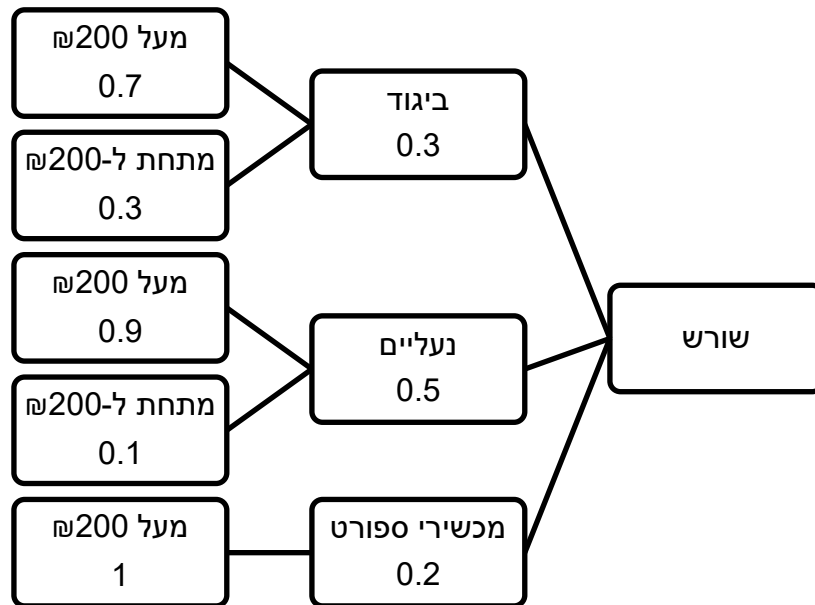


תרגילי בית בהסתברות מותנית –דיאגרמת עץ

תרגיל 1

בעל חנות למוצרי ספורט מצא ש-30% מהמכירות שלו הן של ביגוד, 50% מהמכירות הן של נעליים ויתר המכירות הן של מכשירי ספורט (20%). במכירות הביגוד 70% מהמכירות הן מעל 200₪, במכירות הנעליים 90% מהמכירות הן מעל 200₪ ובמכשירי הספורט כל המכירות הן מעל 200₪.



אדם נכנס לחנות ורכש מוצר אחד.

א. מה הסיכוי שהוא רכש נעליים שעלותן גבוהה מ-200₪?

$$P(\text{נעליים מעל } 200) = 0.5 \cdot 0.9 = 0.45$$

ב. מה הסיכוי שרכש מוצר שעלותו גבוהה מ-200₪?

$$P(\text{מעל } 200) = 0.3 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 1 = 0.86$$

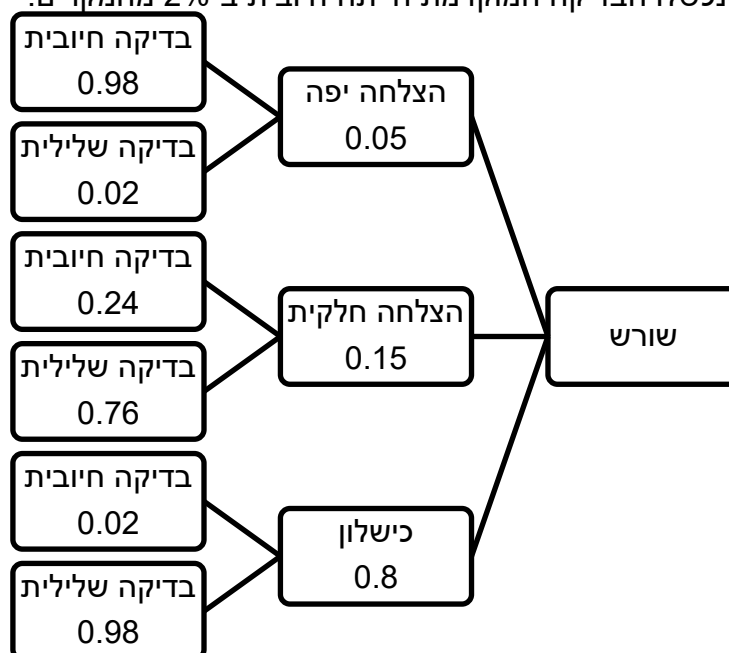
ג. ידוע שהוא רכש מוצר שעלותו נמוכה מ-200₪. מה הסיכוי שהוא רכש נעליים?

$$P(\text{עלות נמוכה } 200 \cap \text{נעליים}) = \frac{P(\text{עלות נמוכה } 200 \cap \text{נעליים})}{P(\text{עלות נמוכה } 200)} =$$

$$= \frac{0.5 \cdot 0.1}{0.3 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0} = \frac{5}{14} \approx 0.3751$$

