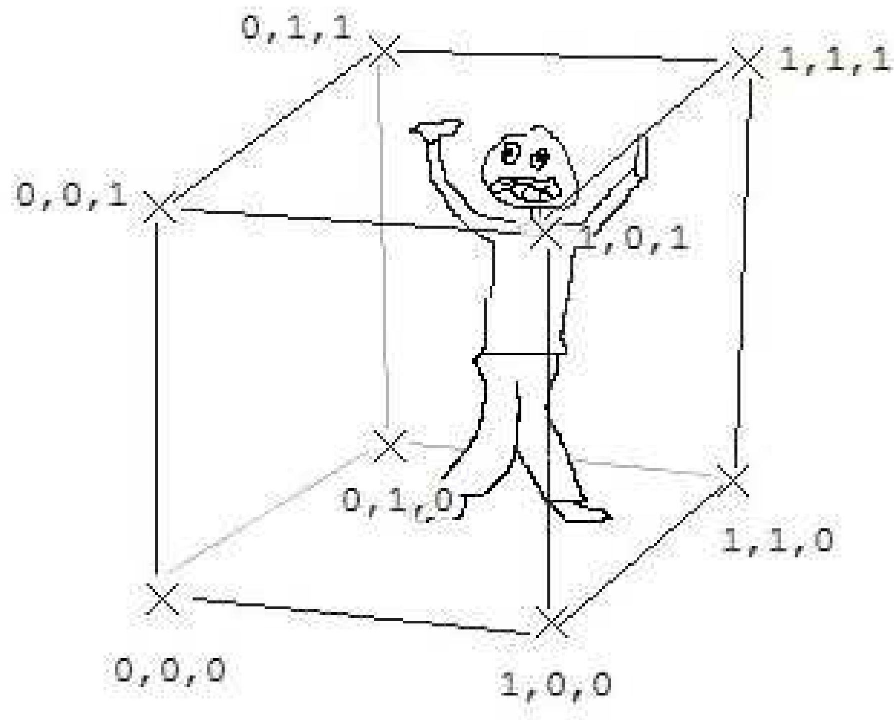
מתמטיקה דיסקרטית

סיכום: נריה אור
גירסא סופית (מתוקנת, 1.1), 2009
ע"פ הרצאות של פרופ' צליל סלע, מני אקא ושאול זמל.
אין המרצים קשורים לסיכום זה בשום אופן.
אין אחריות לתוכן הסיכום ולדיוקו - ייתכנו טעויות.



בתמונה: צילום אמת של קוביה n־מימדית, כאשר $n = 3$.

זהו לא סיכום מלא (כנראה), כי היה לי קשה לסכם את ההרצאות.

במקרים שההוכחות בכיתה לא היו לי ברורות, והן קיימות בספר,
הקורא הנאמן ייתבקש לקרוא אותן בספר **מתמטיקה בדידה** מאת נ. ליניאל ומ. פרנס.
כל הפניה לספר מתייחסת ל"מהדורה שניה מתוקנת" מ־2005.

בכל אופן **הספר נחוץ** ללימוד מלא של החומר, כי ההוכחות הגדולות לא נמצאות בסיכום זה,
מכיוון שלעיתים קרובות, בהרצאות עברנו עליהן בעל־פה, ולא באופן שהיה ניתן להעתיק למחברת, לדעתי.

תוכן עניינים

1 מבוא לתורת הקבוצות

בקורס זה עוסקים בתורת הקבוצות **הנאיבית** בלבד.

1.1 הגדרות, סימונים

1.1.1 הגדרה בסיסית

הגדרה 1.1 קבוצה היא אוסף של איברים, כאשר איבר יכול להיות כל דבר. כל איבר מופיע פעם אחת, והסדר לא משנה.

סימון:
דרך א': $\{1,2,3,5\}$ (=$\{3,2,5,1\}$ הסדר לא משנה).
דרך ב': {כל המספרים הזוגיים הגדולים מ־20 }
נסמן קבוצות באותיות לטיניות גדולות: $A,B,C,.....$ איברים יהיו אותיות קטנות.
שיוך של איבר לקבוצה: $a\in A$ האיבר a שייך לקבוצה A.

למשל:$1\in\{1,2,3\}$ אבל $5\notin\{1,2,3\}$.

1.1.2 מושגים

שויון קבוצות:

A ו־B הן שוות אם יש להן אותם איברים.

פורמלית, $A=B$ אם לכל $x\in A$ גם $x\in B$, ולכל $x\in B$ גם $x\in A$.

