פתרונות

פתרון הבחינה מועד 21 מיוחד - 3.2.87

תשובה 1

המשתנה "דעתם של האנשים לגבי החוק המוצע: מסכימים, אדישים או לא מסכימים" מקבל ערכים בסולם שמי.
תשובה ד.

תשובה 2

נסמן את המאורעות הבאים:

A_1 - "החבר הנבחר הוא גבר".

A_2 - "החבר הנבחר היא אשה".

A_3 - "החבר הנבחר הוא ילד".

B - "החבר הנבחר משחק טניס".

נתון: $P(A_1) = 0.35$; $P(A_2) = 0.2$; $P(A_3) = 0.45$,

$P(B|A_1) = 0.6$; $P(B|A_2) = 0.05$; $P(B|A_3) = 0.1$.

מנוסחת ההסתברות השלמה נקבל:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) =$$
$$= 0.35 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.05 + 0.45 \cdot 0.1 = 0.265$$

תשובה ב.

תשובה 3

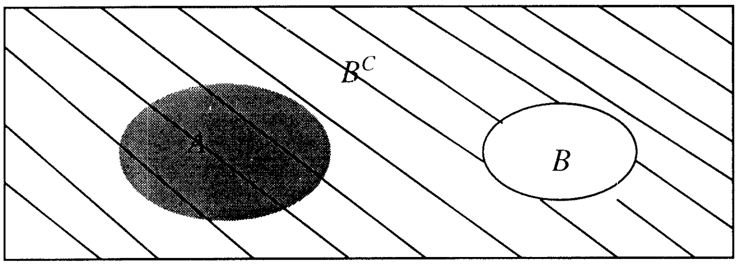
נסמן: x - משקל התרנגולת

y - משקל התערובת שקבלה התרנגולת

שני המשתנים מקבלים ערכים בסולם מנה. וכמו כן על-פי הנתונים מתקיים הקשר $y = 2x$,
כלומר יש קשר לינארי חיובי מלא בין משקל התרנגולת למשקל התערובת ולכן מקדם המתאם המתאים הוא מקדם המתאם של פירסון וערכו 1.
תשובה א.

תשובה 4

A ו- B מאורעות זרים. כלומר: $A \cap B = \phi$, וכמו כן $A \cap B^C = A$ (ראה בדיאגרמת וון):



לכן - $P(A \cap B^C) = P(A) = 0.2$

תשובה ב.

תשובה 5

נסמן: x - לחץ הדם שהתקבל.

x' - לחץ הדם האמיתי.

נתון: $\bar{x} = 135 \;\; ; \;\; s_x = 20$

לחץ הדם האמיתי מתקבל מלחץ הדם שהתקבל על-ידי הטרנספורמציה הלינארית הבאה:

$$x' = \frac{x + 25}{2} = \frac{1}{2}x + 12.5$$

לכן:

$$\bar{x}' = \frac{\bar{x} + 25}{2} = \frac{135 + 25}{2} = 80$$

$$s_{x'} = \frac{1}{2}s_x = \frac{20}{2} = 10$$

תשובה ג.

תשובה 6

לחישוב המדדים נבנה את הטבלה הבאה:

גיל (בגבולות אמיתיים)	x	$f(x)$	$F(x)$	$xf(x)$
13.5-18.5	16	6	6	96
18.5-23.5	21	35	41	735
23.5-28.5	26	27	68	702
28.5-33.5	31	33	101	1023
33.5-38.5	36	30	131	1080
38.5-48.5	43.5	19	150	826.5
סה"כ		150		4462.5

א. הגיל השכיח הוא מרכז המחלקה השנייה כלומר $Mo = 21$.

הגיל החציוני נמצא במחלקה הרביעית. בנתוני הטבלה, לגבי המחלקה החציונית:

$$F(x_{m-1}) = 68$$
$$f(x_m) = 33$$
$$L_0 = 28.5$$
$$L_1 = 33.5$$

ולכן החציון הוא:

$$Md = 28.5 + \frac{\frac{150}{2} - 68}{33} \cdot (33.5 - 28.5) = 29.56$$

הגיל הממוצע הוא:

$$\bar{x} = \frac{\sum_x xf(x)}{n} = \frac{4462.5}{150} = 29.75$$

ב. הרבעון התחתון הוא ערך התצפית ה- $\frac{150}{4} = 37.5$ ולכן הוא שייך למחלקה (18.5-23.5).

בנתוני הטבלה, לגבי המחלקה שבה נמצא Q_1:

$$F(x_{m-1}) = 6$$
$$f(x_m) = 35$$
$$L_0 = 18.5$$
$$L_1 = 23.5$$

ולכן על-פי הנוסחה של הרבעון התחתון:

$$Q_1 = 18.5 + \frac{37.5 - 6}{35} \cdot (23.5 - 18.5) = 23$$

הרבעון העליון הוא ערך התצפית ה- $112.5 = \frac{3 \cdot 150}{4}$ ולכן הוא שייך למחלקה (33.5-38.5).

בנתוני הטבלה, לגבי המחלקה שבה נמצא Q_3 :

$$F(x_{m-1}) = 101$$
$$f(x_m) = 30$$
$$L_0 = 33.5$$
$$L_1 = 38.5$$

ולכן :

$$Q_3 = 33.5 + \frac{112.5 - 101}{30} \cdot (38.5 - 33.5) = 35.42$$

הטווח הבינרבעוני הוא : $35.42 - 23 = 12.42$

ג. הגיל המבוגר ביותר של סטודנט הזכאי למלגת לימודים זהו הערך המתאים למאון ה- 5 , כלומר

אותו ערך שעד אליו יש $7.5 = \frac{150 \cdot 5}{100}$ תצפיות, ולכן הוא שייך למחלקה (18.5-23.5).

בנתוני הטבלה, לגבי המחלקה השנייה :

$$F(x_{m-1}) = 6$$
$$f(x_m) = 35$$
$$L_0 = 18.5$$
$$L_1 = 23.5$$

ולכן הגיל המבוקש הוא :

$$x_5 = 18.5 + \frac{7.5 - 6}{35} \cdot (23.5 - 18.5) = 18.71$$

תשובה 7

נסמן ב- X את המשתנה זמן הנסיעה בכוון אחד.

נתון : $\bar{x} = 24$ ו- $s_x = 4$ דקות, $X \sim N(24, 4^2)$.

א. מחפשים את $P(X > 30)$.

$$P(X > 30) = P(Z > \frac{30 - 24}{4}) = 1 - \phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

ב. אחוז הפעמים שהאדם מאחר הוא אחוז הפעמים שזמן הנסיעה גבוה מ- 15 דקות .

$$P(X > 15) = P(Z > \frac{15 - 24}{4}) = 1 - \phi(-2.25) =$$
$$= 1 - (1 - \phi(2.25)) = \phi(2.25) = 0.9878$$

כלומר 98.78% .

ג. זמן הנסיעה שרק 10% מהנסיעות לוקחות יותר זמן ממנו הוא אותו הזמן ש- 90% מהנסיעות אורכות פחות זמן ממנו, כלומר הערך המתאים למאון ה- 90 של ההתפלגות.

$$P(X < x) = P(Z < \frac{x-24}{4}) = 0.9$$

מטבלת העזר II ביחידה 4:

$$z_x = \frac{x-24}{4} = 1.282$$

זמן הנסיעה הוא: $x = 24 + 1.282 \cdot 4 = 29.128$ דקות.

תשובה 8

א. נגדיר את המשתנה המקרי X - מספר הפעמים שקיבל האדם קו פנוי במשך שבוע.

$X \sim B(6, 0.4)$, ולכן

$$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) =$$

$$= \binom{6}{4} 0.4^4 \cdot 0.6^2 + \binom{6}{5} 0.4^5 \cdot 0.6^1 + \binom{6}{6} 0.4^6 \cdot 0.6^0 =$$

$$= \frac{6!}{4!2!} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^2 + \frac{6!}{5!1!} \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^1 + \frac{6!}{6!0!} \cdot 0.4^6 \cdot 0.6^0 =$$

$$= 0.1792$$

ב. יהי Y - מספר הבקרים שבהם יזכה האדם לקבל קו פנוי.

$Y \sim B(50, 0.4)$, ולכן:

$$E(Y) = 50 \cdot 0.4 = 20$$

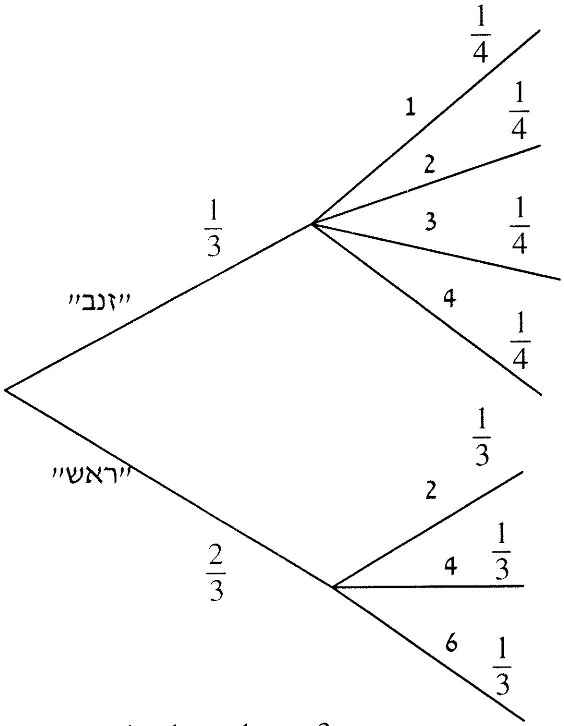
ג. נגדיר את המאורע A: "רק בנסיון החמישי יקבל קו פנוי"

מאורע A יתרחש אם ארבעת הנסיונות הראשונים יסתיימו בכשלון (לא יקבל קו פנוי) ורק הנסיון החמישי יסתיים בהצלחה (יקבל קו פנוי), הנסיונות בלתי תלויים ולכן ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(A) = 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 0.05184$$

תשובה 9

א. דיאגרמת העץ המתאימה לניסוי היא:



$$P(X = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{2}{9} = \frac{11}{36}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{2}{9} = \frac{11}{36}$$

$$P(X = 6) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{36}$$

פונקציית ההסתברות של X היא לכן:

x	1	2	3	4	6
$P(x)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{8}{36}$

ב. $$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 1 \cdot \frac{3}{36} + 2 \cdot \frac{11}{36} + 3 \cdot \frac{3}{36} + 4 \cdot \frac{11}{36} + 6 \cdot \frac{8}{36} = \frac{126}{36} = 3.5$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - 3.5)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - 3.5^2 =$$

$$= 1^2 \cdot \frac{3}{36} + 2^2 \cdot \frac{11}{36} + 3^2 \cdot \frac{3}{36} + 4^2 \cdot \frac{11}{36} + 6^2 \cdot \frac{8}{36} - 3.5^2 =$$

$$= \frac{538}{36} - 12.25 = 2.694$$

פתרון הבחינה מועד 21 ב - 17.3.87

תשובה 1

המשתנה "מידת החרדה" מקבל ערכים בסולם סדר .

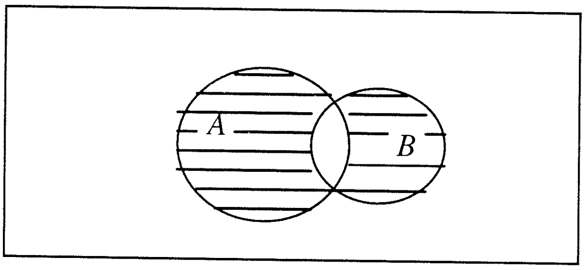
תשובה ב.

תשובה 2

אם A ו- B מאורעות במרחב מדגם מתקיים :

$$P((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

(ראה בדיאגרמת וון) :



מהנתון בשאלה ומכלל החיבור נובע :

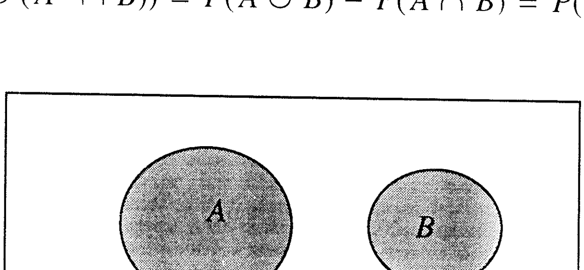
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{5}{8} = \frac{2+3-5}{8} = 0$$

כלומר A ו- B מאורעות זרים.

לגבי מאורעות זרים מתקיים :

$$P((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$

(ראה בדיאגרמת וון) :



לכן ההסתברות המבוקשת היא :

$$P((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)) = P(A \cup B) = \frac{5}{8}$$

תשובה א.

תשובה 3

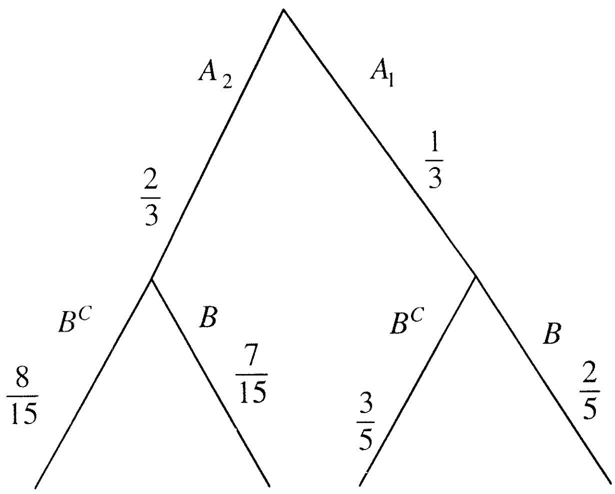
נסמן את המאורעות הבאים :

A_1 - ״תוצאת הטלת הקוביה היא 1 או 5״.

A_2 - ״תוצאת הטלת הקוביה היא 2, 3, 4, או 6״.

B - ״הוצא כדור אדום״.

דיאגרמת העץ המתאימה לניסוי זה היא :



ולכן :

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{15} = \frac{6+14}{45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

תשובה ד.

