קורס:

חדו"א א (20406) סמסטר 2023א

תאריך הבחינה 13/2/2023 . מועד 6א . מועד 86 .

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים - חלק א וחלק ב.

עליכם לענות על:

שאלות 1-4 בחלק א וכן לענות על 3 שאלות מבין 5-8 בחלק ב .

כל חומר עזר **מותר** בשימוש

פתרון הבחינה

כתב: חזי נוימן

חלק ראשון - שאלות סגורות 1-4 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{7}$ נקודות

סמנו מהי התשובה הנכונה בעמוד האחרון של המחברת במקום המיועד לכך .

לחילופין , ניתן לרשום את התשובות בעמוד הראשון של המחברת בצורה ברורה. **לא נדרש נימוק - רק סימון במחברת מהי התשובה הנכונה.** אם אינכם יודעים את התשובה כדאי לנחש. אנו סופרים רק תשובות נכונות ולא מורידים ניקוד על טעויות.

שאלה 1 – שאלה סגורה

נגדיר פונקציה $U(x)=\begin{cases} a & x\ge 0 \\ b & x<0 \end{cases}$. נתון כי הפונקציה **חיובית ולא רציפה** בנקודה x=0 .

לפניכם שלוש טענות הממוספרות 1-3 . מי מבין הטענות היא טענה נכונה ?

1) $U(U(x))$ רציפה לכל x .	2) $\frac{x}{U(x)}$ גזירה ב x=0 .	3) $\int_{-1}^{3} U(x)dx = 3a-b$.

<u>כל</u> הטענות הנכונות הן:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 1,2 ה. 1,3 ו. 2,3

ז. כל הטענות נכונות . ח. כל הטענות לא נכונות .

פתרון שאלה 1 – $\boxed{א}$

1) מהנתון ש U חיובית נסיק כי הפרמטרים a,b חיוביים. לכל x התוצאה של U(x) היא חיובית (היא a,b) ולכן U(U(x)) היא a . אם כך ההרכבה U(U(x))=a ולכן רציפה לכל איקס. **אמת**

2) הפונקציה הנתונה בצורה מפורשת היא: $f(x)=\frac{x}{U(x)}=\begin{cases} x/a & x\ge 0 \\ x/b & x<0 \end{cases}$. פונקציה זאת רציפה בנקודה x=0 (נמקו בעלפה) . הנגזרות מימין ומשמאל הן כך: $f'(x)=\begin{cases} 1/a & x>0 \\ 1/b & x<0 \end{cases}$. לפי משפט עמוד 180 יש נגזרת אם ורק אם $\boxed{1/a=1/b}$ כלומר a=b . אבל ... מצב זה יגיד כי U המקורית רציפה וסתירה. לכן a שונה מ b ולכן אין נגזרת כי לא מתקיים השיוויון הממוסגר. **שקר**

3) $\int_{-1}^{3} U(x)dx = \int_{-1}^{0} b\,dx + \int_{0}^{3} a\,dx = b+3a$ **שקר**

שאלה 2 – שאלה סגורה

לפניכם שני טורים חיוביים: $\boxed{A}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+3}\right)^n$ ו- $\boxed{B}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

א. שני הטורים מתכנסים. ב. שני הטורים מתבדרים.

ג. טור A מתכנס וטור B מתבדר. ד. טור A מתבדר וטור B מתכנס.

פתרון שאלה 2 – $\boxed{\text{ד}}$

A טור זה **מתבדר**. הביטוי בתוך הסוגריים קרוב מאוד ל 1.5 שהרי $\frac{3n+2}{2n+3}\approx\frac{3n}{2n}=1.5$. אם כך האיבר הכללי קרוב מאוד ל 1.5^n וביטוי זה שואף לאינסוף ולכן בוודאי לא שואף לאפס. לכן התנאי ההכרחי להתכנסות לא מתקיים. לכן הטור מתבדר.

B טור זה **מתכנס**. אראה נימוק מחשבתי (שהרי זאת שאלה סגורה) . תוכלו למצוא נימוק רשמי מסודר. הביטוי בתוך הסוגריים קרוב מאוד ל $\frac{2}{3}$ שהרי $\frac{2n+3}{3n+2}\approx\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3}$. אם כך האיבר הכללי קרוב מאוד ל $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. אם כך הטור הנ"ל מאוד דומה לטור גיאומטרי מתכנס. לכן מתכנס.

