חדו"א א (20406) סמסטר 2023א

תאריך הבחינה. 30.3.2023

מועד הבחינה - מועד 94 . מועד ב2 אקדמי .

פתרון הבחינה

כתב: חזי נוימן

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים - חלק א וחלק ב .

עליכם לענות על:

שאלות 1-4 בחלק א וכן לענות על 3 שאלות מבין 5-8 בחלק ב.

כל חומר עזר מותר בשימוש

חלק ראשון - שאלות סגורות 1-4 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{7}$ נקודות

סמנו מהי התשובה הנכונה בעמוד האחרון של המחברת במקום המיועד לכך .
לחילופין , ניתן לרשום את התשובות בעמוד הראשון של המחברת בצורה ברורה .
לא נדרש נימוק - רק סימון במחברת מהי התשובה הנכונה . אם אינכם יודעים את התשובה כדאי לנחש.
אנו סופרים רק תשובות נכונות ולא מורידים ניקוד על טעויות .

שאלה 1 – שאלה סגורה

נתונות ארבע פונקציות. **כמה** מבין הפונקציות מקיימות $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=3$?

$$f(x)=\begin{cases}-3 & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}-2 & x\neq 0\\ -3 & x=0\end{cases}$$

$$f(x)=3+\frac{x^2+x}{x}\qquad f(x)=\begin{cases}3 & x<0\\ -3 & x>0\end{cases}$$

א. 0 ב. 1 ג. 2 ד. 3 ה. 4

פתרון שאלה 1 - ג

$$f(x)=\begin{cases}-2 & x\neq 0\\ -3 & x=0\end{cases}\Rightarrow|f(x)|=\begin{cases}2 & x\neq 0\\ 3 & x=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to 0}|f(x)|=2$$

$$f(x)=\begin{cases}-3 & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}\Rightarrow|f(x)|=\begin{cases}3 & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to 0}|f(x)|=3$$

$$f(x)=\begin{cases}3 & x<0\\ -3 & x>0\end{cases}\Rightarrow|f(x)|=\begin{cases}3 & x<0\\ 3 & x>0\end{cases}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x\to 0^-}}|f(x)|=3\Rightarrow\lim_{x\to 0}|f(x)|=3$$

$$f(x)=3+\frac{x^2+x}{x}\Rightarrow\lim_{x\to 0}|f(x)|=\lim_{x\to 0}\left|3+\frac{x^2+x}{x}\right|=\lim_{x\to 0}|3+x+1|=|3+0+1|=4$$

שאלה 2 – שאלה סגורה

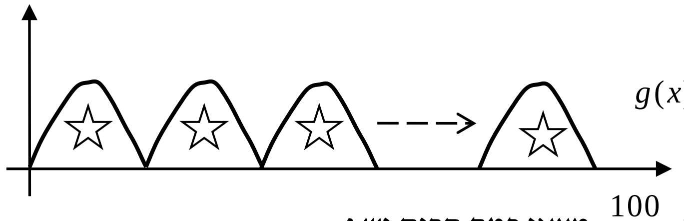
חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3-x)^{32}\cdot(2x-3)^8}{(2x^5+4x^4-3x-1)^8}$.

א. ∞ ב. $1/4$ ג. $1/256$ ד. 16 ה. 1 ו. 0

פתרון שאלה 2 - ה

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3-x)^{32}\cdot(2x-3)^8}{(2x^5+4x^4-3x-1)^8}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^{32}\cdot(2x)^8}{(2x^5)^8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{32}\cdot 2^8\cdot x^8}{2^8\cdot x^{40}}=1$$

שאלה 3 – שאלה סגורה



באיור גרף הפונקציה $g(x) = |\sin(\pi x)|$

הנראה כשרשרת הרים זהים .

ידוע כי **כל** השטח הכלוא בהרים הוא $\frac{100}{\pi}$. מצאו **כמה** הרים יש ?

א. 25 ב. 33 ג. 50 ד. 100 ה. 115 ו. 150

פתרון שאלה 3 - ג

נקודת האיפוס הראשונה החיובית היא $|\sin(\pi x)| = 0$ כלומר $\sin(\pi x) = 0$ כלומר $\pi x = \pi$

ומכאן נסיק כי זאת הנקודה x=1 .

