קורס:

חדו"א א (20406) סמסטר 2024ג

<u>תאריך הבחינה: 26/9/2024 . מועד 83 . מועד א4 .</u>

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים - חלק א וחלק ב.

עליכם לענות על:

שאלות 1-4 בחלק א וכן לענות על 3 שאלות מבין 5-8 בחלק ב.

כל חומר עזר <u>מותר</u> בשימוש

פתרון הבחינה

כתב: חזי נוימן

חלק ראשון - שאלות סגורות 1-4 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא 7 נקודות

סמנו מהי התשובה הנכונה בעמוד האחרון של המחברת במקום המיועד לכך . לחילופין , ניתן לרשום את התשובות בעמוד הראשון של המחברת בצורה ברורה. **לא נדרש נימוק - רק סימון במחברת מהי התשובה הנכונה.** אם אינכם יודעים את התשובה כדאי לנחש. נותנים ניקוד רק על תשובות נכונות ולא מורידים ניקוד על טעויות.

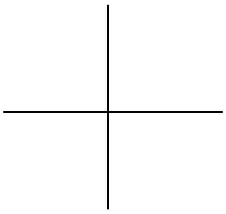
שאלה 1 – שאלה סגורה

יהי c קבוע חיובי כלומר $c>0$.

נגדיר פונקציה :

$$f(x)=\begin{cases} |x-2| & x\ge 1 \\ x-c & x<1 \end{cases}$$

כדאי לצייר



מי מבין הטענות הבאות 1, 2 היא טענה נכונה.

1) כל נקודות אי הרציפות הן : $\{1,2,1-c\}$	2) כל נקודות אי הגזירות הן : $\{0,1,2\}$

כל הטענות הנכונות הן:

א. רק טענה 1 נכונה
ב. רק טענה 2 נכונה
ג. שתי הטענות נכונות
ד. שתי הטענות לא נכונות.

פתרון 1 – ד

טענה 1: הפונקציה רציפה עבור x>1 או x<1 כפולינום או פולינום עם הרכבה עם פונקציית הערך המוחלט. לכן נקודת אי רציפות, אם קיימת , יכולה להיות רק בנקודה x=1 . לאור זאת כבר כעת ברור כי **הטענה לא נכונה**.

בכל מקרה, **רציפות** בנקודת ההטלאה x=1 קיימת אם ורק אם $|1-2|=1-c$ כלומר אם ורק אם **c=0** . מכיוון שנתון c>0 הוכחנו כי יש אי רציפות בנקודה x=1 .

טענה 2: לפי הבדיקה בסעיף 1 אנו כבר יודעים כי הנתון c>0 מלמד על אי רציפות בנקודה x=1 . לכן זאת גם נקודת אי גזירות. כמו כן x=2 היא אי גזירות בגלל הביטוי |x-2| . בשאר הנקודות הפונקציה היא פולינום (או ניתן לפתוח אותה לפולינום) ולכן גזירה. לכן **הטענה לא נכונה**.

שאלה 2 – שאלה סגורה

מהו ערך הגבול : $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln(\ln x)}{1-\ln^2 x}$?

א. e
ב. 1
ג. -0.5
ד. ∞
ה. 2

פתרון 2 – ג

שימוש ישיר בכלל לופיטל מספק את התשובה **-0.5** .

<u>שאלה 3 – שאלה סגורה</u>

נגדיר $f(x)=\sin^2 x-\sin^4 x$. תהי $F(x)$ הקדומה של f העוברת בנקודה $(0,1)$.

מי מבין הטענות הבאות 1, 2 היא טענה נכונה.

טענה 1 : $F(8\pi)=1+\pi$	טענה 2 : $\int_4^{4+2\pi} f(x)dx=\pi$

כל הטענות הנכונות הן:

א. רק טענה 1 נכונה
ב. רק טענה 2 נכונה
ג. שתי הטענות נכונות
ד. שתי הטענות לא נכונות.

