קורס:

חדו"א א (20406) סמסטר 2024א .

תאריך הבחינה. 9.5.2024 .

מועד הבחינה - מועד 97 . מועד ב .

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים - חלק א וחלק ב .

עליכם לענות על:

שאלות 1-4 בחלק א וכן לענות על 3 שאלות מבין 5-8 בחלק ב .

כל חומר עזר מותר בשימוש

פתרון הבחינה

כתב: חזי נוימן

חלק ראשון - שאלות סגורות 1-4 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{7}$ נקודות

סמנו מהי התשובה הנכונה בעמוד האחרון של המחברת במקום המיועד לכך .

לחילופין , ניתן לרשום את התשובות בעמוד הראשון של המחברת בצורה ברורה.

לא נדרש נימוק - רק סימון במחברת מהי התשובה הנכונה.

אם אינכם יודעים את התשובה כדאי לנחש. אנו סופרים רק תשובות נכונות ולא מורידים ניקוד על טעויות.

שאלה 1 – שאלה סגורה

נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $(-1,1)$ ו- $f(0)=6$.

מי מבין הטענות 1,2 היא טענה נכונה ?

1) הפונקציה $f(\frac{\cos x}{3})$ רציפה לכל x .	2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{6}=1$.

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1 ב. 2 ג. שתי הטענות נכונות ד. שתי הטענות לא נכונות

פתרון שאלה 1

(1) $\frac{\cos x}{3}$ רציפה לכל x. לכל x $-1<\frac{\cos x}{3}<1$ ולכן לפנינו הרכבת רציפות ולכן (1) נכון.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{6}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}f(x)}{\lim\limits_{x\to 0}6}=\frac{f(0)}{6}=\frac{6}{6}=1 \Rightarrow$ נכון.

במונה בגלל הרציפות.

סיכום: $\boxed{ג}$

שאלה 2 – שאלה סגורה

חשבו $\int_2^4(|x-3|+|1-x|)dx$.

א. 8 ב. 6 ג. 5 ד. 4 ה. 2

פתרון שאלה 2

בקטע $[2,4]$ מתקיים $|1-x|=x-1$ כי $1-x$ שלילי. לעומת זאת $|x-3|$ לפעמים כמו $x-3$ ולפעמים $3-x$. לכן, נפצל:

$$\int_2^4=\int_2^3+\int_3^4=\int_2^3(3-x+x-1)\,dx+\int_3^4(x-3+x-1)\,dx$$

$$=\int_2^3 2\,dx+\int_3^4(2x-4)\,dx=[2x]_2^3+[x^2-4x]_3^4=5$$

סיכום: $\boxed{ג}$

שאלה 3 – שאלה סגורה

נתון פולינום ממעלה ארבע: $p(x)=1-4x+1000x^4$ בקטע $(-\infty,\infty)$. מהן הטענות הנכונות?

(1) ל $p(x)$ יש מינימום מוחלט בקטע.
(2) $p(x)$ עולה בקטע הנתון.
(3) ל $p(x)$ יש בדיוק שני שורשים.

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1	ב. 2	ג. 3	ד. 1,2	ה. 1,3	ו. 2,3	ז. 1,2,3

פתרון שאלה 3

סיכום: $\boxed{א}$

① נכון. נימוק: לפי דוגמה שעשינו בקורס $\lim_{x\to\infty, x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty, x\to-\infty} 1000x^4 = \infty \Rightarrow$ הקטע ל ∞ יש מינימום מוחלט.

② לא נכון. לכל $x<0$ הנגזרת שלילית. ③ לא נכון. מצאו את המינימום המוחלט!

שאלה 4 – שאלה סגורה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ הוא טור חיובי מתכנס. **מי מבין הטענות 1-2 נכונה ?**

טענה 1	**טענה 2**
הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot A_n}{n^2+1}$ מתכנס.	הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos(n!)A_n$ מתכנס.

סמנו:....

א. 1	ב. 2
ג. 1,2	ד. 1,2 לא נכונות
ה. 1 נכון. לגבי 2 לא ניתן לקבוע כי An לא נתון בצורה מפורשת.	ו. 2 נכון. לגבי 1 לא ניתן לקבוע כי An לא נתון בצורה מפורשת.