הכלה של קבוצות:

נאמר שA מוכלת ב־B, ונסמן $A\subseteq B$, אם לכל $x\in A$ מתקיים $x\in B$.

נאמר ש־A מוכלת ממש ב־B, ונסמן $A\subset B$, אם $A\subseteq B$ וגם $A\neq B$.

1.1.3 דוגמאות\סימונים של קבוצות

- הקבוצה הריקה: $\emptyset$.
  $\emptyset=\{\,\}$. תכונה מיוחדת: לכל x, $x\notin\emptyset$.
- $\mathbb{N}$ המספרים הטבעיים: $\{0,1,2,3,...\}$
- $\mathbb{Z}$ המספרים השלמים: $\{0,1,-1,2,-2,....\}$
- $\mathbb{Q}$ המספרים הרציונליים: $\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{R}$ המספרים הממשיים. (אינפי אינפי אינפי).

1.1.4 תכונות בסיסיות

משפט 1.2 :

1. לכל קבוצה A, $\emptyset\subseteq A$
2. לכל קבוצה A, $A\subseteq A$.
3. אם $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$ אז $A=B$.

4. אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.

הוכחה: מרתקת וקשה:
1) צ"ל שלכל $x \in \emptyset$, $x \in A$. כלומר צ"ל שאין x המקיים $x \in \emptyset$ אבל $x \notin A$. ואין x כזה כי אין x כך ש $x \in \emptyset$.
2) ברור.
3) ידוע שלכל $x \in A$ מתקיים $x \in B$ ולכל $x \in B$ מתקיים $x \in A$ כלומר $x \in B \Leftrightarrow x \in A$ ולכן $A = B$.
4) נתון: $x \in A \Rightarrow x \in B$ וגם $x \in B \Rightarrow x \in C$. יהי $x \in A$, אז מתקיים $x \in B$ ואז גם $x \in C$ ובסה"כ $A \subseteq C$. ■

1.1.5 פעולות על קבוצות

פעולות בסיסיות:
איחוד $A \cup B$
מוגדר ע"י $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

חיתוך $A \cap B$
מוגדר ע"י $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A$

הפרש $A \backslash B$
מוגדר ע"י $x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

המשלים A^c
A^c הוא ההפרש בין הקבוצה האוניברסלית ל־A.
(הקבוצה האוניברסלית היא "כל מה שלא בקבוצה A", לא ניתנה הגדרה רשמית).

קבוצת החזקה $P(A)$
תהי A קבוצה. קבוצת החזקה $P(A)$ מוגדרת להיות אוסף תתי הקבוצות של A.
כלומר, $X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$.
לדוגמא, אם $A = \{1,2,3\}$ אז
$P(A) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\emptyset\}$
(סתם ככה: נשים לב שיש פה 2^3 איברים, כלומר $2^{|A|}$ כי יש 2 אופציות לכל איבר: או שהוא בקבוצה או לא).
דוגמא נוספת: **מהי** $P(\emptyset)$**?**
$P(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

1.1.6 עוד הגדרות

הגדרה 1.3 זוג סדור
זוג סדור הוא אוסף של שני איברים, לא בהכרח שונים זה מזה, שהסדר ביניהם חשוב.

למשל, כדוגמא: $(1,2) \neq (2,1)$.

הגדרה 1.4 מכפלה קרטזית: $A \times B$
לקבוצות A, B המכפלה הקרטזית $A \times B$ היא קבוצת הזוגות הסדורים כך שהאיבר הראשון מ־A והאיבר השני מ־B.

לדוגמא, $A = \{1,2,3\}$ $B = \{7,5\}$ אז
$A \times B = \{(1,7),(1,5),(2,7),(2,5),(3,7),(3,5)\}$

דוגמא נוספת: $A = \{1,2,3\}$ $B = \emptyset$. מהי $A \times B$?
$A \times B = \emptyset$, כי אין זוגות סדורים שאיברם הראשון מ־A והשני מ־B.

הגדרה 1.5 קבוצה סופית \ אינסופית
תהי A קבוצה.
A תיקרא קבוצה סופית אם היא מכילה מספר סופי של איברים.
A תיקרא אינסופית אם איננה סופית.

הגדרה 1.6 העוצמה של קבוצה A היא:

$$|A| = \begin{cases} \text{Number of A's members if A is finite} \\ \infty \text{ if A is infinite} \end{cases}$$

הגדרה 1.7 קבוצה אינסופית בת מניה
קבוצה אינסופית A תיקרא בת מניה (countable) אם קיימת העתקה חח"ע ועל: $f : \mathbb{N} \to A$.

