חדו"א א 20406 - פתרון ממ"ן 12 , 2023א כתב: חזי נוימן

שאלה 1 - משיק, פתיח להגדרת הנגזרת

א. ציירו (ניתן להציב נקודות וניתן להיעזר באפליקציה מתאימה) את הגרף של $\boxed{y = 3x + x^4}$. מצאו את הנקודה ואת משוואת המשיק בנקודה כך שמשיק זה יוצר זווית של 135^0 עם ציר איקס החיובי.

ב. הגדירו את המושג פונקציה גזירה בנקודה $x = x_0$. ציינו תנאי הכרחי לגזירות בנקודה.

ג. הנה $g(x) = \begin{cases} x & |x| > 1 \\ 2 - |x| & |x| \le 1 \end{cases}$. ציירו במדויק את הגרף. **על פי התרשים** החליטו מהן נקודות אי הגזירות של הפונקציה ? מה ההבדל המעניין בין נקודות אי הגזירות שציינתם ?

פתרון שאלה 1 סעיף א

שיפוע הישר המשיק הוא -1 . אם כך השיפוע של הגרף $y' = 3 + 4x^3$ שווה לשיפוע המשיק ולכן $3 + 4x^3 = -1$ ומכאן $x = -1$. נקודת ההשקה היא x=-1 , y=-2 (הצבה הפונקציה) .

הישר המשיק עובר בנקודה הנ"ל $(-1,-2)$ ושיפועו a=-1 . לכן משוואת המשיק y=-x-3 . סיימנו.

פתרון שאלה 1 סעיף ב

פונקציה תקרא גזירה בנקודה xo אם הגבול הבא קיים והוא ממשי : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$. אם הגבול הוא L אזי הפונקציה גזירה בנקודה xo ונגזרתה כלומר השיפוע של הגרף באותה נקודה הוא L .

$\boxed{\text{תנאי הכרחי לגזירות היא רציפות באותה נקודה}}$. לשון עממית – אם הפונקציה אינה רציפה בנקודה מסוימת בוודאי שאינה גזירה באותה נקודה.

➢ **הערה**: עיינו ב**הגדרה 3.2.2** . עיינו ב**משפט 3.2.3** .

פתרון שאלה 1 סעיף ג

את האיור אשאיר לכם. שימו לב כי התנאי |x|<1 שקול ל -1<x<1 כך שהענף y=2-|x| משורטט עבור הקטע הסגור [-1,1] .

אי הגזירות בנקודה x=-1 היא מיידית כי בנקודה זאת הפונקציה אינה רציפה.

אי הגזירות בנקודה x=1 היא מהסוג שבה הפונקציה רציפה אבל אינה גזירה. אי הגזירה מתבטאת בחוד הנוצר בגרף בנקודה זאת.

שאלה 2 – גזירות. המשפט בעמוד 180. קצת תרגול בכלל השרשרת

א. תהי $w(x)$ **גזירה** לכל x . נגדיר $U(x)$ על ידי $U(x) = x \cdot w(x)$. הוכיחו כי U **גזירה** בנקודה $x = 0$.

ב. תהי $w(x)$ **רציפה** לכל x . נגדיר $U(x)$ על ידי $U(x) = x \cdot w(x)$. הוכיחו כי U **גזירה** בנקודה $x = 0$.

ג. נגדיר $\psi(x) = |x|^3$ ו- $\varphi(x) = x - 1$. הוכיחו כי ψ גזירה בנקודה 0 . בעזרת זאת הוכיחו כי הפונקציה $|(x-1)|^3$ גזירה בנקודה 1 .

פתרון שאלה 2 סעיף א

w(x) גזירה לכל איקס. הפונקציה y(x)=x גזירה בכל נקודה. לפי אריתמטית הכפל המכפלה y(x)*w(x) גזירה לכל איקס. כלומר x*w(x) גזירה לכל איקס ובפרט גזירה בנקודה 0 . סיימנו.

פתרון שאלה 2 סעיף ב

כאן לא נוכל להיעזר באריתמטיקה של פונקציות גזירות . במקרה זה הכי פשוט לחזור **להגדרת הנגזרת**.

ובכן , הפונקציה U גזירה בנקודה x=0 אם הגבול הבא קיים :

$$\lim_{h\to 0}\frac{U(0+h)-U(0)}{h}$$

נתרגם את הגבול הזה למקרה שלנו.

