קובץ 1
פתרון בחינה מס׳ 1

חלק א׳
שאלה 1

א) **נכון** עפ״י נוסחת ההסתברות השלמה נקבל $P(\text{יאחר})=0.8\cdot 0.2+0.2\cdot 0.3=0.22$

ב) **לא נכון** $z_{33\%}=-z_{67\%}=-0.44\Rightarrow x_{33\%}=146-0.44\cdot 5=143.8$

הטענה נכונה עבור המאון ה-67: $z_{67\%}=0.44\Rightarrow x_{67\%}=146+0.44\cdot 5=148.2$

ג) **נכון** מעצם הגדרתה של התפלגות א-סימטרית חיובית הממוצע גדול מהשכיח.

ד) **נכון** $1=x_{2.5\%}\Rightarrow z_{2.5\%}=-z_{97.5\%}=-1.96=\dfrac{1-\bar{X}}{0.02}\Rightarrow \bar{X}=1.0392$

ה) **לא נכון** הטענה נכונה רק עבור התפלגות שבה החציון שווה לממוצע (התפלגות סימטרית).

חלק ב׳
שאלה 2

נבנה טבלת שכיחות דו-מימדית לנתונים:

		X		
		גברים	נשים	סה״כ
Y	תושב ת״א	8	10	18
	לא תושב ת״א	6	16	22
	סה״כ	14	26	40

א) <u>מיתאם קרמר – מיתאם ϕ:</u>

$$\Phi=\sqrt{\frac{(10\cdot 6-8\cdot 16)^2}{18\cdot 22\cdot 26\cdot 14}}=\sqrt{\frac{4624}{144144}}=0.1791$$

<u>מיתאם למדה:</u>

$$\left.\begin{array}{l}L_X=40-26=14\\ L_{X|Y}=(18-10)+(22-16)=8+6=14\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_{X|Y}=1-\frac{14}{14}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}L_Y=40-22=18\\ L_{Y|X}=(14-8)+(26-16)=6+10=16\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_{Y|X}=1-\frac{16}{18}=\frac{1}{9}=0.111$$

ב) (1) $\dfrac{22}{40}=\dfrac{11}{20}=0.55$

(2) $\dfrac{8+16}{40}=\dfrac{24}{40}=\dfrac{3}{5}=0.6$

(3) $\dfrac{16}{22}=\dfrac{8}{11}=0.72727$

ג) $\dfrac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}=0.0335$

שאלה 3

א) $0.42^2+0.33^2+0.18^2+0.07^2=0.3226$

ב) $X\sim B(5,0.33)$ - מספר התורמים בעלי סוג דם O.

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-0.67^5=0.865$$

ג) $Y\sim B(8,0.18)$ - מספר התורמים בעלי סוג דם B.

$$P(Y\le 2)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)=0.82^8+8\cdot 0.18\cdot 0.82^7+28\cdot 0.18^2\cdot 0.82^6=$$
$$=0.2044+0.359+0.2758=0.8392$$

ד) $T\sim B(250,0.42)$ - מספר התורמים בעלי סוג דם A

$$E(T)=np=250\cdot 0.42=105 \qquad ; \qquad \sigma_T=\sqrt{npq}=\sqrt{250\cdot 0.42\cdot 0.58}=7.804$$

<u>שאלה 4</u>

א)

x – גובה נזק (אלפי $)	50	25	12.5	0
הסתברות	0.002	0.01	0.1	0.888

ב) $$E(X)=50\cdot 0.002+25\cdot 0.01+12.5\cdot 0.1+0\cdot 0.888=1.6$$
$$V(X)=50^2\cdot 0.002+25^2\cdot 0.01+12.5^2\cdot 0.1+0^2\cdot 0.888-1.6^2=24.315$$

ג) 1,800$ - תוחלת הנזק בתוספת 200$ רווח.

<u>שאלה 5</u>

א) נתרגם את טבלת השכיחות עם השכיחויות היחסיות ונוסיף עמודות:

מספר סיגריות ליום	רוחב	אמצע	יחסית	שכיחות	מצטברת	צפיפות
10 - 0	10	5	0.05	15	15	1.5
20 - 10	10	15	0.25	75	90	7.5
40 - 20	20	30	0.4	120	210	6
80 - 40	40	60	0.3	90	300	2.25

על-סמך זאת נוכל לחשב את המדדים:

<u>שכיח</u>: אמצע המחלקה הצפופה ביותר (המחלקה השניה) $\qquad Mo=15$

<u>חציון</u>: $$Md=20+\frac{150-90}{120}\cdot 20=30$$

<u>ממוצע</u>: $$\bar{X}=\frac{5\cdot 15+15\cdot 75+30\cdot 120+60\cdot 90}{300}=\frac{10{,}200}{300}=34$$

ב) <u>ס.תקן</u>: $$s=\sqrt{\frac{5^2\cdot 15+15^2\cdot 75+30^2\cdot 120+60^2\cdot 90}{300}-34^2}=\sqrt{341.5}=18.48$$

ג) עשירון עליון: $$x_{90}=40+\frac{0.9\cdot 300-210}{90}\cdot 40=66\tfrac{2}{3}$$

רבעון תחתון: $$Q_1=10+\frac{75-15}{75}(20-10)=18$$

ד)
<u>שכיח</u> *ללא שינוי* הקטנת רוחב המחלקה האחרונה מגדילה את הצפיפות שלה אבל הצפיפות החדשה עדיין קטנה מהצפיפות של מחלקת השכיח בנתונים המקוריים.