פתרון שאלה 4

① נכון, מבחן ההשוואה: $\frac{(n+1)A_n}{n^2+1} \le \frac{(n+n)A_n}{n^2+0} = \frac{2}{n}A_n \le 2A_n$

$\sum A_n$ מתכנס ולכן $\sum 2A_n$ מתכנס. לכן הטור הנחקר מקיים:

$\sum \frac{(n+1)a_n}{n^2+1} \le \sum 2a_n \Rightarrow$ התכנסות!

② נכון. הטור הנחקר מתכנס בהחלט!

$|(-1)^n\cos(n!)A_n| = |\cos(n!)|\cdot A_n \le A_n \Rightarrow$ סיימנו נימוק!

סיכום: $\boxed{ג}$

חלק שני - שאלות פתוחות 5-8 . השיבו על $\boxed{3}$ שאלות בחלק זה.

משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{24}$ נקודות.

שאלה 5

נגדיר $f(x)=xe^{-x}-x^2$. **פונקציה זאת מלווה את כל סעיפי השאלה**

(15 נקי) א. 1) חשבו (או הסבירו) את הגבולות הבאים: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2) הוכיחו כי לפונקציה יש מקסימום מוחלט בקטע $(-\infty,\infty)$.

3) הוכיחו כי לפונקציה אין מינימום מוחלט בקטע $(-\infty,\infty)$.

{סיוע: לסעיפים 2,3 יש קשר הדוק לסעיף 1 }

(9 נקי) ב. נסמן את נקודת המקסימום המוחלטת ב- (x_0,y_0).

(נקודה זאת קיימת כפי שהוכחתם בסעיף הקודם)

הוכיחו כי: $x_0>0$, $y_0>0$.

פתרון שאלה 5

סעיף א

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\underset{L_{\infty/\infty}}{\overset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0 \checkmark$$

$$!\lim_{x\to\infty}(xe^{-x}-x^2)=0-\infty^2=-\infty!$$

$$\lim_{x\to-\infty}(xe^{-x}-x^2)=(-\infty)(\infty)-\infty^2=-\infty-\infty=-\infty!$$

הפו' רציפה ושואפת ל- $-\infty$ בקצוות הקטע. לכן יש מקסימום מוחלט!

הפו' רציפה ושואפת ל- $-\infty$ ולכן אין מינימום מוחלט.

סעיף ב

נבדוק קיצון בעזרת גזירה נשווה לאפס. אומרי: $f'(x)=e^{-x}-x(2+e^{-x})$

תתאפס. אם $x_0=0$ זה לא נכון - הצבה! אם $x_0<0$ זה לא נכון - נמוך!!.

לכן הנקודה היחידה לאיפוס הנגזרת היא $x_0>0$.

נותר להוכיח $y_0>0$.

אנו יודעים כי $\underset{\text{MAX}}{\overset{\nearrow\ \rightarrow}{x_0}}$ וגם $f(0)=0$ לכן בקטע $(0,x_0)$ עולים.

לכן $y_0=f(x_0)>0$. ניתן אגב להתחיל בזה... $f(\frac{1}{10})>0$ הצבה במחשב

שאלה 6

(14 נקי') א. תהי $\varphi(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ ומקיימת $\varphi(1)=0$; $\varphi(0)=1$.

הוכיחו כי יש נקודה c כך שמתקיים : $\varphi(2c)=3c$.

(10 נקי') ב. חשבו את הגבול : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-\sqrt{1+x}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-\sqrt{1-x}}$.

רמז : לא תמיד לופיטל היא הדרך הקצרה לחישוב גבול.

פתרון שאלה 6

סעיף א

במשוואה $\varphi(2c)=3c$ מרמזת על קו עזר $f(x)=\varphi(2x)-3x$.

$f(x)$ רציפה בקטע $[0,\frac{1}{2}]$ – נימוק קריטי:

✓ הביטוי $2x$ רציף, ונמצא בקטע $[0,1]$ (כי $x\in[0,\frac{1}{2}]$).

