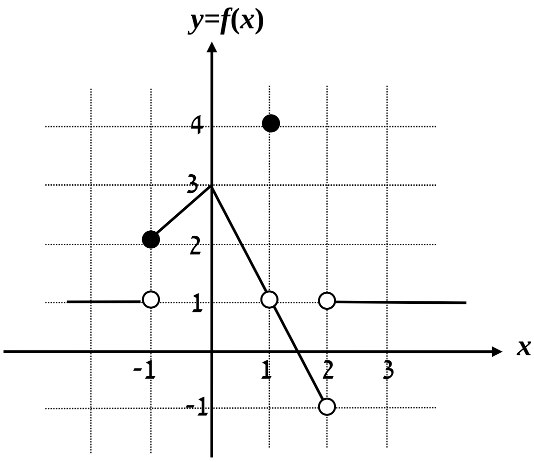
חדו"א א 20406 - פתרון ממ"ן 11 , 2023א   כתב: חזי נוימן

שאלה 1 - חישובי גבולות מהפן הגרפי



השאלה מבוססת על התבוננות באיור .

א. חשבו את הביטויים הבאים 1-4 .

נמקו לפחות חלק מהקביעות שלכם .

1) $f(1)$ 2) $\lim_{x\to 2} f(x)$

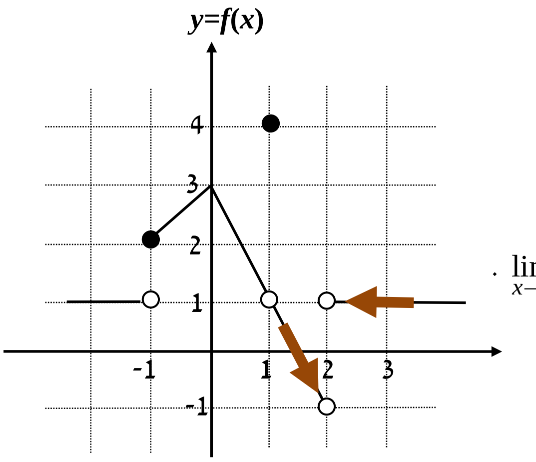
3) $\lim_{x\to 1} f(x)$ 4) $\lim_{x\to -1} f(x)$

ב. מצאו את הגבולות הבאים :

$\lim_{x\to 2}\left(3f-f^2\right)$, $\lim_{x\to -1}\left(3f-f^2\right)$.

ג. מצאו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהגבול לא קיים : $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{1-f(x)}$; $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{4-f(x)}$.

פתרון שאלה 1 סעיף א



2) החיצים בצבע חום מראים כי

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-1$ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=1$

ולכן הגבול $\lim_{x\to 2} f(x)$ לא קיים.

1+3) אשאיר לכם לנמק כי $f(1)=4$ ו - $\lim_{x\to 1} f(x)=1$.

4) $\lim_{x\to -1} f(x)$ גם כאן הגבולות מימין ומשמאל שונים ולכן אין גבול. הוסיפו חיצים להבהרת העניין.

פתרון שאלה 1 סעיף ב

הגבולות המבוקשים הם עבור $x\to 2$, $x\to -1$ ובדיוק ראינו בסעיף הקודם כי הגבול של הפונקציה לא קיים. לאור זאת נסיק כי... לא נוכל להפעיל אריתמטיקה על מנת לחשב את הגבולות בסעיף זה.

מה ניתן לעשות ?

נבחן לבחון אריתמטיקה חד צדדית.

מותר לנו כי הגבולות החד צדדיים קיימים.

ובכן,

$$\lim_{x\to 2^+}\left(3f-f^2\right)=\lim_{x\to 2^+}3\cdot\lim_{x\to 2^+}f-\lim_{x\to 2^+}f\cdot\lim_{x\to 2^+}f=3\cdot 1-1\cdot 1=2$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left(3f-f^2\right)=\lim_{x\to 2^-}3\cdot\lim_{x\to 2^-}f-\lim_{x\to 2^-}f\cdot\lim_{x\to 2^-}f=3\cdot(-1)-(-1)\cdot(-1)=-3-1=-4$$

המסקנה : $\lim_{x\to 2}\left(3f-f^2\right)$ לא קיים כי הגבולות מימין ומשמאל שונים.