תשובה 4

נסדר את הנתונים לפי סדר עולה ונקבל :

סדרה א : 12, 8, 8, 8, 8, 8, 8,8, 8, 8

סדרה ב : 10, 10, 10, 10, 10, 10, 8, 8, 8, 8

השכיח בכל סדרה הוא הנתון המופיע מספר רב ביותר של פעמים.

חציון כל סדרה הוא ממוצע הערכים הנמצאים במקומות 5 ו-6 ($\frac{10}{2}$ ו- $1 + \frac{10}{2}$).

לכן :

בסדרה א: השכיח הוא 8 $(Mo = 8)$ והחציון הוא 8 $(\frac{8+8}{2} = 8)$.

בסדרה ב: השכיח הוא 10 $(Mo = 10)$ והחציון הוא 10 $(\frac{10+10}{2} = 10)$.

מכאן - המשפט הנכון הוא משפט ה.

תשובה 5

המשתנים: סוג העבודה ומידת הסיפוק מקבלים ערכים בסולם שמי, ולכן מדד הקשר המתאים הוא מתאם קרמר. למשתנה סוג העבודה יש שלושה ערכים אפשריים ולכן לא נוכל להשתמש במתאם פי.

נבנה את הטבלה הצפויה לחוסר קשר (E_i):

סוג העבודה \ מידת הסיפוק	סיפוק מועט	סיפוק רב	סה"כ
עובד מקצועי	12	18	30
עובד מינהלי	16	24	40
פועל	12	18	30
סה"כ	40	60	100

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} =$$

$$= \frac{(21-18)^2}{18} + \frac{(9-12)^2}{12} + \frac{(24-24)^2}{24} + \frac{(16-16)^2}{16} + \frac{(15-18)^2}{18} + \frac{(15-12)^2}{12} =$$

$$= 2.5$$

מכאן -

$$r_c = \sqrt{\frac{1}{n(L-1)}\chi^2} = \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 1}2.5} = 0.1581$$

תשובה ג.

תשובה 6

נגדיר את המשתנה המקרי X - מספר הבחינות שעבר התלמיד בהצלחה לאורך שני הסמסטרים.
$X \sim B(20, 0.8)$, ולכן:

א.

$$P(\text{התלמיד יעבור את כל הבחינות בהצלחה}) = P(X = 20) =$$
$$= \binom{20}{20} 0.8^{20} \cdot 0.2^{0} = 0.8^{20} = 0.0115$$

ב.

$$P(\text{התלמיד יסיים את הקורס}) = P(X \geq 19) = P(X = 19) + P(X = 20) =$$
$$= \binom{20}{19} 0.8^{19} \cdot 0.2^{1} + \binom{20}{20} 0.8^{20} \cdot 0.2^{0} = 20 \cdot 0.8^{19} \cdot 0.2 + 0.8^{20} = 0.0692$$

ג. ידוע כי התלמיד סיים את הסמסטר הראשון כשלחובתו נזקף כשלון אחד, ולכן, על מנת לסיים את הקורס כולו בהצלחה התלמיד חייב לעבור בהצלחה את כל 10 הבחינות של הסמסטר השני.
יהי Y - מספר הבחינות שעבר התלמיד בהצלחה בסמסטר השני.
$Y \sim B(10, 0.8)$, ולכן ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(Y = 10) = \binom{10}{10} 0.8^{10} \cdot 0.2^{0} = 0.8^{10} = 0.1074$$

תשובה 7

יהי X - גובה חיילי צה"ל.
נתון: $\bar{x} = 172$ ו- $s_x = 8$, $X \sim N(172, 8^2)$.

א. הגובה המינימלי של החיילים המתאמנים בכדורסל הוא הגובה המתאים למאון ה- 97.
מכאן - ציון התקן של הגובה מקיים:

$$P(Z < z_x) = P(Z < \frac{x - 172}{8}) = 0.97$$

מטבלת העזר II ביחידה 4:

$$z_x = \frac{x - 172}{8} = 1.881$$

הערך הגולמי המתאים לציון תקן זה הוא:

$$x = 172 + 1.881 \cdot 8 = 187.048$$

ב.

$$P(168 < X < 172) = P(\frac{168 - 172}{8} < z_x < \frac{172 - 172}{8}) =$$
$$P(-0.5 < Z < 0) = \phi(0) - \phi(-0.5) = 0.5 - (1 - 0.6915) = 0.1915$$

ג. עבור הרבעון התחתון מתקיים: $P(X < Q_1) = P(Z < z_{Q_1}) = 0.25$

מטבלת העזר II ביחידה 4, ומתכונת הסימטריה של העקומה הנורמלית:

$$z_{Q_1} = \frac{Q_1 - 172}{8} = -0.674$$

לכן: $Q_1 = 172 - 0.674 \cdot 8 = 166.608$

באותו אופן עבור הרבעון העליון: $P(X < Q_3) = P(Z < z_{Q_3}) = 0.75$

$$z_{Q_3} = \frac{Q_3 - 172}{8} = 0.674$$

לכן: $Q_3 = 172 + 0.674 \cdot 8 = 177.392$

הטווח הבינרבעוני הוא: $177.392 - 166.608 = 10.784$

תשובה 8

א. על פי חישוביו של ראובן הטרנספורמציה הלינארית היא: $y = x - 50$, לכן:

הממוצע על-פי חישוביו של ראובן יקטן ב- 50 וערכו יהיה: $\bar{y} = \bar{x} - 50 = 45 - 50 = -5$

השכיח יקטן ב- 50 וערכו יהיה: $Mo_y = Mo_x - 50 = 60 - 50 = 10$

הטווח לא ישתנה וערכו ישאר 35.

השונות לא תשתנה: $s_y^2 = s_x^2 = 100$

הרבעון התחתון יקטן ב- 50 וערכו יהיה: $Q_{1_y} = Q_{1_x} - 50 = 30 - 50 = -20$

ב. על פי חישוביו של שמעון הטרנספורמציה הלינארית היא: $z = \frac{x}{2}$, לכן:

הממוצע על-פי חישוביו של שמעון יהיה: $\bar{z} = \frac{\bar{x}}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$

השכיח על-פי חישוביו של שמעון יהיה: $Mo_z = \frac{Mo_x}{2} = \frac{60}{2} = 30$

הטווח על-פי חישוביו של שמעון יהיה: $\frac{35}{2} = 17.5$

השונות על-פי חישוביו של שמעון תהיה: $s_z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 s_x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 100 = 25$

הרבעון התחתון על-פי חישוביו של שמעון יהיה: $Q_{1_z} = \frac{Q_{1_x}}{2} = \frac{30}{2} = 15$

ג. y ו- z הם משתנים מסולם רווחים. כמו כן: $y = x - 50$ ו- $z = \frac{x}{2}$,

מכאן - $z = \frac{y + 50}{2} = \frac{y}{2} + 25$

כלומר הקשר בין y לבין z הוא קשר קווי (לינארי) חיובי מלא ולכן ערכו של מקדם המתאם של פירסון הוא: $r = 1$.

תשובה 9

$$P(X = 1) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 2) = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 3) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 4) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 5) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 6) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 7) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 8) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

פונקציית ההסתברות של X היא לכן:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

ב.

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} + 7 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{8} = \frac{36}{8} = 4.5$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - 4.5)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - 4.5^2 =$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} + 4^2 \cdot \frac{1}{8} + 5^2 \cdot \frac{1}{8} + 6^2 \cdot \frac{1}{8} + 7^2 \cdot \frac{1}{8} + 8^2 \cdot \frac{1}{8} - 4.5^2 =$$

$$= \frac{204}{8} - 20.25 = 5.25$$

פתרון הבחינה מועד 25 נוסף - 14.2.89

תשובה 1

נסמן : X - מספר סיבובי הסביבון של השחקן הראשון.

$$P(X=1)=\frac{1}{4}=\frac{16}{64}$$

$$P(X=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}=\frac{12}{64}$$

$$P(X=3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$$

$$P(X=4)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$$

לכן פונקציית ההסתברות של X היא :

x	1	2	3	4
$P(x)$	$\frac{16}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$

ב.

$$E(X)=\sum_i x_i P(x_i)=1\cdot\frac{16}{64}+2\cdot\frac{12}{64}+3\cdot\frac{9}{64}+4\cdot\frac{27}{64}=\frac{175}{64}=2.7344$$

$$V(X)=\sum_i (x_i-\frac{175}{64})^2P(x_i)=\sum_i x_i^2P(x_i)-\left(\frac{175}{64}\right)^2=$$

$$=1^2\cdot\frac{16}{64}+2^2\cdot\frac{12}{64}+3^2\cdot\frac{9}{64}+4^2\cdot\frac{27}{64}-\left(\frac{175}{64}\right)^2=\frac{577}{64}-\frac{30625}{4096}=1.5388$$

$$\sigma_X=\sqrt{1.5388}=1.24$$

ג. יהיו : X_1 - מספר סיבובי הסביבון של השחקן הראשון.

X_2 - מספר סיבובי הסביבון של השחקן השני.

X_3 - מספר סיבובי הסביבון של השחקן השלישי.

X_4 - מספר סיבובי הסביבון של השחקן הרביעי.

המשתנים X_1, X_2, X_3 ו- X_4 הם משתנים מקריים בלתי תלויים, עם אותה פונקציית הסתברות כמו זו של המשתנה X בסעיף א'.

לכן :

$$E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4 \cdot \frac{175}{64} = 10.9375$$

$$V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) = 4 \cdot 1.5388 = 6.1552$$

תשובה 2

נסמן: x - ציוני מועד א.

y - ציוני מועד ב.

נתון: $\bar{x} = 70$, $s_x = 10$, $\bar{y} = 60$, $s_y = 8$

א. ציונו של רן שנבחן במועד א׳ היה 85, לכן ציון התקן של ציונו הוא: $z_x = \frac{85 - 70}{10} = 1.5$

ציונה של רינה שנבחנה במועד ב׳ היה 78, לכן ציון התקן של ציונה הוא:

$z_y = \frac{78 - 60}{8} = 2.25$.

$z_y > z_x$ לכן סיכויה של רינה טובים יותר.

ב. ציון התקן של יעקב היה כציון התקן של רינה, כלומר: $2.25 = \frac{x - 70}{10}$

מכאן ציונו של יעקב בבחינה הוא: $x = 70 + 2.25 \cdot 10 = 92.5$

תשובה 3

יהי X - אורך החיים של מצבר. ידוע כי $X \sim N(1359, 186^2)$.

א. עבור העשירון העליון מתקיים:

$$P(X < x_{90}) = P(Z < z_{x_{90}}) = 0.90$$

מטבלת העזר II ביחידה 4: $z_{x_{90}} = \frac{x_{90} - 1359}{186} = 1.282$

לכן: $x_{90} = 1359 + 1.282 \cdot 186 = 1597.452$

ב. נגדיר את המשתנה המקרי Y - מספר המצברים שאורך חייהם עולה על 1825 ימים.

$Y \sim B(5, p)$, כאשר,

$$p = P(X > 1825) = 1 - \phi(\frac{1825 - 1359}{186}) = 1 - \phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

ולכן - $P(Y = 5) = \binom{5}{5} p^5 (1 - p)^0 = p^5 = 0.0062^5$

ג. אחוז המצברים שיוחלפו במסגרת האחריות הוא אחוז המצברים שאורך חייהם יהיה קטן מ-

$36 \cdot 30 = 1080$ ימים, כלומר -

$$P(X < 1080) = P(Z \ < \frac{1080-1359}{186}) =$$
$$= P(Z < -1.5) = \phi(-1.5) = 1-\phi(1.5) = 1-0.9332 = 0.0668$$

מכאן - אחוז המצברים שיוחלפו הוא 6.68%.

תשובה 4

נסדר את הציונים לפי סדר עולה:

100, 94, 92, 91, 90, 75, 73, 72, 70, 70, 69, 69, 68, 61, 60, 57, 55

מדדי המיקום המרכזי ומדדי הפיזור של הציונים לפני הבדיקה החוזרת הם:

חציון: מדובר ברשימת נתונים, $n = 17$ הוא אי-זוגי, ולכן החציון הוא הציון במקום ה-

$\frac{17+1}{2} = 9$ כלומר הערך ה- 9 ברשימת הציונים המסודרת ולכן $Md = 70$.

שכיח: יש שני שכיחים 69 ו- 70, שכיחותם 2.

ממוצע:
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{17}(55+57+60+61+68+69+69+70+70+$$
$$+72+73+75+90+91+92+94+100) = \frac{1266}{17} = 74.47$$

טווח:
$$x_{\max} - x_{\min} = 100-55 = 45$$

לאחר הבדיקה החוזרת הציונים 90 ו- 94 תוקנו לציון 92, לכן:

א. חציון הציונים לא ישתנה כי השינויים בוצעו בציונים הקיצוניים ,כך שהערך במרכז ההתפלגות לא השתנה.

ב. לאחר הבדיקה החוזרת השכיח הוא הציון 92 ששכיחותו כעת 3.

ג. $92 + 92 = 94 + 90$, כלומר סכום הציונים לא השתנה, לכן גם ממוצע הציונים לא ישתנה.

ד. הציון הגדול ביותר והציון הקטן ביותר לא השתנו ולכן טווח הציונים לא ישתנה.

ה. סכום הסטיות הריבועיות מהממוצע, לגבי הציונים 90 ו- 94 שתוקנו, גבוה מסכום ריבועי הסטיות של הציונים שקיבלו אותם סטודנטים לאחר הבדיקה החוזרת, כלומר:

$(90-74.44)^2 + (94-74.44)^2 > 2(92-74.44)^2$, לכן שונות הציונים תקטן.