דוגמאות (תרגיל, לא הוכחנו בהרצאה):

- קבוצת השלמים $\mathbb{Z}$ היא בת מניה.
- הוכיחו כי: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}\ ,\ q \neq 0\}$ היא בת מניה.

1.2 יחסים

1.2.1 הגדרה

הגדרה 1.8 יחסים בינאריים
יהיו A, B קבוצות **ויהי** $a \in A, b \in B$.
יחס בינארי בין איברי A לאיברי B הוא תת קבוצה של $A \times B$.
ליחס $R \subseteq A \times B$ **נגיד** aRb **אם** $(a, b) \in R$
ונגיד "$a(notR)b$" (אמור להיות שם R עם קו עליו אבל אין לי אות כזאת) **אם** $(a, b) \notin R$.

דוגמאות:

- היחס המלא $R = A \times B$
- היחס הריק $R = \emptyset$
- תהי $A = B = \{1, 2, 3\}$. $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.
  זהו למעשה היחס "קטן מ־" ונסמן "$R =$ " $<$ ". אז מתקיים:
  $1 < 2,\ 1 < 3,\ 2 < 3$ אבל
  $2 \not< 1,\ 3 \not< 2,\ 1 \not< 1,\ 2 \not< 2,\ 3 \not< 3,\ 3 \not< 1$.
- $A = B = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2)\}$ יחס השויון.

1.2.2 תכונות של יחסים (סימטריה, רפלקסיביות, וכו')

הגדרה 1.9 תהי A קבוצה לא ריקה, ו־ $R \subseteq A \times A$. אז אנו אומרים ש־

- R הוא יחס **רפלקסיבי** אם xRx לכל $x \in A$.
- R הוא יחס **אנטי־רפלקסיבי** אם $x(notR)x$ לכל $x \in A$. (הכוונה ל־R עם קו חוצה עליו).
- R הוא יחס **סימטרי** אם לכל $x, y \in A$ מתקיים $xRy \Leftrightarrow yRx$.
- R הוא יחס **אנטי־סימטרי** אם לכל $x, y \in A$ מתקיים: $((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \ \Rightarrow\ x = y$
- R הוא יחס **טרנזיטיבי** אם לכל $x, y, z \in A$: אם xRy ו־yRz, אז xRz.

1.2.3 סוגי יחסים (שקילות, סדר)

- יחס נקרא **יחס שקילות** אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.
- יחס נקרא **יחס סדר חלקי** אם הוא רפלקסיבי, אנטי־סימטרי, וטרנזיטיבי.
- יחס סדר חלקי ייקרא **יחס סדר קוי (ליניארי\מלא)** אם לכל x,y מתקיים xRy או yRx.
- יחס סדר קוי ייקרא **סדר טוב** אם לכל תת־קבוצה $B \subseteq A$ קיים איבר מינימלי.
כלומר $\exists b_m \in B\ :\ \forall b \in B\ :\ (b_m, b) \in R \qquad \forall \emptyset \neq B \subseteq A$.

דוגמאות ליחסי שקילות:

- יחס השויון
- $A = \mathbb{N}$. xRy אם $x-y$ מתחלק ב־100. זה יוצר חלוקה של $\mathbb{N}$ל־100 קבוצות $A_{00}, ..., A_{99}$ לפי שתי הספרות האחרונות של המספר, ולכל x,y, xRy אס"ם הם שייכים לאותה קבוצה.

1.2.4 חלוקות ומחלקות של יחסי שקילות

ניזכר: יחס ייקרא יחס שקילות אם הוא **רפלקסיבי**, **סימטרי וטרנזיטיבי**.

הגדרה 1.10 חלוקה
תהי A קבוצה. חלוקה של A היא קבוצה של קבוצות $\{B_1, B_2, ...\}$ המקיימת:

- $B_1 \cup B_2 \cup ... = A$
- לכל B_i ו־B_j בחלוקה, $B_i \cap B_j = \emptyset$ (כלומר הם זרים).

הגדרה שקולה:
תהי A קבוצה. חלוקה של A היא הצגה של A כאיחוד זר של קבוצות:

$$A = \dot{\bigcup_{\alpha \in I}} V_\alpha \qquad \alpha \neq \beta \Rightarrow V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset \qquad (\forall \alpha \in I\ :\ V_\alpha \neq \emptyset)$$

כאשר I קבוצת הקבוצות הנ"ל.

