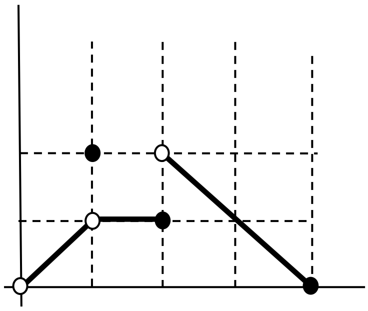
פתרון מקוצר למטלה 11 , קורס 20406 , סמסטר 2024ג

כתב: חזי נוימן.

פתרון מקוצר הוא פתרון שמכיל את כל האלמנטים המתמטיים החשובים. הוא מכיל תתי שאלות שאתם נדרשים להשיב עליהן על מנת לחדד נקודות בחומר הלימוד. נכנה זאת קריאה אקטיבית.

שאלה 1 - חישובי גבולות מהפן הגרפי



עיינו בגרף הפונקציה $g(x)$.

א. מצאו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) \ , \ \lim_{x\to 2^-} g(x) \ , \ \lim_{x\to 1} \frac{g(1)}{g(x)}$$

ב. הנה גבול $\lim_{x\to 2}\left(\left(g(x)\right)^2 - 3g(x) + 5\right)$.

אם הגבול קיים מה ערכו ? אם הגבול לא קיים - נמקו מדוע.

תשובה 1

סעיף א

את הגבולות הבאים רואים לפי התרשים של הפונקציה :

$$\boxed{\lim_{x\to 2^+} g(x) = 2 \ , \ \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1} g(x) = 1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1}\frac{g(1)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} g(1)}{\lim\limits_{x\to 1} g(x)} = \frac{g(1)}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

האם הבנתם את ההבדל בין ערך הגבול ובין ערך הפונקציה ?

סעיף ב

קראו בעיון

הפונקציה לה מחשבים את הגבול בנויה מפעולות אריתמטיות על g .

טבעי היה לנסות ולהיעזר במשפט האריתמטיקה 2.5.1 . **במשפט זה ניתן להיעזר כאשר הגבול של g קיים**. אצלנו מתקיים $\boxed{\lim_{x\to 2^+} g(x) = 2 \ \neq \ \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1}$ ולכן $\lim_{x\to 2} g(x)$ לא קיים.

לכן ...

לא ניתן להיעזר במשפט האריתמטיקה לחישוב הגבול.

מה עושים ?

ראינו כבר כי **הגבולות החד צדדיים של g קיימים** (ראו סעיף א). אם כך ננסה לחשב את הגבול מימין ומשמאל של הביטוי $\left(g(x)\right)^2 - 3g(x) + 5$ בעזרת אריתמטיקה.

אם תרצו ... קראו לזאת "אריתמטיקה חד צדדית".

הנה פרטי החישוב :

$$\lim_{x\to2^-}\left(\left(g(x)\right)^2-3g(x)+5\right)=1^2-3\cdot1+5=3$$

$$\lim_{x\to2^+}\left(\left(g(x)\right)^2-3g(x)+5\right)=2^2-3\cdot2+5=3$$

אנו למדים כי הגבול מימין ומשמאל של $\left(g(x)\right)^2-3g(x)+5$ הוא 3 .

לאור זאת....

הוכחנו כי : $\lim_{x\to2}\left[\left(g(x)\right)^2-3g(x)+5\right]=3$

למדתם כי **אריתמטיקה היא תנאי מספיק לחישוב גבול אך אינה תנאי הכרחי**.

ובלשון עממית העובדה כי לפונקציה g אין גבול לא מלמדת כי לביטוי אחר שמכיל את g לא יהיה גבול.

הדבר היחיד שאסור לעשות הוא להפעיל אריתמטיקה כי תנאי המשפט לא מתקיימים.

האם הבנתם את שלמדנו בשאלה זאת ?