כזכור $\boldsymbol{U}(x) = x\cdot w(x)$ ולכן

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{U(0+h)-U(0)}{h} &\underbrace{=}_{\boxed{A}} \lim_{h\to 0}\frac{U(h)-U(0)}{h}\\ &\underbrace{=}_{\boxed{B}} \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot w(h)-0\cdot w(0)}{h}\\ &\underbrace{=}_{\boxed{C}} \lim_{h\to 0} w(h) \underbrace{=}_{\boxed{D}} w(0)\end{aligned}$$

נסביר היטב כל מעבר מבין המעברים A-D

A: טריויאלי.

B: הצבנו את ההגדרה של U . מכיוון ש w(x) רציפה לכל איקס. אזי הביטויים w(h), w(0) מוגדרים היטב.

C: אחד הביטויים הוא פשוט אפס . כמו כן צמצמנו ב- h .

D: מעבר חשוב. הרציפות של הפונקציה w(x) בנקודה x=0 אומרת כי הגבול של הפונקציה הוא הערך שלה ולכן החלפנו את הגבול בערך הנקודה w(0) .

אם כך הוכחנו כי :

$$\lim_{h\to 0}\frac{U(0+h)-U(0)}{h} = w(0)$$

כלומר הפונקציה U גזירה בנקודה x=0 והשיפוע הוא w(0) .

פתרון שאלה 2 סעיף ג

תחילה נוכיח כי הפונקציה $\psi(x) = |x|^3$ גזירה בנקודה x=0 . ניעזר במשפט עמוד 180 על מנת להדגים את השיטה. יחד עם זאת נציין כי שימוש כאן בהגדרת הנגזרת יותר פשוט וכנראה גם יותר מהיר לביצוע.

תחילה נכין את **הנגזרת בסביבת הנקודה x=0** ללא הנקודה עצמה. (שימו לצבע הכחול)

$$\psi(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3 & x \ge 0 \\ (-x)^3 & x<0\end{cases} = \begin{cases} x^3 & x \ge 0 \\ -x^3 & x<0\end{cases} \Rightarrow \psi'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 0 \\ -3x^2 & x<0\end{cases}$$

כעת נפעיל את משפט עמוד 180.

הפונקציה רציפה בנקודה x=0 . אשאיר לכם לנמק נקודה זאת .

נבדוק כעת הגבולות של הנגזרת

$$\lim_{x\to 0^+}\psi'(x) = \lim_{x\to 0^+} 3x^2 = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-}\psi'(x) = \lim_{x\to 0^-}(-3x^2) = 0$$

החישוב מלמד כך :

$$\lim_{x\to 0^+}\psi'(x) = \lim_{x\to 0^-}\psi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\psi'(x) = 0$$

לפי משפט עמוד 180 הפונקציה רציפה בנקודה x=0 ולנגזרת יש גבול. אם כך, $\psi'(0) = 0$.

כעת כדאי לעדכן את נוסחת הנגזרת :

$$\psi'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases}$$

סיימנו.

➢ **הצעה :** בדקו גזירות של הפונקציה בנקודה x=0 בעזרת הגדרת הנגזרת.

ובכן ,

כרגע אנו יודעים כי הפונקציה $\psi(x) = |x|^3$ גזירה בנקודה x=0 . הפונקציה $\varphi(x) = x - 1$ גזירה לכל איקס (היא פולינום) . הפונקציה שלנו $|(x-1)|^3$ היא ההרכבה $\psi(\varphi(x))$.

וכעת החלק החשוב , שימוש נכון **בכלל השרשרת**....

נעיין בהרכבה $\psi(\varphi(x))$. נבחר x=1 . אזי $\varphi(x)$ בוודאי גזירה בנקודה הנ"ל. מתקיים $\varphi(1) = 0$.

הפונקציה $\psi(x)$ גזירה בנקודה אפס כלומר היא גזירה בנקודה $\varphi(1)$. לאור זאת לפי משפט כלל השרשת נסיק כי ההרכבה $\psi(\varphi(x))$ גזירה בנקודה x=1 . סיימנו.

שאלה 3 - חקירת פונקציה

שאלה זאת אינה שאלה להגשה. אנו מציגים את פתרון השאלה ותוכלו לעקוב אחריו. ניתן לראות כיצד המושגים של תהליך חקירת הפונקציה באים לידי ביטוי פרקטי בפונקציה ספציפית.