משפט 1.11 תהי A קבוצה לא ריקה, ויהי R יחס שקילות על הקבוצה A.
ליחס השקילות R ניתן להתאים חלוקה יחידה:

$$A = \dot{\bigcup_{\alpha \in I}} V_\alpha$$

כך שלכל $x,y \in A$ מתקיים

$$\exists \alpha\ (x,y \in V_\alpha)\ \Leftrightarrow\ (x,y) \in R$$

כל קבוצה V_α נקראת **מחלקת שקילות** של היחס R.

הוכחה: יהי נתון יחס השקילות R. נתאים ל־R חלוקה.
לכל $x \in A$ נתאים את הקבוצה:

$$V_x = \{y \in A \,|\, (x,y) \in R\}$$

למה:
1) לכל $x \in A$, $V_x \neq \emptyset$.
2) תהינה $x_1, x_2 \in A$ **אזי** $V_{x_1} = V_{x_2}$ **או** $V_{x_1} \cap V_{x_2} = \emptyset$.
הוכחת הלמה:
1) $x \in V_x$ ולכן מכיוון שR יחס שקילות אז הוא רפלקסיבי ולכן xRx ולכן $V_x \neq \emptyset$.
2) נניח כי $V_{x_1} \cap V_{x_2} \neq \emptyset$. יהי $z \in V_{x_1} \cap V_{x_2}$.
ויהי $y \in V_{x_1}$. נרצה להראות ש־$y \in V_{x_2}$. מתקיים:

$$(x_1, z) \in R \wedge (x_1, y) \in R$$

ומהטרנזיטיביות נקבל ש־ $(y,z) \in R$. כמו כן מהנתון: $(x_2, z) \in R$. נפעיל טרנזיטיביות:

$$(x_2, y) \in R \;\Rightarrow\; y \in V_{x_2} \;\Rightarrow\; V_{x_1} \subseteq V_{x_2}$$

ומטיעון סימטרי, נקבל גם ש־ $V_{x_2} \subseteq V_{x_1}$ ולכן בסה"כ $V_{x_1} = V_{x_2}$.
ולכן הראינו כי הקבוצות $\{V_x\}_{x \in A}$ הן או זרות או זהות.
אז,

$$A = \bigcup_{x \in A} V_x = \dot{\bigcup_{\alpha \in I}} V_\alpha$$

■

משפט 1.12 לכל חלוקה זרה $A = \cup_{i=1}^{n} V_i$ ניתן להתאים יחס שקילות. (הפוך מהמשפט הקודם)

הוכחה: תהי חלוקה זרה:

$$A = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} V_i$$

ונגדיר יחס שקילות: $R \subseteq A \times A$ כך:
$(x,y) \in R \Leftrightarrow \exists i : \, x, y \in V_i$ (עבור $1 \leq i \leq n$).
נראה כי R יחס שקילות.
1) R **רפלקסיבי:**
$\exists i \, x \in V_i \;\Rightarrow (x,x) \in R$
2) R **סימטרי:**
יהיו $x, y \in A$ **כך ש־** $(x,y) \in R$. **אז:**

$$(x,y)\in R \Rightarrow \exists i\ x,y\in V_i \Rightarrow y,x\in V_i \Rightarrow (y,x)\in R$$

3) R **טרנזיטיבי:**
אם $(x,y)\in R$ **וגם** $(y,z)\in R$**, אז:** $\exists i\ x,y\in V_i$ **וגם** $\exists j\ y,z\in V_j$.
הקבוצות $\{V_i\}_{i=1}^{n}$ **הן זרות, ולכן** $x,y\in V_i \wedge y,z\in V_j$ **גורר ש־**
$y\in V_i\cap V_j \Rightarrow V_i=V_j \Rightarrow x,y,z\in V_i \Rightarrow (x,z)\in R$. ■

1.2.5 דוגמא ליחס שקילות וחלוקה

נגדיר יחס על $\mathbb{Z}$ באופן הבא: $R\subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, מקיים:

$$x,y\in\mathbb{Z},\qquad (x,y)\in R \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{Z}\,:\,x-y=7t$$