תשובה 5

א. נגדיר את המשתנה המקרי X - מספר האנשים שיגיעו למסעדה מתוך 52 מזמינים.
$X \sim B(52\,,0.8)$. על מנת שהמסעדה תוכל לתת שולחן לכל המגיעים מספר המגיעים צריך להיות לכל היותר 50 וההסתברות למאורע זה היא :

$$P(X \le 50) = 1 - P(X \ge 51) = 1 - \left[P(X = 51) + P(X = 52)\right] =$$

$$= 1 - \left[\binom{52}{51} 0.8^{51} \cdot 0.2^{1} + \binom{52}{52} 0.8^{52} \cdot 0.2^{0}\right] = 1 - 52 \cdot 0.8^{51} \cdot 0.2 - 0.8^{52}$$

ב. יהי Y - מספר האנשים שיגיעו למסעדה מתוך 50 מזמינים.
לכן ההסתברות שיגיעו כל המזמינים היא :

$$p = P(Y = 50) = \binom{50}{50} 0.8^{50} \cdot 0.2^{0} = 0.8^{50}$$

וההסתברות שבכל שלושת הימים יגיעו כל המזמינים היא :

$$p^3 = \left(0.8^{50}\right)^3 = 0.8^{150}$$

פתרון הבחינה מועד 25 ב - 4.4.89

תשובה 1

נסמן את המאורעות הבאים:

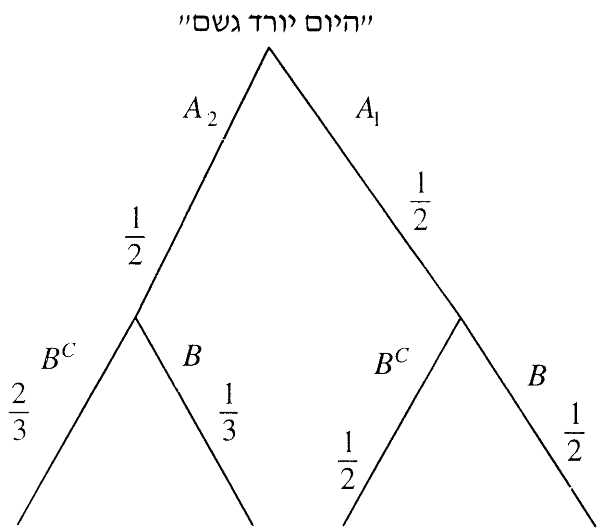
A_1 - "מחר גשם".

A_2 - "מחר נאה".

B - "מחרתיים גשם".

B^C - "מחרתיים נאה".

דיאגרמת העץ המתאימה לניסוי זה היא:



המאורע "מחר ומחרתיים אותו מזג אוויר" הוא איחוד המאורעות הזרים: $(A_1 \cap B)$ ו-

$(A_2 \cap B^C)$ והסתברותו:

$$P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B^C)) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B^C) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

תשובה ד.

תשובה 2

בין 8 האנשים הנוספים, שני הגבהים 170 ס"מ ו- 168 ס"מ מופיעים בשכיחות 2. אך מכיוון שהגובה השכיח של 100 האנשים היה 170 ס"מ גם הגובה השכיח של כל ה- 108 יהיה 170 ס"מ.

תשובה ב.

תשובה 3

יהיו :

X - מספר התשובות הנכונות מתוך 4 השאלות הראשונות.

Y - מספר התשובות הנכונות מתוך 6 השאלות האחרונות.

$X \sim B(4,\frac{1}{3})$ ו- $Y \sim B(6,\frac{1}{5})$.

מספר התשובות הנכונות במבחן הוא $X + Y$. לכן :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 4 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{5} = \frac{20}{15} + \frac{18}{15} = \frac{38}{15}$$

תשובה ב.

תשובה 4

יהיו :

X - הציון בבחינה הפסיכומטרית, $X \sim N(500,100^2)$.

Y - מספר המועמדים שיעמדו בדרישות הקבלה, $Y \sim B(10,p)$, כאשר :

$$p = P(X \ge 600) = P(Z \ge \frac{600-500}{100}) = 1 - \phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

ההסתברות שלפחות שני מועמדים יעמדו בדרישות הקבלה היא לכן :

$$P(Y \ge 2) = 1 - P(Y \le 1) = 1 - \left[P(Y=0) + P(Y=1)\right] =$$

$$= 1 - \binom{10}{0} 0.1587^0 \cdot 0.8413^{10} - \binom{10}{1} 0.1587^1 \cdot 0.8413^9 =$$

$$= 1 - 0.8413^{10} - 10 \cdot 0.8413^9 \cdot 0.1587$$

תשובה ג.

תשובה 5

המשתנה "מספר הסטודנטים באוניברסיטה הפתוחה במחזור כלשהו שבוחרים להיבחן בבחינת הגמר במועד מיוחד" מקבל ערכים בסולם מנה. הטרנספורמציה השומרת על סולם מנה היא טרנספורמציה של הכפלה בקבוע חיובי , כלומר הטרנספורמציה (1) $T(x) = 12x$.

תשובה ד.

תשובה 6

א. בכיתה ח1 הציון הממוצע גדול מהציון החציוני לכן התפלגות הציונים בכיתה זו אסימטרית חיובית, כלומר, יש בכיתה זו ציונים קיצוניים גבוהים. כמו כן סטיית התקן של הציונים בכיתה ח1 גדולה מסטיית התקן של הציונים בכיתה ח2 , כלומר, פיזור הציונים בכיתה ח1 גדול יותר מפיזור הציונים ב-ח2 . לכן בכיתה ח1 יצטרך המורה לנקוט ביתר הוראה אינדיבידואלית.

ב. בכיתה ח1 הציון הממוצע גדול מהציון החציוני לכן התפלגות הציונים בכיתה זו אסימטרית חיובית, כלומר, יש בכיתה זו ציונים קיצוניים גבוהים, ולכן בכיתה זו סביר לחפש תלמידים מצטיינים.

ג.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j n_j}{N} = \frac{30 \cdot 78 + 32 \cdot 71}{30 + 32} = \frac{2340 + 2272}{62} = \frac{4612}{62} = 74.387$$

$$s_c^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2}{N} + \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{N} =$$

$$= \frac{30 \cdot 16^2 + 32 \cdot 6^2}{30 + 32} + \frac{30(78 - 74.387)^2 + 32(71 - 74.387)^2}{30 + 32} =$$

$$= \frac{7680 + 1152}{62} + \frac{391.613 + 367.097}{62} = \frac{8832 + 758.71}{62} = \frac{9590.71}{62} = 154.689$$

$$s_c = \sqrt{154.689} = 12.437$$

תשובה 7

נגדיר : X_1 - הערך הכספי של החפצים שיגיעו לתעודתם כשנשלחו בחבילה אחת.

X_2 - הערך הכספי של החפצים שיגיעו לתעודתם כשנשלחו בשתי חבילות נפרדות.

$$P(X_1 = 0) = 0.02$$

$$P(X_1 = 400) = 0.98$$

פונקציית ההסתברות של X_1 היא לכן :

x_1	0	400
$P(x_1)$	0.02	0.98

תוחלת הערך הכספי בשיטה (1) היא לכן :

$$E(X_1) = 0 \cdot 0.02 + 400 \cdot 0.98 = 392$$

כמו כן :

$P(X_2 = 0) = 0.02 \cdot 0.02 = 0.0004$
$P(X_2 = 150) = 0.02 \cdot 0.98 = 0.9604$
$P(X_2 = 250) = 0.98 \cdot 0.02 = 0.0196$
$P(X_2 = 400) = 0.98 \cdot 0.98 = 0.9604$

פונקציית ההסתברות של X_2 היא:

x_2	0	150	250	400
$P(x_2)$	0.0004	0.0196	0.0196	0.9604

תוחלת הערך הכספי בשיטה (2) היא לכן:

$$E(X_2) = 0 \cdot 0.0004 + 150 \cdot 0.0196 + 250 \cdot 0.0196 + 400 \cdot 0.9604 = 392$$

ב. נסמן את המאורעות:

A_1 - "שני החפצים יגיעו לתעודתם כשנשלחו בחבילה אחת".

A_2 - "שני החפצים יגיעו לתעודתם כשנשלחו בשתי חבילות נפרדות".

$P(A_1) = 0.98$
$P(A_2) = 0.98 \cdot 0.98 = 0.9604$

ג. נסמן את המאורעות:

B_1 - "לפחות אחד החפצים יגיע לתעודתו, כשנשלחו בחבילה אחת".

B_2 - "לפחות אחד החפצים יגיע לתעודתו, כשנשלחו בשתי חבילות נפרדות".

$P(B_1) = 0.98$
$P(B_2) = 1 - P($ שני החפצים לא הגיעו לתעודתם $) = 1 - 0.02 \cdot 0.02 = 0.9996$

תשובה 8

נסמן:

x - מספר ק"מ נסיעה בנסיעות מיוחדות במשך החודש.

y - הפדיון הכולל של הנסיעות במשך החודש.

x' - מספר ק"מ נסיעה בנסיעות מיוחדות בחודש שלאחר מכן.

y' - הפדיון הכולל של הנסיעות בחודש שלאחר מכן.

נתון: $\bar{x} = 1500$; $s_x = 300$;

$\bar{y} = 7500$; $s_y = 800$ ו- $r = 0.85$.

כמו כן: $x' = 0.8x$ ו- $y' = y + 400$

לכן לאחר הטרנספורמציה ערכי המדדים יהיו :

$$\bar{x}' = 0.8\bar{x} = 0.8 \cdot 1500 = 1200$$

$$s_{x'} = 0.8 s_x = 0.8 \cdot 300 = 240$$

$$\bar{y}' = \bar{y} + 400 = 7500 + 400 = 7900$$

$$s_{y'} = s_y = 800$$

וכמו כן מקדם המתאם בין מספר הק"מ בנסיעות מיוחדות לבין הפדיון החודשי מהן לא ישתנה,

כאשר: $r_{x'y'} = \dfrac{\operatorname{cov}(x', y')}{s_{x'} s_{y'}}$

$$\operatorname{cov}(x', y') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i' - \bar{x}')(y_i' - \bar{y}') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(0.8x_i - 0.8\bar{x})((y_i + 400) - (\bar{y} + 400)) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 0.8(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0.8\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0.8\operatorname{cov}(x, y)$$

ולכן :

$$r_{x'y'} = \frac{\operatorname{cov}(x', y')}{s_{x'} s_{y'}} = \frac{0.8\operatorname{cov}(x, y)}{0.8 s_x s_y} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{s_x s_y} = r_{xy} = 0.85$$

תשובה 9

א. על-פי מדיניות הלידות של האשה, אם ידוע שלאשה יש 3 ילדים, אזי בהכרח בלידה השלישית ילדה בן ולכן :

$$P(Y = 1 | X = 3) = 1$$

כאשר : X - מספר הילדים שיש לאשה.

Y - מספר הבנים שיש לאשה.

ב. לאור החלטתה של האשה לא ללדת יותר מ- 5 ילדים, אם ידוע שלאשה 5 ילדים, אזי ההסתברות שיש לה בן היא $\frac{1}{2}$,

$$P(Y = 1 | X = 5) = \frac{P(X = 5, Y = 1)}{P(X = 5)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{2}{32}} = \frac{1}{2}$$

ג. עבור, למשל: $X = 1, Y = 0$:

מצד אחד - $P(X = 1, Y = 0) = 0$

מצד שני - $P(Y = 0) = \frac{1}{32}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$

לכן: $P(X = 1, Y = 0) \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 0)$

מכאן שהמשתנים המקריים X ו- Y תלויים.

ד.

$$P(Y=0) = P(\text{לאשה 5 בנות}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P(Y=1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

פונקציית ההסתברות של Y היא לכן:

y	0	1
$P(y)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{31}{32}$

פתרון הבחינה מועד 27 א - 16.1.90

תשובה 1

א. **לא נכון,**

בהתפלגות אסימטרית חיובית השכיח קטן מהממוצע ואילו בהתפלגות אסימטרית שלילית השכיח גדול מהממוצע.

ב. **לא נכון,**

הטווח הבינרבעוני הוא הטווח של 50% ערכי ההתפלגות שנמצאים במרכזה. במדד זה אין מתחשבים כלל בערכים קיצוניים, ואילו בסטיית התקן מתחשבים בכל התצפיות.

לדוגמה: בסדרה 1,4,4,4,4,4,4,4,4,7 הטווח הבינרבעוני שווה 0, $(4-4=0)$, אך

סטיית התקן שונה מ- 0, $s^2 = \dfrac{(1-4)^2 + 8(4-4)^2 + (7-4)^2}{10} = \dfrac{9+9}{10} = 1.8$

$s = \sqrt{1.8} = 1.34 \neq 0$.

ג. **לא נכון,**

התוחלת של סכום משתנים מקריים שווה לסכום התוחלות, **לכל שני משתנים מקריים**.

ד. **נכון,**

אילו כולם היו משלמים מס הכנסה בשיעור 30% מהכנסתם ברוטו, אזי בין המשתנים:

x - ההכנסה ברוטו לבין y - ההכנסה נטו, יתקיים הקשר $y = 0.7x$, לכן ערכו של מקדם המתאם של פירסון בין x לבין y יהיה 1.

ה. **לא נכון,**

ציון התקן הוא ציון יחסי המודד את המרחק של הציון הגלמי מן הממוצע ביחידות של סטיית תקן. לכן אם $z_y > z_x$ ציונו של התלמיד בבחינה בסוציולוגיה טוב מציונו בבחינה בסטטיסטיקה, באופן יחסי לכל הציונים במקצועות אלה, אך יתכן וציונו הגלמי של התלמיד בסטטיסטיקה גבוה מציונו הגלמי בסוציולוגיה.

למשל: בסטטיסטיקה, הציון הממוצע היה: $\bar{x} = 79$, סטיית התקן היתה: $s_x = 15$, וציון התלמיד היה: $x = 73$ ולכן ציון התקן שלו הוא: $z_x = \dfrac{x - \bar{x}}{s_x} = \dfrac{73-79}{15} = -0.4$

ואילו בסוציולוגיה, הציון הממוצע היה: $\bar{y} = 60$, סטיית התקן היתה: $s_y = 5$, וציון התלמיד היה: $y = 66$, ולכן ציון התקן שלו הוא: $z_y = \dfrac{y - \bar{y}}{s_y} = \dfrac{66-60}{5} = 1.2$

כלומר $z_x > z_y$ אך $x < y$.

תשובה 2

א. נגדיר את המשתנה המקרי X - מספר הניחושים הנכונים בטור בודד בטופס הטוטו.

$X \sim B(14, \frac{1}{3})$.