<u>חציון</u> *ללא שינוי* חישוב החציון מתבסס על מחלקות שלפני המחלקה האחרונה, ולכן לשינוי בנתוני המחלקה האחרונה אין השפעה על החציון.

<u>ממוצע</u> *יקטן* אמצע המחלקה האחרונה קטן ולכן המונה של הממוצע יקטן. גודל המדגם ללא שינוי ולכן המכנה ללא שינוי.

<u>ס.תקן</u> *תקטן* הקטנת רוחב המחלקה האחרונה מקטינה את הפיזור.

פתרון בחינה מס׳ 2

חלק א'

שאלה 1

א) **נכון** $s^2=100=\frac{\sum x_i^2}{n}-40^2 \Rightarrow \sum x_i^2=\left(100+40^2\right)\cdot 10=17,000$

$$\sum x_i^2 = 17,000+20^2+60^2=21,000 \Rightarrow s^2=\frac{21,000}{12}-40^2=150$$ חדש

ב) **נכון** $9\cdot 6-1=54-1=53$

ג) **לא נכון** $X\sim B(3,0.99)$ - מספר מכוניות הכיבוי המוכנות לפעולה

$$\Rightarrow P(X=0)=\binom{3}{0}0.99^0 0.01^3=0.01^3=0.00001\neq 0.0297$$

ד) **לא נכון** $0.95\cdot 0.9\cdot 0.8=0.684\neq 0.999$

ה) **נכון** $P(X>145)=1-\Phi\left(\frac{145-100}{15}\right)=1-\Phi(3)=1-0.9987=0.0013$

$$\Rightarrow 5,000,000\times 0.0013=6,500$$

חלק ב'

שאלה 2

א) $X\sim B(3,0.8)$ - מספר החלקים הפועלים במרכיב

ההסתברות שמרכיב עובד היא $P(X=3)=0.8^3=0.512$

$Y\sim B(2,0.512)$ - מספר המרכיבים העובדים

ההסתברות שהמכונה עובדת היא $P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-(1-0.512)^2=1-0.488^2=0.762$

ב) $T\sim B(10,0.762)$ - מספר המכונות הפועלות

1) $P(T=10)=0.762^{10}\cong 0.066$

2) $P(T\geq 9)=P(T=9)+P(T=10)=$

$$=10\times 0.762^9\times(1-0.762)+0.066=0.206+0.066=0.272$$

ג) $W\sim B(500,0.238)$ - מספר המכונות שאינן הפועלות

(<u>הערה:</u> ההסתברות ל"הצלחה" חושבה ע"ס סעיף א' - $0.238=1-0.762$)

$$E(W)=500\times 0.238=119$$

$$V(W)=500\times 0.238\times 0.762=90.678$$

שאלה 3

א) $b=-0.75=\frac{r\cdot s_Y}{s_X}\Rightarrow r=\frac{-0.75\cdot s_X}{s_Y}$

$$\left.\begin{aligned} s_x^2&=\frac{36}{10}=3.6\Rightarrow s_X=\sqrt{3.6}\cong 1.897\\ s_Y^2&=\frac{25}{10}=2.5\Rightarrow s_X=\sqrt{2.5}\cong 1.581\end{aligned}\right\}\Rightarrow r=\frac{-0.75\cdot\sqrt{3.6}}{\sqrt{2.5}}=-0.9$$

ב) נציב $X=25$ בקו הניבויים ונקבל: $\tilde{Y}_{X=25}=21-0.75\cdot 25=2.25$

ולכן לאישה שנישאה בגיל 25 צפויים 2.25 ילדים.