מה לגבי הגבול השני?

בקיצור נמרץ....

$$\lim_{x\to-1^+}\left(3f-f^2\right)=3\cdot2-(2)^2=2$$
$$\lim_{x\to-1^-}\left(3f-f^2\right)=3\cdot1-(1)^2=2$$

המסקנה : $\lim_{x\to-1}\left(3f-f^2\right)=2$.

פתרון שאלה 1 סעיף ג

לפי אריתמטיקה $$\lim_{x\to1}\frac{1}{4-f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}$$

וכעת לקינוח הגענו לגבול הכי קשה בשאלה שלנו, $\lim_{x\to1}\frac{1}{1-f(x)}$. הגבול של f קיים וערכו 1 (חס וחלילה לא לחשוב שהוא 4) לאור זאת **אסור** להיעזר באריתמטיקת מנה לחישוב הגבול המבוקש כי המכנה יישאף לאפס !

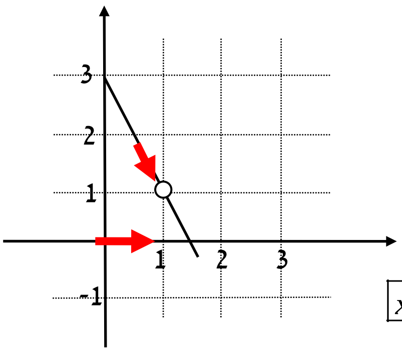
מה עושים ? קראו לאט , בזהירות עם עט ונייר.

נעיין בגבולות מימין משמאל של הביטוי $\frac{1}{1-f(x)}$. נראה כי גבולות אלה שונים ולכן הגבול לא קיים.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-f(x)}=\text{"}\frac{1}{1-1^+}\text{"}=\text{"}\frac{1}{0^-}\text{"}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{1-f(x)}=\text{"}\frac{1}{1-1^-}\text{"}=\text{"}\frac{1}{0^+}\text{"}=\boxed{\infty}$$

האיור מראה כך :



איקסים ששואפים ל 1 מצד שמאל כלומר $\boxed{x\to1^-}$.

במצב זה ערכי הפונקציה על הגרף שואפים ל 1 אבל הם מעל אחד

כלומר ערכי הפונקציה גדולים מ 1 אבל מתקרבים ל 1 .

יוצא כי ההפרש $1-f(x)$ מתקרב לאפס אבל הוא שלילי.

כעת קראו שנית את הגרשיים. נסו להבין את הגרשיים עבור $\boxed{x\to1^+}$

הערות

שימו לב לכתיבה עם הגרשיים. כתיבה זאת מאפשרת לנו לרמוז בסימנים את מה שהיינו נדרשים לרשום במילים. הכתיבה במילים היא ארוכה ומייגעת. הנה ככה. כאשר $x\to1^+$ אזי לפי הגרף הפונקציה מתקרבת לערך 1 אבל דרך ערכים שקטנים מ 1 ולכן ההפרש במכנה שואף לאפס אבל דרך ערכים שגדולים מ 0 ולכן מקבלים במכנה שאיפה ל 0^+ . או אז המנה אחד חלקי תשאף לאיןסוף.

כדאי לעבור בעיון על כתיבת הגרשים מול הנימוק המילולי ולהבין היטב את הקשר בין הדבר. כעת תנסו לנסח לבד את "כתיבת הגרשיים" לגבי הגבול $x\to1^-$.

הערה נוספת : **כתיבת הגרשיים היא רק במקרים נדירים** שבהם אין לנו דרך אחרת. במרבית המקרים עושים הכל ללא כתיבה זאת.

שאלה 2 - חישובי גבולות, אריתמטיקה של גבולות

א. יהיו a,b,c קבועים שסכומם אפס, $a+b+c=0$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\left[a\sqrt{x}+b\sqrt{x+1}+c\sqrt{x+2}\right]=0$.

ב. חישובי גבולות ושימוש בהצבות .

סעיפים ב1, ב2 מדגימים תרגילים שקשה לחשב ללא הצבה מתאימה .

ב.1. הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$.

ב.2. חשבו את הגבולות הבאים $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan(\frac{\pi}{x})$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{x-1}$.