שאלה 2 - חישובי גבולות, משפטי האריתמטיקה, טריקים חישוביים

א. חשבו את הגבול : $\lim_{x\to1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{x^4+x^2-x^3-x}$. סעיף 2.5 שאלות 65, 71 . לטריק ששמו **כפל בצמוד**]

ב. חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{10}+(6+x)^{10}}{(2+3x+4x^2)^5}$ בשתי דרכים שונות :

1. דרך ראשונה : חלוקת מונה ומכנה ב- x^{10} ושימוש בעובדה הנחמדה $x^{10}=(x^2)^5$.

2. דרך שנייה : שימוש מנומק בתוצאה 11 בפרק 2.5 .

ג. חשבו את הגבול $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\frac{x}{3})}{\sin(2x)}$ ואחר כך חשבו את הגבול $\lim_{x\to3\pi}\frac{\sin(\frac{x}{3})}{\sin(2x)}$.

ד. תהי f מוגדרת לכל x ומקיימת $f(1)=4$. האם נכון ש- $\lim_{x\to1}\left[\frac{x^2f(x)-f(x)}{x^2-3x+2}\right]=-8$?

אם נכון הוכיחו אם לא הציגו דוגמא נגדית פשוטה

תשובה 2 סעיף א בקיצור נמרץ

$$\lim_{x\to1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{x^4+x^2-x^3-x}=\lim_{x\to1}\left[\frac{2-\sqrt{3x+1}}{x^4+x^2-x^3-x}\cdot\frac{2+\sqrt{3x+1}}{2+\sqrt{3x+1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{3(1-x)}{x^2(x^2+1)-x(x^2+1)}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{3x+1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{3(1-x)}{(x^2-x)(x^2+1)}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{3x+1}}\right]\underbrace{=\ldots=}_{(*)}-\frac{3}{8}$$

כפל בצמוד פירוק לגורמים הראינו. סיימו את החישוב היכן שרשמנו כוכבית.

<u>תשובה 2 , סעיף ב1 בקיצור</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{10}+(6+x)^{10}}{(2+3x+4x^2)^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(2x-1)^{10}+(6+x)^{10}}{x^{10}}}{\frac{(2+3x+4x^2)^5}{x^{10}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(2x-1)^{10}}{x^{10}}+\frac{(6+x)^{10}}{x^{10}}}{\frac{(2+3x+4x^2)^5}{(x^2)^5}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{10}+\left(\frac{6+x}{x}\right)^{10}}{\left(\frac{2+3x+4x^2}{x^2}\right)^5}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(\frac{6}{x}+1\right)^{10}}{\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+4\right)^5}\boxed{=}1+\frac{1}{1024}$$

נמקו את המעבר האחרון ☐ בעזרת אריתמטיקה.

<u>תשובה 2 , סעיף ב2</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{10}+(6+x)^{10}}{(2+3x+4x^2)^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)^{10}+(x)^{10}}{(4x^2)^5}=\frac{2^{10}x^{10}+x^{10}}{4^5x^{10}}=\frac{1025}{1024}$$

<u>תשובה 2 , סעיף ג</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{x}{3})}{\sin(2x)}\underbrace{=}_{\boxed{\text{see page 140 dogma 3}}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(\frac{x}{3})}{x}}{\frac{\sin(2x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(\frac{x}{3})}{\frac{1}{3}x}}{2\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{2\cdot 1}=\frac{1}{6}$$

הגבול השני מאתגר כי הגבול לא בנקודה אפס. השימוש במשפט 2.8.3 בשלב ראשון לא אפשרי.

נבצע "הצבה הזזה" $t=x-3\pi$. ההצבה הזאת מעבירה את הגבול למשתנה החדש t ששואף ל אפס.

$$\lim_{x\to 3\pi}\frac{\sin(\frac{x}{3})}{\sin(2x)}\underbrace{=}_{\boxed{t=x-3\pi}}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\frac{t+3\pi}{3})}{\sin(2(t+3\pi))}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+\frac{t}{3})}{\sin(2t+6\pi)}=$$

$$\underbrace{=}_{\boxed{\text{use }\sin(a+b)=...}}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi)\cos(\frac{t}{3})+\cos(\pi)\sin(\frac{t}{3})}{\sin(2t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin(\frac{t}{3})}{\sin(2t)}\underbrace{=}_{\boxed{\text{part 1}}}-\frac{1}{6}$$

זוכרים כמה זה $\sin(\pi)$ וכמה זה $\cos(\pi)$?

