שיר השקוביץ & אורי דביר

שיטות מחקר בקוגניציה (6177) - תרגיל 2

הוראות הגשה

יש להגיש את התרגיל באמצעות תיבת ההגשה הייעודית באתר הקורס במודל. על ההגשה להכיל:

1. מסמך PDF ובו תשובות מילוליות, בצירוף גרפים כנדרש. אין לכלול במסמך זה צילומי מסך של קוד או של פלט מ-RStudio, אלא תשובות בכתב.
2. קובץ R ובו הקוד הנדרש בתרגיל. על קובץ הקוד לרוץ ללא שגיאות ולהפיק את התוצרים (לרבות הגרפים) המוצגים במסמך ה-PDF. הקוד ייבדק ידנית; הקפידו על סדר השאלות, קריאות הקוד ותיעודו באמצעות הערות.

שאלות על התרגיל ניתן לפרסם (גם באנונימיות) בפורום שאלות על החומר. בהצלחה!

שאלה 1 (30 נק׳)

תזכורת: שונות המדגם נתונה ע״י $S_x^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$ והאומד המתוקן לשונות האוכלוסייה נתון ע״י $\hat{S}_x^2=\frac{n}{n-1}S_x^2$, כאשר n הינו גודל המדגם, x_i התצפית ה-i במדגם, ו-$\bar{x}$ ממוצע המדגם.

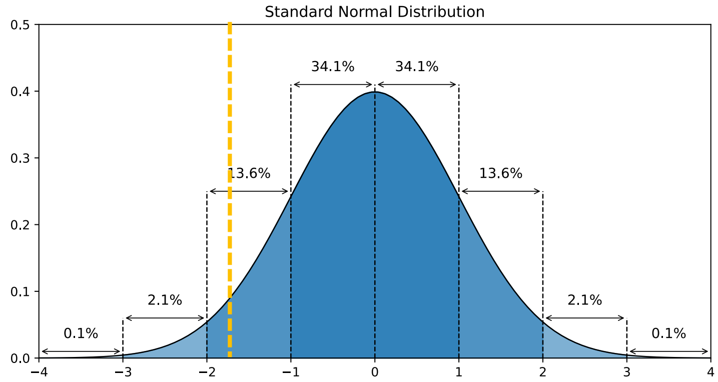
1. דגמו מדגם בגודל $n=5$ מהתפלגות נורמלית עם תוחלת 10 וסטיית תקן 2. הציגו היסטוגרמה של המדגם ודווחו את שונותו.
2. חזרו על סעיף 1 10,000 פעמים לכל $n\in\{5,10,50,100,250,500\}$. חשבו את ממוצע שונות המדגם (על פני 10,000 החזרות) עבור כל n.
3. השתמשו בפונקציה ()plot ליצירת גרף של תוחלת שונות המדגם (כפי ששוערכה בסעיף 2) כתלות ב-n. השתמשו בארגומנט ylim כדי לקבע את ציר ה-y לטווח הערכים 3 עד 4, והשתמשו בפונקציה ()abline כדי להוסיף לגרף קו אופקי המציין את שונות האוכלוסייה.
4. מה מייצגים מרחקי הנקודות בגרף מן הקו האופקי? התייחסו להתפלגות הדגימה של שונות המדגם.
5. חזרו על סעיפים 2-3, הפעם תוך שימוש באומד המתוקן לשונות האוכלוסייה (גם כאן, קבעו את טווח ציר ה-y והוסיפו ישר המציין את שונות האוכלוסייה).
6. כיצד משתנה שונות המדגם כתלות בגודל המדגם וביחס לשונות האוכלוסייה? התייחסו לתכונת ההטייה של אומד.

שאלה 2 (15 נק׳)

ההתפלגות האקספוננציאלית (התפלגות מרווחי הזמן בין אירועים המתרחשים בקצב קבוע) מוגדרת ע״י פרמטר יחיד - קצב (rate) - המסומן λ.

1. כתבו קוד שבונה התפלגות דגימה של ממוצע המדגם עבור מדגמים בגודל $n\in\{1,3,15,30\}$ מהתפלגות אקספוננציאלית עם פרמטר $\lambda=5$, על סמך 10,000 ממוצעים לכל n.
2. הציגו היסטוגרמה של התפלגות הדגימה של הממוצע עבור כל אחד מגודלי המדגם.
3. כיצד משתנה התפלגות הדגימה של הממוצע כתלות בגודל המדגם, ביחס להתפלגות האוכלוסייה ולהתפלגות הנורמלית?

