קורס:

חדו"א א (20406) סמסטר 2023ב

תאריך הבחינה. 21.6.2023

מועד הבחינה - מועד 81 מועד 1א אקדמי

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים - חלק א וחלק ב.

עליכם לענות על:

שאלות 1-4 בחלק א וכן לענות על 3 שאלות מבין 5-8 בחלק ב.

כל חומר עזר מותר בשימוש

פתרון הבחינה

כתב: חזי נוימן

חלק ראשון - שאלות סגורות 1-4 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא 7 נקודות

סמנו מהי התשובה הנכונה בעמוד האחרון של המחברת במקום המיועד לכך .

לחילופין , ניתן לרשום את התשובות בעמוד הראשון של המחברת בצורה ברורה.

לא נדרש נימוק - רק סימון במחברת מהי התשובה הנכונה.

אם אינכם יודעים את התשובה **כדאי לנחש**. אנו סופרים רק תשובות נכונות ולא מורידים ניקוד על טעויות.

שאלה 1 – שאלה סגורה

הפונקציה $f(x)$ **מוגדרת** בקטע הסגור $[-1,1]$ **ומקיימת** $f(0)=0$.

למען הסר ספק – הנתונים על f תקפים בכל שלושת הסעיפים.

לפניכם שלוש טענות הממוספרות 1-3 .

1) הפונקציה $|x|\cdot f(x)$ **רציפה** בקטע הסגור $[-1,1]$.

2) אם הפונקציה $f(x)$ **רציפה** בקטע הסגור $[-1,1]$ אזי הפונקציה $|x|\cdot f(x)$ **גזירה** בנקודה $x=0$.

3) אם הפונקציה $f(x)$ **גזירה** בנקודה $x=0$ וגם $f'(0)=3$ אזי השיפוע של הפונקציה $|x|\cdot f(x)$ בנקודה $x=0$ הוא 3 .

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 1,2 ה. 1,3 ו. 2,3

ז. כל הטענות נכונות

ח. כל הטענות לא נכונות

פתרון שאלה 1 $\boxed{\text{ב}}$

טענה 1 לא נכונה

הנה דוגמא נגדית.

עבור הפונקציה הנ"ל המקיימת את כל ההנחות בתרגיל בנו את הפונקציה $|x|\cdot f(x)$ וראו כי היא לא רציפה בקטע הסגור. תציירו את $|x|\cdot f(x)$. **רואים** את אי הרציפות בנקודה x=0.5 .

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x\le 0.5\\ 3 & 0.5<x\le 1\end{cases}\;\Rightarrow\;|x|\cdot f(x)=\begin{cases}|x|\cdot 0 & -1\le x\le 0.5\\ |x|\cdot 3 & 0.5<x\le 1\end{cases}=\begin{cases}0 & -1\le x\le 0.5\\ 3x & 0.5<x\le 1\end{cases}$$

טענה 2 נכונה

נסמן $g(x)=|x|\cdot f(x)$. נבחן את הגזירות של g בנקודה $x=0$ לפי הגדרת הנגזרת :

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-\overbrace{g(0)}^{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot f(h)}{h}$$

כעת נפריד לחישוב גבולות חד צדדיים :

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot f(h)}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|\cdot f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h\cdot f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+} f(h)\underbrace{=}_{(*)}f(0)=0\\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|\cdot f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h\cdot f(h)}{h}=-\lim\limits_{h\to 0^-} f(h)\underbrace{=}_{(*)}-f(0)=0\end{cases}$$

שני המעברים (*) נובעים **מהרציפות של f בנקודה אפס. הסבירו לעצמכם מעבר זה.**

הוכחנו כי $\boxed{g'(0)=0}$.

טענה 3 לא נכונה

כמו בטענה 2 נפעל בדיוק אותו דבר.

החישוב כלל לא תלוי בגזירות של הפונקציה f .