כלומר 7 מחלק את $x-y$.
נראה שזהו יחס שקילות:
רפלקסיביות:
$x-x=0 \qquad \forall x\in\mathbb{Z}$**, ומתקיים ש־** $7|0$ **ולכן** $(x,x)\in R$.
סימטריות:
$(x,y)\in R \Rightarrow 7|(x-y) \Leftrightarrow x-y=7t \Rightarrow y-x=7(-t) \Rightarrow (y,x)\in R$
טרנזיטיביות:
אם $(x,y)\in R \wedge (y,z)\in R$ **אז** $7|(x-y)\wedge 7|(y-z)$ **ולכן,**

$$\exists t_1,t_2 \qquad x-y=7t_1 \wedge y-z=7t_1$$

$$(x-y+y-z)=7(t_1+t_2)$$

$$x-z=7(t_1+t_2)\Rightarrow (x,z)\in R$$

בזאת הוכחנו ש־R הוא יחס שקילות.
נמצא את החלוקה המתאימה ליחס R**:** נגדיר

$$\forall x\in\mathbb{Z} \qquad V_x=\{y\in\mathbb{Z}\,|\,(x,y)\in R\}$$

אזי:

$$x=0 \qquad V_0=\{y\in\mathbb{Z}\,|\,7|(0-y)\}$$

כלומר, {כפולות שלמות של 7} $= V_0$. באופן דומה,

$$x=1 \qquad V_1=\{y\in\mathbb{Z}\,|\,7|(1-y)\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{Z}\,:\,7t=1-y\ \Leftrightarrow y=1+7(-t)$$

ולכן, {השלמים המשאירים שארית 1 כאשר מחלקים אותם ב 7 } $= V_1$
אפשר להמשיך ככה עד V_6, ואח"כ זה חוזר על עצמו. כלומר יש 7 מחלקות שקילות.

1.2.6 עוד על יחסי סדר

בסעיף זה נביא כמה דוגמאות לגבי יחסי סדר שונים.

ניזכר שיחס $R\subseteq A\times A$ ייקרא יחס **סדר חלקי** אם הוא רפלקסיבי, אנטי־סימטרי וטרנזיטיבי.
דוגמא ליחס סדר חלקי:
יחס החלוקה על השלמים:
$x,y\in\mathbb{N} \qquad (x,y)\in R\Leftrightarrow x|y$

ניזכר שיחס סדר חלקי ייקרא **יחס סדר קוי****ליניארי,**
אם לכל $x,y\in A$, $(x,y)\in R\vee(y,x)\in R$.
כמו כן יחס סדר קוי ייקרא **סדר טוב,**
אם לכל תת קבוצה $B\subseteq A$ קיים "איבר מינימלי":
$\forall\emptyset\neq B\subseteq A \qquad \exists b_m\in B\,:\,\forall b\in B\,:\,(b_m,b)\in R$

דוגמא ליחס סדר קוי: $(\mathbb{N},\leq)$
נגדיר יחס על $\mathbb{N}$: $x,y\in\mathbb{N} \qquad (x,y)\in R\Leftrightarrow x\leq y$
זהו גם **סדר טוב**.

יחד עם זאת, היחס $(\mathbb{Z},\leq)$ הוא יחס סדר קוי, אבל הוא **לא סדר טוב**.

עוד דוגמא, היא אם $A=\{\mathbb{Q}\cap[0,1]\}$, $B=A\cap]0,1[$,
ומסתכלים על היחס $\leq$. מכיוון של־B אין איבר מינימלי, זהו לא סדר טוב.

הגדרה 1.13 שרשרת
תהי A קבוצה, ויהי $R\subseteq A\times A$ יחס סדר חלקי על A.
שרשרת C ב־A היא תת־קבוצה של A המקיימת:

$$\forall x,y\in C \qquad (x,y)\in R\,\vee\,(y,x)\in R$$

הגדרה 1.14 אנטי־שרשרת
תהי A קבוצה, ויהי $R\subseteq A\times A$ יחס סדר חלקי על A.
אנטי־שרשרת AC על A היא תת־קבוצה של A המקיימת:

$$\forall x, y \in AC \qquad (x,y) \in R \Rightarrow x = y$$

...בנוסף כל מי שיישמע אותך אומר "אנטי־שרשרת" יחשוב שאתה גאון עם מינימום תואר שביעי במתמטיקה.

1.3 פונקציות

1.3.1 הגדרות

הגדרה 1.15 פונקציה\העתקה
תהיינה A, B קבוצות. יחס $F \subseteq A \times B$ ייקרא פונקציה או העתקה,
אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ יחיד כך ש־ $(a,b) \in F$.
פונקציה מתאימה לכל איבר $a \in A$ איבר יחיד $b \in B$.

$$\forall a \in A \Rightarrow \exists!(a,b) \in F$$

($\exists!$ זה "קיים יחיד").

מסמנים:
$F : A \to B$ וגם:
$F(a) = b$

הגדרה 1.16 פונקציית על
פינקציה $f : A \to B$ תיקרא **על** אם
לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש $f(a) = b$.