שאלה 3 – שאלה סגורה

נתון האינטגרל $\int_0^{\pi k} x\cos(x)dx$ כאשר k מספר טבעי (k=1,2,3,4,…..) .

לפניכם ארבע טענות המוספרות 1-4 . מי מבין הטענות היא טענה נכונה ?

1) אם k זוגי האינטגרל הוא אפס .

2) אם k אי זוגי האינטגרל הוא -2 .

3) אם k זוגי האינטגרל הוא $2\pi k-1$.

4) אם k אי זוגי האינטגרל הוא -1 .

<u>כל</u> הטענות הנכונות הן:

א. 1	ב. 2	ג. 3	ד. 4
ה. 1,2	ו. 1,4	ז. 2,3	ח. 2,4

פתרון שאלה 3 – $\boxed{\text{ה}}$

ניעזר באינטגרציה בחלקים.

$$\int_0^{\pi k}\underbrace{x}_{f}\underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx=\left[x\cdot\sin x\right]_0^{\pi k}-\int_0^{\pi k}1\cdot\sin x dx=\underbrace{0}_{\sin\pi k=0}-0-\int_0^{\pi k}\sin x dx$$

$$=\left[\cos x\right]_0^{\pi k}=\cos(\pi k)-1$$

אם k זוגי כלומר $k=2,4,6,8,....$ אזי $\cos(\pi k)=1$ ולכן האינטגרל הוא 0 . **(1) נכון**

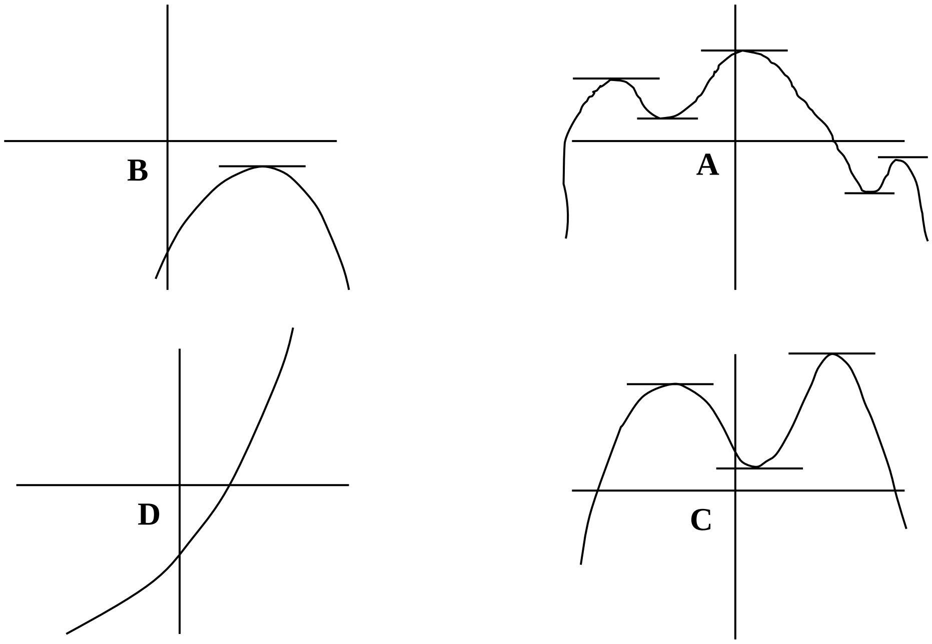
אם k איזוגי כלומר $k=1,3,5,7,....$ אזי $\cos(\pi k)=-1$ ולכן האינטגרל הוא -2 . **(2) נכון**

שאלה 4 – שאלה סגורה

נתון פולינום ממעלה **ארבע**, כלומר $P(x) = -x^4 + ax^3 + bx^2 + bx + d$.

לפניכם ארבעה גרפים A-D . מי מבין הגרפים יכול להיות הגרף של פולינום $P(x)$ כזה ?

{ למען הסר ספק הישרים המקבילים לציר איקס הם משיקים קטנים בנקודות הקיצון }



<u>כל</u> הגרפים שיכולים להיות גרף של $P(x)$ הם:

א. A, B, D	ב. A, B	ג. C, D
ד. A, D	ה. B, C	ו. C

<u>פתרון שאלה 4 – $\boxed{ה}$</u>

A נפסל כי הוא מראה חמש נקודות קיצון. לא אפשרי כי הנגזרת היא פולינום ממעלה שלוש ופולינום כזה יכול להתאפס לכל היותר ב 3 נקודות.

