איך משתמשים? קודם כל מזהים את הנושא העיקרי של השאלה (אם קיים) מבין חמשת הנושאים הבאים: **גבולות, רציפות, גבולות, אינטגרציה, טורים.** לאחר מכן מזהים את תת הנושא של השאלה – כלומר מבינים מה חזי רוצה מאיתנו. בכל נושא נמצאות תבניות/רעיונות/טיפים למציאת פתרון של כ70-80% מהשאלות הפתוחות לכן יש להיעזר בתבניות אך **לא** להסתמך רק עליהן. בהצלחה!!

גבולות:

בגבולות יש 2 סוגים עיקריים של שאלות:

1. **הוכחת קיום גבול בנקודה או בקטע**. יש לנו 2 דרכים עיקריות לעשות זאת:

א. אם נתונה פונקציה וצריך להוכיח קיום גבול **בנקודה** (במיוחד אם גם רואים הטלאה וצריך לבדוק קיום גבול בנקודת ההטלאה) אז הולכים לפי **הגדרת הגבול** ובודקים אם הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים זה לזה.

ב. אופציה שנייה היא לפי **אריתמטיקה של גבולות**. לזכור ש**אסור** להשתמש באריתמטיקה אם לא יודעים שהגבולות של הפונקציות קיימים.

לדוגמה: אם נתון: $\lim_{x\to a}(f(x) - c) = k$, c,k,a קבועים ולא יודעים דבר על הגבול של f(x) אז **אסור** להשתמש באריתמטיקה! מה שכן עושים זה את **הטריק** הבא:

$\lim_{x\to a}(f(x) - c) + \lim_{x\to a} c = k + c$, עכשיו מותר להשתמש באריתמטיקה כי הגבולות של f(x)-c ושל c קיימים (גבול נתון וגבול של קבוע). נקבל שמאריתמטיקה $\lim_{x\to a}(f(x) - c + c) = k + c$

כלומר $\lim_{x\to a} f(x) = k + c$. זה חוקי.

2. **חישוב טכני של גבולות**. תמיד דבר ראשון שעושים זה מסתכלים על הגבול ומנסים להציב.

א. אם יוצא שהגבול הוא מהסוג $\frac{"0"}{0}$ או $\frac{"\infty"}{\infty}$ אז עושים לופיטל: גוזרים את המונה והמכנה של הגבול וממשיכים להציב עד שמקבלים תשובה ממשית או שזו לא עובד.

ב. אם קיים שורש בגבול אז זה כנראה כפל בצמוד.

ג. שימוש בגבולות כמו: $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$ =1 , $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{x}$ = m , ובאופן כללי לכל $\lim_{x\to a} f(x)$ = 0 מתקיים: $\lim_{x\to a}\frac{\sin(f(x))}{f(x)}$ = 1 .

ד. אם קיים גבול מהסוג הבא: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ אז מתייחסים לגורמים המשפיעים ביותר. עבור פולינומים מתייחסים לחזקות הגבוהות ביותר. סדר ה"השפעה" של התנהגות פונקציות באינסוף:

$$\ln(x) < \sqrt{x} < x^n < e^x \ or\ a^x < x^x$$

ה. כפל מקוצר, או טריקים אלגבריים כדי להיפטר מגורם בעייתי (נגיד משהו שמאפס את המכנה)

רציפות

1. **הוכחת רציפות בקטע**:

פותרים לפי אריתמטיקה של רציפות. לזכור שבשביל אריתמטיקה של רציפות נדרוש שכל האיברים יהיו רציפים. (הטריק שהוצג בגבולות 1-ב מתקיים גם עבור רציפות).

2. **הוכחת רציפות בנקודה:**

הולכים לפי הגדרה. פונקציה f(x) רציפה בx=a אם ורק אם מתקיים: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. לכן נחשב קודם את הגבול של f(x) בנקודה a לפי הגדרה (גבולות 1א) ואז נבדוק אם זה שווה לערך הפונקציה בנקודה a.

3. **הוכחת קיום של <u>לפחות</u> n שורשים או פתרון ביטוי מהסוג g(x) = f(x):** מעבירים אגפים ומגדירים פונקציית עזר. אז הולכים לפי **משפט ערך הביניים .** תנאי ראשון לערך הביניים הוא **רציפות.** לאחר מכן מוצאים n קטעים סגורים **שונים** שבהם הפונקציה **רציפה ומחליפה סימן בקצוות הקטע**. לזכור שערך הביניים מוכיח שבכל קטע סגור כזה יש **לפחות** n שורשים, כלומר n שורשים או יותר.

גזירות – בסוף (5) יש טיפים

1. **הוכחת קיום נגזרת בנקודה:**

   א. **אם רואים הטלאה** (או <u>ערך מוחלט</u> שתמיד מפרקים להטלאה) אז הולכים לפי **המשפט שבעמוד 180**. גוזרים את ענפי ההטלאה מלבד נקודת ההטלאה ואז לוקחים את הגבול של הנגזרות כשהן שואפות לנקודת ההטלאה. אם הגבול של הנגזרות שווה אז הפונקציה גזירה בנקודת ההטלאה והנגזרת שלה שווה לגבול. לפי נוסחה, אם a נקודת הטלאה וf(x) היא הפונקציה אז נדרוש:

   $\lim_{x \to a+} f'(x) = \lim_{x \to a-} f'(x)$ ואם השוויון מתקיים ושווה ל-L אז f'(a)=L

   ב. **הגדרת הנגזרת:** $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ עבור בדיקת גזירות בנקודה $x = x_0$. במידת הצורך יש לבדוק נגזרות חד צדדיות (כלומר h שואף ל0+ ו0-).

2. **הוכחת קיום נגזרת בקטע**: לפי אריתמטיקה של גזירות.

