k = 0$$

עבור k=0 הביטוי אפס בחזקת אפס לא מוגדר . אבל עבור k=0 למעשה m=2 ותוכלו לנמק לבד מהי A במקרה זה ומדוע היא גזירה.

נניח כי k=0 כלומר m=2 . מהי ? $A(x) = |x|^2 = \,?$ ומדוע היא גזירה בנקודה 0 ?

פתרון שאלה 1, סעיף ג

ראשית כדאי לשים כי הפונקציה g אינה רציפה בנקודה x=0 (ערך הגבול שונה מערך הפונקציה) ולכן הפונקציה g אינה גזירה בנקודה 0. אזי נכונה ההערה כי לפנינו מכפלת פונקציות לא גזירות ב אפס.

אם כך כאשר אנו רוצים לגזור מכפלה זאת לא נוכל להיעזר בכללי הגזירה הטכניים כי...

כי... מה הנימוק לאי שימוש בכללי הגזירה הטכניים ?

מה עושים ? פונים להגדרת הנגזרת.

נסמן $u(x) = |x| \cdot g(x)$. הגדרת הנגזרת היא...

$$u'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{u(\overbrace{0+h}^{h})-u(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot g(h)-|0|\cdot g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot g(h)-|0|\cdot 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot g(h)}{h} = ?$$

$$= \lim_{h\to 0}\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h\cdot g(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} g(h) = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h\cdot g(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} -g(h) = (-1)\cdot 0 = 0 \end{cases}$$

אזי הגבול המגדיר את הנגזרת קיים וערכו אפס.

לכן הוכחנו כי הפונקציה u(x) גזירה בנקודה 0 והנגזרת היא 0.

שאלה 2 – תחומי מונוטוניות, גזירות ואי גזירות. שימושי החשבון הדיפרנציאלי. (פרק 4)

רשמו את הפונקציה $|x-2\sin x|$ כהטלאה בקטע $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ובדקו גזירות הפונקציה $(0,0)$.

[על מנת לרשום כהטלאה תוכלו להיעזר חשבון דיפרנציאלי עבור $y = x - 2\sin x$.]

פתרון שאלה 2

השאלה נראית תמימה . היא לא תמימה.

אין לנו כלל גזירה טכני לגזירת ערך מוחלט. אנחנו צריכים לפתוח את הפונקציה להטלאה.

השאלה היא כיצד להטליא אותה ?

לפי הגדרת הערך המוחלט :

$$|x-2\sin x| = \begin{cases} x-2\sin x & x-2\sin x \ge 0 \\ -x+2\sin x & x-2\sin x < 0 \end{cases}$$

והנה הבעייה הראשונה והמרכזית : לא יודעים לפתור אנליטית אי שיוויון : $x - 2\sin x \ge 0$ ולכן כיצד נמשיך ?

וודאי כי אתם לא יודעים לחלץ את איקס.

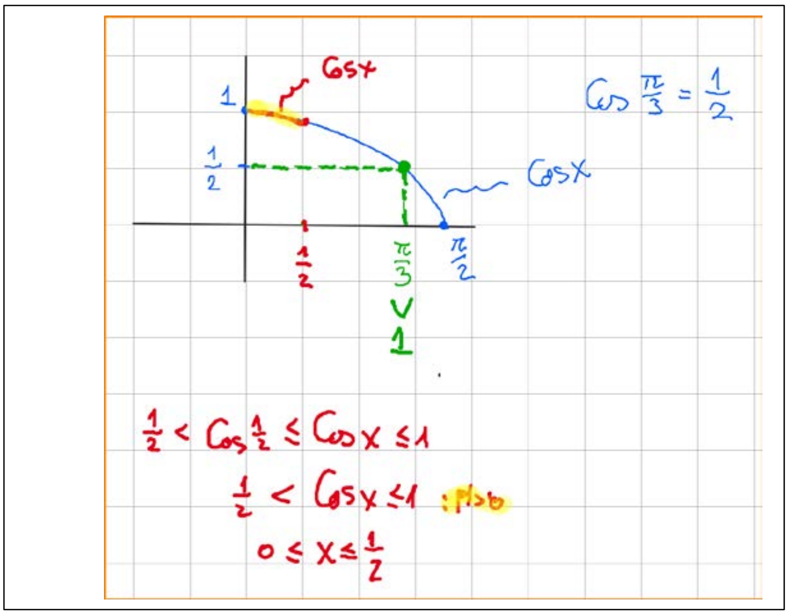
נסמן $y = x - 2\sin x$ ונחקור אותה מעט. הנגזרת היא $\frac{dy}{dx} = 1 - 2\cos x$. האם נדע מתי הנגזרת חיובית או שלילית בקטע הנתון $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. ננסה להשיב לפי תכונות של קוסינוס.