הגדרה 1.17 חד־חד־ערכיות
פונקציה $f : A \to B$ תיקרא **חד־חד־ערכית** אם:

$$\forall a_1, a_2 \in A \qquad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

הגדרה 1.18 הרכבה של פונקציות
תהיינה A, B, C קבוצות. ותהיינה $f_2 : B \to C \qquad f_1 : A \to B,$.
פונקציית ההרכבה $f_2 \circ f_1$ היא הפונקציה:

$$f_2 \circ f_1 : A \to C$$

$$f_2 \circ f_1(a) = f_2(f_1(a))$$

הגדרה 1.19 פונקציה הופכית
תהיינה A, B קבוצות, ותהי $f : A \to B$ פונקציה.
פונקציה $g : B \to A$ תיקרא הפונקציה ההופכית ל־f אם:

$$g \circ f : A \to A$$

$$g \circ f = 1_A$$

$$f \circ g : B \to B$$

$$f \circ g = 1_B$$

כאשר $1_A, 1_B$ העתקות הזהות.

1.3.2 טענות לגבי פונקציות הופכיות

טענה 1.20 אם ל־f יש פונקציה הופכית, אזי פונקציה זו ***יחידה***.

הוכחה: תהי $f : A \to B$ ונניח כי לf ישנה פונק' הופכית $g : B \to A$.
תהי $h : B \to A$ פונקציה הופכית של f. אז:

$$\forall b \in B \qquad h(b) = h \circ 1_B(b) = h \circ (f \circ g)(b) = (h \circ f) \circ g(b) = 1_A \circ g(b) = g(b)$$

■

משפט 1.21 לפונקציה $f : A \to B$ קיימת פונק' הופכית אם"ם f היא חח"ע ועל.

הוכחה: (הוכחנו רק כיוון אחד בהרצאה)
נניח כי ל־$f : A \to B$ קיימת פונקציה הופכית ונסמנה $g : B \to A$.
אז, $1_B = f \circ g : B \to B$.
1_B היא על. ולכן $f \circ g$ היא על, אז f **חייבת להיות על**.
כעת, נסתכל על $1_A = g \circ f : A \to A$.
1_A היא פונקציה חח"ע.
כעת נניח כי קיימים $a_1 \neq a_2$ ב־A כך ש־ $f(a_1) \neq f(a_2)$.
אז, $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$ ולכן $g \circ f$ אינה חח"ע, סתירה.
ולכן f **חח"ע**.

■

2 אינדוקציה ורקורסיה ־ בסיס

2.1 אינדוקציה

אקסיומת האינדוקציה:
לכל תת־קבוצה A לא ריקה של הטבעיים $\mathbb{N}$ קיים איבר מינימלי.

טענה 2.1 עיקרון האינדוקציה
נניח כי טענה נכונה עבור $n_0 \in \mathbb{N}$,
ונניח כי לכל $n > n_0$ אם הטענה נכונה ל־$n-1$ אזי היא נכונה ל־n.
אזי הטענה נכונה לכל $b \geq n_0$.

הוכחה: הוכחת עקרון האינדוקציה
תהי $B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq n_0$,הטענה איננה נכונה ל־$n\}$.
אם הטענה איננה נכונה לכל $n \geq n_0$ אזי $B \neq \emptyset$.
לפי אקסיומת האינדוקציה, ישנו איבר מינימלי $b_0 \in B$.
מכאן, הטענה איננה נכונה ל־b_0 אך היא נכונה לכל $n_0 \leq n < b_0$.
(נזכור ש־ $n_0 \leq b_0$).
מקרה א:
$b_0 = n_0$. אבל הטענה נכונה ל־n_0, וזאת **סתירה**. (כלומר $n_0 \notin B$).
מקרה ב:
$b_0 > n_0$.
b_0 הוא הטבעי המינימלי (הגדול שווה מn_0) שעבורו הטענה איננה נכונה.
אז, $n_0 \leq b_0 - 1$.
ולכן הטענה נכונה עבור $b_0 - 1$.
לפי הנחת האינדוקציה, ומכיוון ש $n_0 \leq b_0 - 1$,
אז היות שהטענה נכונה עבור $b_0 - 1$, היא נכונה עבור b_0, **סתירה**. ■

2.1.1 דוגמא

טענה 2.2 קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.
זה שקול לכך שלכל $n \in \mathbb{N}$ יש לפחות n מספרים ראשוניים.

