בחינה לדוגמה 3 –פתרון

חלק א

ענה על שאלה 1 (שאלת חובה!)

שאלה 1 (25 נקודות)

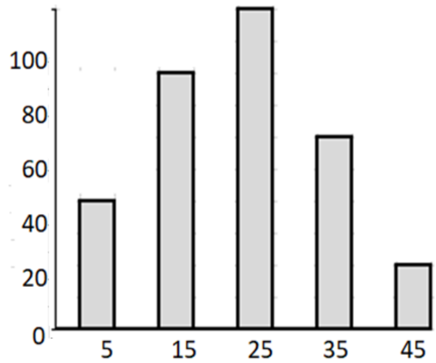
לפניכם חמש טענות. ציינו לגבי כל טענה נכון/לא נכון ונמקו תשובתכם. (תשובה ללא נימוק לא תתקבל!)

(5 נק') א. לסדרה בת 3 איברים, שבה כל איבר גדול מקודמו ב-4 הוסיפו איבר רביעי שגדול מקודמו ב-4. כתוצאה מכך, החציון ואמצע הטווח יגדלו ב-2.

(5 נק') ב. בהתפלגות שבה הטווח הבין רבעוני הנו אפס - החציון והשכיח בהכרח שווים ולכן ההתפלגות היא בהכרח סימטרית.

(5 נק') ג. מ-7 ספרות שונות ניתן ליצור 840 מספרים 4-ספרתיים שבהם כל הספרות שונות זו מזו.

(5 נק') ד. הגרף הבא מציג את שכיחותם של סטודנטים לפי מספר שעות הלמידה שלהם למבחן. על פי הגרף, ממוצע שעות הלמידה והחציון שווים ל-25.



(5 נק') ה. נתון כי P(B/A)=0.5. לכן, **<u>לא יתכן</u>** כי מאורע A ומאורע B הם מאורעות זרים.

א. **הטענה נכונה.**

אברי הסדרה: $x, x+4, x+8$

חציון: $Md = x+4$

אמצע הטווח: $MR = \frac{X+(X+8)}{2} = x+4$

לאחר הוספת איבר רביעי שגדול מקודמו ב-4 האיברים הם: $x, x+4, x+8$ **, $x+12$**

חציון: $Md = \frac{(x+4)+(x+8)}{2} = x+6$

אמצע הטווח: $MR = \frac{(x)+(x+12)}{2} = x+6$

ב. **הטענה אינה נכונה.**

למשל סדרת הנתונים הבאה אינה סימטרית:

1,1,1,1,1,1,1,100

ג. **הטענה נכונה**

מספר האפשרויות שווה ל- $7 * 6*5*4 = 840$

אם כתבו שהטענה אינה נכונה כי אפס לא יכול להיות במקום הראשון – יש לקבל כתשובה נכונה.

ד. **הטענה אינה נכונה – החציון שווה ל-25 אך הממוצע קטן יותר.**

אפשר להסביר באמצעות חישוב או באמצעות הסבר מילולי.

ממוצע – באמצעות הטבלה או הנוסחה:

חציון: באמצעות הנוסחה: יש 360 תצפיות – לכן מיקום החציון 180. $Md=25$

x	f(x)	X*f(x)	F(x)		
5	50	250	50	ממוצע:	23.33
15	90	1350	140	חציון:	25
25	120	3000	260		
35	70	2450	330		
45	30	1350	360		
	360				

הסבר מילולי: אם ההתפלגות הייתה סימטרית – הממוצע היה 25. אולם, שכיחות התצפיות עם הערך 5 גבוהה יותר מאשר שכיחות התצפיות עם הערך 45, ושכיחות התצפיות עם הערך השני הקטן ביותר 15 גבוהה יותר מאשר שכיחות התצפיות עם הערך 35, ולכן הממוצע יהיה קטן יותר.

ה. **הטענה נכונה .**

במאורעות זרים אין אף מאורע שהוא גם ב A וגם ב-B. כלומר, בהינתן שהמאורע היסודי נכלל ב- A – הסיכוי שהוא יכלל גם ב- B שווה לאפס. כלומר, $P(A\cap B)=0$. מכיוון שבהסתברות המותנית, ההסתברות לחיתוך היא במונה, אזי ההסתברות המותנית בהכרח חייבת להיות שווה לאפס $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = 0$.

