חדו"א א (20406) סמסטר 2024א

תאריך הבחינה: 17/3/2024 . מועד 86 . מועד 2א .

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים - חלק א וחלק ב.

עליכם לענות על: שאלות 1-4 בחלק א וכן לענות על 3 שאלות מבין 5-8 בחלק ב.

כל חומר עזר מותר בשימוש

פתרון הבחינה

כתב: חזי נוימן

חלק ראשון - שאלות סגורות 1-4 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{7}$ נקודות

סמנו מהי התשובה הנכונה בעמוד האחרון של המחברת במקום המיועד לכך .

לחילופין , ניתן לרשום את התשובות בעמוד הראשון של המחברת בצורה ברורה.

לא נדרש נימוק - רק סימון במחברת מהי התשובה הנכונה.

אם אינכם יודעים את התשובה כדאי לנחש. אנו סופרים רק תשובות נכונות ולא מורידים ניקוד על טעויות.

שאלה 1 – שאלה סגורה

נתונה פונקציה: $f(x)=\begin{cases}1/x & 0<x<1\\ -1 & x\geq 1\end{cases}$. **לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה.**

1) $f(f(0.5))=-1$	2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1$

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1 ב. 2 ג. 1,2 ד. הטענות לא נכונות

פתרון שאלה 1 - $\boxed{\text{א}}$

1) אמת.

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{0.5}=2 \Rightarrow f(f(\frac{1}{2}))=f(2)=-1$

2) שקר.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x})=\frac{1}{1}=1$

$\Rightarrow$ גבול לא קיים.

שאלה 2 – שאלה סגורה

מהו ערך הגבול: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin x}\right)$?

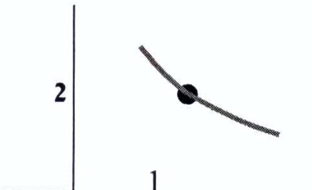
א. e ב. 0 ג. 4 ד. $2e$ ה. הגבול לא קיים.

פתרון שאלה 2 - $\boxed{\text{ג}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin x}\overset{=}{\uparrow}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-(-2)e^{-2x}}{\cos x}$

לופ $=\frac{2+2}{1}=4$

שאלה 3 – שאלה סגורה



לפניכם איור קטע מהגרף של $y = 4/\ln x$.

סימנו נקודה הנמצאת בגובה $y = 2$. מה **שיפוע הגרף** בנקודה הנ"ל ?

א. $-\frac{4}{3e}$ ב. -1 ג. $4e^2$ ד. $-\frac{1}{e^2}$ ה. $\frac{1}{2e}$

פתרון שאלה 3 – $\boxed{ד}$

אם $y=2$ אזי $2 = \frac{4}{\ln x}$ כלומר $\ln x = 2$ ולכן $x = e^2$.

$y' = \left(\frac{4}{\ln x}\right)' = \frac{-4\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \Rightarrow y'(e^2) = \frac{-4\cdot e^{-2}}{(2)^2} = -\frac{1}{e^2}$

שאלה 4 – שאלה סגורה

הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ הוא טור מתכנס . **לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה ?**

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot A_n$ הוא טור מחליף סימן מתכנס .
2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n + 1)$ הוא טור חיובי מתכנס .
3. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3n^2 A_n}{n^2}$ הוא טור חיובי מתכנס .

כל הטענות הנכונות הן:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 1,2 ה. 1,3 ו. 2,3

ז. כל הטענות נכונות

ח. כל הטענות לא נכונות

פתרון שאלה 4 – $\boxed{ה}$

✓ 1. נכון כי הטור אכן מחליף סימן. הוא מתכנס כי הוא מתכנס בהחלט, ואכן
$\sum|(-1)^n a_n| = \sum a_n < \infty$

x 2. לא נכון. מנתוני השאלה $A_n \longrightarrow 0$ לכן איבר כללי שלנו שואף ל 1.
לכן הטור מתבדר כי לא מקיים תנאי הכרחי להתכנסות.