✓ $\varphi(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן $\varphi(x)$ רציפה בתת הקטע $[0,\frac{1}{2}]$.

(*) לאור זאת ההרכבה $\varphi(2x)$ רציפה בתת הקטע $[0,\frac{1}{2}]$.

✓ הביטוי $3x$ רציף בתת הקטע $[0,\frac{1}{2}]$.

(*) הוכחנו את העיקר: $f(x)=\varphi(2x)-3x$ רציפה ב- $[0,\frac{1}{2}]$.

נציב:
$$\begin{cases} f(0)=\varphi(0)-0=\varphi(0)=1 \\ f(\frac{1}{2})=\varphi(1)-1\frac{1}{2}=0-1\frac{1}{2}=-1\frac{1}{2} \end{cases}$$

לפי ערה"ב יש c בקטע הפתוח $0<c<\frac{1}{2}$ עבורו $f(c)=0$

כלומר, יש $c\in(0,\frac{1}{2})$ כך ש- $\varphi(2c)-3c=0$ כלומר...

יש $0<c<\frac{1}{2}$ כך ש- $\varphi(2c)=3c$. סיימנו!

שימו לב היטב: אסור להציב x-ים מעל $\frac{1}{2}$ כי אז $2x$ מעל 1

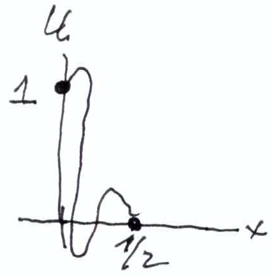
ואין לנו מידע על $\varphi(2x)$.

נסביר עוד נקודה על השאלה.

תרגיל... אנו יודעים כי $\varphi(1)=0$; $\varphi(0)=1$ ולכן $u(x)=\varphi(2x)$

היא גם פונקציה מוגדרת ורציפה ב- $[0,\frac{1}{2}]$.

כמו כן, $u(\frac{1}{2})=\varphi(1)=0$; $u(0)=\varphi(0)=1$



כלומר, $u(x)$ היא נניח כזאת...

כמו כן רשום $3x$, זהו הישר $y=3x$. תוסיפו אותו לתרשים

שימו לב $y(0)=0$; $y(\frac{1}{2})=1\frac{1}{2}$.

אתם רואים חיתוך! כלומר אכן יש c בקטע

$(0,\frac{1}{2})$ ובו $u(c)=3c$ כלומר $\varphi(2c)=3c$. זהו זה!

סעיף ב'

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\sqrt{1+x}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}}}{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = 1$$

(מכנה משותף & $\sqrt{t}\sqrt{s}=\sqrt{t\cdot s}$.)

צמצום.

הצבה

סיימנו!

שאלה 7

(14 נק') א. 1) תהי $F(x)$ קדומה של $f(x)$. בטאו את $\frac{d}{dx}F(\sin x)$ במונחי f.

2) הוכיחו כי מתקיים $\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = 0$.

[סיוע: ניתן להיעזר בסעיף 1 או בהצבה נחמדה מהצורה $t=\frac{\pi}{2}-x$]

(10 נק') ב. יהי $p>0.5$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n n^p}{n^{2p}}$ מתכנס.

פתרון שאלה 7

סעיף א

① נתון $F'(x)=f(x)$. לכן,

$$[F(\sin x)]' = F'(\sin x)\cdot\cos x = f(\sin x)\cdot\cos x$$ ✓

②

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx \underset{\uparrow}{=} \int\frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t)+C_0 = \arctan(\sin x)+C_0$$

$$\begin{cases} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\cdots = \Big[\arctan(\sin x)\Big]_0^{\pi} = \arctan(0)-\arctan(0) = 0$$

סעיף ב

✓ הטור $\sum\frac{1}{n^{2p}}$ מתכנס כטור הילבי, הרמוני $2p$; $2p>1$.

✓ הטור $\sum\frac{(-1)^n n^p}{n^{2p}}$ הוא הטור $\sum(-1)^n\cdot\frac{1}{n^p}$, והוא מתכנס

כטור לייבניץ כי $p>\frac{1}{2}$ ובפרט $p>0$!