החישוב מראה כי **הנגזרת היא אפס.**

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot f(h)}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|\cdot f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h\cdot f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+} f(h)\underbrace{=}_{(*)}f(0)=0\\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|\cdot f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h\cdot f(h)}{h}=-\lim\limits_{h\to 0^-} f(h)\underbrace{=}_{(*)}-f(0)=0\end{cases}$$

שאלה 2 – שאלה סגורה

נתונות הפונקציות : $g(x)=\begin{cases}\pi & x\le 4\\ 3 & x>4\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}a & x\ge 2\\ b & x<2\end{cases}$. נתון כי $a\ne b$

לפניכם שלוש טענות הממוספרות 1-3 .

- ההרכבה $g(g(x))$ לא רציפה בנקודה $x=4$ כי $g(x)$ לא רציפה בנקודה זאת.
- אם $\lim\limits_{x\to 2}\left(|f(x)|\cdot g(x)\right)=\pi$ אזי $|a|+|b|=2$.
- הפונקציה $f(x)-g(x)$ רציפה בנקודה $x=0$.

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 1,2 ה. 1,3 ו. 2,3

ז. כל הטענות נכונות .

ח. כל הטענות לא נכונות

פתרון שאלה 2 ו

טענה 1 לא נכונה

נחשב את ההרכבה $g(g(x))$.

אם $x\le 4$ נקבל $g(g(x))=g(\pi)=\pi$. אם $x>4$ נקבל $g(g(x))=g(3)=\pi$.

יוצא כי ההרכבה היא הפונקציה הקבועה ולכן רציפה לכל איקס.

טענה 2 נכונה

$$\pi=\lim_{x\to 2^+}\left(|f(x)|\cdot g(x)\right)=|a|\cdot\pi\Rightarrow|a|=1$$
$$\pi=\lim_{x\to 2^-}\left(|f(x)|\cdot g(x)\right)=|b|\cdot\pi\Rightarrow|b|=1$$

טענה 3 נכונה

כל אחת מהפונקציות רציפה בנקודה $x=0$ ולכן ההפרש רציפה בנקודה הנ"ל.

שאלה 3 – שאלה סגורה

חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(\frac{1}{x})-\cos^2(\frac{1}{x})}{\sin^2(\frac{1}{x})-\sin^3(\frac{1}{x})}$.

א. $-\frac{3}{4}$ ב. 1 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{5}{12}$ ה. 0

ו. הגבול קיים , הוא מספר ממשי שאינו אחד מבין האפשריות א-ה .

ז. הגבול לא קיים כי המכנה שואף ל 0 .

פתרון שאלה 3 $\boxed{ג}$

המונה וגם המכנה שואפים לאפס כי $\sin(0)=0$ וגם $\cos(0)=1$. מכאן למדים כי ניתן לבצע לופיטל אבל כדאי מאוד תחילה להציב $y=1/x$ אז גם הנגזרות, כאשר מבצעים לופיטל, תהיינה יותר פשוטות. וכעת ניגש לחישוב.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(\frac{1}{x})-\cos^2(\frac{1}{x})}{\sin^2(\frac{1}{x})-\sin^3(\frac{1}{x})}\underbrace{=}_{y=\frac{1}{x}}\lim_{y\to0}\frac{\cos(y)-\cos^2(y)}{\sin^2(y)-\sin^3(y)}\underbrace{=}_{L_{0/0}}\lim_{y\to0}\frac{-\sin y-2\cdot\cos y\cdot(-\sin y)}{2\sin y\cdot\cos y-3\sin^2 y\cdot\cos y}$$

נארגן מינוסים , נצמצם ב- siny .

$$\ldots=\lim_{y\to0}\frac{-1+2\cdot\cos y}{2\cdot\cos y-3\sin y\cdot\cos y}=\frac{-1+2\cdot1}{2\cdot1-3\cdot0\cdot1}=\frac{1}{2}$$

הערה נחמדה.

ניתן לחשב את הגבול גם ללא לופיטל רק על סמך זהויות פשוטות . סמנו לרגע את סינוס באות s ואת קוסינוס באות c .

$$\begin{matrix}our\\ function\end{matrix}=\frac{c-c^2}{s^2-s^3}=\frac{c(1-c)}{s^2(1-s)}=\frac{c(1-c)}{(1-c^2)(1-s)}=\frac{c(1-c)}{(1+c)(1-c)(1-s)}=\frac{c}{(1+c)(1-s)}$$

כעת.... השאיפו לגבול ואז c שואף ל 1 ו - s שואף ל 0 . סיימנו.