3. **הוכחה לקיום <u>בדיוק</u> n פתרונות או שורשים למשוואה (רואים f(x) = g(x))**. משפט ערך הביניים מראה שלפונקציה יש n שורשים לפחות כלומר שיש מינימום n שורשים. משפט רול לעומת זאת מראה שיש מקסימום n שורשים וכך בעזרת שניהם נראה שיש בדיוק n שורשים.

- **שלב 1: משפט ערך הביניים:** גם פה במידת הצורך מעבירים אגפים למשוואה הנתונה ומגדירים פונקציית עזר. תנאי ראשון לערך הביניים הוא **רציפות** לכן יש לבדוק **ולציין בפתרון** מתי שהפונקציה רציפה. לאחר מכן מוצאים n קטעים סגורים **שונים** שבהם הפונקציה **רציפה ומחליפה סימן בקצוות הקטע**. הראנו שיש לפונקציה מינימום n שורשים.

- **שלב 2: משפט רול:** תנאי הכרחי למשפט רול הוא **גזירות** לכן יש לבדוק **ולציין בפתרון** מתי הפונקציה גזירה. (משפט רול אומר - לפונקציה בקטע גזיר יש שורש של הנגזרת בין כל 2 שורשים של הפונקציה, **כלומר אם לפונקציה יש n שורשים אז לנגזרת יש לפחות n-1 שורשים**). **מניחים בשלילה** שלפונקציה יש **n+1 שורשים**. ממשפט רול לנגזרת יש n שורשים לפחות. גוזרים את הפונקציה ומראים שלנגזרת אין n שורשים (אלא פחות) כלומר מקבלים סתירה להנחה שיש לפונקציה n+1 שורשים, משמה יש לפונקציה מקסימום n שורשים.
- **שלב 3: סיכום:** לפונקציה יש מינימום n שורשים מערך הביניים ומקסימום n שורשים מרול לכן יש לה בדיוק n שורשים.
- **חריגים:** לפעמים לא מקבלים סתירה להנחה שמבצעים בשלב 2 ואז כביכול יש "בעיה" עם משפט רול. בפועל מדובר במקרים חריגים כמו המקרים הנ"ל:
  - הנגזרת מתאפסת <u>באותה נקודה</u> שבה הפונקציה מתאפסת ולכן היא לא מתאפסת **בין** 2 שורשים.
  - הנגזרת מתאפסת רק עבור טווח ערכי x שבה הפונקציה לעולם לא מתאפסת (לדוגמה הפונקציה מתאפסת עבור x אי שלילי בלבד ואילו הנגזרת מתאפסת עבור ערכי x שליליים בלבד – מכאן לא ייתכן שיהיה 2 שורשים לפונקציה כי אז יהיה ביניהם, בx חיובי, שורש של הנגזרת).
  - כשיש קבועים שמסומנים ב"אותיות" כמו ..a,b,c לרוב מפרקים את השאלה לפי המקרים $a=0,a<0,a>0$ (כנ"ל לפרמטרים שונים) ואז לרוב נקבל ברול שעבור מקרים ספציפיים הנגזרת כן תתאפס אך באותו מקרה נוכל להגיד בוודאות שלפונקציה יש n שורשים. (לדוגמה לפונקציה $f(x) = 1 + ax + x^3$ $(a\geq 0)$ אם גוזרים נקבל שהנגזרת מתאפסת עבור $a=0$ אך עבור מקרה פרטי זה הפונקציה היא פשוט $f(x) = 1 + x^3$ ובעלת שורש בודד $x=-1$).

4. **הוכחת אי שוויוניים:** אם רואים אי שוויון $f(x)<g(x)$ מעבירים אגפים על מנת לקבל 0 בצד אחד כך: $g(x) – f(x) > 0$. כעת מגדירים פונקציית עזר $u(x) = g(x) – f(x)$ ומראים ש$u(x)$ חיובית לכל x (או אי שלילית אם האי שוויון הוא $\geq$). בפועל מה שלרוב עושים בשאלות כאלה זה למצוא את המינימום המוחלט של $u(x)$ ומראים שהוא חיובי (או אי שלילי, תלוי סימן אי שוויון). כעת נתייחס ל2 מקרים:

- **הקטע הנתון פתוח**: המינימום המוחלט יכול להיות בנקודות אי קיום הנגזרת או בנקודות איפוס הנגזרת. מוצאים את **כולן**, מציבים בפונקציה והקטנה ביניהן היא המינימום המוחלט (היא תצא חיובית/אי שלילית). באופן כללי צריך להראות גם שהפונקציה לא שואפת בקטע למינוס אינסוף אך היות ואנו נדרשים להוכיח את האי שוויון אנו יודעים שזה לא המקרה (אחרת האי שוויון לא יהיה נכון).
- **בקטע סגור** אם הפונקציה רציפה זה קל אף יותר. **ממשפט ערך הקיצון בקטע סגור לפונקציה רציפה יש מינימום ומקסימום מוחלטים והם קיימים בקצוות הקטע הסגור**, **באיפוס הנגזרת או בנקודות אי קיום הנגזרת.** מוצאים את **כל** החשודות לקיצון, מציבים את כולן והקטנה ביותר היא המינימום המוחלט.
  - חריגים: אין מינימום מוחלט. במקרה זה הפונקציה שלנו תהיה תמיד מונוטונית ולכן אפשר לקחת את הגבולות בקצוות הקטע הפתוח ולראות אם הפונקציה שואפת למספרים חיוביים (או אי שליליים, תלוי אי שוויון).

