חדו"א א (20406) . סמסטר 2024א

תאריך הבחינה. 29.2.2024

מועד הבחינה - מועד א1 , מועד 87

מבנה הבחינה:

יש לענות על שאלות 1-4 בחלק א וכן לענות על 3 שאלות מבין 5-8 בחלק ב .

כל חומר עזר מותר בשימוש

פתרון הבחינה . כתב: חזי נוימן

חלק ראשון - שאלות סגורות 1-4 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{7}$ נקודות

סמנו מהי התשובה הנכונה בעמוד האחרון של המחברת במקום המיועד לכך .

לחילופין , ניתן לרשום את התשובות בעמוד הראשון של המחברת בצורה ברורה.

לא נדרש נימוק - רק סימון במחברת מהי התשובה הנכונה.

אם אינכם יודעים את התשובה כדאי לנחש. אנו סופרים רק תשובות נכונות ולא מורידים ניקוד על טעויות.

שאלה 1 – שאלה סגורה

לפונקציה $f(x)$ מעבירים בנקודה $(1,4)$ משיק שמשוואתו $y=6-2x$.

מה השיפוע של הפונקציה $f(\frac{1}{x})$ בנקודה בה $x=1$?

א. $-\frac{1}{2}$ ב. -1 ג. 0 ד. 3 ה. 2

ו. אין תשובה נכונה מבין האפשריות א-ה .

פתרון 1 - $\boxed{\text{ה}}$

מנתוני השאלה נסיק: $f(1)=4$ וגם $f'(1)=-2$. נחשב ישירות...

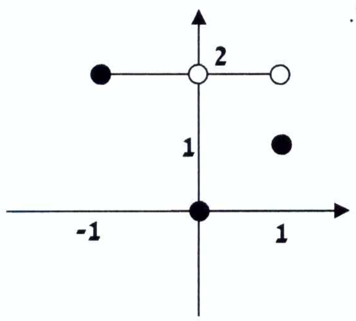
$$\left[f(\tfrac{1}{x})\right]' = f'(\tfrac{1}{x})\cdot(-\tfrac{1}{x^2}) \underset{x=1}{=} f'(1)\cdot(-1) = 2$$

שאלה 2 – שאלה סגורה

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-1,1]$ והגרף שלה באיור.

לפניכם שלוש טענות הממוספרות 1-3 .

קבעו מהן הטענות הנכונות.



1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2}=1$.

2) לפונקציה יש מקסימום מוחלט בקטע $(-1,1)$.

3) לפונקציה יש מינימום מוחלט בקטע הסגור $[0,1]$.

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1   ב. 2   ג. 3   ד. 1,2

ה. 1,3   ו. 2,3   ז. 1,2,3   ח. כל הטענות לא נכונות

פתרון 2 - $\boxed{\text{ז}}$

טענה 1 נכונה:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

טענה 2 נכונה: בקטע הפתוח הגרף בגובה 2 למעט נקודה אחת בה הוא 0. לאור זאת הערך הכי גדול הוא 2 וזהו מקסימום מוחלט.

טענה 3 נכונה: הערך הכי קטן הוא 0 וזה קורה בנקודה $x=0$. כל שאר הערכים חיוביים.

שאלה 3 – שאלה סגורה

מצאו את ערך הגבול: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\frac{1}{x})^3-(1-\frac{1}{x})^2}{(1-x^2)^2}$.

א. -0.5 ב. -0.25 ג. -1 ד. -1.25 ה. -2 ו. ∞

פתרון 3 - $\boxed{ב}$

אסדר את הפו׳ !

$$y=\frac{(1-\frac{1}{x})^3-(1-\frac{1}{x})^2}{(1-x^2)^2}=\frac{(1-\frac{1}{x})^2\cdot\left[(1-\frac{1}{x})-1\right]}{(1-x^2)^2}=\frac{(1-\frac{1}{x})^2\cdot(-\frac{1}{x})}{(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{\frac{(x-1)^2}{x^2}\cdot(-\frac{1}{x})}{(1-x)^2\cdot(1+x)^2}=\frac{\cancel{(x-1)^2}\cdot(-\frac{1}{x^3})}{\cancel{(1-x)^2}\cdot(1+x)^2}$$

צמצום כי: $\frac{(x-1)^2}{(1-x)^2}=1$.

$$=1\cdot\frac{-1/x^3}{(1+x)^2}\xrightarrow{x\to 1}\frac{-1/1^3}{(1+1)^2}=-\frac{1}{4}$$

שאלה 4 – שאלה סגורה

הפונקציות $g(x)$, $f(x)$ רציפות לכל איקס.