ג) (1) $P(X<20)=\Phi\left(\frac{20-24}{1.897}\right)=\Phi(-2.11)=1-\Phi(2.11)=1-0.9826=0.0174(1.74\%)$

(2) $\begin{cases} z_{0.75}=0.674 \\ z_{0.25}=-z_{0.75}=-0.674 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_3=0.674\cdot 1.897+24\cong 25.28 \\ Q_1=-0.674\cdot 1.897+24\cong 22.72 \end{cases} \Rightarrow Q_3-Q_1=2.56$

שאלה 4

א) $Mo=4$

$Md=x_{(86)}=3$

$\overline{X}=\frac{0\cdot 8+1\cdot 37+2\cdot 40+3\cdot 32+4\cdot 54}{171}=\frac{429}{171}\cong 2.51$

ב) $s^2=\frac{0^2\cdot 8+1^2\cdot 37+2^2\cdot 40+3^2\cdot 32+4^2\cdot 54}{171}-2.51^2=\frac{1{,}349}{171}-2.51^2\cong 1.589$

$\Rightarrow s=\sqrt{s^2}=\sqrt{1.589}\cong 1.26$

ג) ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון $=\frac{|0-3|\cdot 8+|1-3|\cdot 37+|2-3|\cdot 40+|3-3|\cdot 32+|4-3|\cdot 54}{171}=\frac{192}{171}\cong 1.123$

ד) לאור המצב החדש מתקבלת טבלת השכיחות הבאה:

מספר תכניות חסכון	מספר אנשים
0	8
1	77
4	86

לכן מתקבלים המדדים הבאים:

$Mo=4\ ;Md=4\ ;\ \overline{X}=2.462$

$s^2\cong 2.4356\Rightarrow s\cong 1.56$

שאלה 5

(*) מרחב המדגם: $n(\Omega)=\binom{5}{2}=10$

א) מאורע A: זכיה ב- 500 ₪ - $n(A)=1\Rightarrow P(A)=\frac{1}{10}=0.1$

ב) מאורע B: זכיה ב- 125 ₪ - $n(B)=2\Rightarrow P(A)=\frac{2}{10}=0.2$

ג) מאורע C: זכיה ב- 50 ₪ - $n(C)=4\Rightarrow P(C)=\frac{4}{10}=0.4$

(*)הערה: ניתן להגיע להסתברויות הזכיה השונות גם בעזרת דיאגרמת עץ של שני שלבים עם סה"כ 20 תוצאות אפשריות (מסלולים).

ד) נגדיר משתנה מקרי X - סכום הזכיה.

x	0	50	125	500
$P(x)$	0.3	0.4	0.2	0.1

לכן נקבל:

$E(X)=0.1\cdot 500+0.2\cdot 125+0.4\cdot 50+0.3\cdot 0=95$

$V(X)=0.1\cdot 500^2+0.2\cdot 125^2+0.4\cdot 50^2+0.3\cdot 0^2-95^2=20{,}100$

<u>פתרון בחינה מס' 3</u>

<u>חלק א'</u>

<u>שאלה 1</u>

א) **<u>לא נכון</u>** $P\left(A^C \cap B^C\right)=P\left[\left(A\cup B\right)^C\right]=1-P\left(A\cup B\right)=1-\left(0.4+0.25-0.15\right)=0.5\neq 0.45$

ב) **<u>לא נכון</u>** הטווח הבינרבעוני של התפלגות נורמלית סטנדרטית הוא $2\cdot 0.674\cdot s_x=1.348\cdot s_x$. לכן, אם השונות של ההתפלגות היא 100 הרי שערכו של הטווח הבינרבעוני (שהוא מדד פיזור) הוא $10\cdot 1.348=13.48\neq 134.8$.

ג) **<u>נכון</u>** עפ"י נוסחת ההסתברות השלמה $0.22=0.06+0.16=0.2\times 0.3+0.8\times 0.2=$ P(יאחר).

ד) **<u>לא נכון</u>** נסמן: $P\left(X=-3\right)=p_1$

$$P\left(X=3\right)=p_3$$

אזי: $E\left(X\right)=0=-3p_1+3p_3\Rightarrow p_1=p_3$

$$V\left(X\right)=3=\left(-3\right)^2p_1+3^2p_3\Rightarrow 3=18p_3\Rightarrow p_1=p_3=\frac{1}{6}$$

ה) **<u>לא נכון</u>** $X\sim N\left(\bar{X},0.01^2\right)$ מחפשים $\bar{X}$ כך ש- $P\left(X<1\right)=0.025 \Leftarrow z_{0.025}=-z_{0.975}=-1.96$.

$$\Rightarrow \frac{1-\bar{X}}{0.01}=-1.96\Rightarrow \bar{X}=1.96\cdot 0.01+1=1.0196\neq 0.9804$$

<u>חלק ב'</u>

<u>שאלה 2</u>

א)

ציון	שכיחות	שכיחות מצטברת
$40-50$	$9=6+\frac{1}{5}\cdot 15$	9
$50-60$	$16=\frac{2}{5}\cdot 15+10$	25
$60-70$	$18=\frac{2}{5}\cdot 15+\frac{1}{2}\cdot 24$	43
$70-80$	$19=\frac{1}{2}\cdot 24+\frac{1}{2}\cdot 14$	62
$80-90$	$13=6+\frac{1}{2}\cdot 14$	75

ב) $$Md=\frac{37.5-25}{18}\cdot 10+60\cong 66.944$$

$$\bar{X}=\frac{45\cdot 9+55\cdot 16+\ldots+85\cdot 13}{75}=\frac{4{,}985}{75}=66.467$$