תרגיל 2

חברה למזון קפוא פיתחה מוצר חדש. מניסיון עם מוצרים דומים בעבר, ידוע ש-5% מהם מצליחים יפה בשוק, ל-15% מהם הצלחה חלקית, והשאר נכשלים. לצורך בדיקה נמכר המוצר במספר מצומצם של סופרמרקטים במשך מספר שבועות. תהליך בדיקה כזה מקובל בחברה כבר זמן רב וידועים לגביו הנתונים באים: עבור מוצרים שהצליחו יפה הבדיקה המוקדמת הייתה חיובית ב-98% מהמקרים. עבור מוצרים שהצלחתם חלקית הבדיקה המוקדמת הייתה חיובית ב-24% מהמקרים. עבור המוצרים שנכשלו הבדיקה המוקדמת הייתה חיובית ב-2% מהמקרים.



א. מהי ההסתברות שתוצאת הבדיקה המוקדמת של המוצר החדש תהיה חיובית?

$$P(\text{בדיקה מקדימה חיובית}) = 0.05 \cdot 0.98 + 0.15 \cdot 0.24 + 0.8 \cdot 0.02 = 0.101$$

ב. אם תוצאת הבדיקה המוקדמת חיובית, מה ההסתברות שהמוצר החדש יצליח יפה?

$$P(\text{בדיקה מקדימה הצלחה יפה} | \text{בדיקה מקדימה חיובית}) = \frac{P(\text{בדיקה מקדימה הצלחה יפה} \cap \text{בדיקה מקדימה חיובית})}{P(\text{בדיקה מקדימה חיובית})} = \frac{0.05 \cdot 0.98}{0.101} = \frac{49}{101}$$

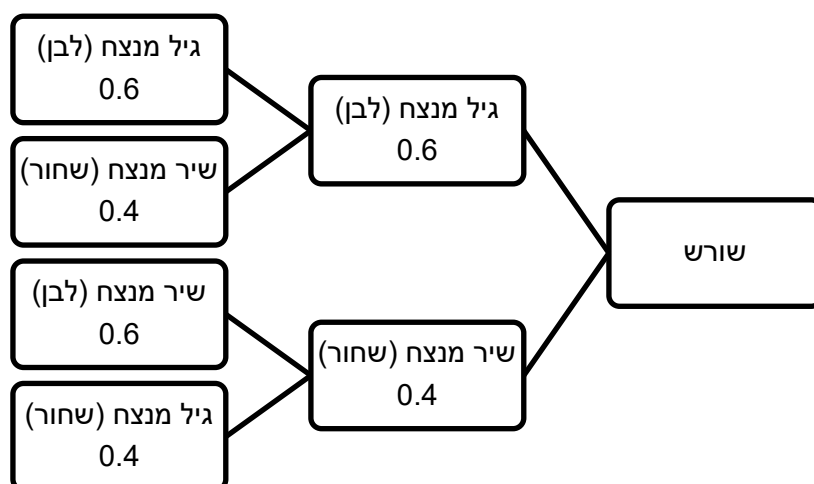
$$\approx 0.4851$$

ג. אם תוצאת הבדיקה המוקדמת שלילית, מה ההסתברות שהמוצר החדש ייכשל?

$$P(\text{בדיקה מקדימה כישלון} | \text{בדיקה מקדימה שלילית}) = \frac{P(\text{בדיקה מקדימה כישלון} \cap \text{בדיקה מקדימה שלילית})}{P(\text{בדיקה מקדימה שלילית})} = \frac{P(\text{בדיקה מקדימה כישלון} \cap \text{בדיקה מקדימה שלילית})}{1 - P(\text{בדיקה מקדימה חיובית})} = \frac{0.8 \cdot 0.98}{1 - 0.101} = \frac{784}{899} \approx 0.872$$

תרגיל 3

שני שחקני דמקה, גיל ושיר, מתמודדים ביניהם בשני משחקים על-פי הכללים הבאים:
 גיל ישחק בכלים הלבנים במשחק הראשון.
 השחקן שניצח במשחק הראשון ישחק בכלים הלבנים במשחק השני.
 כמו כן ידוע שהסתברות של שחקן שמשחק בכלים הלבנים לנצח במשחק היא 0.6.



א. מהי ההסתברות של שיר לנצח במשחק השני?

$$P(\text{ניצחון לשיר} \mid \text{במשחק השני}) = 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.6 = 0.48$$

ב. ידוע ששיר ניצח במשחק השני, מהי ההסתברות שניצח במשחק הראשון?

