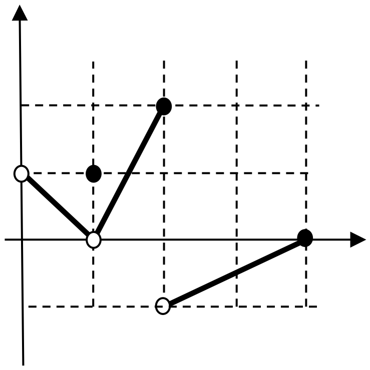
פתרון מקוצר למטלה 11 , קורס 20406 , סמסטר 2024ב.

כתב: חזי נוימן.

פתרון מקוצר הוא פתרון שמכיל את כל האלמנטים המתמטיים החשובים. הוא מכיל תתי שאלות שאתם נדרשים להשיב עליהן על מנת לחדד נקודות בחומר הלימוד. נכנה זאת קריאה אקטיבית.

שאלה 1 - חישובי גבולות מהפן הגרפי



עיינו בגרף הפונקציה $g(x)$.

א. מצאו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)\,,\ \lim_{x\to 1} g(x)\,,\ \lim_{x\to 2^-} g(x)\,,\ \lim_{x\to 2^+} g(x)$$

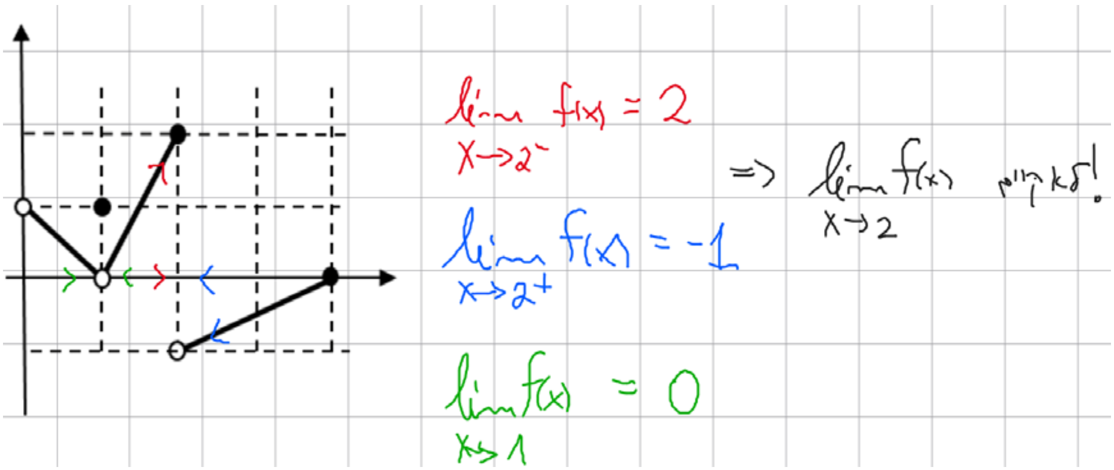
ב. הנה גבול $\lim_{x\to 2}(g^2(x)+t\cdot g(x))$.

אם הגבול קיים מה ערכו? אם הגבול לא קיים - נמקו מדוע.

תשובתכם תהייה תלויה בערכו של הקבוע t וזה נכון.

פתרון מקוצר, שאלה 1 , סעיף א

שימו לב לצבעים השונים (כחול, אדום וירוק)



פתרון מקוצר, שאלה 1 , סעיף ב

מה אסור לעשות? ראינו בסעיף א כי הגבול $\lim_{x\to 2} g(x)$ לא קיים ולכן אסור להפעיל אריתמטיקה.

מה מותר לעשות? ניתן לחשב את הגבולות מימין ומשמאל של הביטוי מכיוון שהגבולות החד צדדיים של g קיימים.

$$\lim_{x\to 2^+}(g^2(x)+t\cdot g(x)) = (-1)^2 + t\cdot(-1) = 1-t$$

$$\lim_{x\to 2^-}(g^2(x)+t\cdot g(x)) = 2^2 + t\cdot 2 = 4+2t$$

הגבול קיים אם ורק הגבולות מימין ומשמאל שווים ולכן **t=-1** . כמו נציין כי הגבול הוא **2** .