זכרו בשאלה סגורה מותר לעשות הכל כי אנו בוחנים רק תשובות סופיות.

שאלה 4 – שאלה סגורה

נתון טור התלוי בקבוע c : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{1+n^c}$. לפניכם ארבע טענות הממוספרות 1-4 .

1) אם $c=1$ הטור מתכנס בתנאי .	2) אם $1<c<2$ הטור מתכנס בתנאי .
3) אם $c>2$ הטור מתכנס בהחלט .	4) אם $c=0.5$ הטור מתבדר .

כל הטענות הנכונות הן:

א. $1,2,4$ ב. $1,3,4$ ג. $1,2,3$ ד. $2,3,4$

ה. $1,4$ ו. $2,3$ ז. 4 ח. 2

ט. סמנו ט אם אין אפשרות נכונה מבין האפשרויות א-ח .

פתרון שאלה 4 $\boxed{\text{ד}}$

1) אם c=1 האיבר הכללי הוא $a_n = \frac{n \cdot (-1)^n}{1+n^1} = \frac{n}{1+n} \cdot (-1)^n$. הביטוי $\frac{n}{1+n}$ שואף ל 1 ולכן עבור זוגיים נקבל 1 ועבור אי זוגיים נקבל -1 . אז אין כלל גבול לאיבר הכללי ולכן הטור מתבדר. **טענה זאת לא נכונה**.

2) אם $1<c<2$ אזי $a_n = \frac{n \cdot (-1)^n}{1+n^c} = \frac{n}{1+n^c} \cdot (-1)^n$ מכיוון שהמכנה גדול מהמונה נסיק כי החלק החיובי $b_n = \frac{n}{1+n^c}$ הוא יורד ושואף לאפס. לכן הטור מתכנס כטור לייבניץ. שימ ולב כי הטענה מדברת על התכנסות בתנאי כלומר יש להוכיח כי אין התכנסות בהחלט כלומר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n \cdot (-1)^n}{1+n^c} \right|$ מתבדר. טור זה (טור הערכים המוחלטים) הוא למעשה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^c}$ וכאמור יש להוכיח שהוא מתבדר.

ככה : $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n \cdot (-1)^n}{1+n^c} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^c} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

ובכן טור הערכים המוחלטים מתבדר ולכן אין התכנסות בהחלט. כאמור ההתכנסות היא בתנאי. **טענה זאת היא טענה נכונה.**

3) אם $c>2$ ההתכנסות בהחלט כי

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n \cdot (-1)^n}{1+n^c} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^c} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{0+n^c} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{c-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ והטור האחרון מתכנס כי הוא הרמוני p עם חזקה גדולה מ 1 . **טענה זאת היא טענה נכונה.**

4) אם $c=0.5$ האיבר הכללי לא שואף לאפס ולכן הטור מתבדר. **הטענה נכונה**

חלק שני - שאלות פתוחות 5-8 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא 24 נקודות.

השיבו על 3 שאלות בחלק זה.

שאלה 5

נתון הפולינום $p(x) = (x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) + 4$. פולינום זה מלווה את שני חלקי השאלה.

(14 נקי) א. מצאו את המינימום המוחלט של הפולינום בקטע $(-\infty, \infty)$. נמקו היטב.

[לא כדאי לפתוח סוגריים. כדאי לגזור ואחר כך להוציא גורם מחוץ לסוגריים]

(10 נקי) ב. הוכיחו כי $\int_0^1 \frac{1}{p(x)} dx \geq 0.25$. נמקו היטב.