5. **שאלות "מחשבה"**. הן לא תבניתיות אלא צריך לחשוב עבורן. באופן כללי, **טיפים**:

- **רואים נתון שכולל נגזרת שנייה, כנראה יש קטע עם מבחן הנגזרת השנייה.**
- **רואים קטע סגור אולי יש קטע עם משפט ערך הקיצון.**

נוסחאות גזירה:

$\frac{d}{dx}x^n = n \times x^{n-1}$, $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2}$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}ln(X) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}sinx = cosx$$

$$\frac{d}{dx}cosx = -sinx$$

לכל f(x) וg(x) גזירות וקבוע c:

$$\frac{d}{dx}[c \times f(x)] = c\frac{d}{dx}f(x) = c \times f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[g(x) \pm f(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[g(x) \times f(x)] = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

כלל השרשרת: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \times g'(x)$

אינטגרציה

1. **פתרון אינטגרל נתון:** במידה ונתון אינטגרל שעליכם לפתור יש לנסות להגיע ל"**צורה מוכרת**" (*ראה אינטגרציה – צורות מוכרות למטה) שאותה אנו יודעים לפתור ישר. אם האינטגרל הוא לא בעל צורה מוכרת יש להשתמש ב"טריקים" על מנת להגיע לצורה המוכרת שאותה נוכל לפתור.

א. אינטגרציה בהצבה: אם רואים אינטגרנד (הפונקציה שבאינטגרל) מהצורות הבאות:

$a. \int f(x) \times f'(x)dx \quad$ *example:* $\int sinx \times cosx\ dx$

$b. \int \frac{f\prime(x)dx}{f(x)} \quad$ *example:* $\int \frac{x^3 dx}{1+x^4}$

c. $\int g(f(x)) \times f'(x)dx \quad$ example: $\int sin^3(f(x)) * f'(x)dx \ldots$

$d. \int \frac{f\prime(x)dx}{g(f(x))} \quad$ example: $\int \frac{f\prime(x)dx}{f^n(x)}$, $\int \frac{8x^2dx}{(x^3+1)^n} \ldots$

מציבים $t = f(x)$ ומקבלים $dx = dt/f'(x)$ מה שמאפשר לנו לצמצם את $f'(x)$ ולרוב להתקרב לצורה מוכרת שאותה אנו יודעים לפתור.

<u>**חשוב:**</u> כאשר מציבים, **אסור** שלאחר ההצבה נשארים עם אינטגרנד המכיל 2 משתנים שונים ולכן יש לדאוג שנפטרים מ**כל** ה"*x*-ים" לאחר הצבה. יש לזכור שניתן להחליף אגפים בהצבה ולהביע *x* על ידי *t* כדרך נוספת להיפטר ממשתנים לא מתאימים לאחר ההצבה.

ב. <u>מקרה מיוחד - אינטגרציה של חזקות של sinx וcosx:</u>

נזכור כי:

$$(1)\ sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}\ ,\ (2)\ \ cos^2(x) = \frac{1+\cos\,(2x)}{2}\ ,\ \ (3)\ \ sin^2(x) + \ cos^2(x) = 1$$

אלו צורות מוכרות שאנו יודעים לפתור ולכן נשאף להגיע אליהן.

אם רואים:

$\int sin^n(x) \times cos^m(x)dx$ (m ו-n שלמים **ואי שליליים**)

אז:

- **אם n זוגי ו-m אי זוגי:**

1. אם m גדול מ1 מפרידים את $cos^m(x)$ ל$\cos(x) \times cos^{m-1}(x)$
2. כעת בוודאות m – 1 הוא זוגי ולכן ניתן להוציא $(cos^2(x))^{\frac{m-1}{2}}$ ומזהות (3) זה שווה ל: $(1 - sin^2(x))^{\frac{m-1}{2}}$
3. כלומר נקבל:

$$\int sin^n(x) \times cos^m(x)dx = \int sin^n(x) \times cos^{m-1}(x) \times \cos(x)\, dx =$$

$$\int sin^n(x) \times (cos^2(x))^{\frac{m-1}{2}} \times \cos(x)\, dx = \int sin^n(x) \times (1 - sin^2(x))^{\frac{m-1}{2}} \times \cos(x)\, dx$$

כעת נציב t = sinx ונקבל:

$$\int t^n \times (1 - t^2)^{\frac{m-1}{2}} \times \cos(x) \frac{dt}{\cos(x)} = \int t^n \times (1 - t^2)^{\frac{m-1}{2}} dt$$

ומפה ניתן להגיע לצורה של $\int t^k dt$ שאותה אנו יודעים לפתור.

באותו אופן:

- **אם n אי זוגי ו-m זוגי:**

1. אם n גדול מ1 מפרידים את $sin^n(x)$ ל$\sin(x) \times sin^{n-1}(x)$
2. כעת בוודאות n – 1 הוא זוגי ולכן ניתן להוציא $(sin^2(x))^{\frac{n-1}{2}}$ ומזהות (3) זה שווה ל: $(1 - cos^2(x))^{\frac{n-1}{2}}$

כלומר נקבל:

$$\int sin^n(x) \times cos^m(x)dx = \int sin^{n-1}(x) \times \sin(x) \times cos^m(x)dx =$$

$$\int (sin^2(x))^{\frac{n-1}{2}} \times \sin(x) \times cos^m(x)dx = \int (1 - cos^2(x))^{\frac{n-1}{2}} \times cos^m(x) \times \sin(x)dx$$

כעת נציב t = cosx ונקבל:

$$\int (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \times t^m \times \sin(x) \frac{dt}{-\sin(x)} = -\int (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \times t^m dt$$

ומפה ניתן להגיע לצורה של $\int t^k dt$ שאותה אנו יודעים לפתור.