האיור מתאר את הגרף של קוסינוס בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ ובתוך קטע זה את הקטע $[0,\frac{1}{2}]$.

עיינו היטב באיור וראו כיצד הראינו בעזרתו כי cosx>1/2 בקטע שלנו.

זה לב התרגיל, הנימוק הגרפי מדוע cosx>1/2 בקטע שלנו.

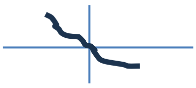
מדוע אין צורך בקטע $[-\frac{1}{2},0]$? מהי התכונה של קוסינוס שמאפשרת זאת?



מה למדנו ?

בכל הקטע $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ מתקיים כי cosx>1/2 ולכן הנגזרת $\frac{dy}{dx}=1-2\cos x<0$. כלומר

פונקציית העזר שהגדרנו **יורדת**.



פונקציית עזר זאת עוברת בנקודה $(0,0)$.

הגרף שלה הוא בערך כך ובפרט הוא מדגיש את התחומים שבהם היא חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.

יוצא כי עבור $(-\frac{1}{2},0)$ הפונקציה חיובית ועבור $(0,\frac{1}{2})$ הפונקציה שלילית.

כלומר...

$$|x-2\sin x|=\begin{cases}x-2\sin x & x-2\sin x\ge 0\\ -x+2\sin x & x-2\sin x<0\end{cases}=\begin{cases}x-2\sin x & -\frac{1}{2}<x<0\\ -x+2\sin x & 0\le x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

זה לב התרגיל, למעשה פתרנו את אי השיוויון. $x-2\sin x\ge 0$ או המקביל לו בשיטות של חשבון דיפרנציאלי ולא בשיטות אלגבריות.

סיימנו את החלק של כתיבת הפונקציה כהטלאה. **ומה לגבי גזירות בנקודה 0 ?**

נפעיל את משפט עמוד 180.

$$|x-2\sin x|'=\begin{cases}(x-2\sin x)' & -\frac{1}{2}<x<0\\ (-x+2\sin x)' & 0<x<\frac{1}{2}\end{cases}=\begin{cases}1-2\cos x & -\frac{1}{2}<x<0\\ -1+2\cos x & 0<x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

שימו לב כיצד השמטנו את אפס כי שימוש במשפט אומר שאנו גוזרים לפני ואחרי הנקודה.

וכעת נחשב את גבול הנגזרות מימין ומשמאל. אם הן שוות זאת הנגזרת. אם שונות אין גזירות בנקודה.

חשבו וקבלו 1-2 מול 2-1 .

סכמו- הוכחנו כי אין נגזרת בנקודת ההטלאה 0 .

<u>שאלה 3 – שימושי החשבון הדיפרנציאלי (פרק 4)</u>

הוכיחו כי לכל $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $\tan x \ge x$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

נגדיר פונקציית עזר $f(x) = \tan x - x \ge 0$. נרצה להוכיח כי היא מקיימת בקטע שלנו את התכונה $f(x) \ge 0$.

הפונקציה גזירה ומתקיים:
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

רואים מייד כי הנגזרת חיובית בקטע הפתוח $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ולכן בקטע זה הפונקציה עולה.