✓ 3. נכון. טור סכום של טורים מתכנסים.
$\sum \frac{1+3n^2 a_n}{n^2} = \sum\left(\frac{1}{n^2} + 3a_n\right) < \infty$

חלק שני - שאלות פתוחות 5-8 . משקל כל שאלה בחלק זה הוא $\boxed{24}$ נקודות.

השיבו על $\boxed{3}$ שאלות בחלק זה.

שאלה 5

(14 נקי) א. הוכיחו כי לפולינום $P(x)=x^3+cx+1$ כאשר c קבוע אי שלילי ($c \ge 0$) יש שורש אחד ויחיד. נמקו היטב אך לא באריכות.

(10 נקי) ב. הוכיחו כי $\frac{1}{9} \le \int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\,dx \le \frac{1}{2}$.

פתרון שאלה 5, סעיף א

$C=0 \Leftarrow$ $P=x^3+1$. השורש היחיד הוא $x_0=-1$. סיימנו.

$C>0 \Leftarrow$ $P'=3x^2+c>0$, כי $c>0$ וגם $x^2 \ge 0$. לאור זאת הפולינום אינו מתאפס פעמיים, אחרת נקבל סתירה לרול.

מתקיים: $\underbrace{p(0)=1}_{\text{חיובי}}$; $\underbrace{P\left(-\frac{1}{c}\right)=-\frac{1}{c^3}<0}_{\text{שלילי.}}$

ולכן לפי ערה"ב יש שורש בקטע $\left(-\frac{1}{c},0\right)$.

הוכחנו קיים שורש. הוכחנו שאין שני שורשים. מש"ל.

פתרון שאלה 5, סעיף ב'

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3+1} \le \int_1^2 \frac{1}{x^3}dx = \int_1^2 x^{-3}dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}-1\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8} \le \frac{1}{2} \checkmark$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3+1} \underset{\substack{\text{כי}\\ x^3+1\le 9\\ \text{בקטע } [1,2]}}{\ge} \int_1^2 \frac{dx}{9} = \left[\frac{1}{9}x\right]_1^2 = \frac{2}{9}-\frac{1}{9} = \frac{1}{9} \checkmark$$

סיימנו.

4

שאלה 6

(10 נק') א. הוכיחו כי האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x}}{3+2x^2}dx$ הוא אינטגרל מתכנס.

[ניתן להיעזר בכל תוצאה שנלמדה בקורס או בחוברת המטלות]

(14 נק') ב. נגדיר $T(x)=x^2+\arctan(x)$.

מה הערך המקסימאלי והערך המינימאלי של הפונקציה בכל אחד מהקטעים הבאים: $[-3,-1]$ ו- $(-3,-1)$. נמקו את תשובותיכם.

פתרון שאלה 6, סעיף א

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{2x^2+3}dx \le \int_1^\infty \frac{\sqrt{x+x}}{2x^2+0}dx = \int_1^\infty \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}{2\cdot x^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^{1.5}}dx}$$

הרמוני p מתכנס כי $p>1$.

לפי מבחן ההשוואה הוכחנו כי האינטגרל שלנו מתכנס.

פתרון שאלה 6, סעיף ב'

הכנה: $T(x)=x^2+\arctan x \Rightarrow T'(x)=2x+\frac{1}{x^2+1}$

$T(x)$ רציפה ולכן בקטע סגור יהיו לה ערכי קיצון מוחלט.

בקטע $-3\le x\le -1$ מתקיים: $T'(x)=\underbrace{2x}_{\text{ביטוי זה בקטע: } [-6,-2]}+\underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\text{ביטוי זה בקטע } [\frac{1}{10},\frac{1}{2}]}<0$

כלומר $T(x)$ יורדת בקטע $[-3,-1]$.