השטח הכלוא בהר הראשון : $S = \int_0^1 |\sin(\pi x)|dx \underbrace{=}_{\boxed{*}} \int_0^1 \sin(\pi x)dx = \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$

שימו לב כי מעבר $\boxed{*}$ נכון בגלל שבקטע $[0,1]$ מתקיים $0 \le \pi x \le \pi$ ולכן $\sin(\pi x)$ חיובי ולכן

ניתן להשמיט את הערך המוחלט. לשון עממית עבור זווית $0 \le \theta \le \pi$ מתקיים $\sin(\theta) \ge 0$

ולכן אין צורך בערך מוחלט.

סיום התרגיל: להר הראשון שטח $\frac{2}{\pi}$. על מנת להגיע ל $\frac{100}{\pi}$ צריך בדיוק 50 הרים.

שאלה 4 – שאלה סגורה

מה השיפוע של גרף הפונקציה $f(x) = |x| \cdot \sin(\frac{\pi}{x})$ בנקודה $x = -0.5$?

א. -2π ב. $-\pi$ ג. 0 ד. π ה. 2π

ו. הפונקציה גזירה בנקודה הנתונה והשיפוע אינו אחת מבין האפשריות א-ה .

ז. הפונקציה לא גזירה בנקודה הנתונה .

פתרון שאלה 4 - א

בסביבת הנקודה x=-0.5 נחליף את הערך המוחלט ב -x . לכן : $f(x) = -x \cdot \sin(\frac{\pi}{x})$

גזירה טכנית מלמדת כי $f'(x) = \frac{\pi}{x}\cos(\frac{\pi}{x}) - \sin(\frac{\pi}{x})$ ולכן $f'(-\frac{1}{2}) = -2\pi$

חלק ב – ענו על $\boxed{3}$ שאלות בלבד. משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{24}$ נקודות

שאלה 5

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[0,1]$. ערכי הפונקציה הם בקטע הפתוח $(0,1)$,
כלומר $0 < f(x) < 1$. לסיום נסמן $f(0) = y_0$ ו- $f(1) = y_1$.

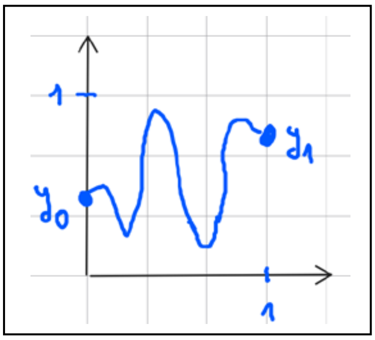
(4 נקי) א. **ציירו** דוגמא לפונקציה כזאת. לא נוסחה , **רק איור** .

(10 נקי) ב. הוכיחו כי קיים s בקטע הסגור $[0,1]$ עבורו $f(s) = \sqrt{y_0 y_1}$.

(10 נקי) ג. הוכיחו כי $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x + \cos x} dx \le \frac{1}{2}$.

פתרון שאלה 5

סעיף א



סעיף ב

נגדיר פונקציית עזר : $g(x) = f(x) - \sqrt{y_0 y_1}$.

פונקציה זאת רציפה בקטע הסגור לפי אריתמטיקת החיסור. נציב את קצוות הקטע ונקבל :

$$g(0) = f(0) - \sqrt{y_0 y_1} = y_0 - \sqrt{y_0 y_1} = \sqrt{y_0}\sqrt{y_0} - \sqrt{y_0 y_1} = \sqrt{y_0}(\sqrt{y_0} - \sqrt{y_1})$$
$$g(1) = f(1) - \sqrt{y_0 y_1} = y_1 - \sqrt{y_0 y_1} = \sqrt{y_1}\sqrt{y_1} - \sqrt{y_0 y_1} = \sqrt{y_1}(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_0})$$

יש שלושה מצבים אפשריים.

אם $\boxed{y_0 = y_1}$ אזי $g(0) = 0$ ולכן, לפי הגדרת g נקבל $f(0) = \sqrt{y_0 y_1}$ ובזאת הושלמה ההוכחה למקרה זה. הנה מצאנו s בקטע הסגור שמביא את הערך $\sqrt{y_0 y_1}$.