- **אם n זוגי ו-m זוגי:** נשתמש בזהויות (1) ו(2)

$$\int sin^n(x) \times cos^m(x) dx = \int (sin^2(x))^{\frac{n}{2}} \times (cos^2(x))^{\frac{m}{2}} dx =$$

$$\int (\frac{1-\cos(2x)}{2})^{\frac{n}{2}} \times (\frac{1+\cos(2x)}{2})^{\frac{m}{2}} dx = \int (\frac{1-\cos(2x)}{2})^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} dx = (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} \times \int (1-\cos(2x))^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} dx =$$

אם $\frac{m+n}{2}$ זוגי אז מחלקים מגיעים לצורה של $\int (1-\cos(2x))^{2(\frac{n+m}{2})} dx$, פותחים סוגריים עבור החזקה בריבוע ומקבלים ביטוי עם $cos^2(2x)$. משתמשים שוב בזהות (2) וחוזרים על אותו פעולה עד שמגיעים לצורה של $\cos(kx)$ שאותה אנו יודעים לפתור או לחזקה אי זוגית על *cosx* ואז חוזרים למקרה של *m* אי זוגי ו*n* זוגי (*n=0*).

ג. מקרה מיוחד – צריך להוכיח כי $\int_a^b f(x)dx = 0$**:** לעיתים שאלה מסוג זה ניתן לפתור באופן הבא: קודם כל בעזרת הצבה משנים את הגבולות מ*a,b* ל*-l,l* לקבלת האינטגרל הבא: $\int_{-l}^{l} g(t)dt$ ואז צריך להראות ש*g(t)* היא אי זוגית, כלומר, בודקים אם *g(-t) = -g(t)* אם כן ניתן לטעון ש"השטח שווה ל-0 כי הפונקציה אי זוגית והשטח סימטריה ביחס ל*x=0*".

ד. אינטגרציה בחלקים: אם הצבה לא עובדת מנסים לבצע אינטגרציה בחלקים. הנוסחה לשיטה היא:

$$\int f(x) \times g'(x) dx = f(x) \times g(x) - \int f'(x) \times g(x) dx$$

מתי משתמשים? אם רואים באינטגרנד $x^n \times u(x)$ כאשר *u (x)* זאת פונקציה שאנו **יודעים לעשות לה אינטגרל** (כלומר צורה מוכרת) אז מגדירים *f(x) =* x^n ו*g'(x) = u(x)* ומציבים בנוסחה.

שיטת *D.I* של אינטגרציה בחלקים: אם האינטגרל הוא האינטגרל הנתון בנוסחה אז: גוזרים את *f(x)* עד שמגיעים ל0, ועושים ל*g'(x)* אינטגרציה אותה כמות של פעמים. אז מכפילים כל זוג איברים לפי החיצים בתמונה ומוסיפים להם +/- לפי הסימן ליד השורה של הגזירה. הסכום של כל המכפלות מההתחלה עד הסוף יהיה סכום האינטגרל.

	SIGN	DERIVATIVES	INTEGRALS
1	+	$f(x)$	$g(x)$
2	-	$f^1(x)$	$\int g(x)$
3	+	$f^2(x)$	$\int\int g(x)$
4	-	$f^3(x)$	$\int\int\int g(x)$
5	+	$f^4(x)$	$\int\int\int\int g(x)$
6	-	$f^5(x)$	$\int\int\int\int\int g(x)$
...	...	...	...
	$(-1)^n$	$f^n(x)$	$\int ... \int g(x)$
	$(-1)^{n+1}$	$f^{n+1}(x)$	$\int ... \int g(x)$
	...	...	$\int ... \int g(x)$
	...	0	$\int ... \int g(x)$

2. אי שוויון של אינטגרליים:

א. בשאלות המבקשות מאיתנו להוכיח אי שוויון מהסוג הבא:

$L < \int_a^b f(x)dx < K$ כאשר *K,L,a,b* קבועים, משתמשים ב**משפט 5.6.7**:

אם $g(x) < f(X) < u(x)$ אז מתקיים $\int_a^b g(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b u(x)dx$ וזאת רק אם שלושת הפונקציות רציפות בקטע. לכן נרצה למצוא פונקציות *g(x)* ו*u(x)* שמקיימות את $g(x) < f(x) < u(x)$ וגם שהאינטגרליים שלהם שווים ל*K* ו*L* בהתאמה. נזכור כי ערכי ה*x* שלנו הם בתחומי האינטגרל הנתון (*x* בקטע *[a,b]*). כמו כן נבצע את הפעולות הבאות:

1. נסתכל על הגבולות *a,b* של האינטגרל באי שוויון. נזכור כי $\int_a^b Cdx = C(b-a)$ לכל קבוע *C* ולכן אם ההפרש בין *a* ל*b* הוא 1 אז נקבל שהאינטגרל של הקבוע יהיה שווה לקבוע ולכן נצטרך להראות פשוט ש מתקיים $L < f(x) < K$ בקטע [*a,b*] שכן האינטגרליים של הקבועים יהיו פשוט שווים לקבועים.
2. אם 1 לא עובד אז נאלץ בכל זאת למצוא *g(x)* ו*u(x)* המקיימות את אי השוויון $g(x) < f(x) < u(x)$. נמצא את *u(x)* על ידי הגדלת *f(x)* (עם מדובר בשבר אז על ידי הקטנת המכנה והגדלת המונה) ואת *g(x)* נמצא על ידי הקטנת *f(x)*. מדגיש שלרוב השינויים יהיו קשורים לערכים האפשריים של *x* בגבולות האינטגרל הנתון *(*עוד על ביצוע שינויים של פונקציה על מנת להגדיל ולהקטין אותה יש להסתכל על נושא טורים ותת נושא מבחן ההשוואה*)*.

