קורס:

חדו"א א (20406) סמסטר 2023א

תאריך הבחינה 23/2/2023 . מועד 89 . מועד א9 .

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים - חלק א וחלק ב.

עליכם לענות על:

שאלות 1-4 בחלק א וכן לענות על 3 שאלות מבין 5-8 בחלק ב.

כל חומר עזר <u>מותר</u> בשימוש

חלק ראשון - שאלות סגורות 1-4 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{7}$ נקודות

סמנו מהי התשובה הנכונה בעמוד האחרון של המחברת במקום המיועד לכך .
לחילופין , ניתן לרשום את התשובות בעמוד הראשון של המחברת בצורה ברורה.
לא נדרש נימוק - רק סימון במחברת מהי התשובה הנכונה. אם אינכם יודעים את התשובה כדאי לנחש. אנו סופרים רק תשובות נכונות ולא מורידים ניקוד על טעויות.

שאלה 1 – שאלה סגורה

נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$. תהי $g(x)$ פונקציה המוגדרת לכל x

לפניכם שלוש טענות הממוספרות 1-3 . קבעו מהן הטענות הנכונות .

טענה 1 : פונקציית הסכום $f(x)+g(x)$ אינה רציפה בנקודה $x=-1$

טענה 2 : אם $g(x)$ רציפה בנקודה $x=1$ ו- $g(1)=3$ אזי $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\cdot g(x)=\boxed{3}$.

טענה 3 : אם $g(x)=\sin(\pi x)$ אזי ההרכבה $g(f(x))$ רציפה לכל x .

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1	ב. 2	ג. 3	ד. 1,2
ה. 1,3	ו. 2,3	ז. 1,2,3	ח. כל הטענות לא נכונות

פתרון שאלה 1 – $\boxed{ג}$

טענה 1 אינה נכונה.

אפשר לקחת את g להיות פשוט f- ואז הסכום הוא פונקציית האפס והיא כמובן רציפה לכל איקס.

טענה 2 אינה נכונה.

נבדוק קיומו של הגבול על ידי בדיקת הגבולות מימין ומשמאל.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\cdot \lim_{x\to 1^+} g(x)\underset{(*)}{=}2\cdot g(1)=\boxed{6}$$

במעבר כוכבית השתמשנו בהגדרת הפונקציה f ובעובדה שהפונקציה g רציפה ולכן ערך הגבול הוא הערך הנקודתי.

כבר כעת רואים כי הטענה אינה נכונה.

טענה 3 נכונה.

נבצע את ההרכבה שרשומה.

$$g(f(x))=\sin(\pi f(x))=\begin{cases}\sin(\pi\cdot 1) & |x|\le 1\\ \sin(\pi\cdot 2) & |x|>1\end{cases}=0$$

שאלה 2 – שאלה סגורה

לפניכם שלוש טענות העוסקות בטורים. אין קשר בין הטענות וכל אחת עומדת בפני עצמה.

מי מבין הטענות היא טענה נכונה ?

1) אם $\sum a_n$, $\sum b_n$ טורים חיוביים מתבדרים אזי הטור $\sum(3a_n+2b_n)$ מתבדר.

2) אם $\sum a_n$, $\sum b_n$ טורים מתכנסים בהחלט אזי הטור $\sum\left(a_n+b_n{}^2\right)$ מתכנס בהחלט.

3) אם $\sum a_n$, $\sum b_n$ טורים מתכנסים בתנאי אזי $\sum a_n\cdot b_n$ טור מתכנס .

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1	ב. 2	ג. 3	ד. 1,2
ה. 1,3	ו. 2,3	ז. 1,2,3	ח. כל הטענות לא נכונות

פתרון שאלה 2 – ד

טענה 1 נכונה.

הוכחה מיידית בעזרת מבחן ההשוואה, הטור הנחקר גדול מטור מתבדר :

$$\sum(3a_n+2b_n)\ge\sum(3a_n+0)\ge\sum a_n$$

טענה 2 נכונה.