בכל גבול מעניין איזו הצבה בחרתם... .

ג. נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1}{f(x)}=L>0$. מהו ערך הגבול $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$? (אריתמטיקה של גבולות...)

פתרון שאלה 2 סעיף א

נרשום **c=-a-b** . נציב זאת בגבול המבוקש:

$$\lim_{x\to\infty}\left[a\sqrt{x}+b\sqrt{x+1}-(a+b)\sqrt{x+2}\right]=?$$

נסדר מעט:

$$\lim_{x\to\infty}\left[a(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})+b(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})\right]$$

הגבולות בתוך הסוגריים העגולים דומים. ניתן לחשב כל אחד מהם בנפרד. עושה רושם כי הטריק החישובי **זהה** בשני הביטויים - **כפל בצמוד** . עולה הרעיון לנסות ולחשב בבת אחת באופן הבא:

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+k}-\sqrt{x+2})$ כאשר עבור **k=0** או **k=1** מקבלים בדיוק את הביטויים למעלה. ובכן,

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+k}-\sqrt{x+2})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+k}-\sqrt{x+2})\cdot(\sqrt{x+k}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+k}+\sqrt{x+2})}\qquad\{(t-s)(t+s)=\dots\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+k)-(x+2)}{(\sqrt{x+k}+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{k-2}{(\sqrt{x+k}+\sqrt{x+2})}=0$$

סיכום:

$$\lim_{x\to\infty}\left[a(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})+b(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})\right]=a\cdot 0+b\cdot 0=0$$

פתרון שאלה 2 סעיף ב

❤ **הגבול** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a}$. ← גבול זה הוא מרכזי ויש להכיר אותו היטב.

נציב **y=ax** .

נקבל, לאור ההצבה ולאור משפט 2.8.3 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}\underbrace{=}_{y=ax}\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y/a}=a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}=a\cdot 1=a$$

הגבול $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}x\tan(\frac{\pi}{x})}$

נציב **y=π/x** .

נקבל, לאור ההצבה ולאור משפט 2.8.3 ולאור אריתמטיקת הכפל ולאור העובדה ש קוסינוס רציפה:

$$\lim_{x\to\infty} x\tan(\frac{\pi}{x}) \underbrace{=}_{y=\frac{\pi}{x}} \lim_{y\to 0}\frac{\pi}{y}\tan(y) = \lim_{y\to 0}\pi\cdot\frac{\sin(y)}{y}\cdot\cos(y) = \pi\cdot 1\cdot\cos(0) = \pi$$

➢ רק רגע: היכן השתמשנו במדויק במשפט 2.8.3, אריתמטיקת כפל, רציפות הקוסינוס ?

הגבול $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{x-1}}$

נציב **y= x-1** .

נקבל, לאור ההצבה ולאור שימוש בנוסחה טריגונומטרית ובמיוחד לאור שימוש בתוצאה הראשונה החשובה המסומנת ♥ :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{x-1} \underbrace{=}_{y=x-1} \lim_{y\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi(y+1)}{2})}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi y}{2}+\frac{\pi}{2})}{y}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\cos(t+s)=\ldots\\ \cos(\frac{\pi}{2})=0\\ \sin(\frac{\pi}{2})=1}} \lim_{y\to 0}\frac{-\sin(\frac{\pi y}{2})}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-\sin(\frac{\pi}{2}y)}{y} = (-1)\cdot\frac{\pi}{2} = -0.5\pi$$

פתרון שאלה 2 סעיף ג

הגבול הנתון הוא: $\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{f(x)} = L > 0$. מתקיים כי: $\lim_{x\to 0} 2x+1 = 1$

לפי **אריתמטיקה מנה** אם שני גבולות קיימים ובמקרה שלנו הם גם לא אפס ניתן להגיד כי גבול המנה (מייד תראו איזו מנה) קיים והוא מנת הגבולות.