פתרון שאלה 5

סעיף א

- קל לראות כי החזקה הגבוהה של הפולינום היא חזקת ארבע ולכן הגבול עבור $x \to \pm\infty$ הוא אינסוף. הפולינום רציף ולכן לפי משפט יש מינימום מוחלט.
- הפולינום גזיר ולכן המינימום מתקבל בנקודה בה הנגזרת היא אפס.
- נאפס נגזרת : $p'(x) = 2 \cdot (x^2 - x) \cdot (2x-1) + 2 \cdot (2x-1) = 2 \cdot (x^2 - x + 1) \cdot (2x-1)$
- האיפוס היחיד הוא x=0.5 .
- אם כך החשודה היחידה כקיצון היא אכן קיצון כי קיצון קיים.
- המינימום הוא $p(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) + 4 = 3\frac{9}{16} = \frac{57}{16}$

סעיף ב

בקטע $[0,1]$ יש מקסימום ומינימום מוחלטים כי הפולינום רציף והקטע סגור.

בקצוות הפולינום הוא $p(0) = p(1) = 4$. בתוך הקטע הנגזרת מתאפסת ב 0.5 והערך שם קטן מ 4 . לאור כל זאת ארבע הוא הערך המקסימאלי.

לכן,

$$\int_0^1 \frac{1}{p(x)} dx \geq \int_0^1 \frac{1}{4} dx = 0.25$$

סיימנו.

שאלה 6

(12 נקי') א. תהי $g(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ המקיימת $0<g(0)<g(1)<1$.

הוכיחו כי יש $0<c<1$ כך ש $(g(c))^{23}=c$.

(12 נקי') ב. **השיבו על אחת ורק אחת מבין המשימות הבאות.**

משימה ראשונה

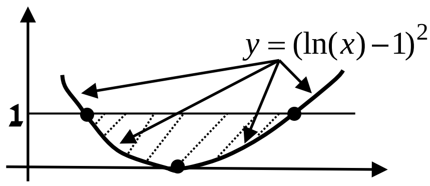
יהי $n=1,2,3,4,....$ מספר טבעי. הוכיחו כי $\int_0^{2\pi}|x-\pi|\cdot\sin(nx)dx=0$.

משימה שנייה

הוכיחו כי גודל השטח באיור הוא **4**.

פרטו את כל חישובי האינטגרלים.

שימו לב לכל הנתונים באיור.



פתרון שאלה 6

סעיף א

נגדיר פונקציית עזר $u(x)=g^{23}(x)-x$. לפי אריתמטיקה פונקציית העזר רציפה בקטע שלנו.

היא גם מחליפה סימן כי $u(0)=g^{23}(0)-0>0$, $u(1)=g^{23}(1)-1<0$.

לפי משפט ערך הביניים נסיק שלפונקציית העזר יש שורש בקטע הפתוח כלומר יש $0<c<1$ כך ש $u(c)=0$ כלומר $(g(c))^{23}=c$. סיימנו.

סעיף ב

כדאי להציב y=x-π ולקבל:

$$\int_0^{2\pi}|x-\pi|\cdot\sin(nx)dx \underbrace{=}_{\boxed{\substack{y=x-\pi\\dy=dx}}} \int_{-\pi}^{\pi}|y|\cdot\sin(n(y+\pi))dy=\int_{-\pi}^{\pi}|y|\cdot\sin(ny+n\pi))dy$$

את הסינוס נפתח לפי נוסחא:

$$\sin(ny+n\pi)=\sin(ny)\cos(n\pi)+\cos(ny)\underbrace{\sin(n\pi)}_{\boxed{zero}}=\sin(ny)\cos(n\pi)$$

אם כך:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|y|\cdot\sin(ny+n\pi))dy=\int_{-\pi}^{\pi}|y|\cdot\sin(ny)\cos(n\pi)dy=\cos(n\pi)\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|y|\cdot\sin(ny)dy$$

הפונקציה $w(y)=|y|\cdot\sin(ny)$ היא פונקציה אי זוגית (יש להוכיח עובדה זאת) ולכן האינטגרל מתאפס.

סיימנו.

(הוכחת האי זוגיות היא על ידי הוכחת $w(-y)=-w(y)$)

שאלה 7

א. (10 נק') יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט. הוכיחו כי הטור $\sum \frac{(n+4)\cdot\sin(n)\cdot a_n}{n}$ מתכנס.