לכן נצא הקיצון יהיה בקצוות כלומר

$$T(-1)\le T(x)\le T(-3)$$

$$1+\arctan(-1)\le T(x)\le 9+\arctan(-3)$$

$$min = 1-\frac{\pi}{4} \le T(x)\le 9-\arctan 3 = MAX$$

בקטע הפתוח אין קיצון מוחלט כי הקצוות לא בקטע ואין קיצון מקומי שכן $T'\ne 0$ כי $T'<0$.

שאלה 7

(16 נקי) א. נגדיר את הפונקציות:

$$g(x)=\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} \qquad u(x)=\begin{cases}-3 & x<0\\ 3 & x\ge 0\end{cases}.$$

1) חשבו כל אחד מבין הגבולות הבאים. אם הגבול לא קיים הוכיחו זאת.

$$\boxed{\lim_{x\to0}u(x)} \qquad \boxed{\lim_{x\to0}g(x)} \qquad \boxed{\lim_{x\to0}\left(g(x)\cdot u(x)\right)}$$

2) האם לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות? נמקו

(8 נקי) ב. הוכיחו: $\int_0^{2\pi}(\pi-x)\cdot(\cos x)^{100}\,dx=0$.

פתרון שאלה 7, סעיף א1

$\lim_{x\to0}u(x)$ לא קיים. $\Leftarrow$ $\underset{\boxed{3}}{\lim_{x\to0^+}u(x)} \neq \underset{\boxed{-3}}{\lim_{x\to0^-}u(x)}$ ✓

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{\sin x}\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to0}\frac{3\cos3x}{\cos x}=\frac{3\cdot1}{1}=3$$ ✓

$$\lim_{x\to0^+}g(x)\cdot u(x)=\lim_{x\to0^+}g(x)\cdot\lim_{x\to0^+}u(x)=3\cdot3=9$$ ✓

$\lim_{x\to0^-}$ ---- same ---- $=3\cdot(-3)=-9$ ✓

ולכן $\lim_{x\to0}g(x)\cdot u(x)$ לא קיים.

פתרון שאלה 7 סעיף א2

גם ל- $g(x)$ יש א. אנכיות אך רק בנקודות בהן מכנה מתאפס.

מכיוון כי אם המכנה לא מתאפס אזי $g(x)$ רציפה כמנת רציפות

וכך $\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$ וזה גבול סופי ולכן לא תהיה א. אנכית.

אם המכנה מתאפס עדיין זה לא אומר שיש א. אנכית. צריך

לוודא שהגבול הוא ∞ או $-\infty$.

המכנה של $g(x)$ מתאפס כאשר $\sin x=0$ כלומר $x=0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$

או באופן כללי $x = n\cdot\pi$ כאשר n שלם.

בנקודות הנ"ל יש <u>חשד</u> לא. אנכיות.

המונה הוא $\sin(3x)$ וביטוי זה גם הוא מתאפס בנקודות $x=n\pi$,

וזאת $\sin(3x) = \sin(3\cdot n\pi) = \sin(k\cdot\pi) = 0$. ($k=3n$ שלם)

לכן, בנקודות $x=n\pi$ הפונ' $g(x)$ הוא מהטיפוס $\frac{0}{0}$ ולכן...

נחקור גבול $x\to n\pi$ לפי לופיטל!

$$\lim_{x\to n\pi}\frac{\sin(3x)}{\sin x} \overset{\text{L}}{=} \lim_{x\to n\pi}\frac{3\cos(3x)}{\cos x} = 3\cdot\frac{\cos(3n\pi)}{\cos(n\pi)} \neq \pm\infty$$

כלל לא חשוב מה הערך של $\cos(n\pi)$ או $\cos(3n\pi)$.

בנקודה המכריע הוא <u>יש</u> $\cos(n\pi)\neq0$ וגם $\cos(3n\pi)\neq0$

ולכן <u>יש</u> גבול והוא מספר ממשי $\neq \pm\infty$.

