פתרון <u>מקוצר</u> למטלה 13 , קורס 20406 , סמסטר 2024ב.

כתב: חזי נוימן.

פתרון מקוצר הוא פתרון שמכיל את כל האלמנטים המתמטיים החשובים. הוא מכיל תתי שאלות שאתם נדרשים להשיב עליהן על מנת לחדד נקודות בחומר הלימוד. נכנה זאת קריאה אקטיבית.

<u>שאלה 1</u>

א. הראו כי הפונקציה $u(x)=\dfrac{3x^2-1}{1+x-x^3}$ רציפה בקטע $[0,1]$ ומצאו את הקדומה העוברת בנקודה $(0,0)$. חשבו השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר איקס.

ב. מצאו קדומה של $\cos^3 x$. חשבו (כולל הסבר ושימוש בקדומה) את $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\cos^3 x\right|dx$.

<u>פתרון שאלה 1 סעיף א</u>

הפונקציה רציפה כמנת פולינום הרציפים לכל איקס. המכנה אינו מתאפס כי בקטע שלנו $1+x-x^3=1+x(1-x^2)\ge 1>0$.

נחשב קדומה בשיטת ההצבה:

$$U(x)=\int u(x)dx=\int\frac{3x^2-1}{1+x-x^3}dx \underset{\boxed{\substack{y=1+x-x^3\\ dy=(1-3x^2)dx}}}{=} \int\frac{-dy}{y}=-\ln|y|+K=-\ln|1+x-x^3|+K$$

$$=-\ln(1+x-x^3)+K$$

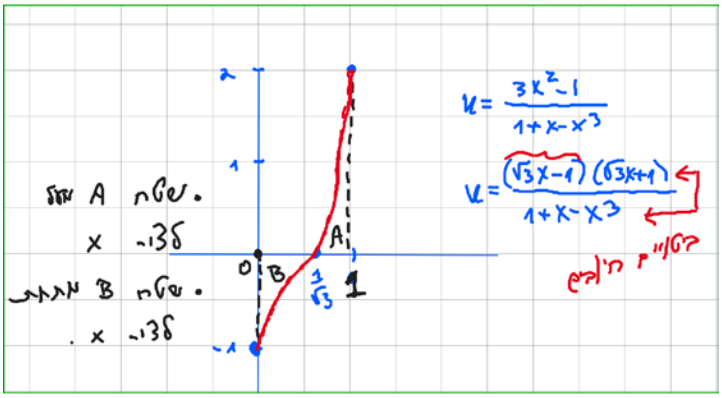
למה מותר להשמיט את הערך המוחלט ?

הקדומה עוברת בנקודה נתונה. נישם זאת ונקבל K=0 .

$$\boxed{U(x)=\int u(x)dx=-\ln(1+x-x^3)}$$

הפונקציה הנתונה u(x) היא פונקציה **בקטע** $[0,1]$. בקטע זה היא מתאפסת בנקודה $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

הגרף שלה **בקטע שלנו** נראה בערך כך:



רואים שיש שני שטחים בין ציר איקס ובין הגרף של הפונקציה. שטח A ושטח B.

$$S_a = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} u(x)dx \quad ; \quad S_b = \int_{0}^{1/\sqrt{3}} -u(x)dx$$

למעשה יש לחשב את אותה קדומה שכבר חישבנו !

$$S_a = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} u(x)dx = \underbrace{U(1)}_{0} - U(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \ln(1+\tfrac{2}{3\sqrt{3}})$$

$$S_b = \int_{0}^{1/\sqrt{3}} -u(x)dx = -\{U(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) - U(0)\} = \underbrace{U(0)}_{0} - U(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \ln(1+\tfrac{2}{3\sqrt{3}})$$