מאחר והיא לא שווה לאפס, הסתברות החיתוך אינה אפס, החיתוך לא ריק והמאורעות אינם

מאורעות זרים.	

חלק ב

עליכם לענות על **שלוש** מבין ארבע השאלות 2 - 5.

(75 נקודות לחלק זה; 25 נקודות לכל תשובה נכונה ומלאה.)

אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו שלוש התשובות הראשונות לפי סדר הופעתן במחברת.

שאלה 2 (25 נקודות)

מספר הפעמים שיוצאים עובדים במפעל יצור להפסקת עישון, במהלך יום עבודה מוצג בטבלה שלהלן :

מספר הסיגריות	מספר עובדים
0	22
1	16
2	20
3	28
4	14

(9 נקי) א. חשבו את מספר הסיגריות השכיח, החציוני והממוצע על פי ההתפלגות הנתונה.

(6 נקי) ב. מהי סטיית התקן של מספר הסיגריות?

(5 נקי) ג. מהו הרבעון התחתון של מספר הסיגריות?

(5 נקי) ד. מהו אחוז העובדים שמעשנים 3 סיגריות או יותר?

נחשב בעזרת הטבלה :

x	f(x)	F(x)	x*f(x)	x^2*f(x)
0	22	22	0	0
1	16	38	16	16
2	20	58	40	80
3	28	86	84	252
4	14	100	56	224

Mo=3;

Md=2;

$\overline{X} = 1.96;$

$S_x = 1.37$

$; Q1 = 1$

אחוז העובדים שמעשנים 3 סיגריות או יותר הוא 42% = 100/100*(28+14)

שאלה 3 (25 נקודות)

כמות הדבש היומית שאוכל פו הדוב (X) מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 600 גרם וסטיית תקן של 200 גרם.

(8 נקי) א. מהו אחוז הימים שבהם כמות הדבש שאוכל פו אינה עולה על 500 גרם?

(9 נקי) ב. בסוף יום אקראי גילה כריסטופר רובין שכמות הדבש שאכל פו באותו יום לא עלתה על 800 גרם. מה ההסתברות שבאותו יום פו אכל פחות מ-600 גרם?

(8 נקי) ג. פו טוען שבימים שבהם הוא אוכל כמויות גדולות במיוחד של דבש הוא שמח במיוחד. לדבריו, מדובר ב 25% מהימים. כלומר, בימים שבהם כמות הדבש שהוא אוכל היא ב-25% העליונים של ההתפלגות. מהי הכמות המינימלית של דבש שצריך פו לאכול כדי להיות שמח?

נתון: $X\sim N(600,200^2)$

א.	$P(X \le 500) = \emptyset\left(\frac{500-600}{200}\right) = \emptyset(-0.5) = 1-\emptyset(0.5)$ $= 1 - 0.6915 = 0.3085$ 30.85%	
ב.	$P(x \le 800) = \emptyset\left(\frac{800-600}{200}\right) = \emptyset(1) = 0.8413$, $P(x \le 600) = \emptyset\left(\frac{600-600}{200}\right) = \emptyset(0) = 0.5$ $P(X \le 600 \mid X \le 800) = \frac{0.5}{0.8413} = 0.594$	
ג.	$\emptyset(Z_x) = 0.75 \rightarrow Z_x = 0.674 \rightarrow X = 600 + 200 * 0.674 = 734.8$	

שאלה 4 (25 נקודות)

בקורס מסוים באוניברסיטה שבו לומדים כל סמסטר 200 סטודנטים, יש 2 מטלות בחירה:

50% מהסטודנטים מגישים את שתי המטלות, 25% מהם מגישים מטלה אחת בלבד והשאר כלל אינם מגישים מטלות.

לסטודנט שהגיש את שתי המטלות יש סיכוי של 75% לקבל מעל 85 במבחן, לסטודנט שהגיש מטלה אחת יש סיכוי של 10% לקבל מעל 85 במבחן, ולסטודנט שלא הגיש מטלות אין סיכוי לקבל מעל 85 במבחן.

(5 נקי) א. מהו אחוז הסטודנטים שהציון שלהם גבוה מ-85?