הוכחה: באינדוקציה:
עבור $n = 1$: נסמן $p_1 = 2$ (2 הוא ראשוני כמובן).
כעת נניח כי הטענה נכונה ל־$n-1$, כלומר קיימים ראשוניים שונים $p_1, ..., p_{n-1}$.
נראה כי קיים ראשוני נוסף.

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{n-1} + 1$$

למה: לכל $1 \leq i \leq n-1$, מתקיים $p_i \nmid m$.
הוכחת הלמה: לכל $1 \leq i \leq n-1$,

$$m = p_i(p_1 \cdot ... \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot ... \cdot p_{n-1}) + 1$$

אם נחלק את m ל־p_i נקבל שארית 1, כלומר $p_i \nmid m$.
ולכן, אם נפרק את m לגורמים ראשוניים,

כל הגורמים הראשוניים שיופיעו בפירוק של m אינם $p_1, ..., p_{n-1}$.

יהי p מספר ראשוני המופיע בפירוק של m לראשוניים.
אזי: $p_1, ..., p_{n-1}, p$ הם ראשוניים שונים. ולכן הטענה נכונה לכל n. ■

2.2 רקורסיה

2.2.1 הגדרות רקורסיביות

הגדרה רקורסיבית של קבוצה:

1. נגדיר תת־קבוצה (של הקבוצה אותה אנו רוצים להגדיר)
2. נגדיר איברים נוספים בקבוצה באמצעות איברים שכבר נמצאים בקבוצה, כלומר איברים שכבר הוגדרו קודם.

דוגמא:
המספרים הזוגיים:

1. $0 \in E$
2. $n \in E \Rightarrow \begin{cases} n-2 \in E \\ n+2 \in E \end{cases}$

דוגמא נוספת: קבוצת $Ulam$
$U \subseteq \mathbb{N}$ **המקיימת:**

1. $1 \in U$
2. $x \in U \Rightarrow 2x \in U$
3. $x \equiv 1 (mod\, 3) \Rightarrow \frac{x-1}{3} \in U$

קצת מאיברי הקבוצה הם:
$1, 2, 4, 8, 16, ...$
ולמשל, $16 \equiv 1(mod\, 3)$ **אז לכן** $\frac{16-1}{3} = 5 \in U$ **ולכן גם** $10, 20, 40, ...$
כמו כן $10 \equiv 1(mod\, 3)$ **ולכן** $\frac{10-1}{3} = 3 \in U$ **וכן הלאה והלאה...**
בעיה פתוחה: האם $U = \mathbb{N}$?!
ידוע ש $1 \leq x \leq 2^{40}$ **שייך ל־**U.

עוד דוגמא: הגדרה רקורסיבית של סכום:

$$\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (\sum_{i=1}^{n-1} x_i) + x_n$$

נוסחאות נסיגה:
$f:\mathbb{N}\to A$
נתונים הערכים $f(1),...,f(k)$ ונוסחה המאפשר לחשב את $f(n)$ באמצעות $f(n-1),...,f(n-k)$.
למשל,
אם $f(n)=2^n$ אז אפשר לומר: $f(1)=3$ וגם $f(n)=3f(n-1)$.

(היתה עוד דוגמא לגבי הגדרה של נוסחת נסיגה על $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to A$ אבל לא הועתקה טוב).

3 קומבינטוריקה

3.1 עקרונות בסיסיים

__עקרון הסכום__
אם A,B קבוצות (סופיות) זרות, אז $|A\cup B|=|A|+|B|$

מסקנה:
אם אם A,B קבוצות סופיות ו־ $B\subseteq A$ אז
$|A|=|B|+|A\backslash B|$
הוכחה למסקנה:
$A\backslash B$ ו־B הן קבוצות זרות, ולכן
: $A=B\cup(A\backslash B)$ ולפי עקרון הסכום: $|A|=|B|+|A\backslash B|$.

__עקרון המכפלה__
אם A,B קבוצות סופיות, אז $|A\times B|=|A|\cdot|B|$
הוכחה:
$A=\{a_1,...,a_m\}$, $B=\{b_1,...,b_n\}$ אז
$A\times B=\{(a_i,b_j)\mid \begin{matrix} i=1,...,m \\ j=1,...,n\end{matrix}\}$
ולכן $|A\times B|=m\cdot n=|A|\cdot|B|$.

