Total number of printed pages – 11

23R–25 (PHY3104C)

2025

PHYSICS

(MAJOR)

Paper : PHY3104C

(Mathematical and Computational Physics)

Full Marks : 45

Time : Two hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : 1×4=4

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) If $\vec{A}, \vec{B}$ and $\vec{C}$ are three vectors, what does the scalar triple product signify geometrically ?

যদি $\vec{A}, \vec{B}$ আৰু $\vec{C}$ তিনিটা ভেক্টৰ, তেন্তে স্কেলাৰ ত্ৰিপুৰণে জ্যামিতিকভাৱে কি নিৰ্দেশ কৰে?

Contd.

Scanned with CamScanner

(b) Find $\vec{\nabla}.\vec{r}$ if $\vec{r}$ is position vector.

যদি $\vec{r}$ অৱস্থান ভেক্টৰ, তেন্তে $\vec{\nabla}.\vec{r}$ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Evaluate the integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t}\delta(t-4)dt$.

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t}\delta(t-4)dt$ সমাকলৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Evaluate the following integral :

তলৰ অনুকলনটো নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$\int_{-1}^{1}(2x+1)\delta(x-2)dx.$$

Answer the following questions : 2×3=6

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find the value of constant 'a' such that the vectors $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ and $3\hat{i}+a\hat{j}+5\hat{k}$ are coplanar.

ধ্ৰুৱক 'a' ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদিহে ভেক্টৰ $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ আৰু $3\hat{i}+a\hat{j}+5\hat{k}$ সমতলীয় হয়।

(b) If $\phi(x,y,z)=x^2y+yz^2+zx^2$, find the maximum directional derivative at the point (1,1,1) and the direction in which it occurs.

যদি $\phi(x,y,z)=x^2y+yz^2+zx^2$ হয়, তেন্তে (1,1,1) বিন্দুত সৰ্বোচ্চ দিশীয় অৱকলজৰ মান আৰু দিশ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Use the Gauss Divergence Theorem to evaluate the flux of the vector field

$$\vec{F}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

through the surface of the cube defined by $0\le x,y,z\le 1$.

গাউছৰ অপসৰণৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $\vec{F}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ভেক্টৰ ক্ষেত্ৰ এখনৰ বাবে $0\le x,y,z\le 1$ বাহু দৈৰ্ঘ্যৰ ঘনক এটাৰ মাজেৰে পাৰ হৈ যোৱা অভিবাহ নিৰ্ণয় কৰা।

3. Give answers to the following questions : 5×3=15

(a) Let $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

Scanned with CamScanner

ধৰা হ'ল, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(i) Find the characteristic equation of A. 2

A ৰ বৈশিষ্ট্যপূৰ্ণ সমীকৰণটো লিখা।

(ii) Verify the Cayley–Hamilton theorem for A, i.e., show that A satisfies its own characteristic equation. 3

A ৰ বাবে কেলি-হেমিল্টনৰ উপপাদ্যটো সত্যাপন কৰা i.e. দেখুওঁৱা যে A য়ে নিজৰ বৈশিষ্ট্যপূৰ্ণ সমীকৰণটো মানি চলে।

b) Solve the following differential equation:

তলৰ অৱকলজ সমীকৰণটো সমাধান কৰা ঃ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

Or

Solve the following differential equation :

তলৰ অৱকলজ সমীকৰণটো সমাধান কৰা ঃ

$$\frac{dz}{dx} - xz = -x$$

(c) Evaluate the following line integral : 5

তলৰ ৰৈখিক অনুকলনটো নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$\oint_C (ydx + zdy + xdz)$$

where C is the triangular path joining the points (1,0,0), (0,1,0), and (0,0,1) in order.