מהנתון כי $\sum b_n$ מתכנס בהחלט נובע כי $\sum|b_n|$ מתכנס. לכן איברו הכללי כלומר $|b_n|$ שואף לאפס. לכן החל ממקום מסוים $|b_n|<1$ ולכן נובע כי $b_n{}^2\le|b_n|$.

כעת נעבוד על הטור הנחקר. נשים ערך מוחלט על איברו הכללי ונבחן מה קורה.

$$\sum\left|a_n+b_n{}^2\right|\le\sum\left(|a_n|+\left|b_n{}^2\right|\right)=\sum\left(|a_n|+b_n{}^2\right)\le\sum\underbrace{\left(|a_n|+|b_n|\right)}_{\boxed{Cn}}$$

לפי הנתון כל אחד מבין הטורים באגף ימין מתכנס. ולכן הטור $\sum Cn$ הוא טור מתכנס.

יוצא כי $\sum\left|a_n+b_n{}^2\right|\le\sum C_n$ כאשר הטור הגדול מתכנס.

לפי מבחן ההשוואה הטור הקטן מתכנס כלומר הטור הנחקר מתכנס בהחלט.

טענה 3 לא נכונה.

נבחר $a_n=b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ כל אחד מהטורים $\sum a_n$, $\sum b_n$ הוא טור מתכנס.

מצד שני $\sum a_n\cdot b_n=\sum\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=\sum\dfrac{1}{n}=\infty$.

שאלה 3 – שאלה סגורה

מצאו את ערך הגבול הבא, אם קיים: $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\frac{2\pi}{x})}{(1+x)(1+x^2)(1-x)}$.

א. -2 ב. 2π ג. 0 ד. 0.5π ה. -0.25

ו. הגבול הוא ∞

ז. הגבול לא קיים

פתרון שאלה 3 – $\boxed{\text{ד}}$

חלק מהביטויים במכנה שואפים לגבול ממשי. ניתן לרשום כך:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\frac{2\pi}{x})}{(1+x)(1+x^2)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+x^2)(1+x)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\frac{2\pi}{x})}{(1-x)}=\frac{1}{4}\cdot(2\pi)=\frac{\pi}{2}$$

- הגבול הראשון ערכו 0.25 .
- הגבול השני בר חישוב לפי לופיטל: $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\frac{2\pi}{x})}{(1-x)}\underbrace{=}_{L0/0}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\frac{2\pi}{x})\cdot(-\frac{2\pi}{x^2})}{-1}=2\pi$

סיימנו.

שאלה 4 – שאלה סגורה

מה ערך של האינטגרל $\int_5^7|x-6|\,dx$?

א. 0 ב. 1 ג. 12 ד. 42 ה. -6

פתרון שאלה 4 – $\boxed{\text{ב}}$

מציירים את הגרף הנמצא מעל ציר איקס ורואים כי מדובר על שטח שהוא שני משולשים ששטח כל אחד הוא 0.5.

סיימנו.

המשך הפתרון בעמודים הבאים

<u>חלק שני - שאלות פתוחות 5-8 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{24}$ נקודות.</u>

<u>השיבו על $\boxed{3}$ שאלות בחלק זה.</u>

<u>שאלה 5</u>

(14 נקי) א. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. יהי $0 < p < 1$ מספר קבוע.

הוכיחו כי קיימת נקודה x_0 בקטע הסגור $[a,b]$ כך ש-

$$f(x_0) = p \cdot f(a) + (1-p) \cdot f(b)$$

(10 נקי) ב. 1. $u(x)$ היא פונקציה רציפה וחיובית לכל x המקיימת $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{u(x)} = 2$.

מצאו את $u(0)$. הסבירו היכן השתמשתם בכל נתוני התרגיל.

2. הדגימו פונקציה $u(x)$ שמוגדרת וחיובית לכל x ושאינה רציפה בנקודה

$x = 0$ ומקיימת $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{u(x)} = 2$.

<u>פתרון שאלה 5 , סעיף א</u>

נגדיר פונקציית עזר: $g(x) = f(x) - p \cdot f(a) - (1-p) \cdot f(b)$

פונקציית העזר g רציפה בקטע הסגור לפי אריתמטיקה (f פחות קבוע !) .