<u>פתרון 3 – א</u>

נתחיל בפישוט הפונקציה. נסתמך על נוסחאות בטריגונומטריה :

$$\boxed{2\sin^2 a=1-\cos(2a)} \qquad \boxed{2\sin a\cos a=\sin(2a)}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin^2 x-\sin^4 x\\ &=\sin^2 x(1-\sin^2 x)=\sin^2 x\cdot\cos^2 x\\ &=\frac{1}{4}\cdot 4\sin^2 x\cdot\cos^2 x\\ &=\frac{1}{4}\cdot(2\sin x\cos x)^2\\ &=\frac{1}{4}\cdot(\sin 2x)^2=\frac{1}{8}\cdot 2\sin^2 2x=\frac{1}{8}\cdot(1-\cos 4x)\end{aligned}$$

כעת מציאת קדומה הופכת למשימה יחסית קלה.

$$f(x)=\sin^2 x-\sin^4 x=\frac{1}{8}\cdot(1-\cos 4x)$$

$$F(x)=\int\frac{1}{8}\cdot(1-\cos 4x)dx \quad =\frac{1}{8}\cdot\int(1-\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\cdot[x-\frac{\sin(4x)}{4}]+K=\frac{x}{8}-\frac{\sin(4x)}{32}+K\Rightarrow\boxed{F(x)=\frac{x}{8}-\frac{\sin(4x)}{32}+1}$$

טענה 1: הטענה נכונה. $F(8\pi)=\frac{8\pi}{8}-\frac{\sin(32\pi)}{32}+1=\pi+1$.

טענה 2: הטענה לא נכונה. לפי המשפט היסודי נקבל $\int_4^{4+2\pi} f(x)dx=F(4+2\pi)-F(4)$.

בפונקציה F מופיע הביטוי $\sin(4x)$. נשים לב כי ביטוי זה **שווה** בנקודות שלנו.

כלומר $\sin(4\cdot(4+2\pi))=\sin(4\cdot 4)$ מכיוון ש- להוסיף 8π לזווית אינו משנה את ערך הסינוס כי זה כמו להוסיף 4 מחזורים שלמים. כמובן שניתן להיעזר בנוסחאות טריגו' ולפתח את $\sin(16+8\pi)$ לפי הנוסחא הפשוטה של $\sin(a+b)$.

ובכן , נקבל: $\int_4^{4+2\pi} f(x)dx=F(4+2\pi)-F(4)=\frac{\pi}{4}$

<u>שאלה 4 – שאלה סגורה</u>

נתונות שלוש סדרות **<u>המקיימות</u>** את **<u>כל</u>** הנתונים הבאים :

$A_n > 0\,;\, B_n > 0\,;\, C_n > 0$	$C_n > A_n + B_n$	הטור $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ טור מתכנס

לכל אחת מהטענות הבאות 1,2,3 קבעו האם היא נכונה ?

טענה 1	טענה 2	טענה 3
$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ טור מתכנס	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n$ טור מתכנס	$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot B_n \cdot C_n$ טור מתכנס

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 1,2 ה. 1,3 ו. 2,3

ז. כל הטענות נכונות

ח. כל הטענות לא נכונות

<u>פתרון 4 – ז</u>

טענה 1 היא טענה נכונה. בשורה. הטור הנחקר קטן מטור מתכנס ולכן הטור הנחקר טור מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \le \sum_{n=1}^{\infty} A_n + B_n \le \sum_{n=1}^{\infty} C_n < \infty$$

טענה 2 היא טענה נכונה. נעיין בטור הערכים המוחלטים של הטור הנחקר.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n B_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \le \sum_{n=1}^{\infty} (B_n + A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} C_n < \infty$$

טור הערכים המוחלטים קטן מטור מתכנס ולכן הוא טור מתכנס. נסיק כי הטור המקורי הנחקר הוא טור מתכנס בהחלט ובפרט זה טור מתכנס.

טענה 3 היא טענה נכונה. ההוכחה מעניינת. כאשר טור מתכנס איברו הכללי שואף ל אפס. זהו התנאי ההכרחי להתכנסות. הוכחנו בסעיפים 1+2 כי כל אחד מהטורים $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \;;\; \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ הוא טור מתכנס. מכאן נסיק כי כל אחת מהסדרות החיוביות $A_n ; B_n$ היא סדרה ששואפת לאפס.

כעת נימוק משמעותי, כאשר סדרה שואפת לאפס בהכרח החל ממקום מסוים היא קטנה מ 1 .

כלומר החל ממקום מסוים $0 < A_n < 1 \;;\; 0 < B_n < 1$. נניח כי המקום הזה הוא המקום ה- **N** .

לאור זאת נוכל לרשום

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot B_n \cdot C_n = \sum_{n=1}^{N} A_n \cdot B_n \cdot C_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \cdot B_n \cdot C_n$$

הסכום הראשון הוא סכום סופי של מחוברים ולכן ערכו סופי, פשוט מספר ממשי חיובי .

