חדו"א א 20406 - פתרון ממ"ן 13 , 2023א כתב: חזי נוימן

שאלה 1 - פרק 5, אינטגרציה בחלקים

א. חשבו את $\int_0^{\pi/2} \sin^2(nx)dx$ לכל n טבעי.

ב. חשבו את $\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos^2 x dx$.

פתרון שאלה 1 סעיף א

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(nx)dx \underbrace{=}_{\substack{y=nx \\ dy=ndx}} \int_0^{n\pi/2} \sin^2(y)\frac{dy}{n} = \frac{1}{n}\cdot\int_0^{n\pi/2} \sin^2(y)dy$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\int_0^{n\pi/2} \frac{1-\cos(2y)}{2}dy$$

$$= \frac{1}{2n}\cdot\int_0^{n\pi/2} [1-\cos(2y)]dy$$

עד כה נעזרנו בהצבה ובנוסחה טריגונומטרית . כעת נבצע את האינטגרציה ונתקדם.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(nx)dx = \frac{1}{2n}\cdot\int_0^{n\pi/2} [1-\cos(2y)]dy$$

$$= \frac{1}{2n}\cdot\left[y - \frac{\sin(2y)}{2}\right]_{y=0}^{y=n\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2n}\cdot\left[\frac{n\pi}{2} - \frac{\sin(n\pi)}{2}\right] = \frac{\pi}{4} \qquad \{\sin(n\pi) = 0\}$$

פתרון שאלה 1 סעיף ב

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos^2 x dx \underbrace{=}_{\substack{y=\pi-x \\ dy=-dx}} \int_{\pi}^{0} y\cdot\cos^2(\pi - y)(-dy) \quad \{\cos(\pi - y) = -\cos y\}$$

$$= \int_0^{\pi} y\cdot\cos^2(y)dy = \int_0^{\pi} y\cdot[\frac{1+\cos(2y)}{2}]dy = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi} y\cdot[1+\cos(2y)]dy$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi}[y + y\cdot\cos(2y)]dy = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi} y\cdot\cos(2y)dy$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi} y\cdot\cos(2y)dy = \frac{\pi^2}{4} + 0 = \frac{\pi^2}{4}$$

אשאיר לכם לחשב בעזרת **אינטגרציה בחלקים** את $\int_0^{\pi} y\cdot\cos(2y)dy$ ולקבל כי ערכו הוא 0 .

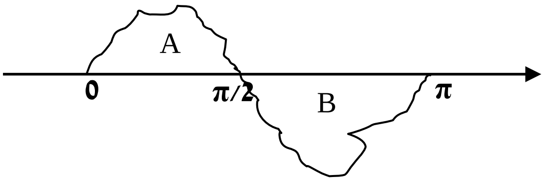
שאלה 2 - פרק 5

מה גודלו של השטח הכלוא בין ציר X בקטע $[0,\pi]$ ובין גרף הפונקציה $f(x)=(1-\sin x)^2\cdot\sin(2x)$.
הציגו איור כלשהו המתאר מה חישבתם אבל אל תעשו חקירת פונקציה.
יש לפרט את כל חישובי האינטגרלים. [יצא לנו שליש]

פתרון שאלה 2

- הפונקציה מתאפסת $f(x)=(1-\sin x)^2\cdot\sin(2x)=0$ וזה קורה עבור $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ בקטע שלנו .
- עבור $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$ מתקיים $\pi\le 2x\le 2\pi$ ולכן $\sin(2x)\le 0$ ולכן $f(x)\le 0$.
- עבור $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ מתקיים $0\le 2x\le\pi$ ולכן $\sin(2x)\ge 0$ ולכן $f(x)\ge 0$.