(1) $$P(X = 14) = \binom{14}{14}\left(\frac{1}{3}\right)^{14}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} = \left(\frac{1}{3}\right)^{14} = \frac{1}{3^{14}}$$

(2) $$P(X = 13) = \binom{14}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} = 14\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{14 \cdot 1 \cdot 2}{3^{13} \cdot 3} = \frac{28}{3^{14}}$$

(3) $$P(X \geq 12) = P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14) =$$

$$= \binom{14}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \frac{28}{3^{14}} + \frac{1}{3^{14}} = \frac{14!}{12!2!} \cdot \frac{1^{12} \cdot 2^{2}}{3^{12} \cdot 3^{2}} + \frac{28}{3^{14}} + \frac{1}{3^{14}} =$$

$$= \frac{91 \cdot 4}{3^{14}} + \frac{28}{3^{14}} + \frac{1}{3^{14}} = \frac{393}{3^{14}}$$

ב. נגדיר את המשתנה המקרי Y - מספר הטורים מתוך ה- 5 בהם הצליח האדם לנחש נכונה את תוצאות כל 14 המשחקים. $Y \sim B(5, \frac{1}{3^{14}})$.

ההסתברות המבוקשת היא :

$$P(Y = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3^{14}}\right)^{2}\left(1 - \frac{1}{3^{14}}\right)^{3}$$

תשובה 3

א. טבלת התפלגות שכיחויות הציונים המתקבלת ממצולע השכיחויות היא :

x	$f(x)$
40-50	5
50-60	20
60-70	55
70-80	10
80-90	10
סה"כ	100

ב. לחישוב המדדים נבנה את הטבלה הבאה :

ציון	x	$f(x)$	$F(x)$	$xf(x)$	x^2	$x^2 f(x)$
40-50	45	5	5	225	2025	10125
50-60	55	20	25	1100	3025	60500
60-70	65	55	80	3575	4225	232375
70-80	75	10	90	750	5625	56250
80-90	85	10	100	850	7225	72250
סה"כ		100		6500		431500

הציון השכיח הוא מרכז המחלקה השלישית כלומר $Mo = 65$.

הציון החציוני נמצא במחלקה השלישית. בנתוני הטבלה, לגבי המחלקה החציונית :

$$F(x_{m-1}) = 25$$

$$f(x_m) = 55$$

$$L_0 = 60$$

$$L_1 = 70$$

ולכן החציון הוא :

$$Md = 60 + \frac{\frac{100}{2} - 25}{55} \cdot (70 - 60) = 64.5454$$

הציון הממוצע הוא :

$$\bar{x} = \frac{\sum_x xf(x)}{n} = \frac{6500}{100} = 65$$

ג.

$$s_x^2 = \frac{\sum_x x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{431500}{100} - 65^2 = 4315 - 4225 = 90$$

ולכן סטיית התקן היא :

$$s_x = \sqrt{90} = 9.487$$

ד. מחפשים את אחוז הסטודנטים שציונם 75 ומעלה כלומר את $(100 - C_{75})$.

הציון 75 הוא מרכז המחלקה הרביעית ולכן מעל ציון זה יש $\frac{10}{2} + 10 = 15$ סטודנטים שהם

$\frac{15}{100} \cdot 100 = 15\%$. או בעזרת חישוב המאון המתאים לציון 75 נקבל :

$$C_{75} = \left(\frac{75 - 70}{80 - 70} \cdot 10 + 80\right)\frac{100}{100} = 85$$

מכאן, אחוז הסטודנטים שציונם 75 ומעלה הוא : $100 - 85 = 15$.

תשובה 4

נסמן ב- X את המשתנה אורך הצינור.

נתון: $\bar{x}=200$ ו- $s_x = 2$ ס״מ, $X \sim N(200, 2^2)$.

א. מחפשים את $P(199 < X < 202)$.

$$P(199<X<202)=P(\frac{199-200}{2}<Z<\frac{202-200}{2})=P(-0.5<Z<1)=$$

$$=\phi(1)-\phi(-0.5)=0.8413-(1-0.6915)=0.8413-0.3085=0.5328$$

כלומר 53.28%.

ב. סף הפסילה החדש הוא הערך המתאים למאון ה- 20 של ההתפלגות.

$$P(X<x)=P(Z<\frac{x-200}{2})=0.2$$

מטבלת העזר II ביחידה 4, ומתכונת הסימטריה של העקומה הנורמלית:

$$z_x=\frac{x-200}{2}=-0.842$$

סף הפסילה החדש הוא לכן: 198.316 ס״מ $x = 200 - 0.842 \cdot 2 =$.

ג. נגדיר את המשתנה המקרי Y - מספר הצינורות שהוחזרו למפעל לעיבוד מחדש מתוך ה- 10,000 שיוצרו. $Y \sim B(10{,}000, p)$, כאשר,

$$p=P(X>202)=1-\phi(\frac{202-200}{2})=1-\phi(1)=1-0.8413=0.1587$$

ולכן ממוצע וסטיית התקן של מספר הצינורות שהוחזרו לעיבוד מחדש הם:

$$E(Y)=10{,}000\cdot 0.1587=1587$$

$$\sigma_Y=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{10{,}000\cdot 0.1587\cdot 0.8413}=\sqrt{1335.14}=36.54$$

תשובה 5

נסמן את המאורעות הבאים:

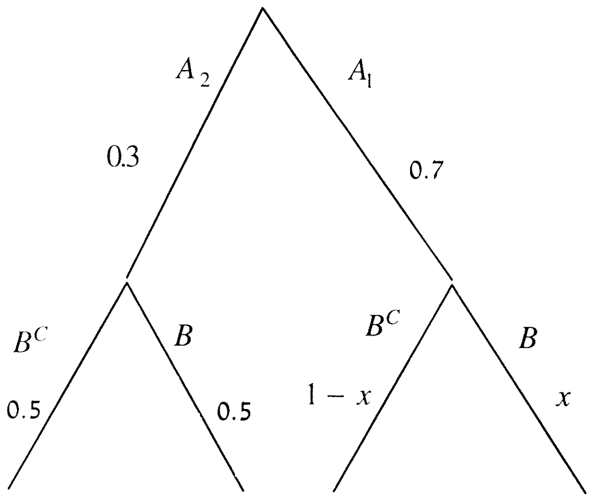
A_1 - ״נבחר הפתק שעליו היה רשום: ׳האם אתה מעשן סמים?׳ ״.

A_2 - ״נבחר הפתק שעליו היה רשום: ״האם ספרת היחידות של מספר הזהות שלך זוגית ?״.

B - ״התשובה היא ׳כן׳ ״.

נתון: $P(A_1)=0.7$, $P(A_2)=0.3$, $P(B|A_2)=0.5$.

דיאגרמת העץ המתאימה לניסוי זה היא :



א. נתון : $P(B) = 0.44$, מכאן :

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) =$$
$$= 0.7 \cdot x + 0.3 \cdot 0.5 = 0.7 \cdot x + 0.15 = 0.44$$

לכן ההסתברות שנחקר מעשן סמים היא :

$$x = \frac{0.44 - 0.15}{0.7} = \frac{0.29}{0.7} = 0.414$$

ב. אילו כל הנחקרים היו מעשני סמים, $P(B|A_1) = 1$, ואז :

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) =$$
$$= 0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.7 + 0.15 = 0.85$$

כלומר אחוז התשובות 'כן' הוא 85%.

פתרון הבחינה סמסטר א92 - מועד א - 28.1.92

תשובה 1

א. **לא נכון,**

נסמן : x - ציונים בהבנת הנקרא.

y - ציונים בחשבון.

נתון : $s_x^2 > s_y^2$, $\bar{x} = \bar{y}$

אבל סכום הסטיות מהממוצע הוא תמיד אפס.

כלומר - $\sum (x_i - \bar{x}) = \sum (y_i - \bar{y}) = 0$

ב. **לא נכון,**

נסמן את המאורעות הבאים :

B - ״גשם ביום מסוים״.

A - ״גשם יום לפני כן״.

נתון : $P(B|A^C) = \frac{1}{5}$, מכאן : $P(B^C|A^C) = \frac{4}{5}$.

אבל לגבי $P(B|A)$ לא ניתן לדעת ללא נתונים נוספים.

ג. **לא נכון,**

$x'_{MAX} < x_{MAX}$ ולכן הטווח יקטן וכמו כן הפחתת השכר לעובדים בעשירון העליון תקטין את פיזור

ההתפלגות ולכן סטיית התקן תקטן אף היא.

ד. **לא נכון,**

$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0.7 = 0.3$

$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^C) = 1 - 0.3 = 0.7$

כמו כן - $P(A \cup B) = 0.7 = 0.4 + 0.3 = P(A) + P(B)$

לכן - $P(A \cap B) = 0 \neq 0.4 \cdot 0.3 = P(A)P(B)$

כלומר, A ו- B מאורעות תלויים.

ה. נכון,

נסמן ב- X את המשתנה מנת המשכל.

נתון: $X \sim N(100, 15^2)$.

התחום הסימטרי סביב הממוצע שבו נמצאים 95% מהמקרים מקיים:

$$P(\bar{x} - k < X < \bar{x} + k) = 0.95$$

מכאן - $\phi(\frac{k}{15}) - \phi(-\frac{k}{15}) = 2\phi(\frac{k}{15}) - 1 = 0.95$

וכן - $\phi(\frac{k}{15}) = \frac{0.95 + 1}{2} = 0.975$

לכן - $\frac{k}{15} = 1.96$, כלומר - $k = 15 \cdot 1.96 = 29.4$

התחום המבוקש הוא לכן:

בין $100 - 29.4 = 70.6$ לבין $100 + 29.4 = 129.4$.

או לחילופין, אם נחשב את החלק באוכלוסיה שמנת משכלו בין 70.6 לבין 129.4 ,

כלומר את $P(70.6 < X < 129.4)$, נקבל:

$$P(70.6 < X < 129.4) = P(\frac{70.6 - 100}{15} < Z < \frac{129.4 - 100}{15}) =$$

$$P(-1.96 < Z < 1.96) = 2\phi(1.96) - 1 = 2 \cdot 0.9750 - 1 = 0.95$$

שהם 95% מהמקרים.

תשובה 2

א. המשחק הכדאי ביותר הוא המשחק עם ההסתברות הגבוהה ביותר לזכות בפרס.

במשחק א -

$$P(\text{פרס}) = P(\text{ל,ל}) + P(\text{י,י}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 + 6}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

במשחק ב -

נגדיר את המשתנה המקרי X - הכדורים הלבנים שהוצאו.

$X \sim B(4, \frac{1}{3})$, לכן:

$$P(\text{פרס}) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$$

$$= 1 - \frac{16}{81} - \frac{32}{81} = \frac{33}{81}$$

במשחק ג -

$$P(\text{פרס}) = P(\text{ש}) + P(\text{ש},\text{ל}) + P(\text{ש},\text{י}) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{5+2+3}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

כיוון ש: $\frac{33}{81} > \frac{1}{3} > \frac{4}{15}$ משחק ב הוא הכדאי ביותר.

ב. נסמן ב- X את המשתנה מספר הכדורים הלבנים שהוצאו.

הוצאת הכדורים היא עם החזרה לכן: $X \sim B(4, \frac{1}{3})$.

ג.

$$E(X) = 4\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$V(X) = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{9} = 0.89$$

תשובה 3

יהי X - קוטר קנה הרובים. ידוע כי $X \sim N(7.62, 0.001^2)$.

א.

$$P(7.618 < X < 7.622) = P(\frac{7.618-7.62}{0.001} < Z < \frac{7.622-7.62}{0.001}) =$$

$$= P(-2 < Z < 2) = \phi(2) - \phi(-2) = 2\cdot\phi(2) - 1 = 2\cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

אחוז הרובים הלא תקניים בייצור הוא לכן: $100 - 95.44 = 4.56\%$.

ב. נגדיר את המשתנה המקרי Y - מספר הקנים התקניים בבדיקה.

$Y \sim B(20, 0.9544)$,

(1).

$$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{20}{0}0.9544^0(1-0.9544)^{20} = 1 - 0.0456^{20}$$

(2). המאורע "יותר מקנה פגום (לא תקני) אחד בבדיקה" זהה למאורע "לכל היותר 18 קנים תקניים", והסתברותו היא:

$$P(Y \le 18) = 1 - P(Y=19) - P(Y=20) =$$

$$= 1 - \binom{20}{19}0.9544^{19}\cdot 0.0456^1 - \binom{20}{20}0.9544^{20}\cdot 0.0456^0 =$$

$$= 1 - 20\cdot 0.9544^{19}\cdot 0.0456 - 0.9544^{20} = 0.2311$$

מכאן מספר ההודעות שיקבל המנהל בחודש עבודה (25 ימים) הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $n = 25$ ו- $p = 0.2311$, ולכן ממוצע מספר ההודעות שיקבל המנהל הוא:

$$np = 25\cdot 0.2311 = 5.78$$

ג. עבור העשירון העליון מתקיים:

$$P(X < x_{90}) = P(Z < z_{x_{90}}) = 0.90$$

מטבלת העזר II ביחידה 4:

$$z_{x_{90}} = \frac{x_{90} - 7.62}{0.001} = 1.282$$

לכן:

$$x_{90} = 7.62 + 1.282\cdot 0.001 = 7.621282$$

תשובה 4

א. יהי x - מספר האותיות 'הי' במלה שהתקבלה על הפיאה.

טבלת התפלגות השכיחויות של x היא:

$f(x)$	x
25	0
14	1
11	2
50	סה"כ

לחישוב הממוצע וסטיית התקן נבנה את הטבלה הבאה:

$x^2 f(x)$	x^2	$xf(x)$	$f(x)$	x
0	0	0	25	0
14	1	14	14	1
44	4	22	11	2
58		36	50	סה"כ

הממוצע הוא:

$$\bar{x} = \frac{\sum_x xf(x)}{n} = \frac{36}{50} = 0.72$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_x x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{58}{50} - 0.72^2 = 1.16 - 0.5184 = 0.6416$$

ולכן סטיית התקן היא:

$$s_x = \sqrt{0.6416} = 0.801$$

ב. יהי y - מספר האותיות במלה שהתקבלה על הפיאה.

טבלת התפלגות השכיחויות של y היא:

$f(y)$	y
24	2
11	3
15	4
50	סה"כ

השכיח: $Mo = 2$.

החציון: $n = 50$ הוא זוגי, ולכן החציון הוא ממוצע שני הערכים המרכזיים, אלו הנמצאים במקומות 25 ו- 26, ערכם של שני הערכים האלה 3, ולכן $Md = \frac{3+3}{2} = 3$.