שאלה 3 (15 נק׳)



הגרף לעיל מציג את פונקציית צפיפות ההסתברות של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית, המשמשת במסגרת מבחן Z לאוכלוסייה אחת. הערך המסומן בכתום מייצג את ערך הסטטיסטי Z שחושב עבור מדגם נתון, תחת השערת אפס נתונה (כאשר השונות באוכלוסייה ידועה).

1. בהנחה שההשערה האלטרנטיבית להשערת האפס הנתונה הוגדרה כחד-זנבית:
   1.1. כיצד תחושב ההסתברות לקבלת התוצאה במדגם או קיצונית ממנה?
   1.2. מתי תידחה השערת האפס?
2. בהנחה שההשערה האלטרנטיבית להשערת האפס הנתונה הוגדרה כדו-זנבית:
   2.1. כיצד תחושב ההסתברות לקבלת התוצאה במדגם או קיצונית ממנה?
   2.2. מתי תידחה השערת האפס?
3. ציינו יתרון וחיסרון של שימוש בהשערה אלטרנטיבית חד-זנבית על פני דו-זנבית.

שאלה 4 (40 נק׳)

קבוצת חוקרות מעוניינת בגובהם של כלבים כנעניים מבוייתים ביחס לכאלו שאינם מבוייתים. בידי החוקרות מדגם של 5 כלבים כנענים מבוייתים, וידוע להן כי תוחלת גובהם של כלבים כנעניים שאינם מבוייתים הינה 90.

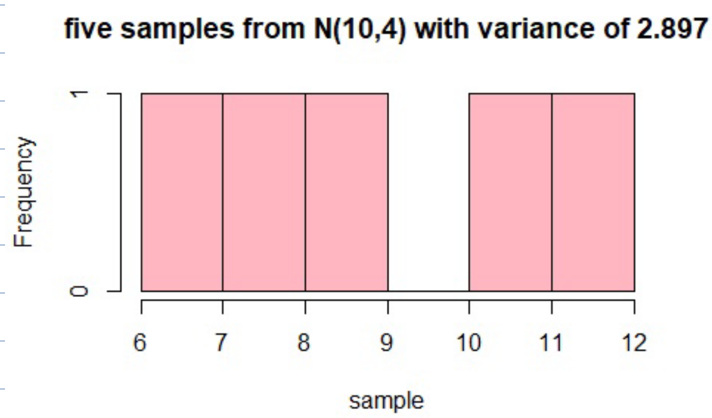
1. נסחו את השערת האפס ואת ההשערה האלטרנטיבית של מבחן סטטיסטי עבור השערת המחקר כי תוחלת גובהם של כלבים כנעניים מבוייתים שונה מתוחלת גובהם של כלבים כנעניים שאינם מבוייתים.
2. כדי לדמות את מדגם הכלבים המבוייתים שבידי החוקרות, דגמו 5 תצפיות מהתפלגות נורמלית עם תוחלת 90 וסטיית תקן 2. (זכרו: *פרמטרים אלו אינם ידועים לחוקרות!*).
3. בצעו מבחן סטטיסטי לבדיקת ההשערה מסעיף 1 בהסתמך על המדגם מסעיף 2, *בהנחה כי שונות האוכלוסייה אינה ידועה*. דווחו את ערך סטטיסטי המבחן ואת ערך ה-p ברמת מובהקות של 5%.
4. מהן הנחות המבחן הסטטיסטי שביצעתם? האם הן מתקיימות?
5. בהינתן המידע שבידיכם על התפלגות האוכלוסייה שנדגמה בסעיף 2, האם תוצאות המבחן מפתיעות? מדוע?
6. אילו הייתם חוזרים על סעיפים 2-3 מספר פעמים רב מאוד, באיזה שיעור מהחזרות הייתה השערת האפס נדחית? כיצד מכונה ערך זה, ומהי משמעותו?
7. חיזרו על סעיפים 2-3, אך הפעם דגמו את 5 התצפיות מהתפלגות נורמלית עם תוחלת 95 וסטיית תקן 2. האם תוצאות המבחן השתנו? כיצד, והאם השינוי תואם את ציפיותיכם?
8. אילו הייתם חוזרים על סעיף 7 מספר פעמים רב מאוד, באיזה שיעור מהחזרות הייתה השערת האפס נדחית? כיצד מכונה ערך זה, ומהי משמעותו?