D נפסל כי עבור איקסים ששואפים ל אינסוף הפולינום מתנהג כמו $P(x) \approx -x^4$ וביטוי זה שואף ל מינוס אינסוף.

הגרפים הנותרים יכולים להתאים.

המשך בעמודים הבאים ←

חלק שני - שאלות פתוחות 5-8 . השיבו על 3 שאלות בחלק זה

משקל כל שאלה בחלק זה הוא 24 נקודות .

שאלה 5

(14 נק׳) א. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$.

הוכיחו שיש שתי נקודות x_1 ; x_2 בקטע הסגור כך ש-

$$f(x_1) \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le f(x_2)$$

(10 נק׳) ב. הוכיחו כי: $-1.5\cdot\ln^3 2 \le \int_{0.5}^{2} \ln^3 x\,dx \le 1.5\cdot\ln^3 2$.

אל תחשבו את האינטגרל. היעזרו בסעיף א כולל נימוקים טובים .

פתרון שאלה 5 סעיף א

הפונקציה רציפה בקטע סגור ולכן יש לה קיצון מוחלט. תהי x1 נקודת המינימום המוחלט ותהי x2 נקודת המקסימום המוחלט. כלומר בקטע הנתון מתקיים $f(x1) \le f(x) \le f(x2)$.

לפי משפט 5.6.7 נסיק כי $\int_a^b f(x1)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f(x2)dx$.

שימו לב כי $f(x1), f(x2)$ הם פשוט מספרים קבועים וניתן להוציא אותם מחוץ לאינטגרל. אם כך נקבל: $f(x1)\cdot\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le f(x2)\cdot\int_a^b dx$.

ברור כי $\int_a^b dx = b-a$ ולכן קיבלנו: $f(x1)\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le f(x2)\cdot(b-a)$.

נחלק ונקבל :

$$f(x1) \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le f(x2)$$

הנה הוכחנו כי יש שתי נקודות בקטע המקיימות את אי השיוויון המבוקש. סיימנו.

פתרון שאלה 5 סעיף ב

הפונקציה שלנו $\ln^3 x$ היא פונקציה עולה כי נגזרתה אי שלילית. לאור זאת נקודות הקיצון המוחלטות הן בקצוות הקטע. כלומר בקטע הנתון מתקיים $\ln^3\frac{1}{2} \le \ln^3 x \le \ln^3 2$ ואם נפשט מעט אזי $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ כלומר $-\ln^3 2 \le \ln^3 x \le \ln^3 2$.

אזי $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \ln^3 x dx \le \int_{\frac{1}{2}}^{2} \ln^3 2 dx = (2-\frac{1}{2})\ln^3 2$. ככה תוכלו להוכיח גם את האגף השני.

סיימנו.

שאלה 6

(12 נק׳) א. הוכיחו כי לפונקציה $f(x)=\dfrac{3x^2-4x+1}{1-(2-\frac{1}{x})^4}$ אין אסימפטוטות אנכיות.

(12 נק׳) ב. מצאו את הפולינום ממעלה שנייה $g(x)=ax^2+bx+c$ שעבורו הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{x^2+x}$ קיים וממשי לכל נקודה x_0 ובנוסף הוא עובר בנקודה $(1,2)$.

לאחר שמצאתם את הפולינום הנ״ל **ציירו במדויק** את הגרף של המנה $\dfrac{g(x)}{x^2+x}$.

פתרון שאלה 6 סעיף א

הפונקציה שלנו רציפה בכל נקודה בה המכנה אינו מתאפס. לכן אם יש א. אנכיות הן יכולות להיות רק עבור $1=(2-\frac{1}{x})^4$ כלומר $\pm1=2-\frac{1}{x}$ כלומר $x=1,\frac{1}{3}$.

נחשב את הגבולות הבאים. כדאי להיעזר בלופיטל.

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x+1}{1-(2-\frac{1}{x})^4}=\lim_{x\to1}\frac{6x-4}{-4\cdot(2-\frac{1}{x})^3\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{6-4}{-4\cdot1^3\cdot1}=-0.5$$

$$\lim_{x\to1/3}\frac{3x^2-4x+1}{1-(2-\frac{1}{x})^4}=\lim_{x\to1/3}\frac{6x-4}{-4\cdot(2-\frac{1}{x})^3\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{2-4}{-4\cdot(-1)\cdot9}=-\frac{1}{18}$$

והמסקנה – אין א. אנכיות. סיימנו.