ולכן השטח המבוקש הוא:

$$S_a + S_b = 2\cdot\ln(1+\tfrac{2}{3\sqrt{3}}) \approx 0.65$$

<u>פתרון שאלה 1 סעיף ב</u>

מציאת הקדומה, שיטת ההצבה:

$$F(x) = \int \cos^3(x)dx = \int \cos^2(x)\cdot\cos x dx$$

$$= \int [1-\sin^2(x)]\cdot \cos x dx \quad \boxed{\text{y=sinx and dy=cosxdx}}$$

$$= \int [1-y^2]dy = y - \frac{y^3}{3} + K = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + K$$

יש דרכים רבות לחישוב האינטגרל המבוקש. זכרו כי מצאנו קדומה ל- $\cos^3(x)$ ולכן המשימה העיקרית שלנו היא להשתחרר מהערך המוחלט.

$$|\cos^3(x)| = |\cos^2(x)\cos(x)| = \cos^2(x)\cdot|\cos(x)|$$

את הפונקציה cosx אנו מכירים ובפרט יודעים מתי היא חיובית ומתי היא שלילית.
נרשום תחומים וכך נוכל להשתחרר סופית מהערך המוחלט על הקוסינוס.

$$x \in \left[0,\tfrac{\pi}{2}\right] \quad OR \quad x \in \left[\tfrac{\pi}{2}, 2\pi\right] \Rightarrow \cos x \ge 0 \Rightarrow |\cos(x)| = \cos x$$

$$x \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos x \le 0 \Rightarrow |\cos(x)| = -\cos x$$

נמשיך כך:

$$\int_0^{2\pi} \left|\cos^3 x\right| dx = \int_0^{\pi/2} \left|\cos^3 x\right| dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left|\cos^3 x\right| dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \left|\cos^3 x\right| dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\cos^3 x dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos^3 x dx$$

$$= [F(x)]_0^{\pi/2} + (-1)\cdot[F(x)]_{\pi/2}^{3\pi/2} + [F(x)]_{3\pi/2}^{2\pi}$$

$$= F(\tfrac{\pi}{2}) - F(0) + (-1)\cdot\{F(\tfrac{3\pi}{2}) - F(\tfrac{\pi}{2})\} + F(2\pi) - F(\tfrac{3\pi}{2})$$

$$= 2F(\tfrac{\pi}{2}) + F(2\pi) - F(0) - 2F(\tfrac{3\pi}{2})$$

כעת נחשב את הביטויים האלה שהרי מצאנו את F .

$$F(x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3} \quad\Rightarrow\quad F(\tfrac{\pi}{2})=\tfrac{2}{3}\ ;\ F(2\pi)=0\ ;\ F(0)=0\ ;\ F(\tfrac{3\pi}{2})=-\tfrac{2}{3}$$

סיכום:

$$\int_0^{2\pi}\left|\cos^3 x\right|dx=2F(\tfrac{\pi}{2})+F(2\pi)-F(0)-2F(\tfrac{3\pi}{2})=\frac{8}{3}$$

שימו לב כי פתרנו את השאלה ללא שימוש בשטחים או סימטריות כלשהן. פשוט חישבנו את האינטגרל.

<u>שאלה 2</u>

חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=x\cos^2(\pi x)$ ובין ציר x בכל אחד מהקטעים הבאים: הקטע $\left[0,\frac{3}{2}\right]$, הקטע $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$. (כדאי לבצע הצבה וכמובן א. בחלקים)

<u>פתרון שאלה 2</u>

נתחיל מהסוף. מתקיים $f(-x)=-f(x)$ כלומר **הפונקציה אי זוגית**. ולכן בכל קטע סימטרי סביב x=0 כלומר קטע מהצורה [-r,r] האינטגרל הוא אפס. סיימנו.

ניגש לעיקר.

ראשית שימו לב שבקטע [0,r] **הפונקציה אי שלילית**. לאור זאת השטח מתחת הגרף ועד ציר איקס הוא פשוט האינטגרל של הפונקציה בקטע המתאים.