ב. (14 נק') נגדיר פונקציה $u(x)=\begin{cases}\frac{(2x+3)\cdot\arctan(|x|)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

1) האם הפונקציה רציפה בנקודה $x=0$? נמקו היטב.

2) האם לפונקציה יש אסימפטוטות **אופקיות** ?

למען הסר ספק $\arctan(w)$ היא הפונקציה ההפוכה של $\tan(w)$ וצורת כתיבה נוספת עבורה היא $\tan^{-1}(w)$. זאת **לא** הפונקציה $\frac{1}{\tan(w)}$.

פתרון שאלה 7

סעיף א

מנתוני השאלה נובע כי $\sum|a_n|$ הוא טור מתכנס. נבחן את טור הערכים המוחלטים של הטור הנחקר:

$$\sum\left|\frac{(n+4)\cdot\sin(n)\cdot a_n}{n}\right|=\sum\frac{(n+4)}{n}\cdot|\sin(n)||\cdot a_n|\leq\sum\frac{(n+4n)}{n}\cdot 1|\cdot a_n|=5\cdot\sum|\cdot a_n|$$

טור הערכים המוחלטים קטן מטור מתכנס ולכן הטור הנחקר מתכנס בהחלט ובוודאי מתכנס.

סעיף ב1

נסתכל על הגבול כאשר $x\to 0^+$. כעת נוכל לרשום את הפונקציה בצורה הבאה:

$$\lim_{x\to 0^+}u(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(2x+3)\cdot\arctan(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(2x+3)\cdot\frac{\arctan(x)}{x}$$

הביטוי הראשון פולינום והוא שואף ל 3 .

הביטוי השני לפי לופיטל שואף ל $\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1$

ולכן לפי אריתמטיקת הכפל הגבול הוא 3=3*1

אם הפונקציה הייתה רציפה אזי גבול זה היה חייב לצאת כערך הפונקציה והנה סתירה.

לכן הפונקציה שלנו לא רציפה בנקודה 0 .

סעיף ב2

נחשב את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to\infty}u(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)\cdot\arctan(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)}{x}\cdot\arctan(x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x})\cdot\arctan(x)=(2+0)\frac{\pi}{2}=\pi$$

נחשב את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x+3)\cdot\arctan(-x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x+3)}{x}\cdot\arctan(-x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (2+\frac{3}{x})\cdot\arctan(-x) = (2+0)\frac{\pi}{2} = \pi$$

ובכן יש אסימפטוטה אופקית והיא y=π .

שאלה 8

(14 נקי) א. יהיו a,b,c קבועים חיוביים.

1) הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{1}{ax^2+bx+c}dx \le \frac{a+c}{ac}$. נמקו היטב .

2) מצאו הערכה מתאימה עבור $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{ax^2+b|x|+c}dx$ ללא חישוב מחודש .

(10 נקי) ב. נתונה משוואה $e^x = -x^3+2x^2+2x+1$.

הוכיחו כי למשוואה זאת יש לכל היותר שלושה שורשים.

פתרון שאלה 8

סעיף א1

$$\int_0^\infty \frac{1}{ax^2+bx+c}dx \le \int_0^1 \frac{1}{ax^2+bx+c}dx + \int_1^\infty \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

$$\le \int_0^1 \frac{1}{0+0+c}dx + \int_1^\infty \frac{1}{ax^2+0+0}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{c}dx + \frac{1}{a}\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{c}+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2-1} = \frac{1}{c}+\frac{1}{a} = \frac{a+c}{ac}$$

זכרו : $$\boxed{\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1} \quad ; \quad p>1}$$

סעיף א2

הפונקציה שלנו $g(x) = \frac{1}{ax^2+b|x|+c}$ מקיימת $g(x)=g(-x)$ ובלשון עממית היא סימטרית ביחס לציר וואי. ולכן השטח מתחת הגרף בקטע $(0,\infty)$ זהה לשטח בקטע $(-\infty,0)$.

לאור זאת החסם הוא כפליים ממה שמצאנו כלומר

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{ax^2+b|x|+c}dx \le 2\cdot\frac{a+c}{ac}$$

סעיף ב

שימוש פשוט של משפט רול.

סוף קובץ