לאור זאת... <u>אין</u> א. אנכיות ל- $g(x)$ בנקודות $x=n\pi$ כי

הגבול הוא סופי. הנימוק... ל- $g(x)$ אין כלל אנכיות.

דרך נוספת להשיב על סעיף זה:

$$g(x) = \frac{\sin(3x)}{\sin x} = \frac{\sin(x+2x)}{\sin x} = \frac{\sin x\cdot\cos(2x)+\cos x\cdot\sin(2x)}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x\cdot\cos(2x)+\cos x\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin x}$$

$$= \cos(2x) + 2\cdot\cos^2 x \longrightarrow$$ אין אנכיות! במקום...

פתרון שאלה 7, סעיף ב'

ננסה החלפת משתנים:

$$I=\int_0^{2\pi}(\pi-x)\cos^{100}x\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\pi-0}^{\pi-2\pi} t\cdot\cos^{100}(\pi-t)(-dt) = \int_{-\pi}^{\pi} t\cdot\cos^{100}(\pi-t)\,dt$$

$$\begin{cases} t=\pi-x \\ dt=-dx \end{cases}$$

מתקיים:

$$\cos(\pi-t)=\cos\pi\cdot\cos t+\sin\pi\cdot\sin t$$

$$=(-1)\cos t+(0)\cdot\sin t=-\cos t$$

ולכן, לאור ההצבות הנ״ל נוכל לרשום:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot\cos^{100}(\pi-t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot[-\cos t]^{100}\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot\cos^{100}t\,dt \underset{\uparrow}{=} 0$$

$y_1(t)=t$ אי זוגית

$y_2(t)=\cos^{100}t$ זוגית

מכפלתן אי זוגית!

כי אי זוגית על קטע סימטרי סביב הראשית,

אינטגרל זה הוא אפס.

סיימנו.

6.2 סמ/3

שאלה 8

בשאלה זאת שלושה סעיפים. השיבו רק על שני סעיפים.

א. (12 נקי') נגדיר $f(x)=\begin{cases} c & x<3 \\ 2 & x\geq 3\end{cases}$. מצאו את כל ערכי c עבורם הפונקציה $f(x)-\left(f(x)\right)^2$ רציפה בנקודה $x=3$.

ב. (12 נקי') חשבו $\int \frac{x+2}{(x-2)^3}dx$. פרטו את כל החישובים .

ג. (12 נקי') הוכיחו כי בקטע $(0,\pi)$ הפונקציה $e^{\sin(\cos x)}$ היא פונקציה יורדת .

פתרון שאלה 8, סעיף א

$$f(x)-f^2(x)=\begin{cases} c & x<3 \\ 2 & x\geq 3\end{cases} - \begin{cases} c^2 & x<3 \\ 4 & x\geq 3\end{cases}$$

$$=\begin{cases} c-c^2 & x<3 \\ -2 & x\geq 3\end{cases}$$

לרציפות בנקודה $x=3$ צריך אם $c-c^2=-2$ כלומר $c=2,-1$.

סיימנו.

פתרון שאלה 8, סעיף ב

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^3}dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{t+4}{t^3}dt = \int \left(t^{-2}+4t^{-3}\right)dt$$

$$\begin{cases} t=x-2 \\ dt=dx \end{cases}$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1}+4\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C = C-\frac{2}{t^2}-\frac{1}{t}$$

$$= C-\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-2} \quad ✓$$

פתרון שאלה 8, סעיף ג

$$y'=e^{\cdots}\cdot\left[\sin(\cos x)\right]'=\underbrace{e^{\cdots}}_{\text{חיובי}}\cdot\underbrace{\cos(\underbrace{\cos x}_{(-1,1)})}_{\text{חיובי}}\cdot\underbrace{(-\sin x)}_{\text{שלילי}}<0$$

מש"ל.

~END~