(הדגשים: משיק אנכי והשפעתו על הגרף, נקודה קריטית, נקודה סטציונרית ואלמנטים של חקירת פונקציה)

נגדיר : $-\infty < x < \infty$, $f(x) = 6\sqrt{|x|} - x - 8$.

חקרו את הפונקציה לפי הפירוט הבא :

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול, משיק אנכי, נקודות חיתוך עם הצירים, גרף לפי ממצאי החקירה.

בחקירה :

- הקפידו לדון בגזירות או באי הגזירות של $f(x)$ בנקודות הקיצון המקומיות.
- רק בסיום החקירה דונו במציאת החיתוך עם ציר איקס.

פתרון שאלה 3

נפתח את החקירה ברישום הפונקציה כהטלאה :

$$f(x) = 6\sqrt{|x|} - x - 8 = \begin{cases} 6\sqrt{x} - x - 8 & x \geq 0 \\ 6\sqrt{-x} - x - 8 & x < 0 \end{cases} , \quad -\infty < x < \infty$$

נגזור:

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}}-1 & x>0 \\ \frac{-3}{\sqrt{-x}}-1 & x<0 \end{cases} \quad , \quad f''(x)=\begin{cases} -1.5x^{-1.5} & x>0 \\ -1.5(-x)^{-1.5} & x<0 \end{cases}$$

הפעלה לימודית

כאשר גוזרים $m(-x)^p$ לא שוכחים לכפול בנגזרת הפנימית שהיא מינוס אחד.

הנה דוגמא: $\left[m(-x)^p\right]'=m\cdot p\cdot(-x)^{p-1}\cdot\boxed{(-1)}$

מסקנות מהנגזרת הראשונה:

ראשית נציין כי הפונקציה אינה גזירה בנקודה $x=0$. למשל הגבולות מימין ומשמאל של הנגזרת . . . . והמשך ברור.

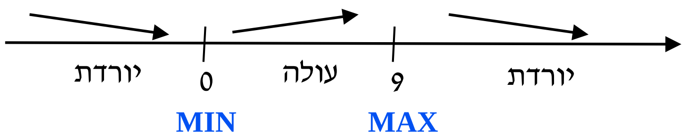
קל להבחין כי $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-1>0 \Leftrightarrow 0<x<9$. כלומר הגרף עולה בקטע $(0,9)$.

בכל שאר הנקודות בתחום ההגדרה הנגזרת שלילית. כלומר בכל תחום אחר הגרף יורד.

הפעלה לימודית

נמק מדוע עבור $x<0$ ועבור $x>9$ הנגזרת שלילית.

לכן תחומי העלייה והירידה של הגרף ונקודת הקיצון המקומית לפי האיור הבא:



מסקנות מהנגזרת השנייה:

הביטויים $(-x)^{-1.5}$, $x^{-1.5}$ חיוביים לכל x אם הם מוגדרים. לכן הנגזרת השנייה שלילית לכל x פרט לנקודה $x=0$ בה בכלל אין גזירות. מכאן נלמד כי הגרף קעור ואין לו נקודת פיתול כי הוא אינו עובר להיות קמור.

הנקודה $x=0$:

ראשית הפונקציה אינה גזירה בנקודה הנ״ל. במקרה כזה, נוהגים לחשב את הגבולות של הנגזרת מימין ומשמאל . חישוב זה נותן תמונה טובה על התנהגות הגרף בסביבת הנקודה.

הנה החישוב ומסקנותיו -

$$\lim_{x\to0^-} f'(x)=\lim_{x\to0^-}\left(-\frac{3}{\sqrt{-x}}-1\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to0^+} f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-1\right)=\infty$$

כלומר בסביבת הנקודה $x=0$ הגרף בערך נראה כך -

הגרף יורד מאוד דרמטי ומיד מתחיל לעלות בשיפוע מאוד חזק.

הכי חוד שבעולם - ראה גם **איור 4.5.1 בעמוד 243** .

הדגשה

המינוח האם זה חוד או משיק אנכי אינו חשוב. הנקודה החשובה היא היכולת שלנו לחשב את הגבולות של הנגזרת ולהבין את תוצאות החישוב וכיצד התוצאות האלה באות לידי ביטוי בגרף של הפונקציה.