הרציפות של הפונקציה בנקודה $x=0$ מאפשרת לנו לטעון כי הפונקציה עולה גם בקטע יותר גדול הוא הקטע $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

בנקודה $x=0$ ערך הפונקציה הוא אפס $f(0)=0$.

מכיוון שהפונקציה עולה לכל $x>0$ נקבל $f(x)>f(0)$ כלומר $f(x) = \tan x - x > 0$.

כלומר $\tan x > x$ בקטע הפתוח. מטיעון זה נסיק כי $\tan x \ge x$ בקטע הפתוח.

כל שנותר הוא לציין שבנקודת הקצה $x=0$ אי השיוויון מתקיים כשיוויון שהרי $\tan 0=0$.

לכן הוכחנו את הנדרש,

לכל $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $\tan x \ge x$.

סיימנו.

האם ברור לכם כי $a > b \Rightarrow a \ge b$ אך לא להיפך.

<u>שאלה 4 - משפט רול (פרק 4)</u>

א. יהי b קבוע שונה מאפס. הוכיחו כי למשוואה $\cos x = bx$ יש פתרון אחד ויחיד בקטע $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. רמז: כדאי להפריד למקרים לפי הסימן של b .

ב. הוכיחו: $q(x) = x^2$ ו- $p(x) = 1 - 3x + x^3$ נחתכים בדיוק שלוש פעמים. נמקו היטב.

<u>פתרון שאלה 4, סעיף א</u>

המשוואה הנתונה שקולה למשוואה: $\cos x - bx = 0$

כרגיל נגדיר פונקצית עזר $g(x) = \cos x - bx$

הפונקציה רציפה וגזירה. מתקיים: $g(0) = 1\ ,\ g(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi b}{2}\ ,\ g(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi b}{2}$

אם b>0 אזי בקצוות הקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$ יש סימנים מנוגדים ולכן לפי ערך הביניים נסיק שיש שורש בקטע הפתוח $(0, \frac{\pi}{2})$.

אם b<0 אזי בקצוות הקטע $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ יש סימנים מנוגדים ולכן לפי ערך הביניים נסיק שיש שורש בקטע הפתוח $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

הוכחנו בשלב זה כי לכל **b** **שונה מאפס** יש שורש בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. למעשה צמצמנו את הקטע המלא למחצית הקטע. אבל כרגע זה לא חשוב להמשך התרגיל.

נותר לברר האם ייתכן שיש עוד פתרונות למשוואה?

<u>שוב נפריד למקרים</u>

תחילה נציין כי בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ הקוסינוס הוא חיובי או 0 . המידע הזה מאוד מסייע.

אם b>0 ראשית נעיין במשוואה $\cos x = bx$. מתקיים $\underbrace{\cos x}_{(+)} = \underbrace{b}_{(+)}\, x$ ולכן משיקולים של סימנים נסיק כי רק איקס חיובי יכול לבוא בחשבון כפתרון. אזי אכן הוכחנו כי בקטע הפתוח $(0,\frac{\pi}{2})$ יש שורש. כעת נוכיח כי הוא יחיד. הנגזרת היא $g'(x) = -(\underbrace{\sin x}_{(+)} + \underbrace{b}_{(+)}) < 0$ ולכן הפונקציה יורדת ומכאן שאין אופציה לעוד שורש.

ובכן הוכחנו כי יש שורש יחיד בקטע $(0,\frac{\pi}{2})$ כאשר b חיובי.

<u>הוכיחו בדיוק באותו אופן</u> שעבור **b<0** יש שורש יחיד בקטע $(-\frac{\pi}{2},0)$.

<u>פתרון שאלה 4, סעיף ב</u>

חיתוך בין הפולינומים אומר כי $1-3x+x^3 = x^2$ או $1-3x+x^3-x^2 = 0$.