אם $\boxed{y_0 < y_1}$ אזי $\sqrt{y_0} < \sqrt{y_1}$ ולכן $g(1) < 0$; $g(0) > 0$. לפי עה״ב יש נקודה s בקטע הפתוח עבורה g(s)=0 . לפי הגדרת הפונקציה g נקבל שיש נקודה עבורה $f(s) = \sqrt{y_0 y_1}$.
הנה מצאנו נקודה s בקטע הפתוח המקיימת את הנדרש וכמובן אם היא בקטע הפתוח בוודאי שהיא גם בקטע הסגור. סיימנו את ההוכחה למקרה זה.

אם $\boxed{y_0 > y_1}$ אזי... אנא השלימו את כתיבת ההוכחה בצורה מלאה – זה תרגול מצוין.

סיימנו את הוכחת הנדרש כי הקפנו את כל המצבים.

שאלה 6

(14 נקי) א. **חלק ראשון של סעיף א**

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ובעלת שתי נגזרות שהן רציפות.

תהי x_0 נקודת קיצון מקומית של הפונקציה $f(x)$.

השלימו בתתי הסעיפים 1-3 במקומות המבוקשים.

1) תנאי הכרחי לקיצון מקומי בפונקציה $f(x)$ הוא $f'(x_0)$.......... .

2) אם x_0 נקודת מקסימום מקומית אזי $f''(x_0)$.......... .

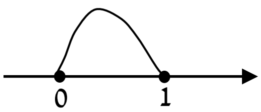
3) אם x_0 נקודת מינימום מקומית אזי $f''(x_0)$.......... .

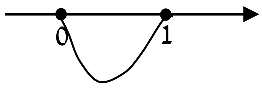
חלק שני של סעיף א

הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה רציפה ובעלת שתי נגזרות רציפות בקטע $[0,1]$.

נתון כי $g(0) = g(1) = 0$. לבסוף נניח כי $2g''(x) + 3g'(x) = 4g(x)$ בקטע $[0,1]$.

הוכיחו כי כל אחד מהגרפים הבאים לא יכול להיות הגרף של $g(x)$.





(10 נקי) ב. השיבו על **אחת ורק אחת** מהמשימות הבאות. (אין כל קשר לסעיף א)

משימת גזירות

הוכיחו כי הפונקציה $(|x|-1)\ln(x+1)$ גזירה בנקודה $x=0$.

משימת גבול

חשבו את הגבול הבא: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{(2-x)(3-x)}\right)$.

פתרון שאלה 6

סעיף א

1) תנאי הכרחי לקיצון מקומי בפונקציה $f(x)$ הוא $f'(x_0)=0$.

2) אם x_0 נקודת מקסימום מקומית אזי $f''(x_0)\le 0$.

3) אם x_0 נקודת מינימום מקומית אזי $f''(x_0)\ge 0$.

❤ **שימו לב** כי נגזרת שנייה בקיצון מקומי יכולה להיות אפס. למשל חקרו קיצון מקומי עבור הפונקציות $y=x^4$ או $y=-x^4$. מהי נקודת הקיצון ומה ערך הנגזרת השנייה בנקודת הקיצון.

נמשיך כעת **לפתרון החלק השני** .

נעיין בגרף משמאל. רואים כי הפונקציה חיובית בקטע הפתוח $(0,1)$. רואים כי יש מקסימום בתוך הקטע ולא בקצוות. נסמן ב- X_{max} את שיעור האיקס של נקודת המקסימום .

תנאי הכרחי לקיצון, שהרי הוא בוודאי קיצון מקומי, הוא $g'(x_{\max})=0$. כמו כן מהאיור נסיק כי $g(x_{\max})>0$. עוד נסיק (לפי הסעיף הקודם) כי $g''(x_{\max})\le 0$.

ניקח את הנתון $2g''(x)+3g'(x)=4g(x)$ ונציב בו את הנקודה $x_{\max}$.

$$2\underbrace{g''(x_{\max})}_{\le 0}+3\underbrace{g'(x_{\max})}_{0}=4\underbrace{g(x_{\max})}_{+}$$

אגף ימין חיובי. אגף שמאל הוא אפס או שלילי. סתירה. סיימנו.

אשאיר לכם להוכיח את הגרף השני . כדאי לרשום את כל הטיעון זה תירגול מצוין.