ג. נסמן: x - הפיאה שהתקבלה.

y - מספר האותיות במילה שהתקבלת.

x מקבל ערכים בסולם שמי ו- y מקבל ערכים בסולם מנה.

מקדמי המתאם המתאימים הם: (i) מדדי λ, $\lambda_{y/x}$ ו- $\lambda_{y/x}$, (ii) מתאם קרמר, (iii) $\eta_{y/x}$.

טבלת השכיחויות המשותפות של x ושל y היא:

x \ y	2	3	4	$f(x)$
נס	10	0	0	10
גדול	0	0	15	15
היה	0	11	0	11
פה	14	0	0	14
$f(y)$	24	11	15	50

(i) נחשב את מדדי λ:

$$L_y = 50 - 24 = 26$$

$$L_{y/x} = (10 - 10) + (15 - 15) + (11 - 11) + (14 - 14) = 0$$

ולכן:

$$\lambda_{y/x} = \frac{L_y - L_{y/x}}{L_y} = \frac{26 - 0}{26} = 1$$

כמו כן -
$$L_x = 50 - 15 = 35$$
$$L_{x/y} = (24-14) + (11-11) + (15-15) = 10$$

ולכן:
$$\lambda_{x/y} = \frac{L_x - L_{x/y}}{L_x} = \frac{35-10}{35} = \frac{25}{35} = 0.714$$

(ii) מתאם קרמר: נחשב את טבלת חוסר הקשר (הטבלה הצפויה):

x \ y	2	3	4	$f(x)$
נס	4.8	2.2	3	10
גדול	7.2	3.3	4.5	15
היה	5.28	2.42	3.3	11
פה	6.72	3.08	4.2	14
$f(y)$	24	11	15	50

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} =$$
$$= \frac{(10-4.8)^2}{4.8} + \frac{(0-2.2)^2}{2.2} + \frac{(0-3)^2}{3} + \frac{(0-7.2)^2}{7.2} + \frac{(0-3.3)^2}{3.3} + \frac{(15-4.5)^2}{4.5} +$$
$$+ \frac{(0-5.28)^2}{5.28} + \frac{(11-2.42)^2}{2.42} + \frac{(0-3.3)^2}{3.3} + \frac{(14-6.72)^2}{6.72} + \frac{(0-3.08)^2}{3.08} + \frac{(0-4.2)^2}{4.2} =$$
$$= 100$$

מכאן:
$$r_c = \sqrt{\frac{1}{n(L-1)}\chi^2} = \sqrt{\frac{1}{50 \cdot 2} 100} = 1$$

(iii) נחשב את $\eta_{y/x}$:

היות שלכל ערך של x מתאים רק ערך אחד של y, הרי שאם x ידוע גם y ידוע,

ולכן $L_{y/x} = 0$. מכאן:

$$\eta^2_{y/x} = \frac{L_y - L_{y/x}}{L_y} = \frac{L_y - 0}{L_y} = 1 \quad ; \quad \eta_{y/x} = 1$$

תשובה 5

א. $P(\text{מטוס מאחר ביותר משעה}) = 0.1 \cdot 0.4 = 0.04$

ב. נגדיר את המשתנה המקרי X - מספר הטיסות שיגיעו באיחור ביום שלישי.

$X \sim B(20, 0.1)$, לכן:

$$P(\text{כל הטיסות תגענה בזמן}) = P(X=0) = \binom{20}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{20} = 0.9^{20} = 0.1216$$

ג. נגדיר את המשתנה המקרי Y - מספר הטיסות, ביום שלישי, שיאחרו ביותר משעה.

$Y \sim B(20, 0.04)$, לכן:

$$P(Y=3) = \binom{20}{3} 0.04^3 \cdot 0.96^{17} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} \cdot 0.04^3 \cdot 0.96^{17} =$$

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{2 \cdot 3} \cdot 0.04^3 \cdot 0.96^{17} = 0.0364$$

ד. $E(Y) = 20 \cdot 0.04 = 0.8$

ה. $\sigma_x = \sqrt{V((X)} = \sqrt{20 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = \sqrt{1.8} = 1.34$

פתרון הבחינה סמסטר א93 - מועד ב1

תשובה 1

א. נכון,

נסמן את המאורעות הבאים:

A - "חלק א' תקין".

B - "חלק ב' תקין".

נתון: $P(A)=0.6 \;\; ; \;\; P(B)=0.5$, המאורעות A ו- B בלתי תלויים.

נגדיר את המשתנה המקרי X - מספר המוצרים הלא תקינים.

$X \sim B(12, p)$, כאשר:

$$p = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.6 \cdot 0.5 = 1 - 0.3 = 0.7$$

ולכן:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{12}{0} 0.7^0 \cdot 0.3^{12} = 1 - 0.3^{12}$$

ב. נכון,

החציון: מדובר ברשימת נתונים, $n=51$ הוא אי-זוגי, ולכן החציון הוא הערך ה- $\frac{51+1}{2}=26$

בסדרה, מתחתיו יש 25 נתונים, ומעליו יש 25 נתונים. כיוון שהוסיפו את הערך 5 רק ל-25 הערכים האחרונים בסדרה, החציון כתוצאה מכך, לא ישתנה.

הממוצע:

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^{51} x_i + 25 \cdot 5}{51} = \frac{\sum_{i=1}^{51} x_i}{51} + \frac{125}{51} = \bar{x} + \frac{125}{51}$$

כלומר הממוצע יגדל ב- $\frac{125}{51}$.

ג. לא נכון,

נסמן את המאורעות הבאים:

A - "הנבחר שייך לקבוצת הלימוד הראשונה".

B - "הנבחר הוא בן".

בקבוצת הלימוד הראשונה לומדים 20 בנים ו- 10 בנות, בקבוצה השנייה 20 בנים ו- 20 בנות, בקבוצה השלישית 30 בנים ו- 10 בנות, כלומר סה"כ לומדים בקורס 70 בנים ומתוכם 20 בנים שייכים לקבוצת הלימוד הראשונה, לכן:

$$P(A|B) = \frac{20}{70} \neq \frac{8}{23}$$

ד. נכון,

כאשר סטיית התקן שווה לאפס, סכום הסטיות הריבועיות מהממוצע שווה לאפס, ואז כל הנתונים שווים לממוצע, אין פיזור בין הנתונים, כלומר כל הנתונים זהים.

ה. לא נכון,

מרחב המדגם הוא: $\Omega =$ {(ז,ר,ר),(ז,ר,ז),(ז,ז,ר),(ז,ז,ז), (ר,ר,ר),(ר,ר,ז),(ר,ז,ר),(ר,ז,ז)}

המאורע A הוא: $A =$ {(ר,ר,ר),(ר,ר,ז),(ר,ז,ר),(ר,ז,ז)}

המאורע B הוא: $B =$ {(ז,ז,ז),(ר,ז,ז)}

$A \cap B$ הוא המאורע: "התקבלו ראש בהטלה הראשונה וזנב בהטלות 2 ו- 3".

כלומר: $A \cap B =$ {(ר,ז,ז)}

מכאן: $P(A \cap B) = \frac{1}{8} \neq 0$

לכן המאורעות A ו- B אינם מאורעות זרים.

תשובה 2

א. טבלת התפלגות השכיחויות היא:

x	$f(x)$
4000-4500	20,000
4500-5000	30,000
5000-5500	5,000
5500-6000	40,000
6000-6500	30,000
6500-7000	20,000
7000-8000	20,000
8000-9000	10,000
סה"כ	175,000

ב. לחישוב המדדים נבנה את הטבלה הבאה:

הכנסה	x	$f(x)$ (באלפי משפחות)	$F(x)$ (באלפי משפחות)	$xf(x)$
4000-4500	4250	20	20	85,000
4500-5000	4750	30	50	142,500
5000-5500	5250	5	55	26,250
5500-6000	5750	40	95	230,000
6000-6500	6250	30	125	187,500
6500-7000	6750	20	145	135,000
7000-8000	7500	20	165	150,000
8000-9000	8500	10	175	85,000
סה"כ		175		1,041,250

ההכנסה השכיחה היא מרכז המחלקה הרביעית, הגבוהה ביותר בהיסטוגרמה (הצפופה ביותר), לכן, $Mo = 5750$.

ההכנסה החציונית נמצאת במחלקה הרביעית. בנתוני הטבלה, לגבי המחלקה החציונית:

$F(x_{m-1}) = 55$

$f(x_m) = 40$

$L_0 = 5500$

$L_1 = 6000$

ולכן החציון הוא:
$$Md = 5500 + \frac{\frac{175}{2} - 55}{40} \cdot (6000 - 5500) = 5906.25$$

ההכנסה הממוצעת היא:
$$\bar{x} = \frac{\sum_x xf(x)}{n} = \frac{1,041,250}{175} = 5950$$

ג. העשירון העליון הוא ערך התצפית ה- $\frac{175 \cdot 90}{100} = 157.5$ ולכן הוא שייך למחלקה (7000-8000).

בנתוני הטבלה, לגבי המחלקה שבה נמצא העשירון העליון:

$F(x_{m-1}) = 145$

$f(x_m) = 20$

$L_0 = 7000$

$L_1 = 8000$

ולכן על-פי הנוסחה של המאון: $x_{90} = 7000 + \frac{157.5 - 145}{20} \cdot (8000 - 7000) = 7625$

ד. ההכנסה נטו בחודש מרץ מתקבלת מההכנסה ברוטו בחודש פברואר על-ידי הטרנספורמציה הלינארית הבאה:

$$y = 0.75x + 200$$

כאשר: y - ההכנסה נטו במרץ

x - ההכנסה ברוטו בפברואר.

ולכן ערכי המדדים של ההכנסה נטו הם:

השכיח: $Mo_y = 0.75 \cdot Mo_x + 200 = 0.75 \cdot 5750 + 200 = 4512.5$

החציון: $Md_y = 0.75 \cdot Md_x + 200 = 0.75 \cdot 5906.25 + 200 = 4629.6875$

הממוצע: $\bar{y} = 0.75 \cdot \bar{x} + 200 = 0.75 \cdot 5950 + 200 = 4662.5$

העשירון העליון: $y_{90} = 0.75 \cdot x_{90} + 200 = 0.75 \cdot 7625 + 200 = 5918.75$

ה. המשתנה הכנסה מקבל ערכים בסולם מנה. כמו כן ההכנסה נטו בחודש מרץ מתקבלת מההכנסה ברוטו בחודש פברואר על-ידי הטרנספורמציה הלינארית הבאה: $y = 0.75x + 200$, כלומר יש קשר לינארי חיובי מלא בין ההכנסה ברוטו בפברואר להכנסה נטו במרץ, ערכו של מקדם המתאם של פירסון בין x לבין y הוא לכן 1.

תשובה 3

א. נניח שצבעי הכדורים שבכד הם: אדום ('א'), שחור ('ש') ו- לבן ('ל'). כמו כן הכדורים מוצאים מן הכד באופן מקרי ועם החזרה, לכן:

$$P(X=2) = P(\text{א,ש}) + P(\text{א,ל}) + P(\text{ש,א}) + P(\text{ש,ל}) + P(\text{ל,א}) + P(\text{ל,ש}) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{6}{9} = \frac{18}{27}$$

$$P(X=3) = P(\text{א,א,ש}) + P(\text{א,א,ל}) + P(\text{ש,ש,א}) + P(\text{ש,ש,ל}) + P(\text{ל,ל,א}) + P(\text{ל,ל,ש}) =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{6}{27}$$

$$P(X=4) = P(\text{א,א,א,ש}) + P(\text{א,א,א,ל}) + P(\text{ש,ש,ש,א}) + P(\text{ש,ש,ש,ל}) +$$

$$+ P(\text{ל,ל,ל,א}) + P(\text{ל,ל,ל,ש}) = 6 \cdot \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

$$P(X=5) = P(\text{א,א,א,א,ש}) + P(\text{א,א,א,א,ל}) + P(\text{ש,ש,ש,ש,א}) + P(\text{ש,ש,ש,ש,ל}) +$$

$$+ P(\text{ל,ל,ל,ל,א}) + P(\text{ל,ל,ל,ל,ש}) + P(\text{א,א,א,א,א}) + P(\text{ש,ש,ש,ש,ש}) + P(\text{ל,ל,ל,ל,ל}) =$$

$$= 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{27}$$

פונקציית ההסתברות של X היא לכן:

x	2	3	4	5
$P(x)$	$\frac{18}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$

ב.

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 2 \cdot \frac{18}{27} + 3 \cdot \frac{6}{27} + 4 \cdot \frac{2}{27} + 5 \cdot \frac{1}{27} = \frac{67}{27} = 2.4815$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \frac{67}{27})^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \left(\frac{67}{27}\right)^2 =$$

$$= 2^2 \cdot \frac{18}{27} + 3^2 \cdot \frac{6}{27} + 4^2 \cdot \frac{2}{27} + 5^2 \cdot \frac{1}{27} - \left(\frac{67}{27}\right)^2 = \frac{183}{27} - \frac{4489}{729} = \frac{452}{729} = 0.62$$

ג. נסמן: Y - הרווח הנקי של השחקן במשחק.

ולכן, $Y = 9 - 3X$:

$$E(Y) = 9 - 3E(X) = 9 - 3 \cdot \frac{67}{27} = \frac{42}{27} = 1.55$$

$$V(Y) = (-3)^2 V(X) = 9 \cdot \frac{452}{729} = \frac{452}{81} = 5.58$$

תשובה 4

נסמן ב- X את המשתנה קוטר הברגים.

נתון: $s_x = 0.1$ ס"מ, $X \sim N(\bar{x}, 0.1^2)$

א. מחפשים את מידת הכיול הממוצעת $\bar{x}$, שעבורה יתקיים: $P(X > 5.5) = 0.025$.

$$P(X > 5.5) = 1 - P(X < 5.5) = 0.025$$

מכאן מחפשים מהו $\bar{x}$ שיקיים:

$$P(X < 5.5) = P(Z < z_{5.5}) = P(Z < \frac{5.5 - \bar{x}}{0.1}) = 0.975$$

מטבלה I ביחידה 4:

$$z_{5.5} = \frac{5.5 - \bar{x}}{0.1} = 1.96$$

לכן מידת הכיול הממוצעת היא:

$$\bar{x} = 5.5 - 1.96 \cdot 0.1 = 5.304$$

ב. כעת נתון: $X \sim N(5, 0.1^2)$.