אם כך האיור של הגרף נראה בקירוב כך :



אנו לא יודעים האם השטחים A ו- B שווים וגם לא נטרח לנסות ולבדוק סוגייה זאת.
פשוט נחשב כל אחד מבין השטחים הנ"ל.
שימו לב כי בכל אחד מחישובי השטחים הנ"ל למעשה אנו מבצעים אינטגרציה לפונקציה $f(x)$ או לפונקציה $-f(x)$. כך יוצא שלמעשה אנו צריכים למצוא "אותה קדומה" כלומר פעם צריך לחשב את $\int f(x)$ ופעם צריך לחשב את $\int -f(x)$. אכן נכונה ההערה שזאת למעשה "אותה קדומה"

ובכן, הנה **מציאת קדומה לפונקציה $f(x)$:**

$$\int f(x)dx=\int(1-\sin x)^2\cdot\sin(2x)dx$$
$$=\int 2\cdot(1-\sin x)^2\cdot\sin x\cdot\cos xdx$$
$$\underbrace{=}_{\substack{y=\sin x\\ dy=\cos xdx}}\int 2\cdot(1-y)^2\cdot y\cdot dy=\int(2y-4y^2+2y^3)dy=y^2-\frac{4y^3}{3}+\frac{y^4}{2}+K$$
$$=\sin^2 x-\tfrac{4}{3}\sin^3 x+\tfrac{1}{2}\sin^4 x+K=F(x)$$

שטח A

$$area(A)=\int_0^{\pi/2}f(x)dx=F(\tfrac{\pi}{2})-F(0)=1-\tfrac{4}{3}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{6}$$

שטח B

$$area(B)=\int_{\pi/2}^{\pi}(0-f(x))dx=-\int_{\pi/2}^{\pi}f(x)dx=-\left[F(\pi)-F(\tfrac{\pi}{2})\right]=F(\tfrac{\pi}{2})-F(\pi)=\tfrac{1}{6}$$

ולאור זאת נסיק כי השטחים שווים והשטח המבוקש הוא שליש. סיימנו.

שאלה 3 - שימוש במשפט 5.6.7

נתון האינטגרל $J=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{(x+\cos x)^2}$.

א. הוכיחו את הערכות הבאות: (1) הערכה ראשונה $J\le 1$. (2) הערכה שנייה $J\le\frac{2\pi}{\pi+2}$.

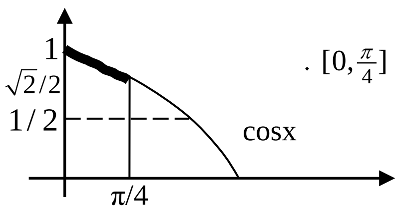
ב. השלימו: ההערכה טובה יותר היא.... ללא קשר לערך המדויק.

ג. רשות: לפי וולפארם אלפא מהו "הערך המדויק" של אינטגרל זה?

פתרון שאלה 3 סעיף א

$$J=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{(x+\cos x)^2}\le\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{(0+\cos x)^2}=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}=\left[\tan x\right]_0^{\pi/4}=\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0=1$$

ההערכה השנייה, לאחר התיקון, יותר מסובכת ולכן נתנו את הרמז.



באיור הצגנו את גרף הקוסינוס והדגשנו את הקטע שלנו $[0,\frac{\pi}{4}]$.

האיור מראה היטב כי $\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\ge\frac{1}{2}$.

אם כך נוכל לרשום:

$$J=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{(x+\cos x)^2}\le\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{(x+0.5)^2}$$

יתרונו הגדול של האינטגרל מצד ימין (האינטגרל הגדול) שהוא קל לחישוב. נמשיך את החישוב.

$$J=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{(x+\cos x)^2}\le\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{(x+0.5)^2}$$

$$\underset{\boxed{\substack{y=x+\frac{1}{2}\\ dy=dx}}}{=}\int_{1/2}^{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}\frac{dy}{y^2}=-\left[\frac{1}{y}\right]_{y=\frac{1}{2}}^{y=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}$$

$$=-\left[\frac{1}{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right]=2-\frac{4}{\pi+2}=\frac{2\pi}{\pi+2}$$

סיימנו.

פתרון שאלה 3 סעיף ב

מתקיים $\frac{2\pi}{\pi+2}\le 1\le\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{(x+\cos x)^2}=J$ ולכן ההערכה 1 יותר טובה. היא יותר הדוקה.

פתרון שאלה 3 סעיף ג

כך קיבלנו בוולפארם אלפא

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(x+\cos(x))^2}\,dx = 0.488751$$

שאלה 4

(שימוש במשפטים החשובים של כרך א וכרך ב בשילוב הפונקציה המעריכית והלוגריתמית. תרגול של מספר תכונות של הפונקציה ln ו- E^x)

א. מצאו את המינימום המוחלט של הפונקציה $u(x)=\left|3e^{-x}-2\right|$. האם בנקודה בה מינימום זה קורה הפונקציה גזירה? הוכיחו.