<u>תשובה 2 , סעיף ד בקיצור</u>

לאחר פירוק לגורמים וצמצום נקבל:
$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2f(x)-f(x)}{x^2-3x+2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x+1}{x-2}f(x)\right]$$

כעת קחו $f(x)=\begin{cases}4 & x=1\\ 0 & x\neq 4\end{cases}$, מה ערך הגבול ? סיימנו.

שאלה 3 – רציפות

א. נגדיר: $g(x)=\begin{cases}|x-a| & , |x|\le 1\\ |x-b| & , |x|>1\end{cases}$. הפרמטרים $a\,,b$ **שונים**.

הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $x=1$ אם ורק אם $a+b=2$. **בחרו** פרמטרים כאלה שיקיימו את התנאי **הציבו** בפונקציה **וציירו** אותה. האם היא רציפה בנקודה x=-1 ? (לפי האיור שלכם, ללא חישובים) .

(**רמז**: תרשמו את ההתניות (ורק אותן) $|x|>1\,;|x|\le 1$ ללא ערך מוחלט)

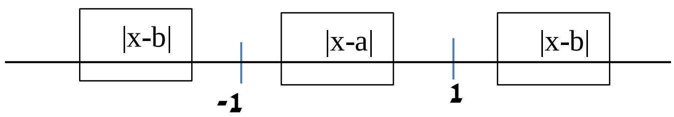
ב. אריתמטיקה והרכבה של פונקציות רציפות.

הוכיחו כי אם $\varphi(x)$ רציפה וחיובית בנקודה x_0 אז $\varphi(x)+\dfrac{1}{\varphi(x)}$ רציפה ב - x_0 . האם הטיעון ההפוך נכון? ובכן ההיפך לא נכון. הדגימו פונקציה מהצורה $\varphi(x)=\begin{cases}c_1 & x\le 0\\ c_2 & x>0\end{cases}$ כך שהיא לא רציפה בנקודה 0 אבל הפונקציה $\varphi(x)+\dfrac{1}{\varphi(x)}$ רציפה בנקודה 0.

ג. הוכיחו כי $\tan(\frac{1-\sin x}{3-\cos x})$ רציפה לכל x .

תשובה 3 , סעיף א , אשאיר לכם.

התרשים הבא הוא כלי עזר להציג את הפונקציה ואת הענפים השונים שלה.



כעת תוכלו להתקדם .

תשובה 3 , סעיף ב

נרשום מפורשות מהי הפונקציה $\varphi(x)+\dfrac{1}{\varphi(x)}$.

$$\boxed{\varphi(x)+\frac{1}{\varphi(x)}}=\begin{cases}c_1 & x\le 0\\ c_2 & x>0\end{cases}+\begin{cases}1/c_1 & x\le 0\\ 1/c_2 & x>0\end{cases}=\boxed{\begin{cases}c_1+1/c_1 & x\le 0\\ c_2+1/c_2 & x>0\end{cases}}$$

הפונקציה שהתקבלה , מוקפת במלבן, מתי היא רציפה בנקודה x=0 ?

רציפה אם ורק אם הקבועים שווים: $c_1+\frac{1}{c_1}=c_2+\frac{1}{c_2}$. ומכאן נסיק לאחר מספר מעברים אלגבריים שחייב להתקיים אחד מבין המצבים הבאים: $c_1=c_2$ או $c_1\cdot c_2=1$.

נפסול את המצב בו הקבועים שווים. נותרנו עם $c_1\cdot c_2=1$. נבחר למשל $\boxed{c_1=2\,,\;c_2=0.5}$.

ובכן, עבור הקבועים הנ"ל הפונקציה $\varphi(x)$ אינה רציפה אבל $\varphi(x)+\dfrac{1}{\varphi(x)}$ רציפה לכל איקס.