מי מבין הפונקציות הבאות C , B , A חייבת להיות רציפה לכל איקס?

$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\left(f(x)\right)^2} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}\qquad B(x)=\sqrt{1+|f(x)|}\qquad C(x)=\frac{1}{3-e^{\cos(g(x))}}$$

א. A ב. B ג. C

ד. A,B ה. A,C ו. B,C

ז. כולן רציפות לכל איקס.

ח. אף לא אחת מבין C , B , A בהכרח רציפה לכל איקס

פתרון 4 - $\boxed{ו}$

- אם $f(x)=0$ לכל x אזי מיד רואים כי $A(x)$ לא רציפה בנקודה $x=0$.
- $f(x)$ רציפה לכל x לכן ההרכבה $|f(x)|$ רציפה לכל X כהרכבת רציפות לכלת. לכן $1+|f(x)|$ רציפה לכל x ובפרט לכל x היא חיובית! לאור זאת הרכבה עם $\sqrt{x}$ תניב רציפה לכל x. לכן $B(x)$ רציפה לכל x.
- ההרכבה $e^{\cos(g(x))}$ רציפה לכל X כהרכבת רציפות לכל X.

נמקו: $\frac{1}{e}\le e^{\cos(g(x))}\le e$

לכן $C(x)$ רציפה לכל x !

חלק שני - שאלות פתוחות 5-8 . השיבו על $\boxed{3}$ שאלות בחלק זה

משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{24}$ נקודות.

שאלה 5

(12 נק') א. הוכיחו כי לכל x בקטע הסגור $[0,1]$ מתקיים $\sin(x) \le x$.

(12 נק') ב. בחרו **אחד** מבין הטורים הבאים והוכיחו כי הוא מתכנס.

(באחד הטורים ניתן להיעזר אם תרצו בסעיף א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n)}{1+n^2} \; .$$

פתרון שאלה 5, סעיף א.

נגדיר $f(x)=\sin x - x$. פו' רציפה בקטע סגור. לכן יש קיצון מוחלט בקטע.

פו' גזירה ולכן $f'=\cos x-1$. הנגזרת שלילית בקטע הפתוח $(0,1)$ ולכן f יורדת

בקטע הפתוח. מתוך הרציפות של f נובע שהיא יורדת בקטע הסגור!

אי לכך, לכל $0\le x\le 1$ נסיק $\underbrace{f(0)}_{0}\ge f(x)\ge f(1)$ כלומר ... $0\ge \sin x - x$

לכן $\sin x \le x$ בקטע שלנו. סיימנו.

פתרון שאלה 5, סעיף ב.

$$\sum\left|\frac{\sin(2^n)}{n^2+1}\right| = \sum\frac{|\sin(2^n)|}{n^2+1} \le \sum\frac{1}{n^2+1} \le \sum\frac{1}{n^2}$$

הוכחנו כי $\sum\cdots$ מתכנס בהחלט. לכן זהו בפרט מתכנס.

היינו חייבים $|\;|$ כי $\sin(2^n)$ יכול להיות שלילי!

הביטוי $0<\frac{1}{n}\le 1$ לכל n טבעי. לאור זאת נסיק: $0\le\sin(\frac{1}{n})\le\frac{1}{n}$.

כאן למעשה השתמשנו ב- $\sin x\le x$ בקטע $[0,1]$.

לכן

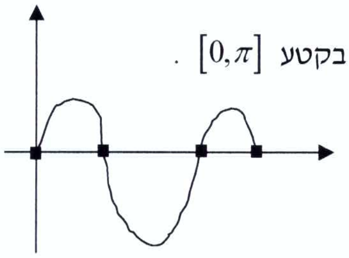
$$\sum\frac{\sin(1/n)}{n} \le \sum\frac{1/n}{n} = \sum\frac{1}{n^2}$$

מותר מבחן השוואה כי $\sin(\frac{1}{n})$ חיובי.

והנה הוכחנו התכנסות.