ב. חשבו את גודלו של השטח הכלוא בין הישר $y=2$, ציר הוואי והגרף של $u(x)=\left|3e^{-x}-2\right|$. חייבים לצרף סקיצה המראה את השטח שאת גודלו מחשבים.

ג. מצאו תחומי מונוטוניות לפונקציה $\xi(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. כעת הראו כי לכל $n\geq 3$ טבעי מתקיים $\sqrt[n]{n}\geq\sqrt[n+1]{n+1}$. [רמז: רשמו אחרת את אי השיוויון והפעילו לן...]

פתרון שאלה 4 סעיף א

ראו, $3e^{-x}-2=0$ אם ורק אם $e^{-x}=\dfrac{2}{3}$ אם ורק אם $e^{x}=\dfrac{3}{2}$ או $x=\ln(1.5)$.

ובכן בנקודה זאת הפונקציה בתוך הערך המוחלט שווה לאפס. לכן בנקודה זאת $u(\ln(1.5))=0$ ומכיוון שבכל מקרה $\left|3e^{-x}-2\right|\geq 0$, נוכל הגיד כי הערך המינימאלי של הפונקציה הוא פשוט אפס.

על מנת לבחון האם יש גזירות בנקודה זאת נציג את הפונקציה כהטלאה.

$$u(x)=\left|3e^{-x}-2\right|=\begin{cases}3e^{-x}-2 & x\leq\ln 1.5\\ -(3e^{-x}-2) & x>\ln 1.5\end{cases}=\begin{cases}3e^{-x}-2 & x\leq\ln 1.5\\ -3e^{-x}+2 & x>\ln 1.5\end{cases}$$

קבענו את ההטלאה בהסתמך על הערך ln1.5 שציינו קודם והצבת x=10 או x=-1 למשל על מנת לדעת האם הביטוי בתוך הערך המוחלט חיובי או שלילי.

כעת אנא בדקו לפי המשפט בעמוד 180 את סוגיית הגזירות בנקודה x=ln1.5 .

$$u'(x)=\begin{cases}-3e^{-x} & x<\ln 1.5\\ 3e^{-x} & x>\ln 1.5\end{cases}$$

חשבו את הגבולות הבאים:

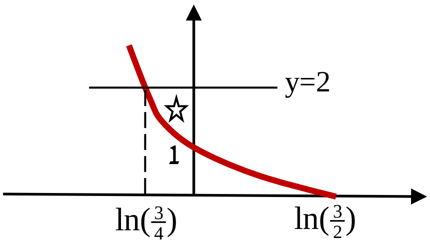
$$\lim_{x\to \ln(1.5)^+} u'(x) = \lim_{x\to \ln(1.5)} 3e^{-x} = 3\cdot e^{-\ln(1.5)} = 3\cdot \frac{2}{3} = \boxed{2}$$

$$\lim_{x\to \ln(1.5)^-} u'(x) = \lim_{x\to \ln(1.5)} -3e^{-x} = -3\cdot e^{-\ln(1.5)} = -3\cdot \frac{2}{3} = \boxed{-2}$$

הוכחנו שאין גזירות בנקודת המינימום.

פתרון שאלה 4 סעיף ב

באיור ציירנו מקטע מהגרף ואת הישר y=2 .



חיתוך בין הגרף ובין הישר :

נדרוש $\left|3e^{-x} - 2\right| = 2$.

מצב זה קורה אם ורק אם :

$3e^{-x} - 2 = 2$; $3e^{-x} - 2 = -2$

אנא נמקו מדוע המצב **הכחול** מביא לסתירה ומדוע המצב **האדום** מביא לפתרון x=ln(0.75) כפי שמראה האיור.

אנו מחפשים את גודלו של השטח **כוכבית**.

בשטח זה הגרף העליון הוא הישר y=2 והגרף התחתון הוא u(x) .