נקודת חיתוך עם הצירים:

- חיתוך עם ציר y : מתקיים $f(0)=6\sqrt{|0|}-0-8=-8$.
- חיתוך עם ציר x : נדרוש $f(x)=6\sqrt{|x|}-x-8=0$. נעביר אגפים ונעלה בריבוע.

$\left(6\sqrt{|x|}\right)^2=(x+8)^2$. נקבל $36|x|=x^2+16x+64$.

עבור $x>0$ מקבלים $36x=x^2+16x+64$. כלומר $x^2-20x+64=0$. נקבל $x=4,16$.

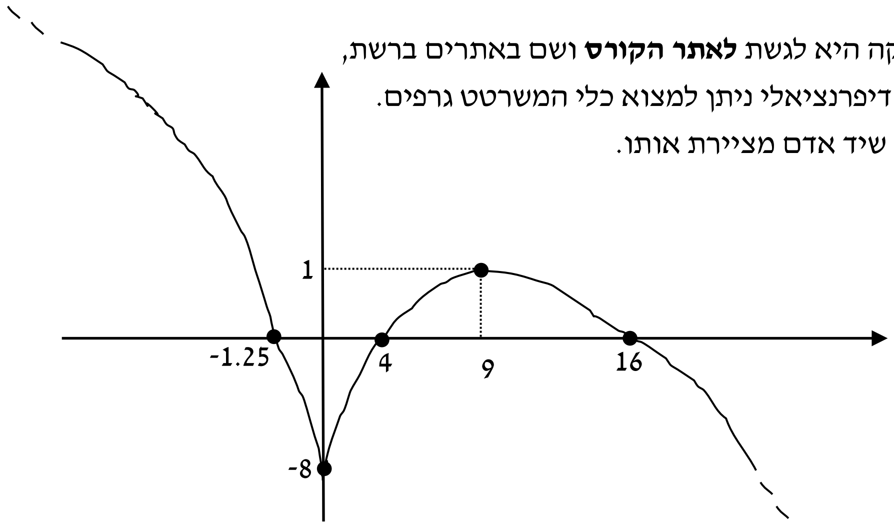
עבור $x<0$ מקבלים $-36x=x^2+16x+64$. כלומר $x^2+52x+64=0$. הפתרונות בקירוב הינם $x=-1.25,-50.75$. (הנחתי כי $\sqrt{2448}=49.5$) .

יש לבחון כל אחד מהפתרונות ישירות על ידי הצבה במשוואה המקורית. מדוע? כי הפעולה של העלאה בריבוע עלולה להוסיף פתרונות מיותרים.

ובכן - $f(4)=f(16)=f(-1.25)=0$ קל. יחד עם זאת $f(-50.75)>0$ ולכן התוצאה נפסלת.

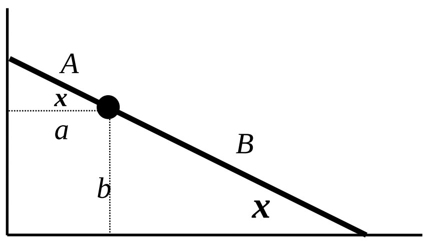
גרף

אופציה לבדיקה היא לגשת **לאתר הקורס** ושם באתרים ברשת, כלים לחשבון דיפרנציאלי ניתן למצוא כלי המשרטט גרפים. הנה הגרף כפי שיד אדם מציירת אותו.



שאלה 4–בעיית קיצון מוחלט (Calculus/James Stewart)

דרך נקודה המונחת בתוך זווית ישרה במרחקים a ו- b מהשוקיים מעבירים ישר.
הוכיחו שאורך הקטע בין השוקיים הוא מינימאלי כאשר הזווית x תקיים $\tan x=\sqrt[3]{b/a}$.



הקפידו על נימוקים מתמטיים מדויקים המבהירים מדוע המינימום שמצאתם הוא אכן מינימום מוחלט.