נגדיר פונקציית עזר: $u(x) = 1-3x+x^3-x^2$

הרציפות ברורה שהרי u פולינום. הוכיחו כי יש לפחות שלושה שורשים בעזרת משפט ערך הביניים.

הנגזרת היא: $u'(x) = 3x^2-2x-3$

אם היו ארבעה שורשים הנגזרת היתה חייבת להתאפס לפחות שלוש פעמים. זה לא יכול לקרות כי הנגזרת היא פונקציה ריבועית.

לאור זאת הוכחתם שיש לפחות שלושה פתרונות ולפי רול הוכחנו שאין יותר פתרונות. אם כך יש בדיוק שלוש פתרונות.

סיימנו.

<u>שאלה 5 (כללי) (פרק 4)</u>

1) הוכיחו כי $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \ge \sqrt{8}$ לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

2) הפונקציה $f(x)$ רציפה ובעלת נגזרות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.

נתון כי $f(a) = f(b) = 0$ ו- $f(x) = f'(x) + f''(x)$ בקטע.

הוכיחו כי $f(x) = 0$ בקטע.

{הוכחה על דרך השלילה. נניח כי יש נקודה x_0 בקטע הפתוח ובה הפונקציה חיובית. ... המשיכו לבד. }

<u>פתרון שאלה 5</u>

<u>תת סעיף 1</u>

נסמן $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$. נגזור $f'(x)=\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$. הנגזרת מתאפסת אם ורק אם $\sin^3 x=\cos^3 x$ ובתחום שלנו אם ורק אם $x=\frac{\pi}{4}$.

- הוכיחו כי בקצוות קטע הבעייה הפונקציה שואפת לאין סוף.
- הוכיחו כי הפונקציה רציפה בקטע הבעייה הנתון.
- מהי המסקנה הנובעת מטיעונים אלה לגבי קיומו של קיצון מוחלט ומדוע?
- מה התנאי ההכרחי לקיצון **מקומי** בקטע פתוח בפונקציה גזירה ?
- מדוע הקיצון המקומי הופך לקיצון מוחלט ?
- מה ערך הקיצון המוחלט ? מה טיבו של הקיצון המוחלט.

סיימנו.

<u>תת סעיף 2</u>

א. נניח בשלילה כי הפונקציה אינה זהותית אפס בקטע. אם כך יש נקודה x_0 בקטע הפתוח (a,b) ובה הפונקציה שונה מאפס. ***נניח כי היא חיובית שם***.

ב. הפונקציה רציפה בסגור ולכן יש לה מקסימום מוחלט בו. מכיוון שיש נקודה בה הפונקציה חיובית המקסימום המוחלט חייב להיות בתוך הקטע כלומר בקטע הפתוח.

ג. תנאי הכרחי לקיצון מקומי (או מוחלט) בקטע פתוח בפונקציה גזירה הוא איפוס הנגזרת.

ד. תהי Xm נקודת המקסימום המוחלטת והיא בקטע הפתוח. הנה ריכוז הטיעונים על נקודה זאת. $\boxed{a<Xm<b}$ וגם $\boxed{f(Xm)>0}\leftarrow$ why? וגם $\boxed{f'(Xm)=0}$.

ה. נציב את הנקודה במשוואה הנתונה: $f(Xm)=f'(Xm)+f''(Xm)$.

ו. נבחן סימנים: $\underbrace{f(Xm)}_{\boxed{+}}=\underbrace{f'(Xm)}_{\boxed{0}}+f''(Xm)$ מסקנה $f''(Xm)>0$

ז. אם כך $f''(Xm)>0$; $f'(Xm)=0$.

ח. מסקנה: הנקודה Xm היא מינימום מקומי. **<u>סתירה</u>**.

ט. בסעיף א הנחנו קיומה של נקודה בה הפונקציה חיובית. הניחו כעת קיומה של נקודה בה הפונקציה שלילית וחזרו על מערכת הטיעונים בהתאמה.

<u>סוף סקירת פתרון מטלה 12</u>