য'ত C হ'ল ক্ৰমিকভাৱে (1,0,0), (0,1,0) আৰু (0,0,1) বিন্দুক সংযোগ কৰা ত্ৰিভুজীয় পথ।

Or

State the definition of the Gamma function $\Gamma(z)$ for a complex number z with $\mathrm{Re}(z) > 0$. Evaluate $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ using the known result for the Gamma function. Express the Beta function $B(m,n)$ in terms of Gamma functions for $m, n > 0$. Compute the integral using the Beta function –

$$\int_0^1 x^3(1-x)^2 dx$$

1+1+1+2=5

Scanned with CamScanner

এটা জটিল সংখ্যা z ৰ বাবে য'ত $\mathrm{Re}(z) > 0$, গামা ফলন $\Gamma(z)$ ৰ সংজ্ঞা দিয়া। গামা ফলনৰ ফলাফল ব্যৱহাৰ কৰি $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। গামা ফলনৰ সহায়ত বিটা ফলন $B(m,n)$ ৰ প্ৰকাশ ৰাশি লিখা য'ত $m, n > 0$। বিটা ফলন ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ অনুকলনটো নিৰ্ণয় কৰা –

$$\int_0^1 x^3(1-x)^2\,dx$$

4. Solve ***any one*** of the following questions:

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ *যিকোনো এটাৰ* সমাধান কৰা ঃ

(a) Derive the expression for the Laplacian operator ∇^2 in spherical polar coordinates (r, θ, ϕ). 10

গোলকীয় মেৰু স্থানাংক (r, θ, ϕ) ৰ বাবে লাপলাচিয়ান অপাৰেটৰ ∇^2 ৰ প্ৰকাশ ৰাশি নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Define diagonalization of a matrix. For the matrix

মেট্ৰিক্স কৰ্ণীয়কৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া। এটা মেট্ৰিক্স

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of A. Verify that A can be expressed in the form $A = PDP^{-1}$, where D is a diagonal matrix.

2+4+4=10

A ৰ আইগেন মান আৰু আইগেন ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা। দেখুওঁৱা যে A ক $A = PDP^{-1}$ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, য'ত D হ'ল এটা তিৰ্যক মেট্ৰিক্স।

Scanned with CamScanner

5. Solve ***any one*** of the following questions :

তলৰ *যিকোনো এটা* প্ৰশ্নৰ সমাধান কৰা ঃ

(a) Derive the recurrence relation for Legendre polynomials:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

লিজেণ্ডাৰ বহুপদৰ ক্ষেত্ৰত পুনৰাবৃত্তি সম্বন্ধটো নিৰ্ণয় কৰা –

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Prove the orthogonality relation of Legendre polynomials:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \text{ for } m \neq n.$$

Also show that $P_n(1) = 1$ and

$P_n(-1) = (-1)^n$. 4+3+3=10

লিজেণ্ডাৰ বহুপদৰ ক্ষেত্ৰত লাম্বিক সম্বন্ধটো নিৰ্ণয় কৰা–

$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$ য'ত $m \neq n$ । আৰু

দেখুওৱা যে $P_n(1) = 1$ আৰু $P_n(-1) = (-1)^n$ ।

(b) Consider the one-dimensional wave equation for a vibrating string of length L :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0,$$

subject to the boundary conditions $u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$, and the initial conditions

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Using the method of separation of variables, derive the spatial eigenvalue problem and show that the admissible eigenfunctions are

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

with eigenvalues $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

Express the general solution as a Fourier sine series :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(w_n t) + B_n \sin(w_n t)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

where $w_n = c\frac{n\pi}{L}$. Derive formulas for the coefficients A_n and B_n in terms of $f(x)$ and $g(x)$. 4+4+2=10

Scanned with CamScanner

'L' দৈৰ্ঘ্যৰ কম্পিত তাঁৰ এডালৰ একমাত্ৰিক তৰংগ সমীকৰণটো হ'ল ঃ

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0,$$

য'ত সীমা চৰ্ত $u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0,$ $t \geq 0$ আৰু প্ৰাৰম্ভিক চৰ্ত $u(x,0) = f(x),$ $u_t(x,0) = g(x), \ 0 \leq x \leq L$ চলকৰ পৃথিকীকৰণ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি আইগেন সমীকৰণ সমাধান কৰা আৰু দেখুওঁৱা যে আইগেন ফলনবোৰ হ'ল –

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

য'ত আইগেন মানবোৰ হ'ল – $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

ফ'ৰিয়াৰৰ চাইন শ্ৰেণীৰ সহায়ত সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধানটোৰ প্ৰকাশ ৰাশি নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(w_n t) + B_n \sin(w_n t)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

য'ত $w_n = c\frac{n\pi}{L}$, $f(x)$ আৰু $g(x)$ ৰ সহায়ত A_n আৰু B_n গুণাংক দুটাৰ প্ৰকাশ ৰাশি নিৰ্ণয় কৰা।

Scanned with CamScanner