<u>סעיף ב</u>

<u>משימת גזירות</u> $u(x)=(|x|-1)\ln(x+1)$

נעבוד לפי משפט עמוד 180 . נציג את הפונקציה כהטלאה.

$$u(x)=(|x|-1)\ln(x+1)=\begin{cases}(x-1)\cdot\ln(x+1) & x\ge 0\\ (-x-1)\cdot\ln(x+1) & -1<x<0\end{cases}$$

נחשב נגזרת הפונקציה לפני ואחרי נקודת ההטלאה :

$$u'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1}+\ln(x+1) & x>0\\ -1-\ln(x+1) & -1<x<0\end{cases}$$

נחשב גבולות הנגזרת :

$$\lim_{x\to 0}u'(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)\right]=-1\\ \lim\limits_{x\to 0}\left[-1-\ln(x+1)\right]=-1\end{cases}$$

מכיוון שכל תנאי משפט עמוד 180 מתקיימים ולאור החישוב האחרון נסיק כי הפונקציה גזירה ולמעשה מתקיים $u'(0)=0$.

<u>משימת גבול</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{(2-x)(3-x)}\right)$.

נשתמש בטריק הידוע כפל בצמוד.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{(2-x)(3-x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{6-5x+x^2}\right)\cdot\frac{(x+\sqrt{6-5x+x^2})}{(x+\sqrt{6-5x+x^2})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-6}{x+\sqrt{6-5x+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x-6}{x}}{\frac{x+\sqrt{6-5x+x^2}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{6}{x}}{1+\frac{\sqrt{6-5x+x^2}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{6}{x}}{1+\sqrt{\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}+1}}=\frac{5-0}{1+\sqrt{1}}=2.5$$

שאלה 7

(14 נקי) א.

נתונות הפונקציות הבאות: $g(x) = 1+\sin x \quad , \quad f(x) = \frac{1-x^3}{1-x^4}$.

נגדיר את ההרכבות: $U(x) = f(g(x))$ ו- $W(x) = g(f(x))$.

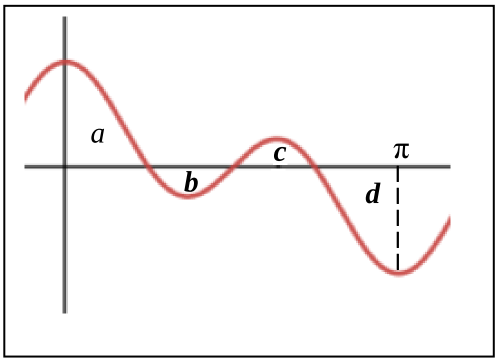
1) מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות $W(x)$, $U(x)$.

2) האם לפונקציות $W(x)$, $U(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות ?
הוכיחו את תשובתכם.

(10 נקי) ב.

1) הוכיחו כי $\int_0^{\pi} \cos(2x)\cdot\cos(x)dx = 0$.

2) הנה תרשים של הפונקציה $f(x) = \cos(2x)\cdot\cos(x)$ בקטע $[0,\pi]$.
סימנו בתרשים ב- a,b,c,d את **השטחים** כפי שנראה באיור. רשמו משוואה אחת הקושרת בין הגדלים a,b,c,d לאור העובדה שהאינטגרל בסעיף 1 יצא אפס. (שימו לב כי כל אחד מבין a,b,c,d הוא **חיובי**)



פתרון שאלה 7

סעיף א

נרשום את ההרכבות:

$$W(x) = g(f(x)) = 1+\sin(\tfrac{1-x^3}{1-x^4}) \qquad U(x) = f(g(x)) = \frac{1-(1+\sin x)^3}{1-(1+\sin x)^4}$$

- **תחום ההגדרה של W** , כל איקס למעט x=1 .
- **תחום ההגדרה של U** , כל איקס למעט אותן איקסים שמאפסים את המכנה. האם יש x המאפס את המכנה? $(1+\sin x)^4 = 1$. משוואה זאת מתקיימת אם ורק אם $1+\sin x = \pm 1$, כלומר $\sin x = -2 \quad ; \quad \sin x = 0$. ובכן יש **להשמיט** מתחום ההגדרה את כל הנקודות הבאות: $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi ....$.

האם לפונקציות יש א. אנכיות ?

כזכור הישר x=x0 הוא א. אנכית אם <u>הגבול של הפונקציה</u> כאשר לפחות אחד מבין הגבולות

הבאים $x \to x_0, x_0^+, x_0^-$ הוא <u>אינסוף או מינוס אינסוף</u>.