הסכום השני מקיים $\sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \cdot B_n \cdot C_n \le \sum_{n=N+1}^{\infty} 1 \cdot 1 \cdot C_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \le \sum_{n=1}^{\infty} C_n < \infty$

ובכן מתקיים $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot B_n \cdot C_n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} A_n \cdot B_n \cdot C_n}_{s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \cdot B_n \cdot C_n \le \boxed{s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n}$

כעת נטען כי לפי מבחן ההשוואה הטור הנחקר הוא טור מתכנס ולכן הטענה נכונה.

<u>חלק שני - משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{24}$ נקודות. השיבו על $\boxed{3}$ שאלות בחלק זה.</u>

<u>שאלה 5</u>

(12 נק׳) א. פתרו את המשוואה : $x^4 + x^2 - 2x = 0$. נמקו היטב.
אסור להיעזר במחשבון, מותר להיעזר במחשבה ובחומר הנלמד בקורס.

(12 נק׳) ב. נגדיר $P(x) = x^4 + x^2 - 2x$.

1. הוכיחו כי הפונקציה $P(|x|)$ לא גזירה בנקודה $x=0$.
2. הדגימו $u(x)$ מוגדרת לכל איקס, לא רציפה לכל איקס ובכל זאת ההרכבה $P(u(x))$ מוגדרת, רציפה וגזירה לכל איקס.
{רמז לתת סעיף 2 : סעיף א בשאלה יכול לסייע לכם}

<u>פתרון 5 סעיף א</u>

המשוואה שלנו היא $x^4 + x^2 - 2x = x \cdot (\underbrace{x^3 + x - 2}_{y(x)}) = 0$ ומייד רואים כי x=0 הוא פתרון.

פונקציית העזר $y(x) = x^3 + x - 2$ היא פונקציה עולה כי $y'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. כעת ניחוש פשוט מראה כי x=1 הוא שורש של y(x) . מכיוון שהפונקציה עולה אין עוד שורשים.
לאור כל זאת פתרון המשוואה הוא $x=0,1$. בזאת סיימנו.

<u>פתרון 5 סעיף ב1</u>

$$P(x) = x^4 + x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad P(|x|) = |x|^4 + |x|^2 - 2|x| = x^4 + x^2 - 2|x|$$

נעביר אגפים ונרשום כך : $\frac{P(|x|) - x^4 - x^2}{-2} = |x|$

נניח **<u>בשלילה</u>** כי $P(|x|)$ גזירה בנקודה x=0 . לאור זאת המונה הוא פונקציה גזירה בנקודה 0 כי הוא חיסור של גזירה ופולינום. המכנה פונקציה קבועה ובוודאי גזירה. לאור זאת אגף שמאל גיזרה ב 0 אבל כעת נטען כי פונקציית הערך המוחלט גזירה ב 0 . **<u>סתירה</u>**.
ובכן אינה גזירה כמבוקש בשאלון הבחינה.

פתרון 5 סעיף ב2

לפי סעיף א אנו למעשה יודעים כי $P(1)=P(0)=0$

לכן ההצעה שלנו היא $u(x)=\begin{cases}0 & x\le 7\\ 1 & x>7\end{cases}$. מצאו את ההרכבה $P(u(x))$.

סיימנו.

שאלה 6

(12 נקי) א. נגדיר $g(x)=\frac{2}{x-1}+x^2+\sqrt{1+x^2}$.

1) האם לגרף הפונקציה יש קיצון מקומי בקטע $(-\infty,-1)$? נמקו היטב.

2) הוכיחו כי בקטע $(1,\infty)$ לגרף יש מינימום מוחלט ואין לו מקסימום מוחלט.

(12 נקי) ב. 1) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ הוא טור מתבדר.

2) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}-\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ הוא טור מתכנס. האם ההתכנסות היא בתנאי או בהחלט?

פתרון 6 סעיף א1

הפונקציה שלנו גזירה בקטע x<-1 . תנאי הכרחי לקיצון מקומי בפונקציה גזירה הוא איפוס הנגזרת.

$$g(x)=\frac{2}{x-1}+x^2+\sqrt{1+x^2} \qquad g'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}+2x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

בקטע שלנו x<-1 הנגזרת שלילית כי כל מחובר בנגזרת הוא שלילי. לאור זאת הנגזרת אינה מתאפסת ולכן אין קיצון מקומי בקטע הנ"ל.

פתרון 6 סעיף א2

הפונקציה רציפה בקטע x>1 . נבדוק את גבול הפונקציה כאשר x מתקרב לקצה תחום ההגדרה.

$$\lim_{x\to1^+}g(x)=\lim_{x\to1^+}\{\frac{2}{x-1}+x^2+\sqrt{1+x^2}\}="\frac{2}{0^+}"+1+\sqrt{2}=\infty+1+\sqrt{2}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\{\frac{2}{x-1}+x^2+\sqrt{1+x^2}\}=0+\infty+\infty=\infty$$

לפי טבלה בפרק 4 נסיק כי אין מקסימום מוחלט (הגרף שואף לאין סוף) אבל יש מינימום מוחלט.