שאלה 1 (30 נק׳)

תזכורת: שונות המדגם נתונה ע״י $S_x^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$ והאומד המתוקן לשונות האוכלוסייה נתון ע״י $\hat{S}_x^2 = \frac{n}{n-1}S_x^2$, כאשר n הינו גודל המדגם, x_i התצפית ה-i במדגם, ו-$\bar{x}$ ממוצע המדגם.

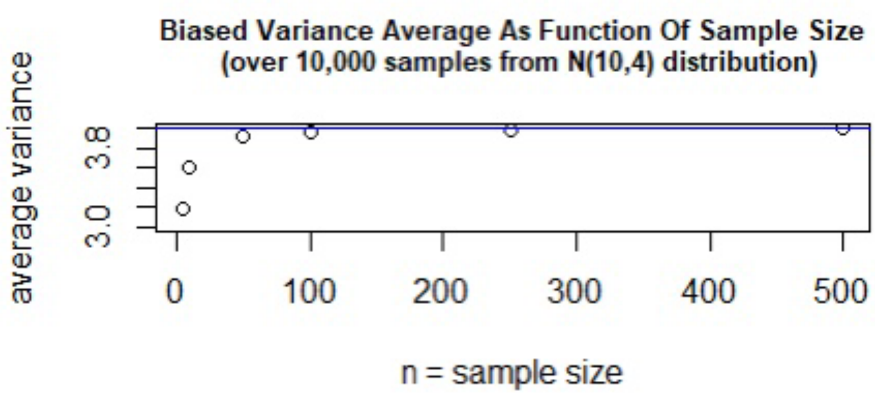
1. דגמו מדגם בגודל $n = 5$ מהתפלגות נורמלית עם תוחלת 10 וסטיית תקן 2. הציגו היסטוגרמה של המדגם ודווחו את שונותו.
2. חזרו על סעיף 1 10,000 פעמים לכל $n \in \{5, 10, 50, 100, 250, 500\}$. חשבו את ממוצע שונות המדגם (על פני 10,000 החזרות) עבור כל n.
3. השתמשו בפונקציה ()plot ליצירת גרף של תוחלת שונות המדגם (כפי ששוערכה בסעיף 2) כתלות ב-n. השתמשו בארגומנט ylim כדי לקבע את ציר ה-y לטווח הערכים 3 עד 4, והשתמשו בפונקציה ()abline כדי להוסיף לגרף קו אופקי המציין את שונות האוכלוסייה.
4. מה מייצגים מרחקי הנקודות בגרף מן הקו האופקי? התייחסו להתפלגות הדגימה של שונות המדגם.
5. חזרו על סעיפים 2-3, הפעם תוך שימוש באומד המתוקן לשונות האוכלוסייה (גם כאן, קבעו את טווח ציר ה-y והוסיפו ישר המציין את שונות האוכלוסייה).
6. כיצד משתנה שונות המדגם כתלות בגודל המדגם וביחס לשונות האוכלוסייה? התייחסו לתכונת ההטייה של אומד.

(1



כאשר עיגלנו את שונות המדגם לשלוש נקודות אחרי הנקודה.

(3

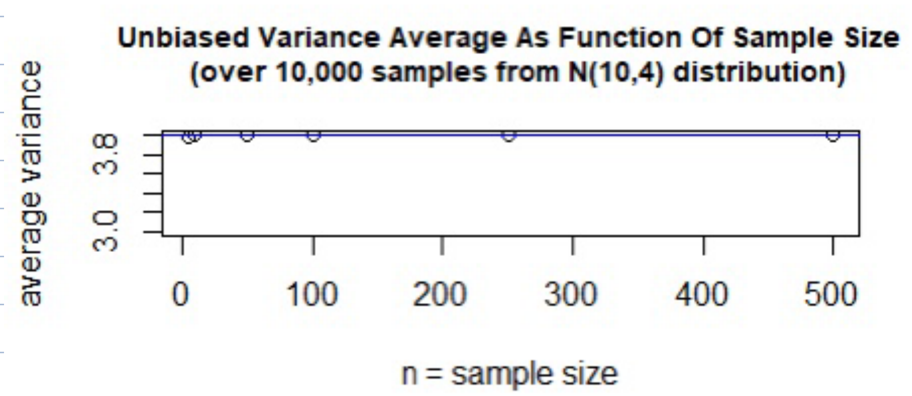


4) מה מייצגים מרחקי הנקודות בגרף מן הקו האופקי? התייחסו להתפלגות הדגימה של שונות המדגם.