✋ מדוע הגבול הוא 2 ?

שאלה 2 - חישובי גבולות, משפטי האריתמטיקה, טריקים חישוביים

א. חשבו את הגבול: $\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)-\sqrt{2x+7}}{3x^2-x-2}$. סעיף 2.5 שאלות 65, 71 . לטריק ששמו **כפל בצמוד**]

ב. חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{10}+(6+x)^{10}}{(2+3x+4x^2)^5}$ בשתי דרכים שונות:

1. דרך ראשונה: חלוקת מונה ומכנה ב- x^{10} ושימוש בעובדה הנחמדה $x^{10}=(x^2)^5$.
2. דרך שנייה: שימוש מנומק בתוצאה 11 בפרק 2.5 .

ג. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3\pi x)}{\sin(2\pi x)}$ ואחר כך חשבו את הגבול $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(3\pi x)}{\sin(2\pi x)}$.

פתרון מקוצר, שאלה 2 , סעיף א

הצמוד של המונה הוא הביטוי $(x+2)+\sqrt{2x+7}$. כופלים מונה ומכנה בביטוי זה ולאחר סידור ופירוק לגורמים וצמצום נקבל:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)-\sqrt{2x+7}}{3x^2-x-2}=\dots=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{(3x+2)\left[(x+2)+\sqrt{2x+7}\right]}=\frac{2}{15}$$

שימו לב כיצד מפרקים לגורמים ביטוי ריבועי שפתרונותיו הם x1 , x2 .

הנה ככה: $ax^2+bx+c=a(x-x1)(x-x2)$. למשל $3x^2-x-2=3(x-1)(x-2/3)$.

מדוע מותר להציב $x=1$ בגבול האחרון. רמז: נמקו לפי אריתמטיקה.

פתרון מקוצר, שאלה 2 , סעיף ב2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{10}+(6+x)^{10}}{(2+3x+4x^2)^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)^{10}+(x)^{10}}{(4x^2)^5}=\frac{2^{10}x^{10}+x^{10}}{4^5x^{10}}=\frac{1025}{1024}$$

פתרון מקוצר, שאלה 2 , סעיף ג

דוגמה 5 בעמוד 140 מראה את הטכסיס המבוקש עבור הגבול x→0 . התוצאה היא 1.5 .

הגבול השני מעניין ונציג את הפתרון.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(3\pi x)}{\sin(2\pi x)}\underbrace{=}_{\boxed{\text{do } t=x-1}}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3\pi(t+1))}{\sin(2\pi(t+1))}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3\pi t+3\pi)}{\sin(2\pi t+2\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin(3\pi t)}{\sin(2\pi t)}=-1.5$$

ההצבה שנבחרה מעבירה את הגבול לנקודה 0 כי בנקודה זאת מוכר לנו המשפט 2.8.3 .

נדגיש – יש להעביר את **הפונקציה** ואת **הגבול**.

נמקו את המעברים הטריגונומטריים **sin(a+3π)=-sin(a)** וגם **sin(a+2π)= sin(a)**

המעבר האחרון הוא שימוש שבגבול הקודם שחישבנו.

פתרו את שאלה 39 בעמוד 141 .

שאלה 3 – רציפות

א. נגדיר: $g(x)=\begin{cases}|x|-1 & , \quad |x+1|\ge 2 \\ 2 & , \quad |x+1|<2\end{cases}$.

ציירו את הגרף של הפונקציה. מהן נקודות הרציפות ואי הרציפות של הפונקציה ?

ב. אריתמטיקה והרכבה של פונקציות רציפות.

ב.1. הוכיחו כי אם $\varphi(x)$ רציפה וחיובית בנקודה x_0 אז $\varphi(x)+\dfrac{1}{\varphi(x)}$ רציפה ב - x_0 .

האם הטיעון ההפוך נכון ..? ובכן, הדגימו פונקציה מהצורה $\varphi(x)=\begin{cases}c_1 & x\le 0 \\ c_2 & x>0\end{cases}$ כך

שהיא לא רציפה בנקודה 0 אבל הפונקציה $\varphi(x)+\dfrac{1}{\varphi(x)}$ רציפה בנקודה 0.