ג) $$s^2=\frac{45^2\cdot 9+55^2\cdot 16+\ldots+85^2\cdot 13}{75}-66.467^2\cong 161.8489$$

$$\Rightarrow s=\sqrt{161.8489}\cong 12.722$$

ד) $$C_{55}=\left[\frac{55-50}{60-50}\cdot 16+9\right]\frac{100}{75}=22.667\%$$

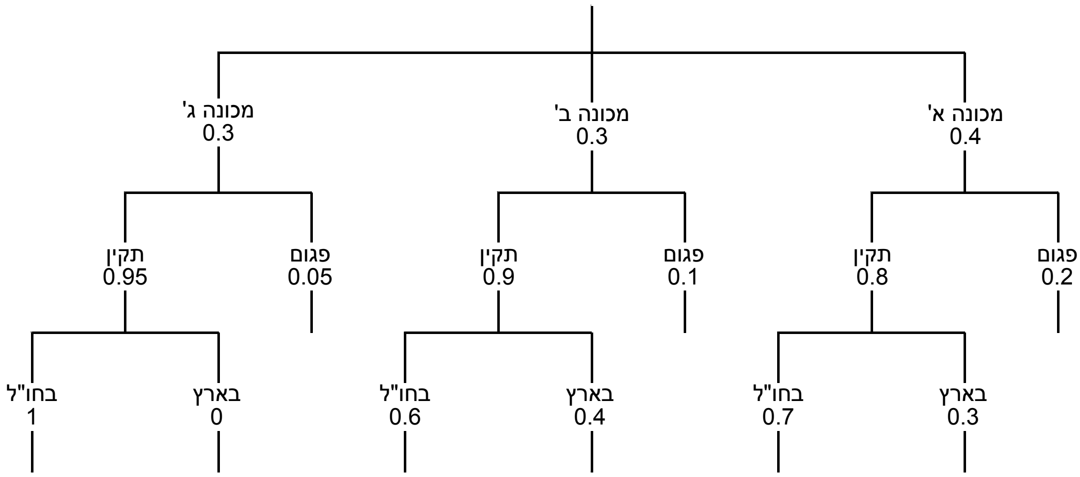
$$\Rightarrow 100\%-22.667\%=77.333\%$$

<u>מסקנה:</u> 77.333% (= 58) מהתלמידים קיבלו ציון עובר.

ה) $$C_{72}=\left[\frac{72-70}{80-70}\cdot 19+43\right]\frac{100}{75}=62.4\%$$
$$\Rightarrow 100\%-62.4\%=37.6\%$$
<u>מסקנה:</u> 37.6% מהתלמידים קיבלו ציון מעל 72.

שאלה 3

א) $P\left(HUL\right)=0.4\cdot 0.8\cdot 0.7+0.3\cdot 0.9\cdot 0.6+0.3\cdot 0.95\cdot 1=$ {HUL = בחו"ל}



$$=0.224+0.162+0.285=0.671$$
<u>מסקנה:</u> 67.1% מהתוצרת מיוצא לחו"ל.

ב) $P\left(TAKIN\right)=0.4\cdot 0.8+0.3\cdot 0.9+0.3\cdot 0.95=0.875$ {TAKIN = תקין}

$$P\left(ISR\middle|TAKIN\right)=\frac{P\left(ISR\cap TAKIN\right)}{P\left(TAKIN\right)}=\frac{0.4\cdot 0.8\cdot 0.3+0.3\cdot 0.9\cdot 0.4}{0.875}=\frac{0.204}{0.875}=0.233$$
{ISR = בארץ}

ג) $P\left(B\middle|HUL\right)=\frac{P\left(B\cap HUL\right)}{P\left(HUL\right)}=\frac{0.3\cdot 0.9\cdot 0.6}{0.671}=\frac{0.162}{0.671}=0.241$ {B = מכונה ב'}

שאלה 4

א)

X	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.1	0.09	0.081	0.0729	0.6561

ב) $$E\left(X\right)=1\cdot 0.1+2\cdot 0.09+3\cdot 0.081+4\cdot 0.0729+5\cdot 0.6561=4.0951$$
$$V\left(X\right)=1^2\cdot 0.1+2^2\cdot 0.09+3^2\cdot 0.081+4^2\cdot 0.0729+5^2\cdot 0.6561-4.0951^2=1.988$$

ג) $Y=35X$ ולכן נקבל:
$$\Rightarrow\begin{cases}E\left(Y\right)=35E\left(X\right)=35\cdot 4.0951\cong 143.3285\\ V\left(Y\right)=35^2V\left(X\right)=35^2\cdot 1.988\cong 2435.3686\end{cases}$$

שאלה 5

המשתנה X הוא בסולם שמי ולכן יש להשתמש במדדים קרמר ולמדה.