פתרון שאלה 4

נתבונן במשולש בו היתר הוא B . במשולש זה $\sin x=\dfrac{b}{B}\ \Rightarrow\ \boxed{B=\dfrac{b}{\sin x}}$

נתבונן במשולש בו היתר הוא A . במשולש זה $\cos x=\dfrac{a}{A}\ \Rightarrow\ \boxed{A=\dfrac{a}{\cos x}}$

אם כך אורך המוט הוא B+A ולאורך זה L יש למצוא מינימום מוחלט. $L = A + B = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$

המשתנה היא הזווית x ומתוך תיאור הבעייה והאיור מובן כי $0 < x < \frac{\pi}{2}$

נסכם: הבעייה היא מציאת מינימום מוחלט לפונקציה $L = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$ בקטע הפתוח $(0, \frac{\pi}{2})$.

הפונקציה L רציפה בקטע לפי אריתמטיקה והרי המכנים אינם מתאפסים, הם חיוביים בקטע הנדון.

הפונקציה L גזירה שוב לפי אריתמטיקה ולכן כל קיצון מקומי מחייב איפוס הנגזרת הראשונה.

$$L = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad L'(x) = \frac{a \sin x}{\cos^2 x} - \frac{b \cos x}{\sin^2 x} = \frac{a \sin^3 x - b \cos^3 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר המונה מתאפס כלומר כאשר x מקיימת $a \sin^3 x = b \cos^3 x$ ומכאן קל מאוד

להגיע לתוצאה המבוקשת $\tan x = \sqrt[3]{b/a}$.

בפרק 8 נלמד כיצד לחלץ את x ממשוואה זאת. בשאלה הנוכחית זה אינו נדרש.

כעת נותר להוכיח כי הנקודה הנ"ל x היא מינימום מוחלט.

שימו לב לטיעון הבא....נחשב את הגבולות הבאים של הפונקציה בקצה תחום ההגדרה :

$$\lim_{x \to 0^+} L = \lim_{x \to 0^+} \{\frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}\} = a + \infty = \infty$$ note that sinx>0 and goes to 0

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \{\frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}\} = \infty + b = \infty$$ note that cosx>0 and goes to 0

לפי טבלה 4.6.3 אנו מסיקים שלפונקציה יש מינימום מוחלט. מכיוון שהפונקציה גזירה אזי המינימום הזה מתקבל בנקודות בהן הנגזרת מתאפסת. מכיוון שיש רק נקודה אחת שבה הנגזרת היא אפס נסיק שהכל מתחבר לטיעון הנקודה שמצאנו היא למעשה נקודת המינימום המוחלט.

עוד קצת מחשבה –

אם היתה נקודה אחרת בקטע שהיא המינימום המוחלט (ולא הנקודה שלנו) אזי היא בפרט מינימום מקומי ובפרט הנגזרת בה מתאפסת. אבל אין כזאת נקודה כי **הנגזרת מתאפסת רק בנקודה שמצאנו**.

[מעניין כיצד הוכחנו מינימום ואפילו מוחלט ללא כל שימוש בנגזרת שנייה או בתחומי עלייה וירידה]

סיימנו.

שאלה 5 - משפט רול

א. הוכיחו לפולינום $p(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2$ ולישר $l(x) = ax + b$ יכולות להיות **לכל היותר** שתי נקודות חיתוך.

ב. מצאו ישר כזה שמובטח שהפולינום וישר זה לא נחתכים. הסבירו את השיקולים שלכם.

פתרון שאלה 5 סעיף א

מחפשים חיתוך בין הפולינום והישר: $x^4 - 2x^3 + 6x^2 = ax + b$ כלומר $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - ax - b = 0$.

נגדיר פונקציית עזר $u(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - ax - b$. הפולינום הנ״ל u(x) רציף וגזיר כמה פעמים שנרצה. אם נניח בשלילה כי לפולינום הנ״ל יש שלושה שורשים (או יותר) אזי לפי רול לנגזרת הראשונה יש לפחות שני שורשים ולכן שוב לפי רול לנגזרת השנייה יהיה לפחות שורש אחד.

אבל, הנגזרת השנייה היא $u''(x) = 12(x^2 - x + 1)$ וביטוי זה אינו מתאפס. לכן סתירה להנחת השלילה שיש שלושה שורשים או יותר. הוכחנו כי יש לכל היותר שני שורשים.

פתרון שאלה 5 סעיף ב

לא נדרשת מתמטיקה גבוהה על מנת להדגים את המבוקש.

רשמו כך: $p(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 2x + 6) = x^2 \cdot ((x-1)^2 + 5)$.

מרישום זה בולט כי $p(x) \ge 0$ לכל איקס. נבחר a=0 ,b=-2 כלומר $l(x) = -2$. סיימנו.