הנקודות מייצגות את הממוצע של התפלגות הדגימה של סטטיסטי השונות (ה-biased) הנבנית על בסיס מדגמים בגדלים שונים. כלומר הנקודות מייצגות את שונות המדגם הממוצעת עבור מדגם מגודל N.
הקו הכחול מייצג את שונות האוכלוסייה מהן מגיעות הדגימות שעל בסיסן מחושב סטטיסטי השונות.
לכן מרחקי הנקודות בגרף מן הקו האופקי מייצגים את ההבדל הממוצע בין שונות מדגם מגודל מסוים לבין שונות האוכלוסייה מהן הדגימות מגיעות.

* כאשר לא לקחנו אינסוף מדגמים מכל גודל אבל 10,000 מדגמים נותנים קירוב טוב

5)



6) כיצד משתנה שונות המדגם כתלות בגודל המדגם וביחס לשונות האוכלוסייה? התייחסו לתכונת ההטייה של אומד.

ניתן לראות שעבור אומד השונות הבלתי מוטה, הממוצע לכל גודל מדגם מתקבל שערוך טוב לשונות האוכלוסייה.
לעומת זאת, עבור אומד השונות המוטה, לא מתקבל בממוצע שערוך טוב לשונות האוכלוסייה לכל גודל מדגם. ניתן לראות שכשגודל המדגם גדל, אז ההטייה קטנה ומקבלים שערוך טוב יותר בממוצע. זה נובע מכך ש-

$$\underset{\text{שונות המדגם}}{S_x^2} = \frac{n-1}{n}\underset{\text{האומד הבלתי מוטה לשונות האוכלוסייה}}{\hat{S}_x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{S}_x^2$$

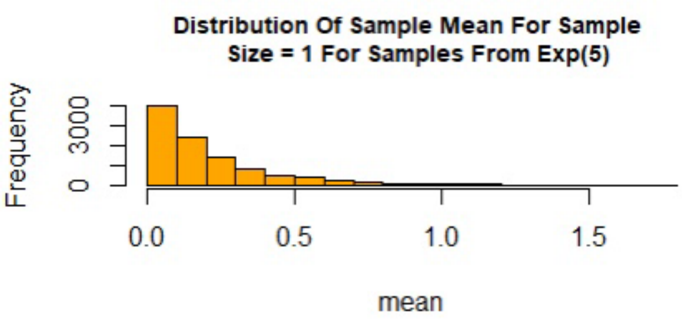
(כי $\frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$), כלומר כש-n גדל האומד המוטה שואף לאומד הבלתי מוטה שמבטיח ששערוך נכון בממוצע את שונות האוכלוסייה. לכן רואים בגרף הראשון שכאשר המדגם גדול יותר, מקבלים ששונות המדגם בממוצע שווה לשונות האוכלוסייה.

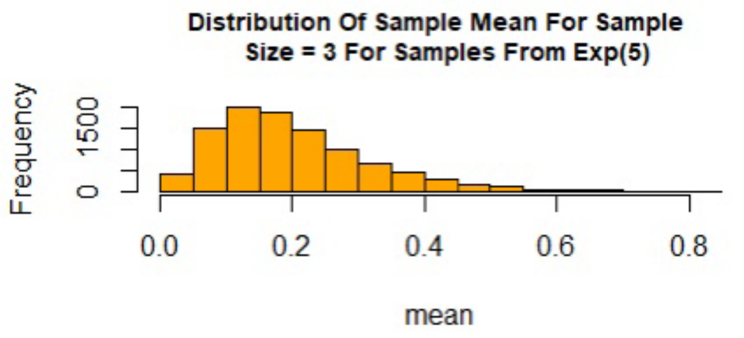
שאלה 2 (15 נק')