אם כך נרשום:
$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2x+1}{\frac{2x+1}{f(x)}}\right\} = \frac{\lim_{x\to 0} 2x+1}{\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{f(x)}} = \frac{1}{L}$$

אבל המנה משמאל היא למעשה
$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

אם כך הנה **בשורה אחת כל הפתרון**:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{2x+1}{\frac{2x+1}{f(x)}}\right\} = \frac{\lim_{x\to 0} 2x+1}{\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{f(x)}} = \frac{1}{L}$$

הערת אזהרה רשומה בטאבו

אם חס וחלילה נרשום כך:

$$L \underbrace{=}_{(I)} \lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{f(x)} \underbrace{=}_{(II)} \frac{\lim_{x\to 0}(2x+1)}{\lim_{x\to 0} f(x)} \underbrace{=}_{(III)} \frac{1}{\lim_{x\to 0} f(x)}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\lim_{x\to 0} f(x)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{L}$$

הפתרון שגוי לחלוטין. מדוע ?

- **מעבר I** נכון נתון בשאלה.
- **מעבר II** שגוי כי אנו לא יודעים שגבול המכנה קיים ולכן אסור להפעיל אריתמטיקת מנה.

שאלה 3 – רציפות

א. נגדיר : $u(x)=\begin{cases}(x-1)^2-1 & , -1<x<2\\ 3 & , x\le -1 \ , \ x\ge 2\end{cases}$.

ציירו את הגרף של הפונקציה. מהן נקודות הרציפות ואי הרציפות של הפונקציה ?

ב. הפונקציות $3g(x)+2f(x)$ ו- $f(x)-2g(x)$ רציפות לכל x .

הוכיחו שהפונקציות $g(x)$ ו- $|f(x)|$ רציפות לכל x .

פתרון שאלה 3 סעיף א

אשאיר לכם את האיור . נקודת אי הרציפות היחידה היא x=2 בה אין גבול. בכל שאר הנקודות הפונקציה רציפה.

פתרון שאלה 3 סעיף ב

סמנו $U(x)=3g(x)+2f(x)$ וגם $V(x)=f(x)-2g(x)$. הפונקציות U,V רציפות לכל איקס מנתוני השאלה. לכל זוג קבועים t,s הפונקציה $t\cdot U(x)+s\cdot V(x)$ רציפה לכל איקס לפי אריתמטיקה.

➢ **מצאו בבקשה** את זוג הקבועים הנכון שיוכיח כי הפונקציה $g(x)$ רציפה כל איקס.

(מה דעתכם על... t=1/7 and s=-2/7)

➢ **מצאו בבקשה** את זוג הקבועים הנכון שיוכיח כי הפונקציה $f(x)$ רציפה כל איקס. כעת הרכיבו את f הרציפה לכל איקס עם פונקציית הערך המוחלט שגם היא רציפה לכל איקס. הנה קיבלנו את $|f(x)|$ כרציפה לכל איקס.

סיימנו.

שאלה 4 - משפט ערך הביניים

א. נסחו את משפט ערך הביניים .

ב. הוכיחו כי למשוואה $mx = \cot x$, $m > 0$ יש שורש בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$.

ג. הוכיחו כי למשוואה $x^4 - 20 = \frac{1}{x-1}$ יש לפחות שלושה שורשים .

פתרון שאלה 4 סעיף א

קראו את משפט 2.7.9 או את 2.7.10 . זה הניסוח כך או אחרת של משפט ערך הביניים.

פתרון שאלה 4 סעיף ב

השאלה דורשת יותר תחכום ממה שנראה על פניו במבט ראשון.

1) נרשום כך : $mx = \cot x \Leftrightarrow mx = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \boxed{mx \cdot \sin x - \cos x = 0}$

2) נגדיר פונקציית עזר $u(x) = mx \cdot \sin x - \cos x$.

3) פונקציית העזר הנ"ל רציפה לכל איקס ובפרט רציפה בקטע הסגור $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4) נחשב את הערכים בקצוות הקטע: $u(0) = -1 < 0$, $u(\frac{\pi}{2}) = \frac{m\pi}{2} > 0$.

5) הערכים בקצוות הקטע שוני סימן. הפונקציה רציפה בקטע הסגור. לאור זאת לפי משפט עה"ב 2.7.10 לפונקציה קיים שורש בקטע **הפתוח** $(0, \frac{\pi}{2})$.

6) שורש כזה מכונה שורש פנימי כי הוא פנימי לקטע. הוא לא בקצוות כי את הערך בקצוות אנו יודעים!