ב. בשאלות שאנו נדרשים להוכיח אי שוויון מהסוג הבא: $\int_a^b f(x)dx < K$ אנו פשוט מגדילים את *f(x)* עד שמקבלים פונקציה *u(x)* המקיימת: *u(x) > f(x)* וגם $\int_a^b u(x)dx = K$.

3. אינטגרליים מוכללים:

א. חישוב אינטגרל מוכלל: אם נתון אינטגרל בעל גבולות שיש לו נקודת אי רציפות $x=c$ ביניהן אז צריך לפרק את האינטגרל לשני אינטגרליים מהגבול התחתון לc ומ-c אל הגבול העליון ואז פותרים כרגיל עד להצבת הגבולות בקדומה. יש לזכור שהנקודה c לא רציפה ולכן אסור להציב $x=c$ בהצבת הגבולות (לאחר מציאת הקדומה) אלא יש לקחת את הגבולות $\lim_{x\to c+} F(x)$ ו- $\lim_{x\to c-} F(x)$ (+/- תלוי באם c הוא הגבול העליון או התחתון).

ב. התכנסות/התבדרות אינטגרל מוכלל: לאינטגרליים בניגוד לטורים יש רק מבחן התכנסות אחד – מבחן ההשוואה. **תמיד** מתחילים בלקבל תמונה כללית של איך האינטגרל מתנהג באינסוף, זאת עושים על ידי לקיחת גבול שבו x שואף לאינסוף של האינטגרנד ומנסים להגיע לצורה של אינטגרל הרמוני $\frac{1}{x^p}$. מדגיש ש**לא** מציבים את הגבול אלא רק בודקים התנהגות על ידי הגעה לצורה של אינטגרל הרמוני. (עוד על מבחן ההשוואה ואיך מגדילים/מקטינים פונקציות ימצא בטורים, מבחן ההשוואה).

4. אינטגרליים המכילים ערך מוחלט:

א. חישוב אינטגרל המכיל ערך מוחלט: שאלות של חישוב אינטגרליים המכילים ערך מוחלט הן למעשה קלות למדי. בסך הכל מה שנדרש לעשות זה לקחת את האיברים שמכילים ערך מוחלט, לפרק אותם להטלאה ולבדוק כיצד כל אחד מהם מתנהג בגבולות האינטגרל הנתון. לאחר מכן במידה והערך המוחלט מתנהג באופן אחד עבור a<c ועבור c<b אנו נפרק את גבולות האינטגרל ל-a ו-c, ול-b ו-a ובכל גבול נציב את הצורה הנכונה של הערך המוחלט לפי ההטלאה שעשינו.

ב. שטח של פונקציה טריגונומטרית בערך מוחלט: אם אנו נדרשים לחשב שטח של פונקציות טריגונומטריות המכילות ערך מוחלט למעשה אנו צריכים פשוט לבדוק מה השטח של חצי מחזור של הפונקציה (כלומר מx שמאפס את הפונקציה עד לx שעבורו הפונקציה שווה שוב ל0, לדוגמה עבור סינוס נחשב את השטח בין x=0 וx=pi), אז בודקים כמה חצאי מחזור יש בגבולות האינטגרל ולבסוף מכפילים את שטח של חצי מחזור במספר חצאי המחזור בגבולות הנתונים.

אינטגרליים מוכרים ("צורה מוכרת"):

$$\int \boldsymbol{cf(x)\,dx \;=\; c\int f(x)\,dx, (c\ is\ a\ constant)}$$

$$\int \boldsymbol{x^n\,dx\ (n \neq -1) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

$$\int \boldsymbol{e^x\,dx \;=\; e^x + C}$$

$$\int \boldsymbol{e^{mx}\,dx \;= \frac{1}{m}e^{mx} + C}$$

$$\int \boldsymbol{\frac{1}{x}dx \;=\; ln\,|x| + C}$$

$$\int \boldsymbol{sin(x)\,dx \;=\; -cosx + C}$$

$$\int \boldsymbol{cos(x)\,dx \;=\; sinx + C}$$

$$\int \boldsymbol{sin(mx)\,dx} = -\frac{\boldsymbol{cos(mx)}}{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{C}$$

$$\int \boldsymbol{cos(mx)\,dx} = \frac{\boldsymbol{sin(mx)}}{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{C}$$

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2+1}}\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{arctan(x)} + \boldsymbol{C}$$

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2+a^2}}\boldsymbol{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{arctan}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\right) + \boldsymbol{C}$$

טורים:

1. שאלות התכנסות והתבדרות:

(*) טור הרמוני, $\sum\frac{1}{n^p}$, מתכנס אם ורק אם p>1.

א. רואים טור שיש בו איבר בעל חזקה n:

- **טור גאומטרי**: אם הטור נראה כך $\sum a \times r^n$ כאשר a,r הם קבועים אז מדובר בטור גאומטרי. הטור מתכנס אם |r|<1 וסכומו מ0 עד אינסוף שווה ל-$\frac{a}{1-r}$. אם הגבול התחתון של הטור **שונה** מ-0 ונגיד מתחיל מ-k אז סכום הטור יהיה שווה ל-$\frac{a}{1-r}$ פחות ה-k איברים הראשונים של הטור.
- **2 טורים גאומטריים**: אם הטור מכיל מספר קבועים עם חזקות n אך **ללא כל משתנה כלשהו n מלבד החזקות**, לדוגמה הטור הבא: $\sum\frac{2^n+8\times3^n}{6^n}$ אז מפרידים ל2 שברים, מביאים כל אחד מהם לצורה של טור גיאומטרי ובודקים התכנסות לשניהם. אם שני הטורים מתכנסים אז גם טור הסכום מתכנס (ממשפט) וסכומו שווה לסכום שני הטורים. לכן אם נדרש לחשב את סכום הטור $\sum\frac{2^n+8\times3^n}{6^n}$ נפרק אותו אל הטורים $\sum\frac{8\times3^n}{6^n}$ ו-$\sum\frac{2^n}{6^n}$, נעביר את שניהם לצורה של טור גאומטרי: $\sum 8\times\frac{1}{2^n} =$ $\sum\frac{8\times3^n}{6^n}$, $\sum\frac{2^n}{6^n} = \sum\frac{1}{3^n}$, שניהם מתכנסים כי $|\frac{1}{2}|<1$ וגם $|\frac{1}{3}|<1$. כעת נחשב את סכום שניהם: $16 = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \sum 8\times\frac{1}{2^n}$, $\sum\frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, מכאן סכום הטור $\sum\frac{2^n+8\times3^n}{6^n}$ הוא 17.5. (לזכור שהסכום שחישבנו הוא מ0=n עד לאינסוף עבור כל אחד מהטורים. אם הגבול התחתון שונה אז יש להחסיר k איברים ראשונים בהתאמה).
- **טור המכיל "איבר כללי גאומטרי <u>כפול</u> איבר כללי אחר"**: טור אשר מכיל בתוכו טור גאומטרי כפול טור אחר ונראה באופן כללי כך: $\sum An \times (a\times r^n)$ או כך: $\sum\frac{a\times r^n}{An}$ כאשר A_n הוא איבר כללי **שאינו גאומטרי** כלשהו, לדוגמה n^p או $\frac{1}{n^p}$ אז משתמשים **במבחן השורש (להראות לפני שמשתמשים במבחן שהטור <u>חיובי</u>):**

$\boldsymbol{p} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{An\times(a\times r^n)}$ אם p **קטן** מ1 אז הטור מתכנס, אם p **גדול** מ1 אז הטור מתבדר ואם p **שווה** ל1 אז לא יודעים ומנסים מבחן אחר.

- **טור המכיל "<u>סכום</u> של איבר כללי גאומטרי ואיבר כללי אחר"**: טור שנראה באופן הבא: $\sum An + (a\times r^n)$ או $\sum\frac{Bn+a\times r^n}{An}$ אנו נבדוק האם הוא מתכנס על ידי הפרדת הטורים ל2 שברים ונבדוק כל אחד **לחוד** אם הוא מתכנס לפי סוג הטור שנקבל.

ב. רואים טור עם עצרת !n: רואים עצרת בטור? זה **מבחן המנה**.

- אם הטור הוא סכום של שני טורים, לדוגמה $\sum\frac{n!+9}{An}$ אז מפרקים ל2 טורים שונים כאשר במונה נרצה שיהיה לנו **רק** עצרת. (במכנה לרוב יהיה לנו סדרה עם חוקיות כלשהי אך לא בהכרח). נבדוק את ההתכנסות של הטור ללא העצרת לחוד לפי סוג הטור שנקבל, אך את טור העצרת נבדוק התכנסות לפי מבחן המנה, וכמובן אם שני הטורים מתכנסים אז גם טור הסכום מתכנס.
- **מבחן המנה (להראות לפני שמשתמשים במבחן שהטור <u>חיובי</u>):**

אם נקרא לטור שלנו $V_n = \sum\frac{n!}{An}$ אז: $\frac{An\times(1+n)}{A(n+1)} = \frac{\frac{(1+n)\times n!}{A(n+1)}}{\frac{n!}{An}} = \frac{\frac{(1+n)!}{A(n+1)}}{\frac{n!}{An}} = \lim_{n\to\infty}\frac{V(n+1)}{Vn} = \boldsymbol{p}$. מזכיר ש$V_{n+1}$ הוא פשוט אותו איבר כללי כאשר מחליפים **כל** n על ידי n+1. בנוסף, את הביטוי $\frac{An}{A(n+1)}$ שנקבל במבחן המנה לרוב אפשר לצמצם לגורם פשוט, שכן לA_n לרוב יש גם חוקיות כלשהי כמו לעצרת. כמו במבחן המנה.

ג. אם הטור מכיל $(-1)^n$ - טור לייבניץ:

- **טור מהצורה** $\sum(-1)^n \times An$: הולכים לפי **מבחן לייבניץ.** מראים ש$An > An+1$ לכל n טבעי. בנוסף מראים ש$\lim_{n\to\infty} An = 0$. אם שני התנאים מתקיימים מדובר בטור לייבניץ והוא מתכנס.
- **אם הטור הוא מהצורה** $\sum \frac{Bn+(-1)^n}{An}$: מפרידים ל2 טורים $\sum \frac{(-1)^n}{An}$ ו- $\sum \frac{Bn}{An}$ ומראים שהימני מתכנס לפי מבחן לייבניץ ושהשמאלי מתכנס בעזרת מבחן מתאים, ואז טור הסכום גם כן מתכנס ממשפט.
- **אם 2 האופציות הקודמות לא עובדות אז עושים ערך מוחלט לכל הטור ובודקים התכנסות בהחלט.**

ד. מבחן ההשוואה (להראות לפני שמשתמשים במבחן שהטור <u>אי-שלילי</u>):

- במבחן ההשוואה אנו ננסה להגיע מהטור הנתון לטור גדול/קטן יותר בעל מבנה של **טור הרמוני** או **טור גאומטרי** שעבורם ניתן להגיד ישר אם הם מתכנסים או מתבדרים. מבחן ההשוואה: **אם הטור הקטן מתבדר אז הטור הגדול מתבדר ואם הטור הגדול מתכנס אז הטור הקטן מתכנס.** לכן לפני שמתחילים לבצע שינויים על הטור אנו ננסה להבין אם הוא מתכנס או מתבדר.