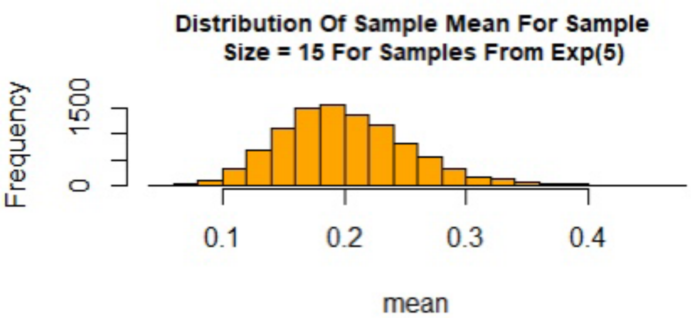
ההתפלגות האקספוננציאלית (התפלגות מרווחי הזמן בין אירועים המתרחשים בקצב קבוע) מוגדרת ע"י פרמטר יחיד

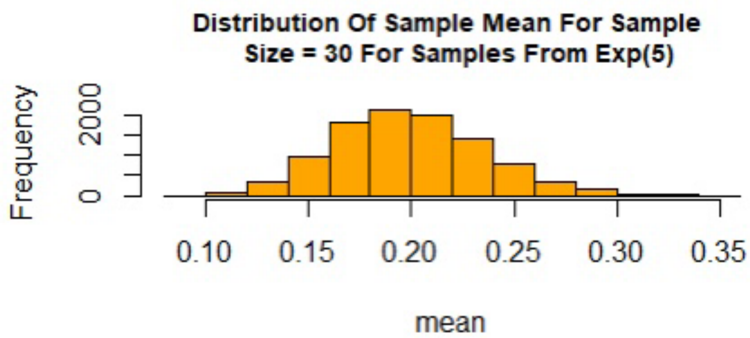
- קצב (rate) - המסומן λ.

1. כתבו קוד שבונה התפלגות דגימה של ממוצע המדגם עבור מדגמים בגודל $n \in \{1, 3, 15, 30\}$ מהתפלגות אקספוננציאלית עם פרמטר $\lambda = 5$, על סמך 10,000 ממוצעים לכל n.
2. הציגו היסטוגרמה של התפלגות הדגימה של הממוצע עבור כל אחד מגודלי המדגם.
3. כיצד משתנה התפלגות הדגימה של הממוצע כתלות בגודל המדגם, ביחס להתפלגות האוכלוסייה ולהתפלגות הנורמלית?





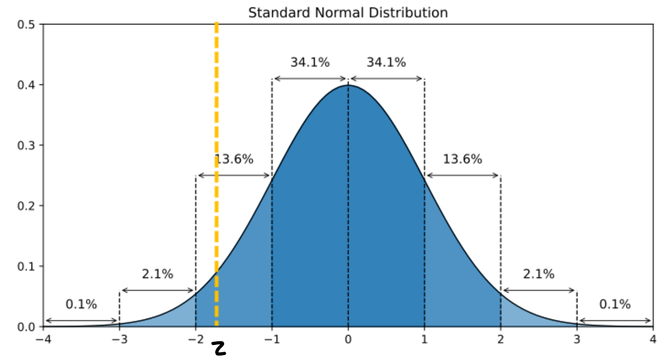




3)

ראינו בשיעור ש- $E[\bar{x}]=E[x]$, $Var[\bar{x}]=\frac{Var[x]}{n}$ (ממוצע אמפירי $\bar{x}$ של דגימות מקריות וב"ת מאותה התפלגות.
בשאלה זו $x\sim exp(5)$ ומתקיים $E[x]=\mu=0.2$, $var[x]=\sigma^2=0.04$ (מכיוון ש- $\lambda=5$).
אכן ניתן לראות מהגרפים שהממוצע בכל גודל מדגם הוא בערך 0.2, ושהשונות קטנה (הפיזור סביב התוחלת קטן) ככל שגודל המדגם גדל (מכיוון ש- $\frac{\sigma^2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$).
משפט הגבול המרכזי: אם אוכלוסייה מתפלגת עם ממוצע μ ושונות σ^2, אז עבור מדגם מספיק גדול, ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמלי $\bar{x}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$.
אכן ניתן לראות שעבור $n=1$ מתקבלת התפלגות דגימה שמשקפת את התפלגות המקור $exp(5)$, ושככל ש-n, גודל המדגם, גדל יותר, אז התפלגות הדגימה של הממוצע דומה יותר להתפלגות נורמלית עם תוחלת 0.2 ועם שונות הולכת וקטנה (רואים שהערכים הולכים ומתרכזים סביב 0.2 כש-n גדל), בהתאמה למשפט הגבול המרכזי.