(1)

$$P(4.8 < X < 5.15) = P(\frac{4.8 - 5}{0.1} < Z < \frac{5.15 - 5}{0.1}) = \phi(1.5) - \phi(-2) =$$

$$= 0.9332 - (1 - 0.9772) = 0.9332 - 0.0228 = 0.9104$$

מכאן, אחוז הברגים שקוטרם גבוה מ- 4.8 מ"מ ונמוך מ- 5.15 מ"מ הוא 91.04%.

(2) השכיחות היחסית של הברגים שנזרקים למכונת היתוך היא:

$$P(X < 4.7) = 1 - \phi(\frac{4.7-5}{0.1}) = \phi(-3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

ולכן, מספר הברגים שנזרקו להיתוך מחדש מתוך סדרת ייצור של 100,000 ברגים הוא
בקירוב: $100{,}000 \cdot 0.0013 = 130$

ד. עבור הרבעון התחתון מתקיים: $P(X < Q_1) = P(Z < z_{Q_1}) = 0.25$

מטבלת העזר II ביחידה 4, ומתכונת הסימטריה של העקומה הנורמלית:

$$z_{Q_1} = \frac{Q_1 - \bar{x}}{0.1} = -0.674$$

לכן: $Q_1 = \bar{x} - 0.674 \cdot 0.1 = \bar{x} - 0.0674$

באותו אופן עבור הרבעון העליון: $P(X < Q_3) = P(Z < z_{Q_3}) = 0.75$

$$z_{Q_3} = \frac{Q_3 - \bar{x}}{0.1} = 0.674$$

לכן: $Q_3 = \bar{x} + 0.674 \cdot 0.1 = \bar{x} + 0.0674$

הטווח הבינרבעוני של קוטר הברגים בכל מידת כיול הוא:

$$Q_3 - Q_1 = \bar{x} + 0.0674 - (\bar{x} - 0.0674) = 2 \cdot 0.0674 = 0.1348$$

תשובה 5

פונקציית ההסתברות של כל משתנה מקרי מקיימת: $\sum_i P(x_i) = 1$.

ולכן:

x	20	50	80
$P(x)$	0.25	0.35	**0.4**

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 20 \cdot 0.25 + 50 \cdot 0.35 + 80 \cdot 0.4 = 54.5$$

התוחלת של סכום משתנים מקריים שווה לסכום התוחלות, לכל שני משתנים מקריים,

לכן - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 54.5 + E(Y) = 74$

מכאן - $E(Y) = 74 - 54.5 = 19.5$

אבל - $E(Y) = \sum_i y_i P(y_i) =$

$$= 0 \cdot P(Y=0) + 10 \cdot P(Y=10) + 60 \cdot 0.3 = 10 \cdot P(Y=10) + 18 = 19.5$$

מכאן - $P(Y=10) = \frac{19.5-18}{10} = 0.15$

וכן -

$$P(Y = 0) = 1 - (P(Y = 10) + P(Y = 60)) = 1 - (0.15 + 0.3) = 1 - 0.45 = 0.55$$

לכן :

y	0	10	60
$P(y)$	**0.55**	**0.15**	0.3

ב.

$$V(X) = \sum_i (x_i - 54.5)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - 54.5^2 =$$

$$= 20^2 \cdot 0.25 + 50^2 \cdot 0.35 + 80^2 \cdot 0.4 - 54.5^2 = 3535 - 2970.25 = 564.75$$

$$V(Y) = \sum_i (y_i - 19.5)^2 P(y_i) = \sum_i y_i^2 P(y_i) - 19.5^2 =$$

$$= 0^2 \cdot 0.55 + 10^2 \cdot 0.15 + 60^2 \cdot 0.3 - 19.5^2 = 1095 - 380.25 = 714.75$$

ג. אם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים, אזי $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

לגבי שני המשתנים המקריים X ו- Y בשאלה, לא ידוע האם הם בלתי תלויים או תלויים ולכן לא ניתן להשתמש בתכונת החיבוריות של השונות לחישוב $V(X + Y)$.

ד.

$$E(Z) = E(2X + 8) = 2E(X) + 8 = 2 \cdot 54.5 + 8 = 117$$

$$V(Z) = V(2X + 8) = 2^2 V(X) = 4 \cdot 564.25 = 2259$$

פתרון הבחינה סמסטר 95א - מועד א2

תשובה 1

א. לא נכון,

יהי X - מספר התשובות הנכונות, $X \sim B(20, \frac{1}{5})$.

ויהי Y - מספר התשובות הלא הנכונות, $Y \sim B(20, \frac{4}{5})$.

$\{$ מספר התשובות הנכונות+מספר התשובות הלא הנכונות במבחן $\}$ הוא מספר קבוע,

$X + Y = 20$, לכן , $V(X+Y) = 0$.

ב. נכון,

$$P(A|B) + P(A^C|B) =$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(A^C \cap B)}{P(B)} =$$

$$\frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

ג. נכון,

נסמן את המאורעות הבאים :

A - ״התלמיד יודע לפתור שאלות עם נעלמים״.

A^C - ״התלמיד לא יודע לפתור שאלות עם נעלמים״.

B - ״התלמיד ענה נכון על השאלה״.

נתון : $P(A^C) = 0.4 \quad ; \quad P(A) = 0.6$

$P(B|A^C) = 0.5 \quad ; \quad P(B|A) = 1$

$$P(\text{יודע}|\text{ענה נכון}) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C)} =$$

$$= \frac{0.6 \cdot 1}{0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.5} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

ד. נכון,

התפלגות השכיחויות של שכר העובדים במפעל היא :

$f(x)$	x
7	2800
7	4200
1	5000
15	סה"כ

ההכנסה החציונית היא הכנסת העובד ה- 8 , $Md = 4200$,

וההכנסה הממוצעת היא: $\bar{x} = \frac{7 \cdot 2800 + 7 \cdot 4200 + 1 \cdot 5000}{15} = \frac{54000}{15} = 3600$

ה. **נכון,**

בהתפלגות אסימטרית שלילית: השכיח הוא בעל הערך הגבוה ביותר, החציון נמוך ממנו, הממוצע נמוך יותר ואמצע הטווח הוא הקטן ביותר, $MR < \bar{x} < Md < Mo$.

כמו כן הערך המתאים למאון ה- 60, הוא אותו ערך שמתחתיו נמצא 60% מהתצפיות, ולכן, הוא גבוה מהחציון, $x_{60} > Md$,

לכן: $z_{x_{60}} = \frac{x_{60} - \bar{x}}{s_x} > 0$

כלומר, בהתפלגות אסימטרית שלילית, ציון התקן של הערך המתאים למאון ה- 60 הוא בהכרח חיובי.

תשובה 2

א. טבלת התפלגות השכיחויות היא:

$f(x)$	x
300	0-5000
180	5000-10000
60	10000-20000
60	20000-60000
600	סה"כ

ב. לחישוב המדדים נבנה את הטבלה הבאה:

גודל תביעה	x	$f(x)$	$F(x)$	$xf(x)$
0-5000	2500	300	300	750000
5000-10000	7500	180	480	1350000
10000-20000	15000	60	540	900000
20000-60000	40000	60	600	2400000
סה"כ		600		5400000

גודל התביעה השכיח הוא מרכז המחלקה הראשונה, שלה המלבן הגבוה ביותר בהיסטוגרמה (זו המחלקה הצפופה ביותר) לכן, $Mo = 2500$.

החציון הוא ערך התצפית ה- $\frac{600}{2} = 300$. השכיחות המצטברת במחלקה הראשונה היא 300, כלומר עד לגבול העליון של המחלקה הראשונה יש 300 מקרים ולכן גודל התביעה החציונית הוא הגבול העליון של המחלקה הראשונה, כלומר $Md = 5000$.

או לחילופין, בנתוני הטבלה, לגבי המחלקה החציונית:

$$F(x_{m-1}) = 0$$
$$f(x_m) = 300$$
$$L_0 = 0$$
$$L_1 = 5000$$

ולכן החציון הוא:

$$Md = 0 + \frac{\frac{600}{2} - 0}{300} \cdot (5000 - 0) = 5000$$

גודל התביעה הממוצעת הוא:

$$\bar{x} = \frac{\sum_x xf(x)}{n} = \frac{5400000}{600} = 9000$$

ג. הטווח של גודל התביעה הוא:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 60000 - 0 = 60000$$

להקלת חישוב סטיית התקן נחלק את כל הערכים ב- 100 ונחשב את סטיית התקן של $x' = \frac{x}{100}$, נעזר בטבלה הבאה:

$x'^2 f(x)$	x'^2	$x'f(x)$	$f(x)$	x'
187500	625	7500	300	25
1012500	5625	13500	180	75
1350000	22500	9000	60	150
9600000	160000	24000	60	400
12150000		54000	600	

$$s_{x'}^2 = \frac{\sum_x x'^2 f(x)}{n} - \bar{x}'^2 = \frac{12150000}{600} - \left(\frac{54000}{600}\right)^2 = 20250 - 8100 = 12150$$

$$s_{x'} = \sqrt{12150} = 110.227$$

ולכן סטיית התקן של גודל התביעה היא:

$$s_x = 100 \cdot s_{x'} = 100 \cdot 110.227 = 11022.7$$

ד. הסכום נטו שיקבלו המשפחות מתקבל מגודל התביעה על-ידי הטרנספורמציה הלינארית הבאה:

$$y = x - 500$$

כאשר: y - הסכום נטו.

x - גודל התביעה.

ולכן ערכי המדדים של ההכנסה נטו הם:

השכיח: $Mo_y = Mo_x - 500 = 2500 - 500 = 2000$

החציון: $Md_y = Md_x - 500 = 5000 - 500 = 4500$

הממוצע: $\bar{y} = \bar{x} - 500 = 9000 - 500 = 8500$

סטיית התקן לא תשתנה: $s_y = s_x = 11022.7$

תשובה 3

נסמן ב- X את המשתנה מספר הכדורים שהוצאו.

א. $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = P(\text{א,א,צ}) + P(\text{א,א,א,צ}) =$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

ב. $P(X=1)=P(\text{צ})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0.5$

$$P(X=2)=P(\text{א, צ})=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{20}=0.3$$

$$P(X=3)=P(\text{א, א, צ})=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20}=0.15$$

$$P(X=4)=P(\text{א,א,א, צ})=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{20}=0.05$$

פונקציית ההסתברות של X היא לכן :

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.5	0.3	0.15	0.05

ב.

$$E(X)=\sum_i x_i P(x_i)=1\cdot 0.5+2\cdot 0.3+3\cdot 0.15+4\cdot 0.05=1.75$$

$$V(X)=\sum_i (x_i-1.75)^2 P(x_i)=\sum_i x_i^2 P(x_i)-(1.75)^2=$$

$$=1^2\cdot 0.5+2^2\cdot 0.3+3^2\cdot 0.15+4^2\cdot 0.05-(1.75)^2=3.85-3.0625=0.7875$$

תשובה 4

נסמן את המאורעות הבאים :

A - "הנורה יוצרה במפעל A ".

B - "הנורה יוצרה במפעל B ".

נסמן ב- X_A את המשתנה אורך החיים של נורה המיוצרת על ידי מפעל A .

נסמן ב- X_B את המשתנה אורך החיים של נורה המיוצרת על ידי מפעל B .

נתון : $P(A)=0.6 \quad , \quad P(B)=0.4$

$X_B \sim N(200\ ,\ 30^2)\ ,\ X_A \sim N(150\ ,\ 20^2)$.

א. $P(140<X_A<160)=P(\frac{140-150}{20}<Z<\frac{160-150}{20})=$

$$=\phi(0.5)-\phi(-0.5)=2\phi(0.5)-1=2\cdot 0.6915-1=0.3830$$

כלומר אחוז הנורות המשווקות על ידי יצרן A , שאורך חייהן גבוה מ- 140 ונמוך מ- 160 הוא 38.30% .

ב.

$$0.6P(X_A > 170) + 0.4P(X_B > 170) =$$

$$= 0.6(1-\phi(\frac{170-150}{20})) + 0.4(1-\phi(\frac{170-200}{30})) = 0.6(1-\phi(1)) + 0.4(1-\phi(-1)) =$$

$$= 0.6(1-0.8413) + 0.4 \cdot 0.8413 = 0.09522 + 0.33652 = 0.43174$$

כלומר אחוז הנורות המשווק בארץ, שאורך חייהן אינו נמוך מ- 170 שעות הוא 43.17% .

ג. נסמן ב- C את המאורע "הנורה דולקת יותר מ- 155 שעות".

$$P(C) = 0.6P(X_A > 155) + 0.4P(X_B > 155) =$$

$$= 0.6(1-\phi(\frac{155-150}{20})) + 0.4(1-\phi(\frac{155-200}{30})) =$$

$$= 0.6(1-\phi(0.25)) + 0.4(1-\phi(-1.5)) = 0.6(1-0.5987) + 0.4 \cdot 0.9332 = 0.61406$$

ולכן ההסתברות המבוקשת היא :

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0.4(1-\phi(\frac{155-200}{30}))}{0.61406} = \frac{0.4 \cdot 0.9332}{0.61406} = \frac{0.37328}{0.61406} = 0.60788$$

תשובה 5

נסמן : x - מין הסטודנט.

y - אזור מגורים.

x ו- y מקבלים ערכים בסולם שמי.

מקדמי המתאם המתאימים הם : (i) מדדי λ , $\lambda_{y/x}$ ו- $\lambda_{y/x}$, (ii) מתאם קרמר.

טבלת השכיחויות המשותפות של x ושל y היא :

x \ y	תושב ת"א	אינו תושב ת"א	$f(x)$
סטודנט	8	12	20
סטודנטית	20	10	30
$f(y)$	28	22	50

(i) נחשב את מדדי λ :

$$L_y = 50 - 28 = 22$$

$$L_{y/x} = (20-12) + (30-20) = 8 + 10 = 18$$

ולכן: $$\lambda_{y/x} = \frac{L_y - L_{y/x}}{L_y} = \frac{22-18}{22} = \frac{4}{22} = 0.182$$

מכאן, ש- x עוזר במידה מועטה בניבוי y.