אנו רוצים להוכיח כי לפונקציית העזר יש שורש בקטע הסגור .

נציב את קצוות הקטע:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - p \cdot f(a) - (1-p) \cdot f(b) \\ &= f(a)(1-p) - (1-p) \cdot f(b) \\ &= (1-p)(f(a) - f(b)) \end{aligned}$$

כמו כן

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - p \cdot f(a) - (1-p) \cdot f(b) \\ &= p \cdot f(b) - p \cdot f(a) \\ &= p \cdot (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

וכעת ננתח את המצבים הבאים.

- אם $\boxed{f(b)=f(a)}$ אזי למעשה $g(a) = 0$ והנה מצאנו נקודה בקטע הסגור המאפסת את g ובכך סיימנו את ההוכחה.
- אם $\boxed{f(b)\neq f(a)}$ אזי הביטויים (מודגש באדום) **שוני סימן** – אחד מהם חיובי ואזי השני שלילי. מכיוון ש p וגם 1-p חיוביים נסיק כי g(a) , g(b) שוני סימן.

לפי משפט ערך הביניים במצב זה לפונקציה g יש שורש בקטע הפתוח (a , b) . שורש זה כמובן נמצא גם בקטע הסגור [a , b] . סיימנו את ההוכחה.

סיימנו.

פתרון שאלה 5 , סעיף ב1

- מהנתון על **u>0** לכל x נסיק כי הפונקציה $\frac{1}{u(x)}$ מוגדרת לכל x, למעשה חיובית לכל x.
- מהנתון על **רציפות u** נובע לפי אריתמטיקת המנה כי $\frac{1}{u(x)}$ רציפה לכל x .
- לאור **רציפות** $\frac{1}{u(x)}$ נסיק כי ערך הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1}{u(x)}$ הוא הערך הנקודתי של מנה זאת

  כלומר $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{u(x)}=\frac{1}{u(0)}}$.
- לפי הנתון $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{u(x)}=2}$.
- משתי המשוואות הממוסגרות נסיק כי $\frac{1}{u(0)}=2$ ומכאן $u(0)=0.5$. סיימנו.

<u>דרך נוספת שונה מעט</u>

מהנתון על **רציפות u** נובע כי $\lim_{x\to 0}u(x)=u(0)>0$. נחשב את גבול המנה הנתונה לפי אריתמטיקת גבולות: $\frac{1}{u(0)}=\frac{\lim_{x\to 0}1}{\lim_{x\to 0}u(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{u(x)}=2$. שוב קיבלנו $u(0)=0.5$.

פתרון שאלה 5 , סעיף ב2

קחו למשל את הפונקציה הבאה: $u(x)=\begin{cases}0.5 & x\neq 0\\ 4 & x=0\end{cases}$. u פונקציה חיובית, לא רציפה בנקודה x=0 ומתקיים הנתון על הגבול (בדקו זאת) . סיימנו.

שאלה 6

(12 נקי) א. הוכיחו כי $\int_0^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})^{100}\cdot(\cos x)\,dx=0$. פרטו היטב את שלבי ההוכחה.

(12 נקי) ב. השיבו על **<u>אחת ורק אחת</u>** מבין המשימות הבאות.

<u>משימת טורים</u>

תהי a_n סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty}\left(2^n\cdot a_n\right)=1$. היעזרו במבחן השוואה גבולי והוכיחו כי $\sum a_n$ הוא טור מתכנס.

<u>משימת אינטגרל מוכלל</u>

תהי $g(x)$ פונקציה חיובית ורציפה בקטע $[0,\infty)$ המקיימת $(x^2+1)\cdot g(x)\le 1$ בקטע זה. הוכיחו כי $\int_0^{\infty}g(x)dx\le\frac{\pi}{2}$.