קרמר

O_{ij} E_{ij} χ^2_{ij}	הנאה מועטה	הנאה בינונית	הנאה מרובה	סה"כ
סטטיסטיקה	8 8.4 0.019	10 8.4 0.305	10 11.2 0.129	28
מקרו כלכלה	9 10.8 0.3	9 10.8 0.3	18 14.4 0.9	36
מבוא לסוציולוגיה	7 9.0 0.444	14 9.0 2.778	9 12.0 0.75	30
פסיכולוגיה חברתית	21 16.8 1.05	12 16.8 1.371	23 22.4 0.016	56
סה"כ	45	45	60	150

$$\chi^2 = 0.019 + 0.305 + ... + 1.371 + 0.016 = 8.362 \Rightarrow r_c = \sqrt{\frac{8.362}{150 \cdot 2}} \cong 0.167$$

מדד למדה

$$\begin{cases} L_x = 150 - 56 = 94 \\ L_{x|y} = 150 - (21 + 14 + 23) = 92 \end{cases} \Rightarrow \lambda_{x|y} = \frac{94 - 92}{94} = \frac{2}{94} \cong 0.021$$

$$\begin{cases} L_y = 150 - 60 = 90 \\ L_{y|x} = 150 - (10 + 18 + 14 + 23) = 85 \end{cases} \Rightarrow \lambda_{x|y} = \frac{90 - 85}{90} = \frac{5}{90} \cong 0.055$$

<u>פתרון בחינה מס' 4</u>

<u>חלק א'</u>

<u>שאלה 1</u>

א) **לא נכון** $\left(A\cap B\right)=\left\{זנב,זנב,ראש\right\}\neq\Phi$ ומכאן שהמאורעות אינם זרים.

ב) **נכון** בהתפלגות א-סימטרית חיובית הממוצע גדול מהשכיח ולכן המונה של ציון התקן של השכיח שלילי ומכאן שציון התקן של השכיח שלילי.

ג) **לא נכון** הגדלת הטווח "מלמטה", כלומר הוספת נתונים עם ערכים הקטנים מהערך המינימלי של הנתונים המקוריים, מקטינה את הממוצע אבל מגדילה את הפיזור (וסטיית התקן היא מדד פיזור).

ד) **נכון** אם נבנה את טבלת השכיחויות המשותפת נקבל:

	בנים	בנות	סה"כ
בכור/ה	9	5	14
לא בכור/ה	9	15	24
סה"כ	18	20	38

ה) **לא נכון** $$P\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\frac{\left(6\right)_3}{6^3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{6^3}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

<u>חלק ב'</u>

<u>שאלה 2</u>

א) נתרגם את טבלת השכיחות עם השכיחויות היחסיות ונוסיף עמודות:

מספר סיגריות ליום	רוחב מחלקה	אמצע מחלקה	שכיחות יחסית	שכיחות	שכיחות מצטברת	צפיפות
0 - 10	10	5	0.06	18	18	1.8
10 - 20	10	15	0.43	129	147	12.9
20 - 40	20	30	0.36	108	255	5.4
40 - 80	40	60	0.15	45	300	1.125

על-סמך זאת נוכל לחשב את המדדים:

<u>שכיח</u>: אמצע המחלקה הצפופה ביותר $Mo=15$

<u>חציון</u>: $$Md=20+\frac{150-147}{108}\cdot20=20.556$$

<u>ממוצע</u>: $$\overline{X}=\frac{5\cdot18+15\cdot129+30\cdot108+60\cdot45}{300}=\frac{7{,}965}{300}=26.55$$

ב) <u>ס.תקן</u>: $$s=\sqrt{\frac{5^2\cdot18+15^2\cdot129+30^2\cdot108+60^2\cdot45}{300}-26.55^2}=\sqrt{257.348}=16.0421$$

ג) נשתמש בטרנספורמציה לינארית: $Y=0.4X$. אם המחיר של 20 סיגריות הוא 8 ש"ח, הרי שהמחיר לסיגריה הוא 40 א"ג (או 0.4 ש"ח).

<u>שכיח</u>: $Mo\left(Y\right)=0.4\cdot15=6$

<u>חציון</u>: $Md\left(Y\right)=0.4\cdot20.556=8.2224$

<u>ממוצע</u>: $\overline{Y}=0.4\cdot26.55=10.62$

<u>ס. תקן</u>: $s_Y=0.4\cdot16.0421=6.417$

ד) נחשב את C_{35} :

$$C_{35}=\left[\frac{35-20}{40-20}\cdot 108+147\right]\frac{100}{300}=76\%$$

כלומר : 76% מעשנים פחות מ-35 סיגריות ביום, ולכן 24% מעשנים יותר מ-35 סיגריות ביום. 24% מתוך 300 הם 72.
לסיכום : 72 מעשנים מהמדגם מעשנים יותר מ-35 סיגריות ביום.