איזה מבין הענפים השונים של u יש לקחת ? מכיוון שהמקטע שלנו הוא עבור x<ln(1.5) אזי אנחנו בענף העליון של ההטלאה שרשמנו בעמוד הקודם, כלומר כאן $u(x) = 3e^{-x} - 2$. הנה תראו....

$$\boxed{u(x)} = \left|3e^{-x} - 2\right| = \begin{cases} \boxed{3e^{-x} - 2} & \boxed{x \le \ln 1.5} \\ -(3e^{-x} - 2) & x > \ln 1.5 \end{cases} = \begin{cases} 3e^{-x} - 2 & x \le \ln 1.5 \\ -3e^{-x} + 2 & x > \ln 1.5 \end{cases}$$

נעבור לחישוב השטח , האינטגרציה המבוקשת היא :

$$S = \int_{\ln 0.75}^{0} (2 - u(x))dx = \int_{\ln 0.75}^{0} (2 - (3e^{-x} - 2))dx = \int_{\ln 0.75}^{0} (4 - 3e^{-x})dx$$

האינטגרל שיש לחשב הוא מיידי.

$$S = \int_{\ln 0.75}^{0} (4 - 3e^{-x})dx = \left[4x - 3\cdot(-e^{-x})\right]_{\ln 0.75}^{0} = -(1 + 4\ln(\tfrac{3}{4})) \approx 0.15$$

הערה : האם אתם זוכרים את כללי הלוג ובפרט את הכלל $\boxed{e^{\ln w} = w}$ זה שימושי בחישוב הנ"ל.

סיימנו.

פתרון שאלה 4 סעיף ג

קל לראות כי : $\xi(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

ולכן הגרף עולה כאשר הנגזרת חיובית כלומר 1-lnx>0 או $0 < x < e$ והגרף יורד בתחום המשלים כלומר יורד עבור $x > e$. מכאן נסיק כי יש מקסימום מוחלט בגובה y=1/e .

כיצד כל הדברים הטובים האלה קשורים למבוקש בהוכחה?

מבוקש $\sqrt[n]{n} \ge \sqrt[n+1]{n+1}$ ואי שיוויון זה שקול ל $\ln(\sqrt[n]{n}) \ge \ln(\sqrt[n+1]{n+1})$.

לפי כללי לוג שקול ל

$$\ln[n^{1/n}] \ge \ln[(n+1)^{1/(n+1)}] \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\ln(n) \ge \frac{1}{n+1}\ln(n+1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\ln(n)}{n} \ge \frac{\ln(n+1)}{n+1}}$$

לפי שנסגור את התרגיל נסכם :

במקום להוכיח את אי השיוויון המקורי אנו ננסה להוכיח אי שיוויון שקול.

כעת נשים לב כי נתון $n \ge 3$ ועוד נשים לב כי $n+1 > n \ge 3 > e$. כלומר האיקסים x=n ו- x=n+1 נמצאים בתחום בו הגרף של $\xi(x)$ יורד !

אם הגרף יורד אזי : $n < n+1 \quad \Rightarrow \quad \xi(n) \ge \xi(n+1)$

כלומר : $n < n+1 \quad \Rightarrow \quad \xi(n) \ge \xi(n+1) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\ln(n)}{n} \ge \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$

הוכחנו את המבוקש.

סתם בשביל הכיף ניקח n=9 . הוכחנו כי $\sqrt[9]{9} \ge \sqrt[10]{10}$. תוכלו לבדוק זאת במחשב כיס.

סיימנו.

שאלה 5 - פונקציות טריגונומטריות הפוכות - מבוא (סעיפים 8.1, 8.2)

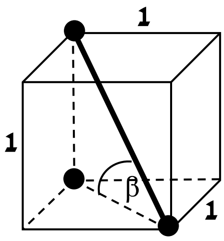
א. הוכיחו כי $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(\frac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$ לכל $x > 0$. העזרו במשולש שלפניכם.

ב. לפניכם קובייה שבה **כל** צלע בת 1 מטר.

מעבירים את האלכסון הראשי ונוצר משולש ישר זווית.

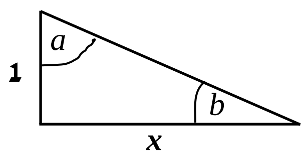
הוכיחו כי הזווית β היא $\arctan(\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ ובקירוב היא 35° .

[ידע כללי : זאת הזווית בין האלכסון הראשי לבסיס הקובייה]



פתרון שאלה 5 סעיף א

סמנו שתי זוויות והיעזרו בטריגו.