1. תמיד מתחילים בלקבל תמונה כללית של איך הטור מתנהג באינסוף, זאת עושים על ידי לקיחת גבול של האיבר הכללי שבו n שואף לאינסוף ומנסים להגיע לצורה של טור הרמוני $\frac{1}{n^p}$ או לצורה של טור גאומטרי ar^n. מדגיש **שלא** מציבים את הגבול אלא רק מגיעים לצורה שנוכל להגיד ישר אם היא מתכנסת או מתבדרת.

2. לאחר שקיבלנו תמונה לאם הטור מתכנס או מתבדר אנו ננסה להגדיל או להקטין את המכנה והמונה (אם האיבר הכללי הוא שבר כמו ב95% מהמקרים).

שינויים שעושים לטור/אינטגרל על מנת להגדיל/להקטין אותם:

באופן כללי אנו ננסה להגדיל/להקטין את המכנה והמונה על מנת להגיע לתוצאה הרצויה של טור גדול יותר או קטן יותר. נעבוד לפי שלושת השלבים הבאים לפי הסדר:

A. נמחק קבועים בודדים – לדוגמה בשבר $\frac{4n+7}{(2n^2-1)(n+3)}$ כדי להגדיל את השבר אנו נמחק את הקבוע 3 מהמכנה ולא ניגע ב1- או ב7 שכן מחיקתם תקטין את השבר. כדי להקטין את השבר אנו נמחק את ה7 במונה ואת ה1- במכנה. מדגיש שלא נמחק את ה2 ואת ה4 שכן הם מקדמים של משתנים ולא קבועים בודדים.

B. נכפיל קבועים בודדים במשתנה – לדוגמה בשבר $\frac{4n+7}{(2n^2-1)(n+3)}$ כדי להגדיל את השבר אנו נחליף את 7 ב7n ואת 1- ב$-n^2$. כדי להקטין את השבר אנו נחליף את 3 ב3n.

C. נחליף משתנה במשתנה/קבוע אחר – שינויים מהסוג הזה הם תמיד מסוכנים שכן הם עשויים להגדיל/להקטין מאוד את השבר הנתון. שינויים שניתן לעשות:

- להחליף פונקציות טריגונומטריות בערך המקסימלי/מינימלי שלהן, לדוגמה arctan(n)<π/2, sin(n) וcos(n) בכל חזקה חיובית כלשהי תמיד קטנים או שווים ל1 וכולי...

- לכל u חיובי ניתן להחליף את sin(u) בu על מנת להגדיל את הביטוי, לדוגמה: sin(n) ≤ n, sin(1/n) ≤ 1/n לכל n טבעי וכולי..

- להחליף שורש בשורש גדול/קטן יותר. נעשה את זה לרוב שיש לנו מספר שורשים <u>שונים.</u> לדוגמה ניתן להחליף את $\sqrt[5]{An}$ ב$\sqrt[3]{An}$. נזכור שעבור השורש הk-י אם מגדילים את k הביטוי קטן.

- לזכור פעולות אלגבריות כמו כפל בצמוד, כפל מקוצר ועוד.

- ניתן להתייחס לגבול העליון והתחתון של הטור/אינטגרל על מנת "לחסום" את ערכי הn (או x). לדוגמה עבור האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$, x בהכרח בין a לb ונוכל להשתמש בזה לטובתנו. לדוגמה:

בהינתן האינטגרל הבא, $\int_a^b \frac{1}{x}dx$ נוכל לומר שבקטע הנתון $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$. <u>שימושי מאוד</u> לאי-שוויוניים של אינטגרליים.

- ניתן לבצע גם שינויים יותר דרסטיים אך ברוב המקרים אין צורך.

ה. אם רואים טור בעל איבר כללי המכיל "אינטגרל פשוט": אם הביטוי אי שלילי אז מחליפים באיבר הכללי של הטור כל n בx, מציבים באינטגרל בעל **אותם** גבולות של הטור ובודקים אם האינטגרל מתכנס/מתבדר. אם האינטגרל מתכנס אז הטור מתכנס ואם האינטגרל מתבדר אז הטור מתבדר.

ו. התכנסות בהחלט/בתנאי

1. אם רואים איבר כללי שיכול להיות שלילי לדוגמה רואים sin(n) או cos(n) עם חזקה אי זוגית: במקרה כזה, לוקחים ערך מוחלט לכל הטור ובודקים התכנסות בהחלט. לרוב לאחר לקיחת הערך המוחלט משתמשים במבחן ההשוואה כי אז ניתן להמיר פונקציות מחליפות סימן בקבועים.

2. אם אנו נדרשים להראות התכנסות בתנאי: מראים שהטור בלי ערך מוחלט מתכנס והטור עם ערך מוחלט מתבדר. דוגמה לטור כזה שמתכנס בתנאי: $\sum\frac{(-1)^n}{n}$, שכן בערך מוחלט הטור הוא פשוט $\sum\frac{1}{n}$ שכמובן מתבדר.

כדאי לזכור כי:

עבור טורים עם $(-1)^n$:

$$\sum\left|\frac{(-1)^n}{An}\right| = \sum\frac{1}{|An|}, \sum\left|\frac{(-1)^n+Bn}{An}\right| = \sum\frac{|(-1)^n+Bn|}{|An|} \neq \sum\frac{1+|Bn|}{|An|}$$

$$\sum\left|\frac{(-1)^n+Bn}{An}\right| \geq 0, \sum\left|\frac{(-1)^n+Bn}{An}\right| \leq \sum\left|\frac{1+Bn}{An}\right|$$

עבור טורים עם sin(n) או cos(n) עם חזקות חיוביות כלשהן:

$$\sum|a \times cos^k(n) + b \times sin^l(n)| \leq \sum|a+b| \leq \sum|a|+|b|$$

ז. אם רואים טור מהסוג $\sum\frac{An+Bn}{Cn}$ אז <u>לרוב</u> אך לא תמיד, הולכים לפי המשפט

$\sum\frac{An+Bn}{Cn} = \sum\frac{An}{Cn} + \sum\frac{Bn}{Cn}$ (כל עוד שני הטורים משמאל מתכנסים)

2. סכומים של טורים

א. אם מבקשים מאיתנו <u>לסכום טור</u> אז זה כמעט תמיד יהיה טור גאומטרי (לעבור לטור גאומטרי עבור הוראות מדויקות).