שאלה 6 (כללי)

הפונקציה $f(x)$ רציפה וחיובית בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי יש קבוע חיובי H כך $f(x) > H$ לכל איקס בקטע $[a,b]$.

בעזרת איור מנומק הראו שאם דרישת הרציפות לא מתקיימת אזי מסקנת התרגיל לא נכונה.

פתרון שאלה 6

1) הפונקציה רציפה בקטע סגור ולכן **יש** לה ערך מינימאלי בקטע. **משפט 4.6.4 – משפט הערך הקיצון**.
2) יהיה $a \le x_{\min} \le b$ אותו איקס שמביא את הפונקציה למינימום המוחלט שלה.
3) כלומר $f(x_{\min})$ הוא הערך הכי קטן של הפונקציה בקטע הנתון.
4) כלומר $f(x_{\min}) \le f(x)$ לכל איקס בקטע הסגור.
5) נתון הפונקציה חיובית בקטע כלומר לכל x בקטע f(x)>0 . בפרט $a \le x_{\min} \le b$ ולכן $f(x_{\min}) > 0$.
6) נסמן את הערך המינימלי ב Yo כלומר $Y_0 = f(x_{\min}) > 0$.
7) כלומר $0 < Y_0 = f(x_{\min}) \le f(x)$.
8) עלינו להוכיח כי יש קבוע חיובי שהפונקציה גדולה ממש ממנו.
9) נגדיר $H = 0.5Y_0$. הקבוע H חיובי ומתקיים $0 < \underbrace{0.5Y_0}_{H} < Y_0 \le f(x)$.
10) הוכחנו קיומו של קבוע חיובי H שקטן ממש מכל ערכי הפונקציה בקטע שלנו.

סיימנו.

שאלה 7 (כללי)

1) הוכיחו בשתי דרכים שונות כי הנקודה $(0,0)$ לא נקודת קיצון מקומית של הפונקציה $q(x) = x^3 + 2x$.
2) הוכיחו בכל דרך שתרצו כי הנקודה $(0,0)$ נקודת קיצון מוחלטת של הפונקציה $q(|x|) = |x|^3 + 2|x|$.

פתרון שאלה 7 סעיף א , תת סעיף 1

דרך ראשונה **ללא שימוש בנגזרות**.

- נניח כי הנקודה x=0 היא **מינימום מקומי**. לפי הגדרה 4.3.2 יש קטע פתוח סביב x=0 למשל קטע מהצורה $\left(-c,c\right)$ כך ש $q(0) \le q(x)$ לכל איקס בקטע זה. נתון q(0)=0 .

  אזי יש קטע מהצורה (-c,c) ובו $0 \le q(x)$. כלומר יש קטע מהצורה (-c,c) ובו $0 \le x^3 + 2x$.

  כלומר בקטע (-c,c) מתקיים $0 \le x \cdot (x^2 + 2)$. **סתירה** למשל בנקודה x=-c/2 .

- נניח כי הנקודה x=0 היא **מקסימום מקומי**. לפי הגדרה 4.3.1 יש קטע פתוח סביב x=0 למשל קטע מהצורה $\left(-c,c\right)$ כך ש $q(0) \ge q(x)$ לכל איקס בקטע זה. נתון q(0)=0 .

  אזי יש קטע מהצורה (-c,c) ובו $0 \ge q(x)$. כלומר יש קטע מהצורה (-c,c) ובו $0 \ge x^3 + 2x$.

  כלומר בקטע (-c,c) מתקיים $0 \ge x \cdot (x^2 + 2)$. **סתירה** למשל בנקודה x=c/2 .

הנה הוכחנו ללא שימוש בנגזרות רק מתוך ההגדרה של קיצון מקומי שהנקודה x=0,q=0 אינה קיצון מקומי עבור הפונקציה שלנו.

דרך שנייה - וכיצד נוכיח טיעון זה בדרך נוספת – **הפעם עם נגזרות** ? מה דעתכם? רשמו כאן....

____

____

פתרון שאלה 7 סעיף ב, תת סעיף 2

שורה אחת: $q(|x|) = |x|^3 + 2|x| \ge q(0) = 0$. כלומר הנקודה q=0 , x=0 היא מינימום מוחלט.

סיימנו.

סוף פתרון מטלה 12