כלומר השטח בקטע $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ הוא $S=\int_0^{3/2}x\cos^2(\pi x)dx$. השאלה היא כיצד נחשב אינטגרל זה?

ראשית "ננקה את πx" על ידי הצבה.

$$S=\int_0^{3/2}x\cos^2(\pi x)dx \underset{\boxed{\begin{smallmatrix}t=\pi x\\ dt=\pi dx\end{smallmatrix}}}{=} \int_0^{3\pi/2}\frac{t}{\pi}\cos^2(t)\frac{dt}{\pi}=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}t\cos^2(t)dt$$

כעת נמיר את הביטוי הריבועי למשהו שאינו ריבועי.

מכירים את הנוסחה הידועה מטריגונומטריה?

$$S=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}t\cos^2(t)dt=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}(t+t\cdot\cos 2t)dt$$

את מה שאנו יודעים לחשב כבר כעת, נחשב.

$$S=\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}(t+t\cdot\cos 2t)dt=\frac{1}{2\pi^2}\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{3\pi/2}+\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}t\cdot\cos 2t\,dt$$

$$=\frac{9}{16}+\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2}t\cdot\cos 2t\,dt$$

נמקו היטב את קבלת המספר 9/16 .

"ננקה את "2t על ידי הצבה פשוטה.

$$S=\frac{9}{16}+\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi/2} t\cdot\cos 2t\,dt \underbrace{=}_{\boxed{\substack{y=2t\\dy=2dt}}} \frac{9}{16}+\frac{1}{2\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi}\frac{y}{2}\cdot\cos y\frac{dy}{2}$$

$$=\frac{9}{16}+\frac{1}{8\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi} y\cdot\cos y\,dy$$

את האינטגרל האחרון נחשב בעזרת אינטגרציה בחלקים. אין כרגע טעם לגרור את כל הקבועים – נתרכז באינטגרל עצמו.

$$\int_0^{3\pi}\underbrace{y}_{w}\cdot\underbrace{\cos}_{u'}y\,dy=[y\cdot\sin y]_0^{3\pi}-\int_0^{3\pi}1\cdot\sin y\,dy=[0-0]-[-\cos y]_0^{3\pi}=-2$$

סיכום החישוב :

$$S=\frac{9}{16}+\frac{1}{8\pi^2}\cdot\int_0^{3\pi} y\cdot\cos y\,dy=\frac{9}{16}+\frac{1}{8\pi^2}\cdot(-2)=\frac{9}{16}-\frac{1}{4\pi^2}\approx 0.54$$

הזינו בוולפארם אלפא ככה ותוכלו לראות את הגרף ואת התשובה הסופית.

שאלה 3 - שימוש במשפט 5.6.7 ועוד אלמנטים.

סעיף א: הוכיחו כי $\frac{2}{3\pi}\le\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{1}{\pi}$. [רמז : הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ יורדת עבור איקס חיובי]

סעיף ב: תהי $f(x)$ פונקציה אי שלילית ורציפה בקטע $[a,b]$. יהיה $[c,d]$ תת קטע בקטע שלנו כך ש- $f(x)$ חיובית בו . כלומר $a<c<d<b$ ו- $f(x)>0$ בתת הקטע.

1) הוכיחו כי $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.

2) הוכיחו כי $\int_a^b f(x)dx>0$

פתרון שאלה 3 סעיף א

$$\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}dx\le\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{2\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot 2=\frac{1}{\pi}$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}dx\ge\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{3\pi}dx=\frac{1}{3\pi}\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{3\pi}\cdot 2=\frac{2}{3\pi}$$

סיימנו.

פתרון שאלה 3 סעיף ב1

שימוש מיידי במשפט 5.6.7 . סיימנו.

פתרון שאלה 3 סעיף ב2

זאת שאלה ברמה של מתמטיקה. שימו לב להוכחה שעושה שימוש במספר משפטים.