ב.2. הוכיחו כי $\tan(\dfrac{|\sin 3x|}{2-\cos x})$ רציפה לכל x .

פתרון מקוצר, שאלה 3 , סעיף ב1

נרשום מפורשות מהי הפונקציה $\varphi(x)+\dfrac{1}{\varphi(x)}$.

$$\boxed{\varphi(x)+\frac{1}{\varphi(x)}}=\begin{cases}c_1 & x\le 0 \\ c_2 & x>0\end{cases}+\begin{cases}1/c_1 & x\le 0 \\ 1/c_2 & x>0\end{cases}=\boxed{\begin{cases}c_1+1/c_1 & x\le 0 \\ c_2+1/c_2 & x>0\end{cases}}$$

הפונקציה שהתקבלה , מוקפת במלבן, מתי היא רציפה בנקודה x=0 ?

רציפה אם ורק אם הקבועים שווים: $c_1+\frac{1}{c_1}=c_2+\frac{1}{c_2}$. ומכאן נסיק לאחר מספר מעברים

אלגבריים שחייב להתקיים אחד מבין המצבים הבאים: $c_1=c_2$ או $c_1\cdot c_2=1$.

נפסול את המצב בו הקבועים שווים. נותרנו עם $c_1\cdot c_2=1$. נבחר למשל $c_1=2\ ,\ c_2=0.5$.

ובכן, עבור הקבועים הנ"ל הפונקציה $\varphi(x)$ אינה רציפה אבל $\varphi(x)+\dfrac{1}{\varphi(x)}$ רציפה לכל איקס.

- מה השיקול המוביל לאמירה "רציפה אם ורק אם הקבועים שווים"
- בצעו את המעברים האלגבריים וקבלו את שתי האופציות (כחול ואדום) על הקבועים
- מדוע פסלנו את האופציה הכחולה ?
- לאחר שבחרנו את הדוגמא של הקבועים מדוע $\varphi(x)$ לא רציפה בנקודה x=0 ומדוע $\varphi(x)+\dfrac{1}{\varphi(x)}$ רציפה לכל איקס ?

פתרון מקוצר, שאלה 3 , סעיף ב2

הפונקציה $\dfrac{|\sin 3x|}{2-\cos x}$ רציפה לכל איקס בעזרת טיעון של הרכבת רציפות ומנה של רציפות עם

מכנה שונה מאפס. על ביטוי זה מרכיבים את tan . הפונקציה tan אינה רציפה לכל איקס.

אבל שימו לב : $0 \le \frac{|\sin 3x|}{2-\cos x} \le \frac{1}{2-1} = 1$ לכל איקס. בקטע $[0,1]$ טנגנס רציפה. לאור הרכבת

רציפות נסיק כי לכל איקס ההרכבה $\tan(\frac{|\sin 3x|}{2-\cos x})$ רציפה לכל איקס.

שאלה 4 - משפט ערך הביניים

א. יהי $p(x)$ פולינום. הוכיחו כי למשוואה $p(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$ יש שורש.

ב. הוכיחו כי למשוואה $(x+2)^2 - 6 = \frac{1}{x}$ יש לפחות שלושה שורשים.

(**בדף הבית** של הקורס בבלוק הפעילויות , באוסף קישורים, בלינק כלי עבודה תוכלו למצוא את היישום ששמו "וולפרם אלפא" כדאי להכיר ולעשות שימוש בכלי זה)

פתרון מקוצר, שאלה 4 , סעיף א

משפט ערך הביניים הוא משפט על פונקציה רציפה בקטע סגור.

הגרסה הפרקטית של המשפט אומרת כי **פונקציה רציפה בקטע סגור שמליפה סימן בקצוות הקטע היא בעלת שורש בקטע הפתוח**.

נתונה המשוואה $p(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$. לאחר מעברים אלגבריים נקבל את המשוואה הבאה $x(x-1)p(x) + 1 - 2x = 0$. ננסה להוכיח כי למשוואה החדשה יש שורש. אחר כך נבין האם שורש זה הוא גם שורש של המשוואה המקורית.