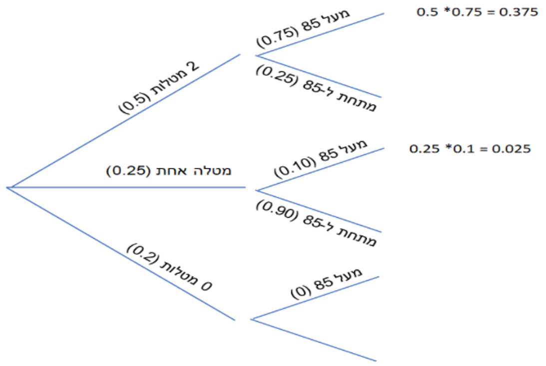
(6 נקי) ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הסטודנטים שמקבלים במבחן ציון גבוה מ- 85?

ג. (6 נק') הציון של עומרי במבחן גבוה מ-85. מה הסיכוי שעומרי הגיש את שתי המטלות?

ד. (8 נק') נסמן: A- אי-הגשת מטלות בחירה (סטודנטים שלא הגישו מטלות), B- קבלת ציון גבוה מ-85 במבחן.

1. קבעו אם A ו-B הם מאורעות זרים (או לא זרים)
2. קבעו אם A ו-B הם מאורעות תלויים (או בלתי-תלויים)

א. (5 נק')



P(X>85)= 0.375 + 0.025 = 0.4

ההסתברות לקבל מעל 85 בבחינה היא 0.4 – לכן 40% מהסטודנטים יקבלו ציון גבוה מ 85.

ב. (6 נק') X= מספר הסטודנטים שהציון שלהם גבוה מ85 X~B(200,0.4)

E(x) = 200*0.4 =80,

V(x) = 200 * 0.4 * 0.6 = 48

ג. (6 נק') P(2 tasks / grade>85)= 0.375 / 0.4 = 0.9375

ד. (8 נק') $P(A \cap B) = 0$

לכן המאורעות הם זרים.

בהינתן שני מאורעות A, B, עבורם P(A)>0; P(B)>0, אם המאורעות הם זרים - הם תמיד תלויים (מכפלת ההסתברויות לא שווה להסתברות לחיתוך).

שאלה 5 (25 נקודות)

במפעל ייצור נדגמו 13 עובדים. לכל אחד מהם, נמדדו מספר הפריטים הממוצע שייצר בשעת עבודה (x), ומספר הפריטים הפגומים שנמצאו בין הפריטים שייצר במהלך החודש (y).

התוצאות שהתקבלו הן:

$$\bar{X} = 7.5,\ \bar{y} = 10.2,\ \sum_{i=1}^{13} x_i^2 = 1,340\ ,\ \sum_{i=1}^{13} y_i^2 = 1,685\ ,\ \sum_{i=1}^{13} x_i \cdot y_i = 575.6$$

(12 נק') א. חשבו את עצמת הקשר הלינארי בין מספר הפריטים הממוצע לשעה וכמות הפריטים הפגומים שיוצרו במהלך החודש?

(13 נק') ב. מנהל הייצור טוען כי אצל עובדים המייצרים מעל 16 פריטים בממוצע בשעה, יש יותר מ- 15 פריטים פגומים בחודש. מה דעתכם? נמקו בעזרת חישוב הניבוי.

א. חישוב עצמת הקשר הלינארי בין מספר הפריטים לשעה וכמות הפריטים הפגומים

$$r = \frac{Cov\ (x,y)}{S_x * S_y}$$

נחשב את כל אחד מהגורמים במשוואה:

$$\text{Cov(x,y)} = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} x_i \cdot y_i - \bar{x} * \bar{y} = \frac{575.6}{13} - 7.5 * 10.2 = -32.22$$

$S_x^2 = \frac{1340}{13} - 7.5^2 = 46.83$ -- $S_x = \sqrt{46.83} = 6.84$ ----

-$S_y^2 = \frac{1685}{13} - 10.2^2 = 25.57$ ---- $S_y = \sqrt{25.57} = 5.057$

$$r = \frac{-32.22}{6.84 * 5.057} = -0.931$$

ב. באמצעות קו הניבוי:

$b = -0.93 * \frac{5.057}{6.48} = -0.688$ a=10.2+0.688*7.5=15.361

Y=-0.668*16+15.361 = 4.351

לא סביר שאצל עובדים המייצרים מעל 16 פריטים בשעה(X), יש יותר מ- 15 פריטים פגומים בחודש (y). הניבוי לעובד המייצר 16 פריטים הוא 4.35 פריטים פגומים. ככל שמייצר יותר פריטים – הצפי הוא לפחות פריטים פגומים.