ראשית נרשום כך :

$$\underline{[a\quad [c\ \ d]\quad b]}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

$$\geq 0 + \int_c^d f(x)dx + 0 = \int_c^d f(x)dx$$

וכעת שימו לב. זה הלב המתמטי של ההוכחה שלנו.

A. הפונקציה שלנו רציפה בקטע הסגור [c,d] ולכן יש לה מינימום בקטע. כלומר יש נקודה בקטע הסגור הנ"ל, נסמנה x_{min} , כך ש- $\quad f(x_{min}) \leq f(x) \quad ; \quad c \leq x_{min} \leq d$

B. נפעיל את 5.6.7 בתת הקטע [c,d] ונקבל $\int_c^d f(x_{min})dx \leq \int_c^d f(x)dx$.

C. הביטוי $f(x_{min})$ הוא **מספר קבוע** ולכן ניתן להוציא אותו מחוץ לאינטגרל.

D. ובכן, $\boxed{\int_c^d f(x_{min})dx \leq \int_c^d f(x)dx \Rightarrow f(x_{min}) \cdot \int_c^d dx \leq \int_c^d f(x)dx}$.

E. **האינטגרל באגף שמאל** קל לחישוב זה פשוט מאוד : ערכו $f(x_{min})(d-c)$.

מהי התכונה הבולטת של אגף שמאל ?

ההפרש d-c חיובי. נמקו, זה טריוויאלי.

הביטוי $f(x_{min})$ חיובי כי הפונקציה חיובית בכל הקטע. הבנתם ?

לכן התכונה הבולטת של אגף שמאל היא שהוא ח י ו ב י .

$$0 < f(x_{min}) \cdot (d-c) \leq \int_c^d f(x)dx$$

נחבר את כל המידע בבת אחת.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

$$\geq 0 + \int_c^d f(x)dx + 0$$

$$= \int_c^d f(x)dx \geq \int_c^d f(x_{min})dx = f(x_{min}) \cdot (d-c) > 0$$

סיימנו. כדאי לעבור היטב על ההוכחה ולרשום אותה לבב.

המשך הפתרון בעמודים הבאים...

שאלה 4

א. הוכיחו כי למשוואה $e^{3x}=1-x$ יש שורש אחד ויחיד.

ב. מצאו קבועים אי שליליים כך ש- $A\le\left|e^{3x}+x-1\right|\le B$ לכל x בקטע $[-1,1]$. נמקו היטב.

{ הקבועים צריכים להיות הדוקים כלומר A הכי גדול ו B הכי קטן }

פתרון שאלה 4 סעיף א

הפונקציה $f(x)=e^{3x}+x-1$ רציפה לכל x, מתאפסת בנקודה x=0 . הנגזרת חיובית ולכן אין עוד שורשים. סיימנו.

פתרון שאלה 4 סעיף ב

הפונקציה בתוך הערך המוחלט היא הפונקציה מסעיף א.

פונקציה זאת **עולה** ולכן $A=\underbrace{e^{-3\cdot 1}-1-1}_{f(-1)}\le\underbrace{e^{3x}+x-1}_{f(x)}\le\underbrace{e^{3\cdot 1}+1-1}_{f(1)}=B$

כלומר מצאנו כי $\underbrace{e^{-3}-2}_{negative}\le e^{3x}+x-1\le e^{3}$.