שאלה 6

(12 נק') א. הנה גרף הפונקציה $f(x) = \cos(2x) \cdot \sin x$ בקטע $[0,\pi]$.



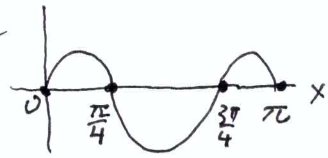
מה גודלו של השטח הכלוא בין הגרף
ובין ציר איקס בקטע הנתון.
יש לפרט את חישוב האינטגרל המתאים.

(12 נק') ב. תהי $u(x)$ פונקציה רציפה וחיובית בקטע $[1,\infty)$.

- הוכיחו כי האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{(x+u(x))^2}dx$ מתכנס .
- האם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{(1+u(x))^2}dx$ חייב להתכנס ?

אם כן הוכיחו זאת אם לא הציגו דוגמא נגדית מנומקת ופשוטה .

פתרון שאלה 6, סעיף א.



✓ בקטע שלנו הפתוח $\sin x$ לא מתאפס. בקצוות מתאפס.

✓ בקטע שלנו הסגור: $\cos(2x)=0 \iff x=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

✓ סימנו את הנקודות כולן על צ- x.

$$\int f(x)dx = \int \cos(2x)\sin x\, dx = \int(\cos^2 x - \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x})\cdot \sin x\, dx = \int(2\cos^2 x - 1)\cdot \sin x\, dx$$

$$= \int(2t^2-1)(-dt) = t - \frac{2}{3}t^3 + k$$ .... ונקבל: $\begin{cases} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{cases}$ נציב:

$$\Rightarrow \int f(x)dx = F(x) = \cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + k \, !$$

שטח $[0, \frac{\pi}{4}]$ $= \int_0^{\pi} f(x)dx = F(\frac{\pi}{4}) - F(0)$ ✓

שטח $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ $= \int_{\pi/4}^{3\pi/4}(0 - f(x))dx = -\int_{\pi/4}^{3\pi/4} f(x)dx = -\left[F(\frac{3\pi}{4}) - F(\frac{\pi}{4})\right] = F(\frac{\pi}{4}) - F(\frac{3\pi}{4})$ ✓

שטח $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ $= \int_{3\pi/4}^{\pi} f(x)dx = F(\pi) - F(\frac{3\pi}{4})$ ✓

שטח מבוקש $= F(\frac{\pi}{4}) - F(0) + F(\frac{\pi}{4}) - F(\frac{3\pi}{4}) + F(\pi) - F(\frac{3\pi}{4}) = \dots = \frac{\sqrt{32}-2}{3}$ ✓

פתרון שאלה 6, סעיף ב.

(1) $u(x)>0$ ורציפה. לאור זאת $x+u(x) \geq x \geq 1$ כלומר:

$(x+u(x))^2 \geq x^2$ ולכן...

$$\frac{1}{(x+u(x))^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+u(x))^2} \leq \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}}_{\substack{\text{הרמוני} \\ p=2 \\ \text{מתכנס.}}} < \infty \Rightarrow$$

האינטגרל שלנו מתכנס.

(2) נבחר $u(x)=1$ אזי רציפה וחיובית. אזי...

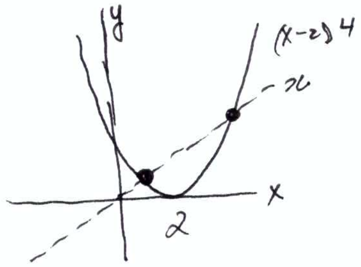
$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+u(x))^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{(1+1)^2} = \int_1^\infty \frac{1}{4}\,dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_1^\infty = \infty$$

סיימנו.

שאלה 7

(12 נקי') א. כמה שורשים יש למשוואה $(x-2)^4 = x$. נמקו היטב .

(12 נקי') ב. מה השיפוע של גרף הפונקציה $u(x) = |x-2| \cdot \sin(\pi x)$ בנקודות הבאות $x = 0.5$, $x = 2$? אם השיפוע אינו מוגדר הוכיחו זאת.



פתרון שאלה 7, סעיף א.

אינטואיציה בשביל הכיף: מקבלים 2 נקודות חיתוך.