פתרון שאלה 6 , סעיף א

נציב באינטגרל t=x-0.5π ונקבל:

$$\int_{0}^{\pi}(x-\tfrac{\pi}{2})^{100}\cdot(\cos x)\,dx \underset{\boxed{\substack{t=x-\frac{\pi}{2}\\ dt=dx}}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^{100}\cdot\cos(t+\tfrac{\pi}{2})\,dt$$

נפתח, או נשתמש בנוסחא עבור הקוסינוס, ובכל מקרה נקבל:

$$\ldots=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^{100}\cdot\cos(t+\tfrac{\pi}{2})\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^{100}\cdot(-\sin(t))\,dt$$

הוציאו מינוס מחוץ לאינטגרל. הקטע סימטרי סביב t=0 הפונקציה y=t^100*sin(t) אי זוגית.
לאור זאת האינטגרל הוא אפס. סיימנו.

פתרון שאלה 6 , סעיף ב

משימת טורים

$\sum a_n$ טור נחקר. ידוע כי $\sum (0.5)^n$ הוא טור מתכנס כטור גיאומטרי.

נחשב את גבול המנה הבאה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(1/2)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(2^n\cdot a_n\right)=1$$

לפי משפט הטור הנחקר מתנהג כמו הטור הגיאומטרי ומכאן נסיק כי הטור הנחקר מתכנס.
סיימנו.

<u>דרך נוספת</u>

מהנתון $\lim_{n\to\infty}\left(2^n\cdot a_n\right)=1$ נסיק כי החל ממקום מסוים $0<2^n\cdot a_n<\frac{1}{2}$. אם כך החל ממקום מסוים $0<a_n<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$.

לפי מבחן ההשוואה הקלאסי ניתן לרשום $\sum a_n\le\frac{1}{2}\cdot\sum\frac{1}{2^n}$ והנה הוכחנו כי הטור הנחקר קטן מטור גיאומטרי מתכנס ומכאן שהוא בעצמו מתכנס. סיימנו.

משימת אינטגרל מוכלל

מהנתון נסיק כי $g(x)\le\frac{1}{x^2+1}$ בקטע עליו מדובר. כעת נפעיל את מבחן ההשוואה.

$$\int_0^{\infty} g(x)dx\le\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\arctan x\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

סיימנו.

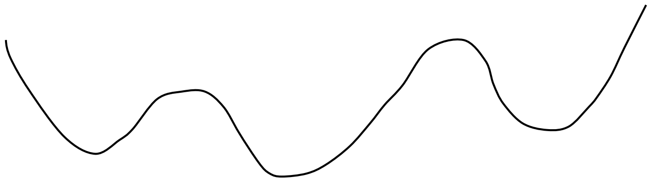
שאלה 7

(14 נק') א. נגדיר $q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 2$. (הפרמטרים a,b,c קבועים)

1. הוכיחו כי לפולינום $q(x)$ יש מינימום מוחלט והוא שלילי .

2. אברהם ושרה מנסים לברר את הסוגיה הבאה :

האם ניתן למצוא קבועים c ; b ; a כך שהפולינום שלנו יראה כך



אברהם : ניתן למצוא קבועים כך שגרף הפולינום יהיה כמו בתרשים.

שרה : לא ניתן למצוא קבועים. כך שגרף הפולינום יהיה כמו בתרשים.

מי צודק ומדוע ?

(10 נק') ב. מה ערך הגבול : $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 2}}{2x^2 + 3x + 2}$? הראו חישוב ולא ניחוש .

פתרון שאלה 7 , סעיף א1

הפולינום הנתון $q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 2$ רציף לכל איקס. החזקה הגבוהה היא x^4

ולכן $\lim_{x\to\pm\infty} q(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = \infty$. מכאן לפי טבלה בפרק ארבע נסיק שלפולינום יש מינימום מוחלט.

המינימום המוחלט חייב להיות שלילי שהרי $q(0) = -2$. כלומר אם יש מינימום הוא חייב להיות -2 או קטן ממספר זה ובפרט המינימום שלילי .

פתרון שאלה 7 , סעיף א2

האיור מראה חמש נקודות קיצון מקומיות. בכל נקודת קיצון מתקיים $q'(x) = 0$ ומכאן שהנגזרת מתאפסת לפחות חמש פעמים. לפי רול נסיק כי הנגזרת שלה $q''(x) = 0$ מתאפסת לפחות בארבע נקודות.