כמו כן,

$$L_x = 50 - 30 = 20$$

$$L_{x/y} = (28-20) + (22-12) = 8 + 10 = 18$$

ולכן: $$\lambda_{x/y} = \frac{L_x - L_{x/y}}{L_x} = \frac{20-18}{20} = \frac{2}{20} = 0.1$$

מכאן, ש- y עוזר במידה מועטה בניבוי x.

(ii) מתאם קרמר: נחשב את טבלת חוסר הקשר (הטבלה הצפויה)

x \ y	תושב ת״א	אינו תושב ת״א	$f(x)$
סטודנט	11.2	8.8	20
סטודנטית	16.8	13.2	30
$f(y)$	28	22	50

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} =$$

$$= \frac{(8-11.2)^2}{11.2} + \frac{(12-8.8)^2}{8.8} + \frac{(20-16.8)^2}{16.8} + \frac{(10-13.2)^2}{13.2} = 3.46$$

לכן: $$r_c = \sqrt{\frac{1}{n(L-1)}\chi^2} = \sqrt{\frac{1}{50\cdot 1}3.46} = 0.26$$

מכאן, הקשר בין המין למקום המגורים הוא חלש.

ב. נסמן את המאורעות הבאים:

A - ״נבחר סטודנט״.

B - ״נבחר(ה) תושב(ת) ת״א״.

(1) $$P(\text{הנבחר אינו תושב ת״א}) = P(B^C) = \frac{22}{50} = 0.44$$

(2) $$P((A\cap B)\cup(A^C\cap B^C)) = P(A\cap B) + P(A^C\cap B^C) = \frac{8+10}{50} = \frac{18}{50} = 0.36$$

(3) $P(A^C | B^C) = \frac{10}{22} = 0.45$

(4) $P(A \cap B) = \frac{8}{50} = 0.16 \quad , \quad P(B) = \frac{28}{50} = 0.56 \quad , \quad P(A) = \frac{20}{50} = 0.4$

מכאן - $P(A \cap B) = 0.16 \neq P(A)P(B) = 0.4 \cdot 0.56 = 0.224$

לכן A ו- B מאורעות תלויים.

כמו כן - $P(A \cap B) = 0.16 \neq 0$, לכן A ו- B מאורעות לא זרים.

פתרון הבחינה סמסטר א96 - מועד א3

תשובה 1

א. נכון,

קו הניבוי לניבוי הציון הפסיכומטרי מתוך הציון הממוצע בבגרות הוא:

$\tilde{y} = b \cdot x + a$, כאשר:

$$b = \frac{r \cdot s_y}{s_x} = \frac{\text{cov}(x,y)}{s_x \cdot s_y} \cdot \frac{s_y}{s_x} = \frac{\text{cov}(x,y)}{s_x^2}$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

מהנתונים נקבל:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{240}{30} = 8 \quad ; \quad \bar{y} = \frac{16800}{30} = 560$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1950}{30} - 64 = 1$$

לכן:

$$b = \frac{48}{1} = 48 \quad ; \quad a = 560 - 48 \cdot 8 = 176$$

מכאן, אם הציון הממוצע בבגרות של יוסי הוא 9 , הניבוי לציון הפסיכומטרי של יוסי הוא:

$$\tilde{y} = 48 \cdot 9 + 176 = 608$$

ב. נכון,

השונות המצורפת של רמת המשכל בשני בתי הספר היא:

$$s_c^2 = \frac{\sum_{j=1}^{2} n_j s_j^2}{N} + \frac{\sum_{j=1}^{2} n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{N}$$

נתון: $s_1 = s_2 = 10$,

מכאן -

$$s_c^2 = \frac{n_1 100 + n_2 100}{n_1 + n_2} + \frac{n_1(\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}})^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}})^2}{n_1 + n_2} =$$

$$= \frac{100(n_1 + n_2)}{n_1 + n_2} + \text{מספר אי שלילי} = 100 + \text{מספר אי שלילי} \geq 100$$

ג. לא נכון

נתון: $P(A^C)=\frac{2}{3}$, מכאן - $P(A)=\frac{1}{3}$.

מכלל החיבור נקבל:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

כמו כן - $P(A)P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

מכאן - $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

לכן המאורעות A ו- B בלתי תלויים.

ד. נכון,

נגדיר את המשתנה המקרי X - מספר המסמרים הפגומים.

$X\sim B(4,p)$.

נתון: $P(X=4)=p^4=0.0016$

מכאן נקבל: $p=0.2$,

לכן: $P(X=2)=\binom{4}{2}0.2^2\cdot 0.8^2=6\cdot 0.04\cdot 0.64=0.1536$

ה. לא נכון,

במשחק 5 שלבים ולכן על פי חוק המכפלה, מספר התוצאות האפשריות במשחק:

$$6\cdot 6\cdot 2\cdot 2\cdot 2=6^2\cdot 2^3=288$$

תשובה 2

א. טבלת התפלגות השכיחויות היחסיות של הציונים היא:

x	$f(x)$	$f(x)/n$
60-65	10	0.08
65-75	30	0.24
75-80	35	0.28
80-90	40	0.32
90-100	10	0.08
סה"כ	125	1

לחישוב המדדים בסעיפים ב ו- ג נבנה את הטבלה הבאה :

ציון	x	$f(x)$	$F(x)$	$xf(x)$	x^2	$x^2f(x)$
60-65	62.5	10	10	625	3906.25	39062.5
65-75	70	30	40	2100	4900	147000
75-80	77.5	35	75	2712.5	6006.25	210218.75
80-90	85	40	115	3400	7225	289000
90-100	95	10	125	950	9025	90250
סה״כ		125		9787.5		775531.25

ב. הציון השכיח הוא מרכז המחלקה השלישית, שלה המלבן הגבוה ביותר בהיסטוגרמה (זו המחלקה בעלת הצפיפות הגבוהה ביותר) כלומר $Mo = 77.5$.

הציון החציוני נמצא במחלקה השלישית. בנתוני הטבלה, לגבי המחלקה החציונית :

$$F(x_{m-1}) = 40$$
$$f(x_m) = 35$$
$$L_0 = 75$$
$$L_1 = 80$$

ולכן החציון הוא :

$$Md = 75 + \frac{\frac{125}{2} - 40}{35} \cdot (80 - 75) = 78.21$$

הציון הממוצע הוא :

$$\bar{x} = \frac{\sum_x xf(x)}{n} = \frac{9787.5}{125} = 78.3$$

חישוב הממוצע יכול להתבצע גם מטבלת השכיחויות היחסיות על ידי הכפלה של כל x בשכיחויות היחסית שלו וסיכום על כל ערכי x :

$$\bar{x} = \frac{\sum_x xf(x)}{n} = \sum_x x\frac{f(x)}{n} = 62.5 \cdot 0.08 + 70 \cdot 0.24 + 77.5 \cdot 0.28 + 85 \cdot 0.32 + 95 \cdot 0.08 = 78.3$$

ג. מחפשים את אחוז הסטודנטים שציונם 85 ומעלה כלומר את ($100 - C_{85}$).

הציון 85 הוא מרכז המחלקה הרביעית ולכן מעל ציון זה יש $\frac{40}{2} + 10 = 30$ סטודנטים שהם

$\frac{30}{125} \cdot 100 = 24\%$. או בעזרת חישוב המאון המתאים לציון 85 נקבל :

$$C_{85} = \left(\frac{85-80}{90-80} \cdot 40 + 75\right)\frac{100}{125} = 76$$

אחוז הסטודנטים שציונם 85 ומעלה הוא לכן : $100 - 76 = 24$.

ד. לצורך חישוב ציון התקן נחשב ראשית את סטיית התקן:

$$s_x^2 = \frac{\sum_x x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{775531.25}{125} - 78.3^2 = 6204.25 - 6130.89 = 73.36$$

סטיית התקן היא: $s_x = \sqrt{73.36} = 8.565$

מכאן, ציון התקן של סטודנט שקיבל ציון 70 הוא: $z_{70} = \frac{70-\bar{x}}{s_x} = \frac{70-78.3}{8.565} = -0.969$

ה. השכיח לא ישתנה, המחלקה השלישית תשאר המחלקה שלה המלבן הגבוה ביותר בהיסטוגרמה.

החציון לא ישתנה כתוצאה מהשינוי, כי החציון אינו מושפע משינויים בערכים הקיצוניים של ההתפלגות.

הטווח לא ישתנה כתוצאה מאיחוד המחלקות, כי לא חל שינוי ב- $x_{\min}$.

הממוצע יקטן, כי לגבי המחלקות 60-65 ו- 65-75:

לפני האיחוד - $xf(x) = 62.5 \cdot 10 + 70 \cdot 30 = 2725$

ולאחר איחוד המחלקות למחלקה אחת נקבל - $xf(x) = 67.5 \cdot 40 = 2700$

סטיית התקן תגדל כי כתוצאה מאיחוד המחלקות סכום ריבועי הסטיות של הנתונים מהממוצע יגדל ופיזור ההתפלגות יגדל.

תשובה 3

נסמן את המאורעות הבאים:

A - "במוצר מופיע פגם מסוג A"

B - "במוצר מופיע פגם מסוג B"

נתון: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cap B) = 0.15$

א. $P(\text{המוצר אינו פגום}) = P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B) =$

$$= 1 - (0.3 + 0.6 - 0.15) = 1 - 0.75 = 0.25$$

ב. $P(\text{המוצר פגום | פגם מסוג } B \text{ בלבד}) = P(A^C \cap B | A \cup B) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(A \cup B)} =$

$$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0.6 - 0.15}{0.3 + 0.6 - 0.16} = \frac{0.45}{0.75} = 0.6$$

ג. נגדיר את המשתנה המקרי X - מספר המוצרים עם פגמים מסוג A בלבד.

$X \sim B(10, p)$, כאשר:

$$p = P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.15 = 0.15$$

מכאן - $P(X=2)=\binom{10}{2}0.15^2 0.85^8=0.2759$

ד. נגדיר את המשתנה המקרי Y - הנזק הנגרם למפעל

$$P(Y=0)=P(A^C\cap B^C)=1-(0.3+0.6-0.15)=0.25$$

$$P(Y=10)=P(A\cap B^C)=0.3-0.15=0.15$$

$$P(Y=20)=P(A^C\cap B)=0.6-0.15=0.45$$

$$P(Y=50)=P(A\cap B)=0.15$$

פונקציית ההסתברות של Y היא לכן:

y	0	10	20	50
$P(y)$	0.25	0.15	0.45	0.15

$$E(Y)=\sum_i y_i P(y_i)=0\cdot 0.25+10\cdot 0.15+20\cdot 0.45+50\cdot 0.15=18$$

$$V(Y)=\sum_i (y_i-18)^2 P(y_i)=\sum_i y_i^2 P(y_i)-18^2=$$

$$=0^2\cdot 0.25+10^2\cdot 0.15+20^2\cdot 0.45+50^2\cdot 0.15-18^2=570-324=246$$

תשובה 4

א. נסמן ב- X_1 את המשתנה משקל הפיתות במאפיית "צדק".

נתון: $\bar{x}_1=100$ ו- $s_{x_1}=8$, $X_1\sim N(100,8^2)$.

$$P(X<94\cup X>106)=P(Z<\frac{94-100}{8})+P(Z>\frac{106-100}{8})=$$

$$=\phi(-0.75)+1-\phi(0.75)=1-\phi(0.75)+1-\phi(0.75)=2-2\cdot\phi(0.75)=$$

$$=2-2\cdot 0.7734=0.4532$$

אחוז הפיתות מתוצרת מאפיית "צדק", שאינן עומדות בתקן הוא לכן: 45.32%.

ב. נסמן ב- X_2 את המשתנה משקל הפיתות במאפיית "נוגה"

נתון: $\bar{x}_2=100$ ו- $s_{x_2}=6$, $X_2\sim N(100,6^2)$.

עבור העשירון העליון מתקיים: $P(X_2<x_{90})=P(Z<z_{x_{90}})=0.90$

מטבלת העזר II ביחידה 4: $z_{x_{90}}=\frac{x_{90}-100}{6}=1.282$

לכן: $x_{90}=100+1.282\cdot 6=107.692$

עבור הרבעון התחתון מתקיים: $P(X_2 < Q_1) = P(Z < z_{Q_1}) = 0.25$

מטבלת העזר II ביחידה 4, ומתכונת הסימטריה של העקומה הנורמלית:

$$z_{Q_1} = \frac{Q_1 - 100}{6} = -0.674$$

לכן: $Q_1 = 100 - 0.674 \cdot 6 = 95.956$

ג. נסמן ב- X_3 את המשתנה משקל הפיתות במאפיית "שמשי"

נתון: $\bar{x}_2 = 100$, $X_3 \sim N(100, s_{x_3}^2)$,

כמו כן נתון: $P(X_3 < 94) = 0.25$.

מטבלת העזר II ביחידה 4, ומתכונת הסימטריה של העקומה הנורמלית:

$$z_{94} = \frac{94 - 100}{s_{x_3}} = -0.674$$

כלומר - $\frac{-6}{s_{x_3}} = -0.674$

סטיית התקן של משקל הפיתות במאפיית "שמשי" היא לכן: $s_{x_3} = \frac{-6}{-0.674} = 8.902$

תשובה 5

א. נגדיר את המשתנה המקרי X - מספר הפריטים הפגומים בחבילה.

$X \sim B(3, \frac{1}{10})$.

$$P(\text{החבילה תיפסל}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$$

$$= 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(\frac{9}{10}\right)^3 = 1 - 0.9^3 = 0.271$$

ב. נגדיר את המשתנה המקרי Y - מספר החבילות שיפסלו בביקורת האיכות.