$$P(\text{ניצחון לשיר} \mid \text{ניצחון לשיר} \mid \text{במשחק השני} \mid \text{במשחק הראשון}) = \frac{P(\text{ניצחון לשיר} \cap \text{ניצחון לשיר} \mid \text{במשחק הראשון})}{P(\text{ניצחון לשיר} \mid \text{במשחק השני})}$$

$$= \frac{0.4 \cdot 0.6}{0.48} = 0.5$$

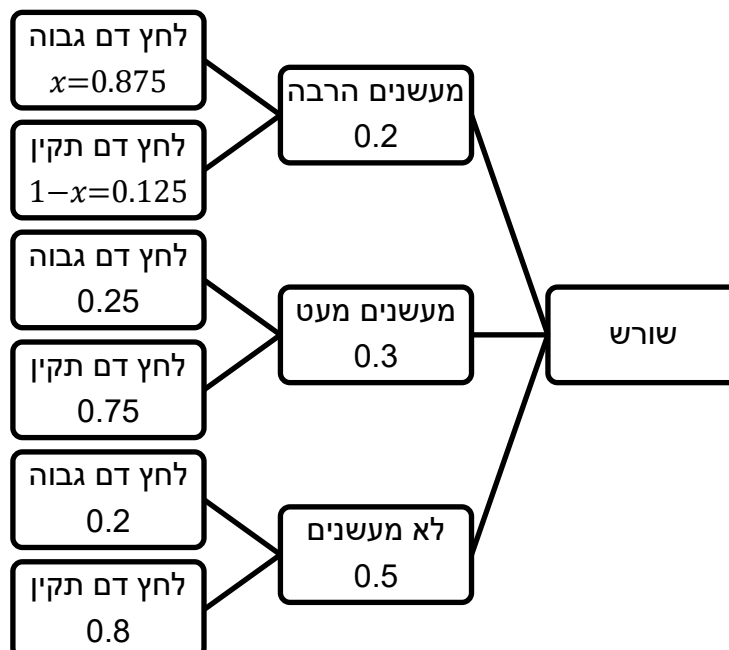
ג. ידוע שאותו שחקן ניצח בשני המשחקים. מה ההסתברות שזה גיל?

$$P(\text{שחקן ניצח} \mid \text{שחקן ניצח} \mid \text{בשני המשחקים} \mid \text{בשני המשחקים}) = \frac{P(\text{שחקן ניצח} \cap \text{ניצחון לגיל} \mid \text{בשני המשחקים})}{P(\text{שחקן ניצח} \mid \text{בשני המשחקים})}$$

$$= \frac{0.6 \cdot 0.6}{0.6 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.6} = 0.6$$

תרגיל 4

בסקר שנערך לבדיקת הקשר בין עישון ולחץ דם באוכלוסייה מסוימת נתקבל התוצאות הבאות: 20% מעשנים הרבה, 30% מעשנים מעט, 50% אינם מעשנים. ידוע שהסתברות להיות בעל לחץ דם גבוה היא 0.35. בין הלא מעשנים, 20% הינם בעלי לחץ דם גבוה. בין המעשנים מעט, 25% הינם בעלי לחץ דם גבוה.



א. אם ידוע שאדם מסוים הינו בין המעשנים הרבה, מהי ההסתברות שהוא בעל לחץ דם גבוה?

$$\begin{aligned}
 P(\text{לחץ דם גבוה}) &= 0.35 = 0.2 \cdot x + 0.3 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.2 \\
 \Rightarrow 0.2 \cdot x + 0.175 &= 0.35 \\
 \xrightarrow{-0.175} 0.2 \cdot x &= 0.175 \\
 \xrightarrow{\div 0.2} x &= 0.875 = P(\text{לחץ דם גבוה} | \text{מעשן הרבה})
 \end{aligned}$$

ב. נבחר אדם מהאוכלוסייה שנבדקה והתברר שהוא אינו בעל לחץ דם גבוה, מהי ההסתברות שהוא אינו מעשן?

$$P(\text{לחץ דם תקין} | \text{מעשן}) = \frac{0.8 \cdot 0.5}{1 - 0.35} = \frac{0.4}{0.65} = \frac{8}{13} \approx 0.615$$

ג. נבחר אדם מהאוכלוסייה והתברר שהוא בעל לחץ דם גבוה, מהי ההסתברות שהוא מעשן מעט או הרבה?

$$P(\text{לחץ דם גבוה} | \text{מעשן מעט או הרבה}) = \frac{0.3 \cdot 0.25 + 0.875 \cdot 0.2}{0.35} = \frac{0.325}{0.35} = \frac{5}{7} \approx 0.7142$$

ד. נגדיר את המאורעות הבאים: A – אזרח שאינו מעשן, B – אזרח שאינו בעל לחץ דם גבוה, האם A ו-B בלתי תלויים? האם הם זרים?

$$\begin{aligned}
 P(A) &= 0.5 \\
 P(B) &= 1 - 0.35 = 0.65 \\
 P(A \cap B) &= 0.5 \cdot 0.8 = 0.4 \\
 P(A \cap B) &= 0.4 \neq P(A) \cdot P(B) = 0.325 \\
 P(A \cap B) &= 0.4 > 0
 \end{aligned}$$

כלומר, המאורעות תלויים ואינם זרים.