מה השיקול המוביל לאמירה "רציפה אם ורק אם הקבועים שווים"

- בצעו את המעברים האלגבריים וקבלו את שתי האופציות (כחול ואדום) על הקבועים
- מדוע פסלנו את האופציה הכחולה ?
- לאחר שבחרנו את הדוגמא של הקבועים מדוע $\varphi(x)$ לא רציפה בנקודה x=0 ומדוע $\varphi(x)+\frac{1}{\varphi(x)}$ רציפה לכל איקס ?

תשובה 3 , סעיף ג

הפונקציה הנתונה היא הרכבה:

$$\tan(\underbrace{\frac{1-\sin x}{3-\cos x}}_{u(x)}) = \tan(u(x))$$

הפונקציה הפנימית u רציפה לכל x – נמקו.

עובדה זאת אינה מבטיחה רציפות ההרכבה כי $\tan(u)$ אינה רציפה לכל u. למשל אם במקרה $u=0.5\pi$ אנחנו בבעייה.

והנה הטריק של התרגיל...

$$0 \le \frac{1-\sin x}{3-\cos x} \le \frac{1-(-1)}{3-1} = 1$$

- נ מ ק ו !

ובכן לכל x הפונקציה $u(x)$ מחזירה ערכים בקטע $[0,1]$ ובקטע זה הפונקציה החיצונית tan רציפה.

לכן הוכחנו כי לכל x ההרכבה שלנו רציפה. סיימנו.

שאלה 4 - משפט ערך הביניים

יהי $p(x)$ פולינום. הוכיחו כי למשוואה $p(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$ יש שורש.

תשובה 4

משפט ערך הביניים הוא משפט על פונקציה רציפה בקטע סגור.

הגרסה הפרקטית של המשפט אומרת כי :

פונקציה רציפה בקטע סגור שמחליפה סימן בקצוות הקטע היא בעלת שורש בקטע הפתוח.

נתונה המשוואה $p(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$. לאחר מעברים אלגבריים נקבל את המשוואה הבאה $x(x-1)p(x)+1-2x=0$. ננסה להוכיח כי למשוואה החדשה יש שורש. אחר כך נבין האם שורש זה הוא גם שורש של המשוואה המקורית.

נגדיר פונקצית עזר $g(x)=x(x-1)p(x)+1-2x$. הפונקציה g(x) היא פולינום ולכן רציפה לכל איקס. נחשב על ידי הצבה פשוטה: $g(0)=1$ וגם $g(1)=-1$.

לפי עה"ב נסיק:

יש שורש בקטע הפתוח $(0,1)$, כלומר קיים xo כך ש- g(xo)=0 ו- 0<xo<1 .

כלומר $x_0(x_0-1)p(x_0)+1-2x_0=0$. נעביר אגפים $x_0(x_0-1)p(x_0)=2x_0-1$.

נחלק ונקבל: $p(x_0)=\dfrac{2x_0-1}{x_0(x_0-1)}$.

מדוע מותר לחלק? מדוע הביטוי שבו חילקנו אינו אפס ?

כל שנותר הוא לפשט טיפה את אגף ימין:

$$p(x_0)=\frac{2x_0-1}{x_0(x_0-1)}=\frac{x_0+x_0-1}{x_0(x_0-1)}=\frac{x_0}{x_0(x_0-1)}+\frac{x_0-1}{x_0(x_0-1)}=\frac{1}{x_0-1}+\frac{1}{x_0}$$

הוכחנו קיומו של 0<xo<1 המהווה שורש למשוואה המקורית.

שאלה 5

הוכיחו כי הפונקציה $\left|x^4-3x^3+2x-1\right|^{-1/4}$ אינה רציפה לכל x .

תשובה 5 בקיצור נמרץ

סמנו את הפולינום הפנימי כפונקציית עזר והוכיחו בעזרת ערך הביניים שיש לה שורש. בזאת הסתיימה ההוכחה שלנו.

שאלה 6

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה לכל x . נתון כי $|f(x)|<1$. הוכיחו כי יש c עבורו $f(c)=c$.

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $g(x)=f(x)-x$ ולהתקדם בעזרת משפט ערך הביניים.

תשובה 6 בקיצור נמרץ

חשבו $g(\pm1)$. סיימו את הניסוח התשובה.

סוף סקירת פתרון מטלה 11