מצד שני הנגזרת השנייה היא פונקצייה ריבועית $q''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$. פונקציה ריבועית זאת אינה יכול להתאפס ארבע פעמים, היא יכול להתאפס לכל היותר פעמיים. סתירה.

לכן הגרף של הפולינום אינו יכול להיות כמו בתרשים. שרה צודקת. סיימנו.

....הערה קטנה למיטיבי לכת...

פונקציה ריבועית מתאפסת לכל היותר פעמיים למעט מצב אחד שבו הפונקציה הריבועית היא למעשה קבועה כלומר היא y=0 . אבל זה לא אפשרי בגלל הביטוי 12x^2. לא חייבים לרדת לרזולוציה כזאת.

פתרון שאלה 7 , סעיף ב

חלקו מונה ומכנה בביטוי x^2 . במונה רשמו $\sqrt{x^4}$. סיימו וקבלו כי הגבול הוא 0.5 .

שאלה 8

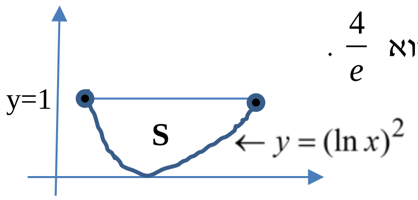
(12 נקי) א. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה, יורדת וחיובית בקטע $[1,3]$.

הוכיחו כי $$f(3) \le \frac{\int_1^3 xf(x)dx}{4} \le f(1)$$

(12 נקי) ב. הראו כי גודלו של השטח המסומן ב- S הוא $\frac{4}{e}$.

שימו לב **לנתונים המופיעים באיור**.

פרטו את כל חישובי האינטגרלים.



פתרון שאלה 8 , סעיף א

מהנתון שהגרף יורד וחיובי נסיק כי $0 \le f(3) \le f(x) \le f(1)$.

נכפול באיקס: $0 \le xf(3) \le xf(x) \le xf(1)$

נפעיל משפט 5.6.7 ונקבל:

$$0 \le \int_1^3 xf(3)dx \le \int_1^3 xf(x)dx \le \int_1^3 xf(1)dx$$

נוציא קבועים מחוץ לאינטגרל:

$$f(3)\cdot\int_1^3 xdx \le \int_1^3 x\cdot f(x)dx \le f(1)\cdot\int_1^3 xdx$$

מתקיים $\int_1^3 xdx = 4$.

ניישם:

$$f(3)\cdot 4 \le \int_1^3 x\cdot f(x)dx \le f(1)\cdot 4$$

נחלק בארבע:

$$f(3) \le \frac{\int_1^3 x\cdot f(x)dx}{4} \le f(1)$$

סיימנו.

פתרון שאלה 8 , סעיף ב

נדרוש $(\ln x)^2=1$ כלומר $\ln x=1, \ln x=-1$ כלומר: $x=\frac{1}{e}$, $x=e$.

השטח המבוקש הוא שטח המלבן שגובהו 1 ובסיסו $e-\frac{1}{e}$ **פחות** השטח מתחת הגרף של הפונקציה

כלומר פחות האינטגרל $\int_{1/e}^{e}(\ln x)^2dx$.

נחשב את האינטגרל בעזרת האינטגרציה בחלקים.

$$\int_{1/e}^{e}\overset{u'}{1}\cdot\overbrace{(\ln x)^2}^{v}dx=\left[x\cdot(\ln x)^2\right]_{1/e}^{e}-\int_{1/e}^{e}x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=e\cdot(\ln e)^2-\frac{1}{e}\cdot(\ln\tfrac{1}{e})^2-2\cdot\int_{1/e}^{e}\ln xdx$$

$$=e\cdot 1-\frac{1}{e}\cdot(-1)^2-2\cdot\left[x\ln x-x\right]_{1/e}^{e}=e-\frac{5}{e}$$

סיום:

$$S=(e-\frac{1}{e})-(e-\frac{5}{e})=\frac{4}{e}$$

סוף קובץ