פתרון שאלה 6 סעיף ב

מהנתון השני נסיק מייד כי $g(1)=2$ כלומר $\boxed{a+b+c=2}$.

מה ניתן ללמוד מהנתון של הגבול?

בכל נקודה בה xo **שונה** מ 0 או -1 הגבול **במכנה** הוא מספר ממשי **ששונה מאפס** ולכן גבול המנה קיים.

לאור זאת נבחן מה קורה כאשר $xo=0$ או כאשר $xo=-1$.

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x}="\frac{c}{0}"$$

המונה שואף ל c המכנה שואף ל 0. אם c לא אפס גבול מצורה כזאת אינו יכול להיות מספר ממשי. ולכן נסיק מכאן כי חייבים $\boxed{c=0}$.

נשמור הנחה זאת ונתקדם:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x}\underset{c=0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{x+1}=b$$

ובכן הגבול ממשי. מצוין.

$$\lim_{x\to -1}\frac{g(x)}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x}="\frac{a-b+c}{0}"$$

המונה שואף ל a-b+c המכנה שואף ל 0 . אם a-b+c לא אפס גבול מצורה כזאת אינו יכול להיות מספר ממשי. ולכן נסיק מכאן כי חייבים **a-b+c=0** .

כעת יש לנו משוואות שמהן ניתן למצוא את הפרמטרים המבוקשים :

$$\boxed{a+b+c=2} \qquad \boxed{c=0} \qquad \boxed{a-b+c=0}$$

פותרים ומקבלים :

$$\boxed{a=1} \qquad \boxed{b=1} \qquad \boxed{c=0}$$

הציבו זאת על מנת לוודא כי כעת הגבול עבור $x\to -1$ יוצא ממשי. פתרנו את הבעייה!

מצאנו כי $g(x)=x^2+x$ ולכן המנה היא $\frac{g(x)}{x^2+x}=\frac{x^2+x}{x^2+x}=1\ ;\ x\neq 0,-1$.

את האיור אשאיר לכם. סיימנו.

שאלה 7

(12 נקי) א. הוכיחו כי למשוואה $e^x+x+\cos x=0$ יש שורש אחד ויחיד .

(12 נקי) ב. הוכיחו כי $0\le\int_0^\infty\frac{\arctan x}{x^3+1}dx\le\frac{\pi}{2}$. כדאי לשים כי $(0,\infty)=(0,1)\cup(1,\infty)$.

[הערה עם תקווה.. אם תמצאו חסם אחר במקום $\pi/2$ זה אפשרי אבל הניקוד לא יהיה הניקוד המקסימאלי]

פתרון שאלה 7 סעיף א

נגדיר $u(x)=e^x+x+\cos x$ פונקציה זאת רציפה לפי אריתמטיקת הסכום לכל איקס .

נציב : $u(0)=2$.

נציב $u(-4)=e^{-4}-4+\cos 4=(e^{-4}-2)+(\cos 4-2)<0$. הסוגר השני שלילי – טרריוואלי. הסוגריים הראשונות שליליות כי מתכונות הפונקציה והגרף $e^x<1$ לכל איקס שלילי.

לפי משפט ערך הביניים יש לפונקציה שורש. נותר להוכיח כי הוא יחיד.

הנגזרת היא : $u'(x)=e^x+(1-\sin x)$. האקספוננט חיובי והסוגריים אי שליליות .

לכן הנגזרת היא חיובית ולכן אין שני שורשים (אחרת סתירה לרול) .

הוכחנו קיומו של שורש יחיד. סיימנו.

פתרון שאלה 7 סעיף ב

העובדה כי $0 \le \int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^3+1}dx$ היא טוויאלית . שימו לב כיצד נוכיח את אגף ימין...

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^3+1}dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^3+1}dx + \int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^3+1}dx$$

$$\le \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4}}{x^3+1}dx + \int_1^\infty \frac{\frac{\pi}{2}}{x^3+1}dx$$

$$\le \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4}}{0+1}dx + \int_1^\infty \frac{\frac{\pi}{2}}{x^3+0}dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 1dx + \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx = \frac{\pi}{4}\cdot 1 + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3-1} = \frac{\pi}{2}$$

- ניעזרנו בפיצול הקטע.
- ניעזרנו בעובדה כי בקטע $[0,1]$ מתקיים $\arctan x<\arctan 1=\pi/4$.
- ניעזרנו בעובדה כי בקטע $[1,\infty)$ מתקיים $\arctan x< \pi/2$.
- ניעזרנו בעובדה כי אינטגרל הרמוני מתכנס, מתכנס לערך $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1}$.