לפונקציה W לא תתכן א. אנכית מכיוון שבכל מקרה ערכי הפונקציה חסומים בין הקבועים

הבאים: $0 \le W(x) = 1+\sin(\frac{1-x^3}{1-x^4}) \le 2$ וכל זאת נובע פשוט מהעובדה ש $-1 \le \sin a \le 1$.

נסביר שנית, אם $0 \le W(x) \le 2$ לא ייתכן כי גבול של פונקציה יהיה אינסוף או מינוס אינסוף.

מה קורה בפונקציה U ?

$$\lim_{x\to 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\ldots} U(x) = \lim_{x\to 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\ldots} \frac{1-(1+\sin x)^3}{1-(1+\sin x)^4}$$

הביטוי sinx בנקודות הנ"ל שואף ל 0 ולכן המונה והמכנה שואפים ל 0 .

אם כך זהו גבול מהצורה 0/0 ולכן ניתן להפעיל לופיטל.

$$\lim_{x\to 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\ldots} U(x) = \lim_{x\to 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\ldots} \frac{1-(1+\sin x)^3}{1-(1+\sin x)^4}$$

$$\underbrace{=}_{L_{0/0}} \lim_{x\to 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\ldots} \frac{0-3\cdot(1+\sin x)^2\cdot\cos x}{0-4\cdot(1+\sin x)^3\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\ldots} \frac{3}{4\cdot(1+\sin x)} = \frac{3}{4\cdot(1+0)} = 0.75$$

והנה הראינו כי בכל נקודות אי ההגדרה של הפונקציה שהן נקודות אי הרציפות של הפונקציה הגבול הוא מספר ממשי ובפרט לא אינסוף או מינוס אינסוף.

בכל הנקודות האחרות הפונקציה רציפה ולכן הגבול באותן נקודות הוא ערך הפונקציה הנקודתי וגם הוא מספר ממשי.

אם כך הוכחנו כי אין א. אנכיות לפונקציה U .

<u>סעיף ב</u>

נמצא את הקדומה עלידי נוסחא בטריגו' ואינטגרציה בשיטת החלפת משתנה.

$$\int \cos(2x)\cdot\cos(x)dx = \int (\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} - \sin^2 x)\cdot\cos(x)dx$$

$$= \int (1-2\sin^2 x)\cdot \cos x dx \underbrace{=}_{\boxed{\substack{s=\sin x\\ ds=\cos x dx}}} \int (1-2s^2)ds$$

$$= s - \frac{2s^3}{3} + K = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + K$$

לכן האינטגרל המבוקש הוא:

$$\int_0^{\pi} \cos(2x)\cdot\cos(x)dx = \left[\sin x - \frac{2\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi} = 0-0=0$$

נותר להבין כיצד לקשור בין האינטגרל שתוצאתו אפס ובין השטחים הנתונים. הנה הוכחה מלאה.

ראשית אסמן ב f את הפונקציה - זה רק עניין של נוחות.

שנית **הראו** כי הגרף של הפונקציה חותך את ציר איקס בנקודות הבאות : $x=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}$

$$0=\int_0^{\pi} f(x)dx = \underbrace{\int_0^{\pi/4} f(x)dx}_{A} + \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)dx}_{-B} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{3\pi/4} f(x)dx}_{C} + \underbrace{\int_{3\pi/4}^{\pi} f(x)dx}_{-D}$$

ומכאן המשוואה המבוקשת היא **A+C = B+D** .

נסביר בצורה מלאה מדוע למשל B- ?

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)dx = -\int_{\pi/4}^{\pi/2} -f(x)dx = -area(B) = -B$$

סיימנו.

שאלה 8

(12 נקי) א. יהי $c>0$ קבוע.

הוכיחו כי $\int_0^{\infty} xe^{-cx}dx = \frac{1}{c^2}$. פרטו היטב את כל השיקולים.

(12 נקי) ב. הוכיחו כי הטור $\sum \frac{(-1)^n + \ln(n)}{n^2}$ הוא טור מתכנס.

פתרון שאלה 8

סעיף א

היעזרו באינטגרציה בחלקים.

סעיף ב

פצלו לשני טורים. אחד הטורים מתכנס כהרמוני P . הטור השני מתכנס לפי מבחן האינטגרל.

סוף קובץ