לכן הטור שלנו הוא טור הסכום של טורים מתכנסים...

$$\sum\frac{(-1)^n n^p}{n^{2p}}+\sum\frac{1}{n^{2p}} = \sum\frac{1+(-1)^n n^p}{n^{2p}} = \text{מתכנס}$$

סיימנו.

שאלה 8

(12 נק') א. בקטע הפתוח $(0,\infty)$ נגדיר $u(x)=|1-x|\cdot\sin(\pi x)$.

השיבו על משימה אחת מבין המשימות הבאות העוסקות בפונקציה שלנו.

משימה ראשונה

הוכיחו כי הפונקציה הנתונה גזירה לכל x בקטע.

משימה שנייה

הוכיחו כי **נגזרת הפונקציה** מתאפסת **אין סוף פעמים** בקטע $(1,\infty)$.

[רמז : אפילו לא נדרש לגזור את הפונקציה על מנת לענות על משימה זאת]

(12 נק') ב. חשבו $\int\limits_1^\infty \frac{\sin(\frac{\pi}{x})}{x^3}dx$ בעזרת שיטות האינטגרציה שלמדתם בקורס.

פתרון שאלה 8

סעיף א

✓ עבור $0<x<1$ הפו' היא: $u(x)=(1-x)\cdot\sin(\pi x)$

והיא גזירה כמכפלת גזירות.

✓ עבור $x>1$ הפו' היא: $u(x)=(x-1)\cdot\sin(\pi x)$

והיא גזירה כמכפלת גזירות.

✓ בנקודה $x=1$ אין מכפלת גזירות בגלל $|1-x|$ ולכן צריך טכסיס.

ניתן להיעזר במשפט עמ' 180 - דבר לא נחוץ. אני בוחר כך:

$$u'(1)=\lim_{h\to0}\frac{u(1+h)-u(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|1-(1+h)|\cdot\sin(\pi(1+h))-u(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{|h|\sin(\pi h+\pi)-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|\cdot[\sin(\pi h)\overbrace{\cos\pi}^{-1}+\cos(\pi h)\overbrace{\sin\pi}^{0}]}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{|h|\cdot[-\sin(\pi h)]}{h}=\lim_{h\to0}(-1)\cdot|h|\cdot\frac{\sin(\pi h)}{h}$$

$$=(-1)\cdot|0|\cdot\pi=0$$

[illegible]

$\sin(mx)/x$ שואף ל- m עבור $x\to0$.

ואם כך... אפשר גם מעבר כזה:

$$= \lim_{h\to 0} (-1)\cdot |h| \cdot \frac{\sin(\pi h)}{\pi h} \cdot \pi$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} (-1)}_{-1} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} |h|}_{0} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\pi h)}{\pi h}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \pi}_{\pi} = 0 \checkmark$$

לפי:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

סעיף ג'

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^3}\,dx = \int_{\pi}^{0} \frac{\sin(t)}{-\pi^2}\,t\,dt = \frac{1}{\pi^2}\cdot\int_0^{\pi} t\sin t\,dt$$

$$\begin{cases} t = \frac{\pi}{x} \\ dt = -\frac{\pi}{x^2}\,dx \end{cases}$$

הוצאת קבוע והיפוך גבולות האינטגרל.

$$= \frac{1}{\pi^2}\cdot \underline{\underline{\text{אינטגרציה בחלקים}}} = \frac{1}{\pi} \checkmark$$

תרגיל עצמי...

$\Downarrow$

נסביר את המעבר

$$\begin{cases} \text{if } x=1 \text{ then } t=\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{1}=\pi \\ \text{if } x=\infty \text{ then } t=\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{\infty}=0 \end{cases}$$

נימוק ההחלפה = גבולות מהקטע $[1,\infty)$ לקטע $[0,\pi]$.

also see that: $\frac{dx}{x^3} = \left(\frac{dx}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{dt}{-\pi}\right)\cdot\left(\frac{t}{\pi}\right) = -\frac{t\,dt}{\pi^2}$ ✓

END