פתרון 6 סעיף ב1

נפשט וניעזר במבחן ההשוואה:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(2n+1)}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+n)(2n+n)}=\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

פתרון 6 סעיף ב2

הטור הנתון הוא טור ההפרש של שני טורים מתכנסים. ומדוע הם מתכנסים ?– כי הם טורי לייבניץ. אנא השלימו במדויק את הפרטים הנדרשים.

הטור **מתכנס בתנאי** כי הוא לא מתכנס בהחלט.

נוכיח כי טור הערכים המוחלטים מתבדר.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+1}-\frac{(-1)^n}{2n+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}]\right|=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}]=\infty$$

הטור לאחר פישוט הוא בדיוק הטור של הסעיף הקודם וכבר הוכחנו כי הוא מתבדר.

לכן הטור מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט. לכן ההתכנסות היא בתנאי.

שאלה 7

(14 נק׳) א. הוכיחו כי $0.5\pi \le \int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+\cos^2 x}dx \le 1+\tan(1)$.

(10 נק׳) ב. תהי $g(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. בקטע זה ערכה המקסימאלי הוא **3** וערכה המינימאלי הוא **-6** .

הוכיחו כי לפונקציה $f(x)=(g(x)-1)^2$ יש ערכי קיצון מוחלטים בקטע הסגור $[a,b]$ ומצאו במדויק מהם. נמקו היטב.

פתרון 7 סעיף א

ראשית נשים לב כי המכנה אינו יכול להתאפס. שהרי אם המכנה שווה לאפס **בהכרח** $x^2=0$ **וגם** $\cos^2x=0$ אבל זה לא אפשרי כי מהקשר הראשון נובע ש $x=0$ וזה סותר את הקשר השני.

נשתמש בשיטות שונות לקבלת אי השוויוניים המבוקשים.

אי השיוויון מימין: נפצל את האינטגרל לשני מחוברים.

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+\cos^2 x}dx=\int_0^{1}\frac{1}{x^2+\cos^2 x}dx+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+\cos^2 x}dx$$

$$\le\int_0^{1}\frac{1}{\mathbf{0}+\cos^2 x}dx+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+\mathbf{0}}dx$$

$$=\int_0^{1}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\left[\tan x\right]_0^1+\frac{1}{2-1}=\tan(1)+1 \quad done!$$

אי השיוויון משמאל: לא נפצל את האינטגרל.

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+\cos^2 x}dx\ge\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\arctan x\right]_0^{\infty}=\pi/2 \quad done!$$

<u>פתרון 7 סעיף ב</u>

- ראשית נציין כי **f** היא פונקציה **רציפה** בקטע **סגור**. לכן יש לה מקסימום ומינימום מוחלטים בקטע הסגור. הוכיחו כי היא רציפה בעזרת אריתמטיקה.
- לפי נתוני השאלה $-6 \le g(x) \le 3$ בקטע. לכן אלגברית טכנית $-7 \le g(x)-1 \le 2$ בקטע.
- לכן אלגברית טכנית $0 \le [g(x)-1]^2 \le 49$. כלומר $0 \le f(x) \le 49$ בקטע.
- כעת נדייק את הטיעון הנדרש.
- **<u>יש</u>** X_{min} בקטע עבורו $g(X_{min}) = -6$. ובכן, נקודה זאת היא נקודת המקסימום של f . כלומר $f(X_{min})=49$ והנה הוכחנו כי המקסימום 49 מתקבל ומצאנו את הנקודה בה הוא מתקבל.
- השאלה המעניינת האם יש נקודה שמספקת את הערך המינימאלי 0 ?

ובכן, מכיוון שהפונקציה g רציפה והיא עוברת בין הערכים -6 ל 3 הרציפות מחייבת כי **<u>יש</u>** נקודה c עבורה $g(c)=1$. נקודה זאת, אם נציב אותה בפונקציה f נקבל $f(c)=(1-1)^2=0$.

הנה הוכחנו כי יש נקודה בקטע שבה f היא אפס כלומר הערך 0 הוא אכן מינימום .

סיכום: הערך המקסימאלי של f הוא 49 והוא מתקבל בנקודה X_{min} . הערך המינימאלי של f הוא 0 והוא מתקבל בנקודה c . **סיימנו.**

<u>שאלה 8</u>

(14 נק׳) א. 1) בעזרת נוסחאות טריגו הראו כי $\sin(\frac{\pi}{2}+1)=\sin(\frac{\pi}{2}-1)$.