סיימנו.

שאלה 8

(12 נקי) א. הוכיחו $\int_0^{2\pi}(x-\pi)^m \sin(x)\,dx = 0$ לכל $m = 2,4,6,8,10,.....$ כלומר m טבעי וזוגי.

(12 נקי) ב. השיבו על **אחת ורק אחת** מבין המשימות הבאות.

משימה בחשבון דיפרנציאלי

- הוכיחו כי הפונקציה $u(x)=|x|\cdot x^3$ גזירה בנקודה $(0,0)$.
- האם נקודה זאת היא נקודת קיצון מקומית? נמקו היטב .
- האם לפונקציה יש נקודות קיצון מקומיות בקטעים : $(-\infty,0)\,;\,(0,\infty)$.

משימה בחשבון אינטגרלי

- מצאו קדומה ל- $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ שעוברת בנקודה $(0,0)$.
  פרטו את כל שלבי החישוב .
- מפזרים שש נקודות $x_1,x_2,...x_6$ בקטע $[0,1]$ כך : $0<x_1<x_2<...<x_6<1$.
  מה הערך של הסכום הבא :

$$\int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_5}^{x_6} f(x)dx + \int_{x_6}^{1} f(x)dx$$

יש להגיע לתשובה מספרית ספציפית ומדויקת.

פתרון שאלה 8 סעיף א

הציבו y=x-π ולכן dy=dx .

$$\int_0^{2\pi}(x-\pi)^m\sin(x)\,dx \underset{y=x-\pi}{\equiv} \int_{-\pi}^{\pi} y^m\sin(y+\pi)\,dy \underset{\substack{\sin(a+\pi)\\=-\sin a}}{\equiv} -\int_{-\pi}^{\pi} y^m\sin(y)\,dy=0$$

הביטוי $w(y)=y^m\sin(y)$ הוא פונקציה איזוגית. נוכיח זאת :

$$w(-y)=(-y)^m\sin(-y)=-y^m\sin(y)=-w(y)$$

האינטגרל הוא על קטע סימטרי סביב אפס.

לאור זאת ערך האינטגרל הוא אפס. סיימנו.

פתרון שאלה 8 סעיף ב

משימת החשבון הדיפרנציאלי.

- הוכחת הגזירות של הפונקציה היא לפי הגדרת הנגזרת או לפי משפט עמוד 180.
- הנקודה לא קיצון מקומי מכיוון שבכל קטע קטנציק קטע סביב אפס, קטע מהצורה (-a,a) ניתן למצוא נקודות שבהן הפונקציה חיובית ונקודות שבהן היא שלילית. מצד שני בראשית הפונקציה היא אפס.

  לכן אם הראשית מקסימום סתירה כי ב- x=a/2 הפונקציה יותר גדולה.

  אם הראשית היא מינימום שוב סתירה כי ב.......... השלימו.
- בקטע x>0 הפונקציה היא $u(x)=x^4$. אם היתה שם נקודות קיצון מקומית הנגזרת היתה מתאפסת אבל בקטע זה הנגזרת תמיד **חיובית**.
- בקטע x<0 הפונקציה היא $u(x)=-x^4$. אם היתה שם נקודות קיצון מקומית הנגזרת היתה מתאפסת אבל בקטע זה הנגזרת תמיד **חיובית**.

סיימנו.

משימת החשבון האינטגרלי

לחישוב הקדומה בצעו את ההצבה $y=1+\sqrt{x}$. קבלו כי $2(y-1)dy=dx$.

האינטגרל לאחר הצבה ולאחר סידור הוא $\int(2y-4+\frac{2}{y})dy$.

כעת תוכלו לסיים לבד את חישוב הקדומה. התשובה הבאה היא הקדומה שכבר עוברת בנקודה הנתונה לאחר כל הפישוטים האפשריים.

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})$$

והחלק השני של התרגיל...

$$\int_0^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\cdots+\int_{x_5}^{x_6} f(x)dx+\int_{x_6}^{1} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\ln 4-1$$

סוף קובץ