7) אם כך יש x_0 בקטע הפתוח , כלומר $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, עבורו $u(x_0) = 0$.

8) כלומר $0 = u(x_0) = mx_0 \cdot \sin x_0 - \cos x_0$. נעביר אגפים ו... נחלק!

9) $mx_0 \cdot \sin x_0 - \cos x_0 = 0$ כלומר $mx_0 \cdot \sin x_0 = \cos x_0$. נחלק $mx_0 = \frac{\cos x_0}{\sin x_0}$ ולכן $mx_0 = \cot x_0$.

10) מדוע מותר לחלק ? הנקודה מקיימת $0 < x_0 < \pi / 2$ ובקטע זה הסינוס **חיובי** ובפרט אינו אפס. לכן החלוקה מותרת .

סיימנו.

פתרון שאלה 4 סעיף ג

המשוואה הנתונה שקולה למשוואה $x^4 - 20 - \frac{1}{x-1} = 0$. נסמן $\boxed{\varphi(x) = x^4 - 20 - \frac{1}{x-1}}$.

נחשב: $\varphi(-3) > 0$, $\varphi(0) < 0$, $\varphi(0.99) > 0$, $\varphi(1.01) < 0$, $\varphi(3) > 0$

- בקטע $[-3, 0]$ הפונקציה רציפה ומחליפה סימן. לפי עה"ב יש לה שורש בקטע הפתוח: $-3 < x_1 < 0$.
- בקטע $[0, \frac{99}{100}]$ הפונקציה רציפה ומחליפה סימן. .... יש לה שורש בקטע הפתוח: $0 < x_2 < \frac{99}{100}$.
- בקטע $[1.01, 3]$ הפונקציה רציפה ומחליפה סימן. .... יש לה שורש בקטע הפתוח: $1.01 < x_3 < 3$.

סיימנו.

שאלה 5 – כללי

תהי $g(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$. ידוע כי $g(\tfrac{3}{4}) < g(\tfrac{1}{2}) < g(\tfrac{1}{4})$.

הוכיחו קיומה של נקודה c בקטע כך ש $g(c) = \dfrac{g(\tfrac{3}{4}) + g(\tfrac{1}{2}) + g(\tfrac{1}{4})}{3}$.

פתרון שאלה 5

נגדיר פונקציית עזר: $\psi(x) = g(x) - \dfrac{g(\tfrac{3}{4}) + g(\tfrac{1}{2}) + g(\tfrac{1}{4})}{3}$.

פונקציה זאת רציפה לפי נתוני השאלה ובעזרת אריתמטיקה בקטע שלנו. בפרט היא רציה בכל תת קטע לקטע שלנו.

- חשבו כך:

$$\psi(\tfrac{1}{4}) = g(\tfrac{1}{4}) - \frac{g(\tfrac{3}{4}) + g(\tfrac{1}{2}) + g(\tfrac{1}{4})}{3} = \frac{2g(\tfrac{1}{4}) - g(\tfrac{1}{2}) - g(\tfrac{3}{4})}{3} = \frac{[g(\tfrac{1}{4}) - g(\tfrac{1}{2})] + [g(\tfrac{1}{4}) - g(\tfrac{3}{4})]}{3} > 0$$

- חשבו כך:

$$\psi(\tfrac{3}{4}) = g(\tfrac{3}{4}) - \frac{g(\tfrac{3}{4}) + g(\tfrac{1}{2}) + g(\tfrac{1}{4})}{3} = \frac{2g(\tfrac{3}{4}) - g(\tfrac{1}{2}) - g(\tfrac{1}{4})}{3} = \frac{[g(\tfrac{3}{4}) - g(\tfrac{1}{2})] + [g(\tfrac{3}{4}) - g(\tfrac{1}{4})]}{3} < 0$$

רציפות בקטע $[\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}]$ והחלפת הסימן בקצוות הקטע אומרת לנו, לפי עה״ב, כי יש נקודה k בקטע הפתוח $(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4})$ עבורה $\psi(c) = 0$. כלומר $g(c) = \dfrac{g(\tfrac{3}{4}) + g(\tfrac{1}{2}) + g(\tfrac{1}{4})}{3}$.

סיימנו.

סוף פתרון מטלה 11