2) הוכיחו כי $\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}+1} \frac{\cos^3(x)}{\sin x}dx=0$.

☺ **רמז ל - 2:** ניתן למצוא תחילה קדומה ואז להתקדם. ניתן למצוא הצבה שתעביר את הקטע הנתון לקטע סביב אפס ואז ולהתקדם. **שימו לב ♥ :** בכל דרך שתבחרו יש להתקדם ולנמק היטב הרמז הוא רק תחילת העבודה על התרגיל.

(10 נק׳) ב. הוכיחו כי הפונקציה הנתונה רציפה לכל x . נמקו היטב.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1-|x-1|}{x} & x \ne 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

<u>פתרון 8 סעיף א1</u>

$$\sin(\frac{\pi}{2}+1)=\sin(\frac{\pi}{2})\cos(1)+\cos(\frac{\pi}{2})\sin(1)=\cos(1)$$
$$\sin(\frac{\pi}{2}-1)=\sin(\frac{\pi}{2})\cos(1)-\cos(\frac{\pi}{2})\sin(1)=\cos(1)$$

<u>פתרון 8 סעיף א2</u>

קטע האינטגרציה סימטרי סביב $\pi/2$. סמנו קטע זה על ציר איקס.

נעשה הצבה $\boxed{y = x - \frac{\pi}{2}}$ ולכן $\boxed{dy = dx}$.

שימו לב לכל המעברים הבאים, זה מעניין.

$$\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}+1} \frac{\cos^3(x)}{\sin x}dx = \int_{\underbrace{\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi}{2}}_{x}}^{\overbrace{\frac{\pi}{2}+1-\frac{\pi}{2}}^{x}} \frac{\cos^3(y+\frac{\pi}{2})}{\sin(y+\frac{\pi}{2})}dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\cos^3(y+\frac{\pi}{2})}{\sin(y+\frac{\pi}{2})}dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{[\sin(-y)]^3}{\cos(y)}dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{[-\sin(y)]^3}{\cos(y)}dy = -\int_{-1}^{1} \frac{\sin^3(y)}{\cos(y)}dy = 0 \quad done!$$

האינטגרל הוא אפס כי הפונקציה $\sin^3 y/\cos y$ היא פונקציה אי זוגית על קטע סימטרי סביב הראשית. סיימנו.

מהי הדרך השנייה?

ראשית נמצא קדומה בעזרת הצבה.

$$\int \frac{\cos^3(x)}{\sin x}dx = \int \frac{\cos^2(x)\cdot\cos(x)}{\sin x}dx$$

$$= \int \frac{[1-\sin^2(x)]\cdot\cos(x)}{\sin x}dx$$

$$\underbrace{=}_{\boxed{\substack{t=\sin x \\ dt=\cos x dx}}} \int \frac{1-t^2}{t}dt = \int (\frac{1}{t}-t)dt = \ln|t| - \frac{t^2}{2} + K = \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} + K$$

סיכום חלקי: קדומה של $f(x) = \frac{\cos^3(x)}{\sin x}$ היא $F(x) = \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2}$.

לפי המשפט היסודי:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}+1} \frac{\cos^3(x)}{\sin x}dx = \left[F(x)\right]_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}+1} = F(\frac{\pi}{2}+1) - F(\frac{\pi}{2}-1)$$

הפונקציה F תלויה רק בפונקציה $\sin x$. הוכחנו בסעיף 1 כי הצבת ערכי איקס המופיעים בגבולות האינטגרל בתוך $\sin x$ מביאים לאותו ערך של $\cos(1)$. לכן ההפרש הזה הוא ביטוי פחות עצמו וכן התוצאה היא 0 . סיימנו.

<u>פתרון 8 סעיף ב</u>

כאשר איקס שונה מאפס הפונקציה רציפה לפי אריתמטיקה , פולינום והרכבה עם ערך מוחלט.

הנקודה היחידה שבה יש לבחון רציפות היא $x=0$.

ערך הפונקציה הוא $f(0)=1$.

בסביבת הנקודה אפס למעט אפס עצמה מתקיים $|x-1|=1-x$. לכן הביטוי של הפונקציה לאחר סידור אלגברי הוא פשוט 1 . לאור זאת נסיק כי **הגבול של הפונקציה גם הוא 1** .

ובכן הוכחנו כי ערך הפונקציה שווה לערך הגבול ולכן יש רציפות בנקודה $x=0$.

סיימנו.

<u>סוף הפתרון</u>