נגדיר פונקצית עזר $g(x) = x(x-1)p(x) + 1 - 2x$. הפונקציה $g(x)$ היא פולינום ולכן רציפה לכל איקס. נחשב על ידי הצבה פשוטה: $g(0) = 1$ וגם $g(1) = -1$.

לפי עה"ב נסיק:

יש שורש בקטע הפתוח $(0,1)$, כלומר קיים xo כך ש- $g(xo)=0$ ו - $0<xo<1$.

כלומר $x_0(x_0-1)p(x_0) + 1 - 2x_0 = 0$. נעביר אגפים $x_0(x_0-1)p(x_0) = 2x_0 - 1$.

נחלק ונקבל: $p(x_0) = \frac{2x_0 - 1}{x_0(x_0-1)}$.

מדוע מותר לחלק? מדוע הביטוי שבו חילקנו אינו אפס ?

כל שנותר הוא לפשט טיפה את אגף ימין:

$$p(x_0) = \frac{2x_0 - 1}{x_0(x_0-1)} = \frac{x_0 + x_0 - 1}{x_0(x_0-1)} = \frac{x_0}{x_0(x_0-1)} + \frac{x_0 - 1}{x_0(x_0-1)} = \frac{1}{x_0 - 1} + \frac{1}{x_0}$$

הוכחנו קיומו של $0<xo<1$ המהווה שורש למשוואה המקורית.

פתרון מקוצר, שאלה 4 , סעיף ב

נעבור למשוואה $u(x) = (x+2)^2 - 6 - \frac{1}{x} = 0$ ונגדיר פונקציית עזר.

חשבו $u(0.1);u(5)$. מהי מסקנתכם ?

חשבו $u(-0.1);u(-5);u(-2)$ מהי מסקנתכם ?

- סיימו את פתרון השאלה על ידי ניסוח תשובה נאה.
- סטודנט לוקח את המשוואה המקורית שלנו $\frac{1}{x} = (x+2)^2 - 6$ כופל ב x , מעביר אגפים ומקבל את המשוואה הבאה אותה הוא מגדיר כפונקציית עזר: $f(x) = x(x+2)^2 - 6x - 1 = 0$.

מי מבין שתי האפשרויות הבאות נכונה ומוכיחה קיומו של שורש בקטע שרשמנו.

אפשרות א: $f(0) < 0\,;\, f(2) > 0$ ולכן יש שורש <u>למשוואה המקורית</u> בקטע הפתוח (0,2) .

אפשרות ב: $f(0.5) < 0\,;\, f(-2) > 0$ ולכן יש שורש <u>למשוואה המקורית</u> בקטע הפתוח (-2,0.5) .

<u>שאלה 5</u>

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה לכל x . נתון כי $|f(x)| < 1$. הוכיחו כי יש c עבורו $f(c) = c$.

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $g(x) = f(x) - x$ ולהתקדם בעזרת משפט ערך הביניים.

<u>פתרון מקוצר, שאלה 5</u>

חשבו $g(\pm 1)$. סיימו את הניסוח התשובה.

<u>שאלה 6</u>

א. תהיינה $f(x); g(x)$ פונקציות רציפות לכל x . נתון כי $f(1) \le g(1)$.

האם בהכרח מתקיים $\lim_{x\to 1} f(x) \le \lim_{x\to 1} g(x)$? הוכיחו או הביאו דוגמא נגדית.

ב. תהיינה $f(x); g(x)$ פונקציות מוגדרות לכל x . נתון כי $\lim_{x\to 1} f(x) \le \lim_{x\to 1} g(x)$.

האם בהכרח מתקיים $f(1) \le g(1)$? הוכיחו או הביאו דוגמא נגדית.

<u>פתרון מקוצר, שאלה 6 , סעיף א</u>

מה הקשר בין u(a) ובין $\lim_{x\to a} u(x)$ כאשר u רציפה בנקודה a ? סיימו את נסוח התשובה.

<u>פתרון מקוצר, שאלה 6 , סעיף ב</u>

בנו דוגמא נגדית פשוטה.

<u>סוף סקירת פתרון מטלה 11</u>