ה) <u>שכיח</u> *ללא שינוי* אמנם הקטנת רוחב המחלקה האחרונה מגדילה את הצפיפות אך המחלקה הצפופה ביותר לא משתנה.
<u>חציון</u> *ללא שינוי* חישוב החציון מתבסס על מחלקות שלפני המחלקה האחרונה, ולכן לשינוי בנתוני המחלקה האחרונה אין השפעה על החציון.
<u>ממוצע</u> *יקטן* אמצע המחלקה האחרונה קטן ולכן המונה של הממוצע יקטן. גודל המדגם ללא שינוי ולכן המכנה ללא שינוי.
<u>ס.תקן</u> *תקטן* הקטנת רוחב המחלקה האחרונה מקטינה את הפיזור.

<u>שאלה 3</u>

$X\sim N\left(500,40^2\right)$ - משקל (בגרמים)

א) $z_{0.1}=-z_{0.9}=-1.282\Rightarrow x_{10\%}=500-1.282\cdot 40=448.72$

ב)
$$P(X<480)+P(X>560)=1-P(480<X<560)=1-\left[\Phi\left(\frac{560-500}{40}\right)-\Phi\left(\frac{480-500}{40}\right)\right]=$$
$$=1-\Phi(1.5)+\Phi(-0.5)=1-\Phi(1.5)+1-\Phi(0.5)=1-0.9332+1-0.6915=0.3753$$

ג)
$$P(X<460)=\Phi\left(\frac{460-500}{40}\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587$$

נגדיר : X- מספר העוגות שמשקלן נמוך מ-460 גרם.
ולכן $20-X$ - מספר העוגות שמשקלן גבוה מ-460 גרם.
ולכן $X\sim B(20,0.1587)$:

$$E(X)=20\cdot 0.1587=3.174$$
$$V(X)=20\cdot 0.1587\cdot 0.8413=2.6703$$

Y - ההכנסה ממכירת 20 העוגות

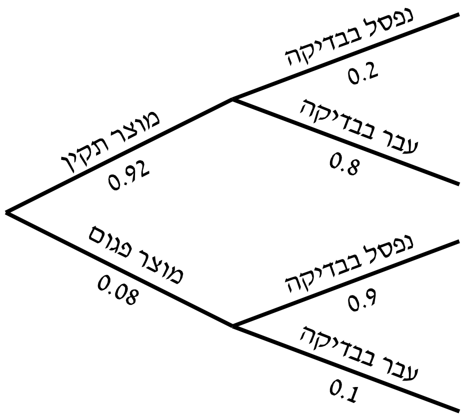
$$Y=50X+75(20-X)=50X+1{,}500-75X=1{,}500-25X$$

לכן, תוחלת ושונות ההכנסה הכוללת היא :

$$E(Y)=1{,}500-25E(X)=1{,}500-25\cdot 3.174=1{,}420.65$$
$$V(Y)=25^2V(X)=625\cdot 2.6703=1{,}668.94$$

<u>שאלה 4</u>

נשרטט דיאגרמת עץ לבעיה:



א) $P(\text{יפסל})=0.92\cdot 0.2+0.08\cdot 0.9=0.256$

ב) $P(\text{תקין}|\text{נפסל})=\dfrac{0.92\cdot 0.2}{0.256}=0.71875$

ג) (1) מספר המוצרים הפסולים $X \sim B(15,0.256)$ ולכן מחפשים את $P(X\le 2)$:

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0.744^{15}+15\cdot 0.256\cdot 0.744^{14}+\binom{15}{2}\cdot 0.256^{2}\cdot 0.744^{13}=$$

$$=0.012+0.061+0.147=0.22$$

(2) מספר המוצרים שאינם פסולים $Y \sim B(15,0.744)$ ולכן

$$E(Y)=15\cdot 0.744=11.16$$
$$V(Y)=15\cdot 0.744\cdot 0.256=2.857$$

<u>שאלה 5</u>

א) נחשב את מיתאם פירסון:

$$r=\frac{60\cdot 4{,}032-300\cdot 720}{\sqrt{(60\cdot 1{,}740-300^{2})(60\cdot 9{,}600-720^{2})}}=$$

$$=\frac{25{,}920}{\sqrt{14{,}400\cdot 57{,}600}}=\frac{25{,}920}{28{,}800}=0.9$$

ב) נחשב את קו הניבויים $\tilde{y}=a+bx$:

$$b=r\frac{s_y}{s_x}=0.9\sqrt{\frac{60\cdot 9{,}600-720^{2}}{60\cdot 1{,}740-300^{2}}}=0.9\sqrt{\frac{57{,}600}{14{,}400}}=1.8$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}=\frac{720}{60}-1.8\frac{300}{60}=3$$

לכן נקבל: $\tilde{y}=3+1.8x$ ומכאן $\tilde{y}_{|x=7}=3+1.8\cdot 7=15.6$.