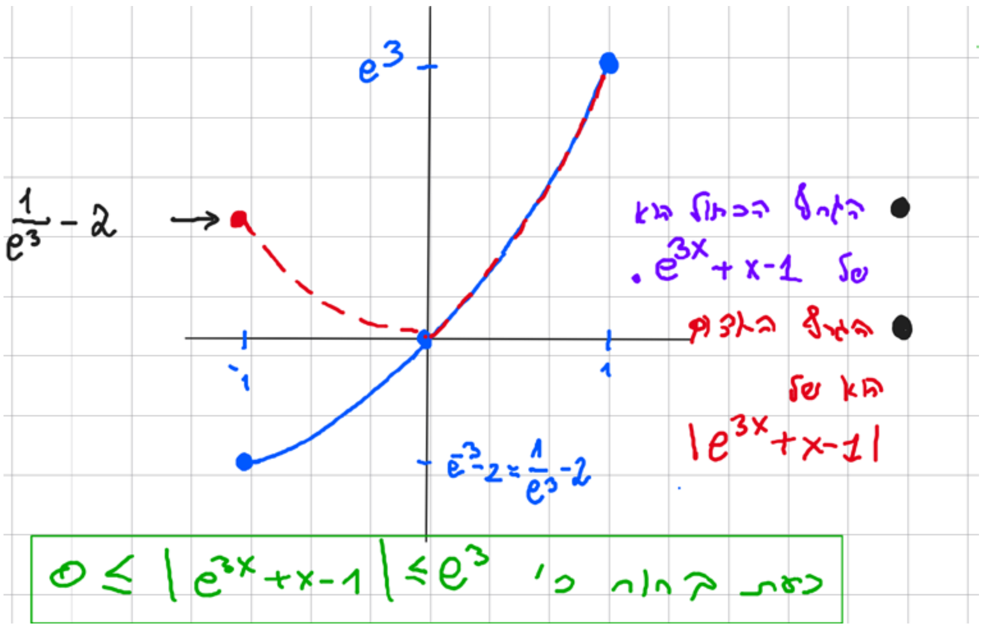
אם נפעיל ערך מוחלט נקבל: $0\le\left|e^{3x}+x-1\right|\le e^{3}$. מדוע ?

המספר החיובי e^3 אינו מושפע. אגף שמאל חייב להיות אפס כי זאת תכונה של ערך מוחלט. חשוב להבין זאת שהרי יש נקודה בה הפונקציה היא אפס , הנקודה x=0 . לכן אלו הם החסמים המבוקשים.

מצאו את הטעות בטיעון הבא.

נפעיל ערך מוחלט ונקבל $\left|e^{-3}-2\right|\le e^{3x}+x-1\le e^{3}$ כלומר $2-e^{-3}\le e^{3x}+x-1\le e^{3}$.

התמונה הבאה היא ההוכחה בקיצור נמרץ.



שאלה 5 - פונקציות טריגונומטריות הפוכות (סעיפים 8.2, 8.1)

[אין קשר בין סעיפי השאלה]

א. מצאו את ערכי הקבועים שיבטיחו גזירות לכל איקס עבור הפונקציה הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a-x}{x} & x \ge 1 \\ b - \arctan x & x < 1 \end{cases} .$$

ב. חשבו $\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{9x^2+4}$. יש להגיע לתשובה מהצורה $\frac{\pi}{n}$ כאשר n מספר טבעי .

פתרון שאלה 5 סעיף א

הנקודה שיש להתייחס אליה היא נקודת ההטלאה x=1 בכל שאר הנקודות הפונקציה מוגדרת היטב , רציפה וגזירה.

תנאי הכרחי לגזירות היא רציפות בנקודה. הגבולות מימין ומשמאל ברי חישוב . נחשב ונשווה.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow \frac{a-1}{1} = b - \arctan 1 \Rightarrow \boxed{a-1 = b - \frac{\pi}{4}}$$

נגזור מימין ומשמאל וניעזר במשפט עמוד 180. נקבל ...

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) \Rightarrow \boxed{-a = -0.5}$$

מצאנו כי עבור הבחירה $b = \frac{\pi-2}{4}$; $a = \frac{1}{2}$ הפונקציה היא רציפה וגזירה בנקודה x=1.

סיימנו.

פתרון שאלה 5 סעיף ב

הציבו y=3x והתקדמו .

סוף פתרון מטלה 13