נגדיר: $p(x) = (x-2)^4 - x$

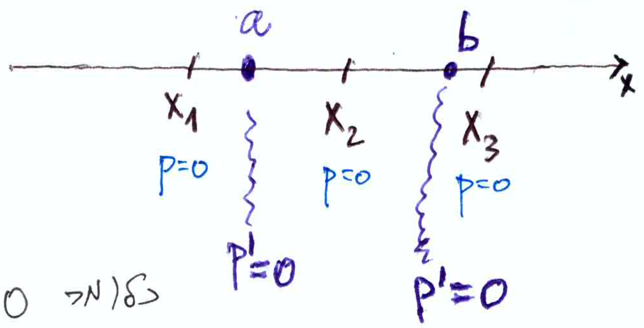
זהו פולינום (מעלה 4) ולכן רציפה לכל x.

$p(0)=16$; $p(2)=-2$; $p(4)=12$

בקטעים $[0,2]$; $[2,4]$ הפולינום מחליף סימן ולכן לפי קושי בתוך $(0,2)$; $(2,4)$ יש לפחות שורש אחד.

ולכן יש לפחות 2 שורשים. (שימו לב הקטעים לא חופפים)

אם יש היכן שהוא עוד שורש כלומר אם ל- p יש 3 שורשים אזי לפי רול $p'=0$ לפחות פעמיים.



כלומר $p'(a)=p'(b)=0$.

אבל: $P'(x) = 4(x-2)^3 - 1 = 0 \rightarrow (x-2)^3 = 1/4$

$\rightarrow x-2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

$\rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{1/4}$ שורש יחיד לנגזרת.

סתירה! לכן ל- P יש רק שני שורשים. סיימנו.

פתרון שאלה 7, סעיף ב.

• בנקודה $x=\frac{1}{2}$, בסביבה קטנה נוכל להציג את $u(x)$ כך:

$$u(x)=|x-2|\cdot\sin(\pi x)=-(x-2)\sin(\pi x)=(2-x)\sin(\pi x)$$

$$\frac{du}{dx}=(2-x)\cdot\pi\cdot\cos(\pi x)+(-1)\cdot\sin(\pi x)$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}}=1\tfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{\boxed{0}}+(-1)\cdot\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{\boxed{1}}=-1 \checkmark$$

• בנקודה $x=2$ הביטוי $|x-2|$ לא גזיר ולכן נפנה להגדרת הנגזרת: (כן, כן, מותר מנפנף עם ט180)

$$u'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{u(2+h)-u(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|2+h-2|\sin(\pi(2+h))-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot\sin(2\pi+2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|\sin(2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}|h|\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2h)}{h}=|0|\cdot 2=0 \checkmark$$

כזכור

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(kh)}{h}=k$$

שאלה 8

(9 נק') א. הדגימו $f(x)$ מוגדרת לכל x שאינה רציפה בנקודה $x=0$ אבל ההרכבה $\sin(f(x))$ רציפה לכל x .

(15 נק') ב. נגדיר, לכל x , את הפונקציה: $f(x)=(1-x)e^{x}-k$. (k פרמטר קבוע)

1) הוכיחו כי לפונקציה נקודת מקסימום מקומית יחידה.

2) האם המקסימום המקומי הוא גם מקסימום מוחלט?

3) מה התנאי על הקבוע k שיבטיח כי הפונקציה תהייה שלילית לכל x .

פתרון שאלה 8, סעיף א.

$$f(x)=\begin{cases}\pi & x\geq 7\\ 0 & x<7\end{cases}$$

נבחר

f(x) לא רציפה בנקודה $x=7$.

ההרכבה היא לכל x, $y=\sin(f(x))=0$.

סיימנו.

פתרון שאלה 8, סעיף ב.

תחילה נגזור ואז נסיק: $f'(x)=-x\cdot e^{x}$

(1) בפו' גזירה לכל x. תנאי הכרחי לקיצון מקומי כבן גזירה הוא $f'=0$. הנגזרת שלנו מתאפסת רק ב- $x=0$ ולכן יש לכל היותר קיצון אחד. אם היה עוד קיצון $f'=0$ פעמיים וסתירה.

האם $x=0$ קיצון? מה טיבו?

$f'>0$ | 0 | $f'<0$

לכן MAX מקומי יחיד בנקודה $(x=0,\ f(0)=1-k)$.

(2) קיצון מקומי יחיד הוא מוחלט!

(3) $f(x)\leq 1-k$. אם $k>1$ אז f שלילית!