כלומר: במפעל שבו 7 עובדים נצפה לתפוקה יומית של 15.6 יחידות.

ג) $r^{2}=\dfrac{s_{\tilde{y}}^{2}}{s_{y}^{2}}\Rightarrow 0.9^{2}=\dfrac{s_{\tilde{y}}^{2}}{16}\Rightarrow s_{\tilde{y}}^{2}=0.9^{2}\cdot 16=12.96$

$$s_{y}^{2}=s_{\tilde{y}}^{2}+s_{y-\tilde{y}}^{2}\Rightarrow s_{y-\tilde{y}}^{2}=s_{y}^{2}-s_{\tilde{y}}^{2}=16-12.96=3.04$$

פתרון בחינה מס' 5

חלק א' - שאלה 1

א) **לא נכון** אם כל התצפיות ששוות בערכי x שלהן שוות גם בערכי y שלהן, $\eta_{y/x}=1$, אבל ההיפך לא בהכרח מתקיים.

ב) **נכון** $$E(X)=100,000\cdot\frac{1}{10^6}+50,000\cdot\frac{2}{10^6}+5,000\cdot\frac{10}{10^6}=0.1+0.1+0.05=0.25$$

כאשר X-גובה הזכיה מכרטיס אחד. ולכן:

$$E(X_1+X_2+...+X_{10})=10\cdot 0.25=2.5$$

ג) **לא נכון** $X\sim B\left(4,\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\right)$ - מספר ההטלות עם סכום תוצאות לפחות 11.

$$P\left(X\geq 1\right)=1-\left(\frac{11}{12}\right)^4 .$$

ד) **לא נכון** אם לדוגמה הנתונים שהוספו שווים כולם לממוצע הרי שהמונה של השונות (סכום ריבועי הסטיות מהממוצע) לא משתנה והמכנה של השונות (גודל המדגם) גדל. לכן השונות כולה תקטן וכך גם סטיית התקן.

ה) **לא נכון** $$P\left(\text{אשה}\middle|\text{עיוור \_ צבעים}\right)=\frac{P\left(\text{אשה}\cap\text{עיוור \_ צבעים}\right)}{P\left(\text{עיוור \_ צבעים}\right)}=\frac{0.5\times 0.02}{0.5\times 0.02+0.5\times 0.06}=\frac{0.01}{0.04}=0.25$$

חלק ב'

שאלה 2

א) (1) $$P\left(A\cap B^C\right)=P(A)-P(A\cap B)=0.6-0.15=0.45$$

(2) $$P\left(B\middle|A^C\right)=\frac{P\left(A^C\cap B\right)}{P\left(A^C\right)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{0.25-P(A\cap B)}{0.4}=0.5$$

נחלץ את הסתברות החיתוך ונקבל: $P(A\cap B)=0.05$ ומכאן -

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.25-0.05=0.8$$

(3) $$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\right)P\left(B\right)=0.6+0.25-0.6\cdot 0.25=0.7$$

ב) $$\Leftarrow P\left(A\middle|B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\overset{?}{=}\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=P\left(B\middle|A\right)$$

שוויון יתקיים כאשר $P(A)=P(B)$ או כאשר $P\left(A\cap B\right)=0$.

ג) $$P\left(A\cup B\right)=1-P(A^C\cap B^C)=1$$

שאלה 3

א) מדובר כאן בשני משתנים מסולם סדר ולכן יש לחשב את מדד ספירמן. נחשב את הדרגות (מ1- עד 8) לכל אחד מהמשתנים, לאחר מכן נחשב את הפרש ריבועי הדרגות לכל נהג ונסכם ונציב בנוסחת המדד:

ניסיון הנהג	7	2	4.5	2	7	7	2	4.5	
מידת סובלנות	8	5	5	3	7	5	1	2	
הפרש ריבועי הדרגות	1	9	0.25	1	0	4	1	6.25	

$$\sum_{i=1}^{8}d_i^2=22.5$$

$$\Rightarrow r_s = 1 - \frac{6 \cdot 22.5}{8 \cdot \left(8^2 - 1\right)} = 1 - \frac{135}{504} \cong 0.732$$

ב) נבנה טבלת שכיחות דו-מימדית ונחשב את מדדי הקשר למשתנים שמיים (קרמר ולמדה):

		מין X		
		גבר	אישה	סה"כ
מספר עבירות Y	≤ 1	35	45	80
	2	32	18	50
	≥ 3	58	12	70
סה"כ		125	75	200

<u>מדד קרמר</u>

נחשב את טבלת הערכים הצפויים וערכי χ^2:

		מין X	
		גבר	אישה
מספר עבירות Y	≤ 1	$\frac{80 \cdot 125}{200} = 50$	$\frac{80 \cdot 75}{200} = 30$
	2	$\frac{50 \cdot 125}{200} = 31.25$	$\frac{50 \cdot 75}{200} = 18.75$
	≥ 3	$\frac{70 \cdot 125}{200} = 43.75$	$\frac{70 \cdot 75}{200} = 26.25$

$$\Rightarrow \chi^2 = 4.5 + 7.5 + 0.018 + 0.03 + 4.641 + 7.736 = 24.425$$

$$\Rightarrow r_c = \sqrt{\frac{24.425}{200}} \cong 0.3495$$

<u>מדדי למדה</u>

$$\left.\begin{aligned} L_X &= 200 - 125 = 75 \\ L_{X|Y} &= (80-45) + (50-32) + (70-58) = 35 + 18 + 12 = 65 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_{X|Y} = 1 - \frac{65}{75} \cong 0.1333$$

$$\left.\begin{aligned} L_Y &= 200 - 80 = 120 \\ L_{Y|X} &= (125-58) + (75-45) = 67 + 30 = 97 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_{Y|X} = 1 - \frac{97}{120} \cong 0.1916$$

<u>שאלה 4</u>

א) $X \sim N(18,4^2)$ - הטמפרטורה בירושלים בימי החורף.

נחשב את ההסתברות לקיום טיול בכל אחת מהחברות - החברה שלה ההסתברות הגבוהה ביותר לקיום טיול היא החברה שמומלצת להירשם אליה.

$$P(\text{החברה\_להגנת\_הטבע}) = P(12 \le X \le 26) = \Phi\left(\frac{26-18}{4}\right) - \Phi\left(\frac{12-18}{4}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1.5) =$$

$$= \Phi(2) - [1 - \Phi(1.5)] = \Phi(2) - 1 + \Phi(1.5) = 0.9772 - 1 + 0.9332 = 0.9104$$

$$P(\text{טיולים\_בכיף}) = P(X \geq 13) = 1 - P(X < 13) = 1 - \Phi\left(\frac{13-18}{4}\right) = 1 - \Phi(-1.25) =$$
$$= 1 - [1 - \Phi(1.25)] = \Phi(1.25) = 0.8944$$

<u>מסקנה:</u> בחברה להגנת הטבע הסיכוי לקיום טיול הוא גבוה יותר, לכן ההמלצה היא להירשם לטיול לשם.

ב) שני הטיולים יתבטלו כאשר הטמפרטורה תהי הנמוכה מ- 12° בהסתברות:

$$P(X \leq 12) = \Phi\left(\frac{12-18}{4}\right) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

ג) (1) נחשב את ההסתברות לביטול יום לימודים:

$$P(X \leq 8) = \Phi\left(\frac{8-18}{4}\right) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

ב- 0.62% מהימים לא מתקיימים לימודים.

(2) $Y \sim B(75, 0.0062)$ - מספר ימי הלימוד שבהם לא יתקיימו לימודים.

לכן: $\sigma_Y = \sqrt{75 \cdot 0.0062 \cdot 0.9938} \cong 0.68$; $E(Y) = 75 \cdot 0.0062 = 0.465$

<u>שאלה 5</u>

א) המאון העשירי הוא הערך של התצפית ה- 20, כלומר השכיחות המצטברת של המחלקה הראשונה היא 20 וכך גם השכיחות הרגילה של המחלקה הראשונה.

בגלל הסימטריות - השכיחות הרגילה של המחלקה האחרונה היא גם 20 (השכיחות המצטברת שלה היא 200 - סה"כ מספר התלמידים). לפיכך השכיחות המצטברת של המחלקה הלפני אחרונה (80-85) היא 180.

הרבעון העליון הוא הערך של התצפית ה- 150, כלומר השכיחות המצטברת של השלישית (70-80) הוא 150 ולכן השכיחות הרגילה של המחלקה הלפני אחרונה (80-85) היא 30.

בגלל הסימטריות - השכיחות הרגילה של המחלקה השניה (65-70) היא גם 30.

נותר להשלים את השכיחות הרגילה של המחלקה האמצעית (70-80) ע"י הפחתה של 200 מיתר השכיחויות הרגילות - השכיחות המתקבלת היא 100.

לבסוף - נשלים את השכיחויות המצטברות. מתקבלת טבלת השכיחויות הבאה:

ציון	מספר תלמידים	שכיחות מצטברת
50-65	20	20
65-70	30	50
70-80	100	150
80-85	30	180
85-100	20	200

ב) היות וההתפלגות היא סימטרית הרי שכל מדדי המיקום המרכזי מתלכדים ולכן:

$$\bar{x} = Mo = Md = MR = 75$$

ג) $5.75 = \frac{1150}{200} = \frac{(|57.5-75| \cdot 20 + |67.5-75| \cdot 30) \cdot 2}{200} =$ ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון

ד) $\bar{y} = Mo_y = Md_y = 0.8 \cdot 75 + 20 = 80$

ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון $(Y) = 0.8 \cdot 5.75 = 4.6$