ב. אם צריך להוכיח אי שוויון מהסוג $\sum An \leq K$ או $K \leq \sum An$ כאשר K הוא קבוע כלשהו: אז או שמוצאים טור גאומטרי שגדול/קטן מAn וסכומו גדול/קטן/שווה לK (תלוי אי שוויון) **או** במידה והאיבר הכללי A_n חיובי אז ניתן לסכום מספר כלשהו של איברים של $\sum An$, כלומר ממש מציבים ..,n=1, n=2 עד שמגיעים לK הרצוי.

ג. עבור טורים מהסוג $\sum\frac{An+Bn}{Cn}$: נפריד ל$\sum\frac{An}{Cn} + \sum\frac{Bn}{Cn}$, נחשב את סכום כל אחד מהם לחוד ואז נחבר את התוצאות.

3. שאלות הבנה/חשיבה

אין הרבה מה לעשות בשאלות כאלה חוץ מלהפעיל את הראש אך הינה מספר טיפים/הגדרות/משפטים.

- **האיבר הכללי $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ משמש כדוגמה נגדית להרבה טענות.**
- **אם An חיובי והטור $\sum An$ מתכנס אז An מתכנס בהחלט.**
- **אם הטור $\sum An$ מתכנס אז לא בהכרח הטור $\sum An^2$ מתכנס. דוגמה: $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ מתכנס אך $\sum An^2 = \sum \frac{1}{n}$ מתבדר.**
- **אם הטור $\sum An$ מתכנס אז לא בהכרח הטור $\sum An$ מתכנס בהחלט. דוגמה: $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ מתכנס אך $\sum |An| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר.**
- **אם הטור $\sum An$ מתכנס והטור $\sum Bn$ מתבדר אז טור הסכום/הפרש שלהם $\sum An \pm Bn$ בהכרח מתבדר. <u>הוכחה</u>: נניח בשלילה ש- $\sum An$ ו-$\sum An + Bn$ מתכנסים. ממשפט נראה שהטור $\sum Bn$ הוא הסכום של שני טורים מתכנסים $\sum Bn = \sum An + Bn - \sum An$ ולכן הוא מתכנס וזאת בסתירה לנתון ש$\sum Bn$ מתבדר.**
- **כל סדרה מתכנסת היא חסומה, כלומר אם הסדרה An מתכנסת אז קיים M כך ש- $|An| \leq M$.**
- **סדרה אפסה זאת סדרה השואפת ל0 כאשר n שואף לאינסוף.**

ובאופן כללי, כשנתונה טענה אבסטרקטית לרוב קיימת דוגמה נגדית לטענה כי לא למדנו להוכיח בקורס.

זהויות טריגונומטריות:

יהי n שלם אי זוגי (...,-3,-1,1,3,...) , m שלם זוגי (...,-4,-2,0,2,4,...) וk מספר שלם.

<u>sinx - תכונות:</u>

1. $sin(k\times\pi) = sin(m\times\frac{\pi}{2}) = 0$ ***חשוב***
2. $sin(n\times\frac{\pi}{2}) = \pm1$ ***חשוב***
3. $sin(-x) = -sin(x)$ ***אי – זוגיות של פונקציית הסינוס***
4. $sin(x+n\pi) = -sin(x)$
5. $sin(x+m\pi) = sin(x)$
6. $sin(\pi - x) = sin(x)$
7. $sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$
8. $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$
9. $sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ ***חשוב***
10. $sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ ***חשוב***
11. $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
12. $\sin(x) \leq x,\ x \leq 0$

cosx - תכונות:

1. $cos(n\times\frac{\pi}{2})=0$ **חשוב**
2. $cos(n\times\pi)=-1,\ cos(m\times\pi)=1$ **חשוב**
3. $cos(-x)=cos(x)$ **זוגיות של פונקציית הקוסינוס**
4. $cos(x+n\pi)=-cos(x)$
5. $cos(x+m\pi)=cos(x)$
6. $cos(\pi-x)=-cos(x)$
7. $cos(\frac{\pi}{2}-x)=sin(x)$
8. $cos(2x)=1-2sin^2(x)=2\cos^2(x)-1$ **חשוב**
9. $cos^2(x)=\frac{\cos(2x)+1}{2}$ **חשוב**
10. $cos^2(x)=1-\sin^2(x)$ **חשוב**
11. $-1\le\cos(x)\le1$

tanx - תכונות:

1. $-\frac{\pi}{2}<\tan(x)<\frac{\pi}{2}$
2. $tan(k\times\pi)=0$
3. $tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)},\ tan(f(x))=\frac{\sin(f(x))}{\cos(f(x))}$
4. $tan(n\times\frac{\pi}{2})=$ לא מוגדר
5. $tan(-x)=-tan(x)$ **אי זוגיות של פונקציית טנגנס**
6. $\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\tan(x)=\pm\infty$
7. $tan(\frac{\pi}{4})=1$

arctanx - תכונות:

1. $-\frac{\pi}{2}<arc\tan(x)<\frac{\pi}{2}$
2. $\lim_{x\to\pm\infty}\arctan(x)=\pm\frac{\pi}{2}$
3. $arctan(k\times\pi)=0$
4. $arctan(1)=\frac{\pi}{4}$