$Y \sim B(5, 0.271)$.

$$E(Y) = 5 \cdot 0.271 = 1.355$$

$$V(Y) = 5 \cdot 0.271 \cdot (1 - 0.271) = 5 \cdot 0.271 \cdot 0.729 = 0.9878$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{0.9878} = 0.9939$$

ג.

$$P(\text{כל סדרת הייצור תיבדק}) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) =$$

$$= 1 - \binom{5}{0} 0.271^0 \cdot 0.729^5 - \binom{5}{1} 0.271^1 \cdot 0.729^4 = 0.4114$$

פתרון הבחינה סמסטר 97א - מועד א1

תשובה 1

א. **לא נכון,**

$$P(A^C|B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.25-0.15}{0.25}=\frac{0.1}{0.25}=\frac{2}{5}\neq\frac{1}{6}$$

ב. **לא נכון,**

מדובר בטבלת שכיחויות עם מחלקות שאינן שוות רוחב. השכיח הוא **תמיד** מרכז המחלקה שלה המלבן הגבוה ביותר בהיסטוגרמה - המחלקה בעלת הצפיפות הגבוהה ביותר. כדי למצוא את המחלקה שלה המלבן הגבוה ביותר, נוסיף לטבלת השכיחויות עמודה של צפיפות המחלקה (השכיחות חלקי רוחב המחלקה):

מספר ימי עבודה (בגבולות אמיתיים)	$f(x)$	צפיפות= $\frac{f(x)}{l}$
0.5 - 5.5	30	$\frac{30}{5}=6$
5.5 - 11.5	36	$\frac{36}{6}=6$
11.5 - 15.5	14	$\frac{14}{4}=3.5$
15.5 - 17.5	15	$\frac{15}{2}=7.5$
17.5 - 20.5	5	$\frac{5}{3}=1.67$
סה"כ	100	

לכן מספר ימי השכיח הוא מרכז המחלקה הרביעית, כלומר: $Mo=16.5$.

ג. **לא נכון,**

אם נוסיף מספר תצפיות שערך כל אחד מהם כערך הממוצע, או בקרבת הממוצע, נגדיל בכך את ריכוז ההתפלגות, כלומר, נקטין את הפיזור.

לדוגמה: אם הערכים הם בתחילה: 1,2,3,4,5 הממוצע שלהם הוא 3 וסטיית התקן היא 1.414 ,

$$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$s_x = \sqrt{\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} = 1.414$$

לאחר שנוסיף לסדרה 4 ערכים, שערך כל אחד מהם 3, לא נשנה את ממוצע הערכים אך סטיית התקן תקטן.

$$\bar{x}' = \frac{1+2+3+4+5+3+3+3+3}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

$$s_{x'} = \sqrt{\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2+4(3-3)^2}{9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{1.11} = 1..05$$

ד. **נכון,**

נסמן ב- X את המשתנה זמן הריצה.

נתון: $\bar{x} = 9.8$ ו- $s_x = 2$ שניות, $X \sim N(9.8, 2^2)$.

אם רק 8% מתלמידים רצו מהר יותר מגיל, אזי זמן הריצה של גיל הוא הערך המתאים למאון ה- 8, כלומר:

$$P(X < x) = P(Z < \frac{x-9.8}{2}) = 0.08$$

מטבלת העזר II ביחידה 4, ומתכונת הסימטריה של העקומה הנורמלית:

$$z_x = \frac{x-9.8}{2} = -1.405$$

זמן הריצה של גיל הוא לכן:

$$x = 9.8 - 1.405 \cdot 2 = 6.99$$

ה. **לא נכון,**

נגדיר את המשתנה המקרי X - מספר ההטלות בהן התוצאה גדולה מ- 4

$X \sim B(9\ ,\ \frac{1}{3})$,

מכאן -

$$E(X) = np = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3 \neq 1.5$$

תשובה 2

לחישוב המדדים נבנה את טבלת התפלגות השכיחויות בגבולות אמיתיים ונוסיף עמודת שכיחויות מצטברות:

$F(x)$	$f(x)$	גיל
4	4	3.5-6.5
10	6	6.5-12.5
15	5	12.5-18.5
23	8	18.5-24.5
35	12	24.5-28.5
45	10	28.5-35.5
	45	סה"כ

א. הגיל שממנו מקבל תינוק במעון "דני", זהו הערך המתאים למאון ה- 70 ,

כלומר אותו ערך שעד אליו יש $31.5 = \frac{45 \cdot 70}{100}$ תצפיות ולכן הוא שייך למחלקה (24.5-28.5).

בנתוני הטבלה, לגבי המחלקה החמישית :

$$F(x_{m-1}) = 23$$
$$f(x_m) = 12$$
$$L_0 = 24.5$$
$$L_1 = 28.5$$

הגיל המבוקש הוא לכן :

$$x_{70} = 24.5 + \frac{31.5 - 23}{12} \cdot (28.5 - 24.5) = 27.33$$

ב. מחפשים את אחוז התינוקות שגילם 20 חדשים ומעלה כלומר את $100 - C_{20}$.

הגיל 20 נמצא במחלקה (18.5-24.5). על פי הנוסחה :

$$C_{20} = \left[\frac{20 - 18.5}{24.5 - 18.5} \cdot 8 + 15\right] \frac{100}{45} = 37.78\%$$

ולכן, אחוז התינוקות במעון שלומדים ריתמוסיקה הוא :

$$100 - 37.78 = 62.22\%$$

ג. הגיל של התינוק המבוגר ביותר שנשאר במעון עד לשעה 12:30 זהו הערך המתאים למאון ה- $33\frac{1}{3}$. כלומר אותו ערך שעד אליו יש $15 = \frac{45}{3}$ תצפיות. מעמודת השכיחויות המצטברות ניתן לראות כי זהו הגבול העליון של המחלקה (12.5-18.5) כלומר :

$$x_{33\frac{1}{3}} = 18.5$$

תשובה 3

נסמן את המאורעות הבאים:

A_1 - "השבב יוצר במפעל א'"

A_2 - "השבב יוצר במפעל ב'"

B - " השבב פסול"

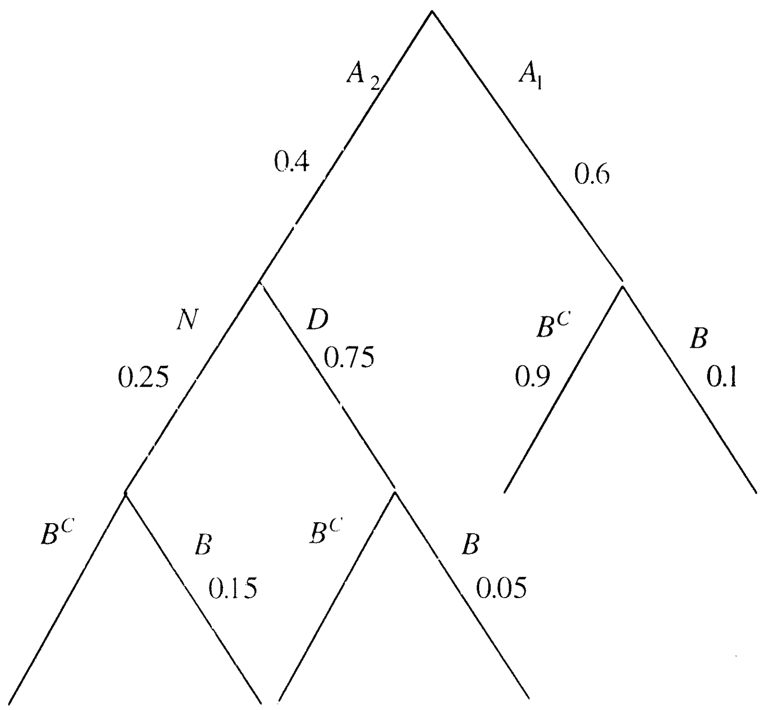
D - " השבב יוצר במשמרת יום"

N - "השבב יוצר במשמרת לילה"

נתון: $P(A_1)=0.6 \ , \ P(A_2)=0.4 \ , \ P(B|A_1)=0.1$

$P(D|A_2)=0.75 \ , \ P(B|A_2\cap D)=0.05 \ , \ P(B|A_2\cap N)=0.15$

דיאגרמת העץ המתאימה לניסוי זה היא:



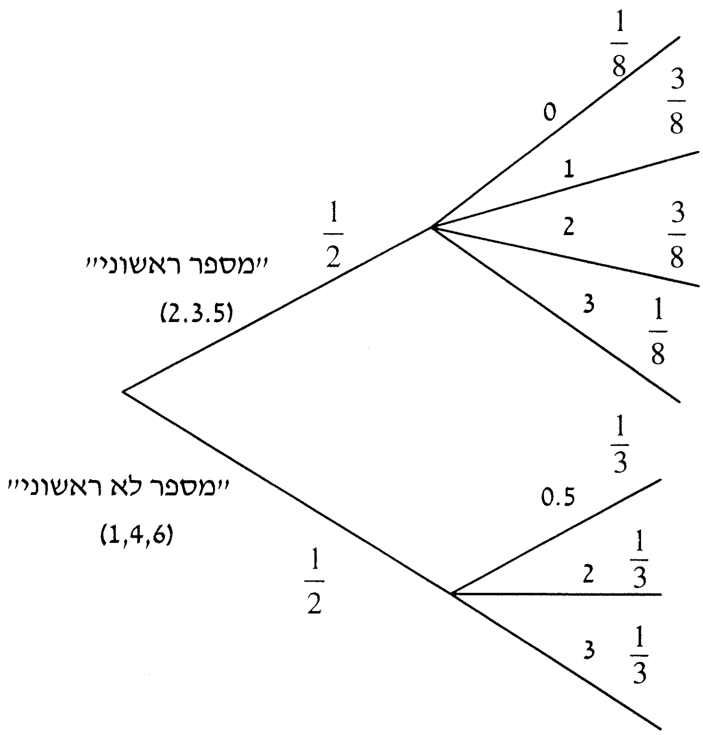
א. $$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap D\cap B)+P(A_2\cap N\cap B)=$$
$$=0.6\cdot 0.1+0.4\cdot 0.75\cdot 0.05+0.4\cdot 0.25\ \ 0.15=0.09$$

ב. $$P(A_1|B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{0.6\cdot 0.1}{0.09}=\frac{0.06}{0.09}=\frac{2}{3}$$

ג. $$P(A_2\cap N|B^C)=\frac{P(A_2\cap N\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{0.4\cdot 0.25\cdot 0.85}{1-0.09}=\frac{0.085}{0.91}=0.0934$$

תשובה 4

א. דיאגרמת העץ המתאימה לניסוי היא :



$$P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}=\frac{3}{48}$$

$$P(X=0.5)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=\frac{8}{48}$$

$$P(X=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{16}=\frac{9}{48}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{16}+\frac{1}{6}=\frac{17}{48}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{16}+\frac{1}{6}=\frac{11}{48}$$

פונקציית ההסתברות של X היא לכן :

x	0	0.5	1	2	3
$P(x)$	$\frac{3}{48}$	$\frac{8}{48}$	$\frac{9}{48}$	$\frac{17}{48}$	$\frac{11}{48}$

ב. $E(X)=\sum_i x_i P(x_i)=0\cdot\frac{3}{48}+0.5\cdot\frac{8}{48}+1\cdot\frac{9}{48}+2\cdot\frac{17}{48}+3\cdot\frac{11}{48}=\frac{80}{48}=\frac{5}{3}=1.67$

תוחלת הרווח במשחק נמוכה מדמי ההשתתפות, $E(X)=1.67<2$,

ולכן לא כדאי להשתתף בו.

ג. נסמן: Y - הרווח הנקי במשחק.

$Y=3X-5$, ולכן:

$$E(Y)=3E(X)-5=3\cdot\frac{5}{3}-5=0$$

$$V(Y)=3^2V(X)$$

כאשר -

$$V(X)=\sum_i (x_i-\frac{5}{3})^2P(x_i)=\sum_i x_i^2P(x_i)-\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$=0^2\cdot\frac{3}{48}+0.5^2\cdot\frac{8}{48}+1^2\cdot\frac{9}{48}+2^2\cdot\frac{17}{48}+3^2\cdot\frac{11}{48}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{178}{48}-\frac{25}{9}=\frac{267-200}{72}=\frac{67}{72}$$

מכאן -

$$V(Y)=3^2V(X)=9\cdot\frac{67}{72}=\frac{67}{8}=8.375$$

תשובה 5

שני המשתנים מקבלים ערכים בסולם רווחים. מקדם המתאם המתאים לתוצאות הוא מקדם המתאם של פירסון.

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{50}x_i}{50}=\frac{400}{50}=8$$

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{50}y_i}{50}=\frac{28{,}000}{50}=560$$

$$s_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2=\frac{3250}{50}-8^2=1$$

$$s_y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n}-\bar{y}^2=\frac{15{,}860{,}000}{50}-560^2=3600$$

$$r = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{s_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n s_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2)}} =$$

$$= \frac{226{,}550 - 50\cdot 8\cdot 560}{\sqrt{(3250-50\cdot 8^2)(15{,}860{,}000-50\cdot 560^2)}} = \frac{2550}{3000} = 0.85$$

מכאן, יש קשר לינארי חיובי חזק בין הציון הממוצע בבגרות לבין הציון במבחן הפסיכומטרי.

ב. קו הניבוי לניבוי הציון במבחן הפסיכומטרי מתוך הציון הממוצע בבגרות הוא:

$\tilde{y} = b\cdot x + a$, כאשר:

$$b = \frac{r s_y}{s_x} = \frac{0.85\cdot 60}{1} = 51$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 560 - 51\cdot 8 = 152$$

ולכן אם הציון הממוצע בבגרות של שמעון היה 9.5, הניבוי לציונו במבחן הפסיכומטרי הוא:

$$\tilde{y} = 152 + 51\cdot 9.5 = 636.5$$

ג. נתון: $Y \sim N(560\ ,\ 60^2)$

.1

$$P(Y>680) = 1-\phi(\frac{680-560}{60}) =$$
$$= 1-\phi(2) = 1-0.9772 = 0.0228$$

אחוז התלמידים שציונם מעל 680 הוא לכן: 2.28%.

2. הציון הפסיכומטרי הנמוך ביותר המאפשר קבלה לאוניברסיטה הוא אותו ציון ש- 80% מהמועמדים מקבלים ציון נמוך ממנו, כלומר הערך המתאים למאון ה- 80 של ההתפלגות.

$$P(Y<y) = P(Z<\frac{y-560}{60}) = 0.8$$

מטבלת העזר II ביחידה 4:

$$z_y = \frac{y-560}{60} = 0.842$$

הציון הפסיכומטרי הוא:

$$y = 560 + 0.842\cdot 60 = 610.52$$