- משיקולי משולש ישר זווית : tan(a)=x/1=x ; tan(b)=1/x .
- לפי הגדרת ארכטנגנס : a=arctan(a) ; b=arctan(1/x)
- משיקולי זווית במשולש : a+b=π/2
- לכן : $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(\frac{1}{x}) = 0.5\pi$

סיימנו.

פתרון שאלה 5 סעיף ב

אשאיר לכם להשיב על כך.

שאלה 6 - פונקציות טריגונומטריות הפוכות (סעיפים 8.2, 8.1)

[אין קשר בין סעיפי השאלה]

א. מצאו ישר $l(x) = mx + n$ שעבורו $\lim_{x\to\infty}\left[2x - \tan^{-1}(x) - l(x)\right] = 0$.

ב. הראו כי $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx = \frac{4-\pi}{2}$.

פתרון שאלה 6 סעיף א

1) נתון כי $\lim_{x\to\infty}\left[2x - \tan^{-1}(x) - mx - n\right] = 0$

2) מתקיים כי: $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0$

3) לפי **אריתמטיקת הכפל** בגבולות: $\lim_{x\to\infty}\left[2x - \tan^{-1}(x) - mx - n\right]\cdot\left[\frac{1}{x}\right] = 0$

4) כלומר: $\lim_{x\to\infty}\left[(2-m) - \left(\frac{\tan^{-1}(x)}{x} + \frac{n}{x}\right)\right] = 0$

5) לפי **אריתמטיקת החיסור** בגבולות: $\lim_{x\to\infty}(2-m) - \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\tan^{-1}(x)}{x} + \frac{n}{x}\right) = 0$

כי כל אחד מהגבולות קיים ואכן $\underbrace{\lim_{x\to\infty}(2-m)}_{\boxed{2-m}} - \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{\tan^{-1}(x)}{x} + \frac{n}{x}\right)}_{\boxed{0+0}} = 0$.

6) יוצא כי הוכחנו בסעיף 5 שמתקיים $\boxed{\mathbf{m=2}}$.

7) נציב מידע זה בנתון הבסיסי 1 ונקבל $\lim_{x\to\infty}\left[\tan^{-1}(x) - n\right] = 0$. מכיוון שכל אחד מהגבולות קיים

נסיק כי הגבול הנ"ל הוא $\frac{\pi}{2} - n$ והשיוויון לאפס אומר כי $\boxed{n = \frac{\pi}{2}}$

8) ובכן הוכחנו שבתנאי השאלה הישר היחיד המקיים את נתוני השאלה הוא $l(x) = 2x + 0.5\pi$.

סיימנו.

פתרון שאלה 6 סעיף ב

$$J = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx \underbrace{=}_{\boxed{\begin{array}{l} y=e^x-1 \\ dy=e^x dx \end{array}}} \int_0^1 \sqrt{y}\,\frac{dy}{y+1}$$

אנו פותחים את התרגיל **בהצבה**. אנא וודאו כי הבנתם כיצד להעביר את גבולות האינטגרל לגבולות חדשים וכיצד בטאנו את dx .

נמשיך...

$$J=\int_0^1 \sqrt{y}\,\frac{dy}{y+1}=\int_0^1 \frac{\sqrt{y}\cdot dy}{y+1}\underbrace{=}_{\boxed{\substack{z=\sqrt{y}\\ dz=\frac{dy}{2\sqrt{y}}}}}\int_0^1 \frac{z\cdot dz2z}{z^2+1}$$

רק רגע, האם הבנתם כיצד העברנו את הגבולות והכי חשוב כיצד בטאנו את dy .

נמשיך...

$$J=\int_0^1 \frac{z\cdot dz2z}{z^2+1}=2\cdot\int_0^1 \frac{z^2}{z^2+1}dz=2\cdot\int_0^1 \frac{z^2+1-1}{z^2+1}dz$$

$$=2\cdot\int_0^1 (1-\frac{1}{z^2+1})dz=\left[2\cdot(z-\arctan z)\right]_0^1=\frac{4-\pi}{2}$$

רק רגע – וודאו שאתם יודעים כיצד להגיע במדויק לתוצאה הנ"ל. בפרט שימו לב כי arctan1=π/4

סיימנו.

סוף פתרון מטלה 13