שאלה 3 (15 נק')



הגרף לעיל מציג את פונקציית צפיפות ההסתברות של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית, המשמשת במסגרת מבחן Z לאוכלוסייה אחת. הערך המסומן בכתום מייצג את ערך הסטטיסטי Z שחושב עבור מדגם נתון, תחת השערת אפס נתונה (כאשר השונות באוכלוסייה ידועה).

1. בהנחה שההשערה האלטרנטיבית להשערת האפס הנתונה הוגדרה כחד-זנבית:
   1.1. כיצד תחושב ההסתברות לקבלת התוצאה במדגם או קיצונית ממנה?
   1.2. מתי תידחה השערת האפס?
2. בהנחה שההשערה האלטרנטיבית להשערת האפס הנתונה הוגדרה כדו-זנבית:
   2.1. כיצד תחושב ההסתברות לקבלת התוצאה במדגם או קיצונית ממנה?
   2.2. מתי תידחה השערת האפס?
3. ציינו יתרון וחיסרון של שימוש בהשערה אלטרנטיבית חד-זנבית על פני דו-זנבית.

1) - בכדי לחשב את ההסתברות לקבלת התוצאה z או קיצונית ממנה עבור השערה אלטרנטיבית חד זנבית, נחשב עבור $X\sim N(0,1)$ את $P(X\le z)=\int_{-\infty}^{z} f(x)$, עבור f, פונקציית הצפיפות המתאימה למ"מ נורמלי סטנדרטי ($f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$).
זה שקול לחישוב השטח הכחול שמשמאל ל-z בגרף.

- כאשר $P(X\le z)=p\text{-value}<\alpha=0.05$ נדחה את H_0.

* α היא רמת המובהקות וניתן לבחור גם רמת מובהקות שונה מ-0.05, אבל בקורס אנחנו עובדים עם 0.05.

2) - עבור השערה אלטרנטיבית דו זנבית נחשב - $P(X\le z)+P(X\ge -z)$, ומכיוון ש- $X\sim N(0,1)$, מסימטריות זה שקול לחישוב $2P(X\le z)$, כלומר נחשב את השטח הכחול שמשמאל ל-z כפול 2.

- נדחה את השערת האפס כאשר $2\cdot P(X\le z)=p\text{-value}<\alpha=0.05$

3)

יתרון: כפי שראינו בשיעור, שימוש בהשערה אלטרנטיבית חד זנבית מגדילה את שטח הדחייה ולכן מגדילה את העוצמה הסטטיסטית של המבחן $1-\beta$, כלומר מגדילה את הסיכוי לדחות את השערת האפס במקרה שהשערת האפס אכן איננה נכונה. עוצמת מבחן גבוהה חשובה כדי "לפספס" פחות אפקטים אמיתיים.

חיסרון: אם שערנו השערה חד צדדית וקיבלנו שערך הסטטיסטי z חריג יחסית, אך לא לכיוון של ההשערה האלטרנטיבית, לא נדחה את השערת האפס, אף על פי שסביר שהיא לא נכונה. כלומר השערה חד זנבית עלולה לגרום "לפספוס" של אפקטים אמיתיים, מהכיוון השני (כלומר לא מהכיוון של ההשערה האלטרנטיבית).

שאלה 4 (40 נק')

קבוצת חוקרות מעוניינת בגובהם של כלבים כנעניים מבוייתים ביחס לכאלו שאינם מבוייתים. בידי החוקרות מדגם של 5 כלבים כנענים מבוייתים, וידוע להן כי תוחלת גובהם של כלבים כנעניים שאינם מבוייתים הינה 90.

1. נסחו את השערת האפס ואת ההשערה האלטרנטיבית של מבחן סטטיסטי עבור השערת המחקר כי תוחלת גובהם של כלבים כנעניים מבוייתים שונה מתוחלת גובהם של כלבים כנעניים שאינם מבוייתים.
2. כדי לדמות את מדגם הכלבים המבוייתים שבידי החוקרות, דגמו 5 תצפיות מהתפלגות נורמלית עם תוחלת 90 וסטיית תקן 2. (זכרו: *פרמטרים אלו אינם ידועים לחוקרות!*).
3. בצעו מבחן סטטיסטי לבדיקת ההשערה מסעיף 1 בהסתמך על המדגם מסעיף 2, *בהנחה כי שונות האוכלוסייה אינה ידועה*. דווחו את ערך סטטיסטי המבחן ואת ערך ה-p ברמת מובהקות של 5%.
4. מהן הנחות המבחן הסטטיסטי שביצעתם? האם הן מתקיימות?
5. בהינתן המידע שבידיכם על התפלגות האוכלוסייה שנדגמה בסעיף 2, האם תוצאות המבחן מפתיעות? מדוע?
6. אילו הייתם חוזרים על סעיפים 2-3 מספר פעמים רב מאוד, באיזה שיעור מההחזרות הייתה השערת האפס נדחית? כיצד מכונה ערך זה, ומהי משמעותו?
7. חיזרו על סעיפים 2-3, אך הפעם דגמו את 5 התצפיות מהתפלגות נורמלית עם תוחלת 95 וסטיית תקן 2. האם תוצאות המבחן השתנו? כיצד, והאם השינוי תואם את ציפיותיכם?
8. אילו הייתם חוזרים על סעיף 7 מספר פעמים רב מאוד, באיזה שיעור מההחזרות הייתה השערת האפס נדחית? כיצד מכונה ערך זה, ומהי משמעותו?

1) נסמן μ = תוחלת גובהם של כלבים כנעניים מבוייתים. אז-
השערת האפס: $H_0: \mu = 90$
ההשערה האלטרנטיבית: $H_1: \mu \neq 90$

2) 88.1, 90.1, 91.6, 91.3, 90.4

3) מכיוון ששונות האוכלוסייה לא ידועה נשתמש במבחן t. נקבל ש:
ערך סטטיסטי המבחן - t-value = 0.49594 , p-value = 0.646 .

4) ההנחות הנדרשות במבחן t:
- דגימה מקרית ובת"ל של תצפיות במדגם
- ההתפלגות ממנה מגיעות התצפיות (הדגימות) היא נורמלית

נבחין שההנחות במבחן שביצענו אכן מתקיימות, מכיוון שהדגימות נדגמו מהתפלגות נורמלית באופן מקרי ובת"ל (ע"י שימוש בפונקציה rnorm).

5) לפי התוצאות אין לדחות את השערת האפס, כי p-value > 0.05. זה לא מפתיע מאחר שהדגימות אכן נלקחו מהתפלגות N(90,2), כלומר $\mu = 90$. כלומר H_0 נכונה לכן הגיוני שלפי המבחן אין לדחות אותה.

6) ב- 5% מהפעמים. הסיבה לכך היא שרמת המובהקות של המבחן α היא 5%. רמת המובהקות היא הסיכוי שביצוע מבחן סטטיסטי לבדיקת השערות יוביל לדחיית השערת האפס H_0 אף שהיא נכונה, כלומר $P_{H_0}(H_1) = \alpha$, הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון.

7) הדגימות- 94.8, 91.9, 96.6, 93, 94.2
ערך סטטיסטי המבחן- t-value = 5.0903 , p-value = 0.00703.
תוצאות המבחן השתנו- כעת יש לדחות את השערת האפס, כי $p\text{-value} < 0.05 = \alpha$. השינוי תואם את ציפיותינו כי הפעם הדגימות נדגמו מהתפלגות N(95,2) עבורה $\mu \neq 90$, כלומר השערת האפס אכן לא נכונה

8) בשיעור $1-\beta$ פעמים השערת האפס הייתה נדחית. $1-\beta$, היא העוצמה של המבחן, היא $P_{H_1}(H_1)$, הסיכוי לדחות את השערת האפס במבחן סטטיסטי כאשר השערת האפס באמת לא נכונה. לכן אילו היינו חוזרים על סעיף ד מספר פעמים רב מאוד, היינו מקבלים בשיעור של $1-\beta$ שהשערת האפס נדחית, מכיוון ש- H_0 לא נכונה במקרה זה ($\mu=95\neq90$).