3.1.1 טענה ודוגמאות בנוגע ליחסים וגדלים של קבוצות

טענה 3.1 יהיו A,B קבוצות, $R\subseteq A\times B$ יחס. אז:

1. אם לכל $a\in A$ מתקיים $|\{b\in B\mid (a,b)\in R\}|=s$, אזי $|R|=|A|\cdot s$.
2. אם לכל $b\in B$ מתקיים $|\{a\in A\mid (a,b)\in R\}|=t$, אזי $|R|=|B|\cdot t$.

דוגמא:
נניח שבכיתה ישנם 21 בנים. כל בן מכיר 4 בנות, וכל בת מכירה 7 בנים. כמה בנות ישנן בכיתה?
נתבונן:

A ־ בנים	$21=\|A\|$
B ־ בנות	$?=\|B\|$
$R\subseteq A\times B$	$(a,b)\in R$ אם הבן a מכיר את הבת b.

נחשב. מתקיים:

$$|R|=|A|\cdot s=21\cdot 4=84$$

$$|R| = |B| \cdot 7$$

ולכן

$$|R| = |B| \cdot 7 = 84 \qquad \Rightarrow |B| = 84/7 = 12$$

דוגמא נוספת:
כמה מספרים זוגיים ישנם בין 0 ל 99?
יש לנו 10 אפשרויות לספרת העשרות, כלומר 0-9. נסמן קבוצה זו ב-B.
כמו כן יש לנו 5 אפשרויות לספרת האחדות: 0,2,4,6,8. נסמן קבוצה זו ב-A.
ולכן, התשובה היא $|B||A| = 10 \cdot 5 = 50$.

דוגמא נוספת:
כמה זוגיים בעלי ספרות שונות ישנם בין 0 ל99?
נבחר קודם כל את ספרת האחדות. יש לכך $|A| = 5$ אפשרויות. ואז נותרנו עם 9 אפשרויות בלבד לעשרות.
ולכן התשובה היא $|A| \cdot 9 = 45$.

3.1.2 עקרונות מורחבים

עיקרון הסכום המורחב
תהינה $A_1, ..., A_n$ קבוצות זרות, אזי

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

מסקנה:
תהינה A, B קבוצות. אזי $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
הוכחה מהעקרון המורחב:
נשים לב שהקבוצות $A \backslash (A \cap B),\ A \cap B,\ B \backslash (A \cap B)$ הן כולן זרות.
כמו כן $|A \cap B| \subseteq A$ וגם $|A \cap B| \subseteq B$.
אז מתקיים:

$$|A \cup B| = |A \backslash (A \cap B)| + |B \backslash (A \cap B)| + |A \cap B| =$$

$$= |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

עקרון המכפלה המורחב

תהינה $A_1,...,A_n$ קבוצות זרות, אזי

$$|A_1 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot ...|A_n|$$

דוגמא לבעיה:
נתונות הספרות $\{1,...,n\}$,
ונניח כי את הספרה ה־i ($1 \le i \le n$) ניתן לצבוע ב־k_i צבעים שונים.
בכמה דרכים ניתן לצבוע את ה־n־יה $\{1,...,n\}$?
פתרון:

לכל ספרה נתאים קבוצה:
$$\begin{array}{ccccc} \{ & 1, & 2, & ..., & n & \} \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ & B_1 & B_2 & & B_n & \end{array}$$

B_i ־ קבוצת הצבעים בה ניתן לצבוע את הספרה i.
קבוצת הצביעה של ה־n־יה $\{1,...,n\}$ היא מתאימה ל־$B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$.
מספר הצביעות של ה־n־יה הוא $|B_1 \times ... \times B_n| = |B_1| \cdot ...|B_n| = k_1 \cdot ... \cdot k_n$.

3.2 בעיות מניה

3.2.1 נוסחאות בסיסיות

בחירת k **איברים מתוך** n:

	ללא חזרות	עם חזרות
ללא חשיבות לסדר	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{n-1}$
עם חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

הסבר לטבלה:

סדר חשוב, עם חזרות:
בהינתן $\{1,...,n\}$, נחשב כמה סדרות באורך k ניתן לבנות מהאיברים של קבוצה זו.
(סדרה, כלומר **הסדר חשוב, עם חזרות**).
ישנן n^k סדרות באורך k הבנויות מהאיברים $\{1,...,n\}$.

הסבר: יש לנו בכל פעם n אפשרויות לבחירת האיבר הבא בסדרה:
$$\begin{array}{ccc} \square & ... & \square \\ \uparrow & & \uparrow \\ n\,options & & n\,options \end{array}$$

ובסה"כ:

$$n^k$$

סדר חשוב, ללא חזרות:
כמה סדרות באורך k ניתן לבנות מהאיברים של $\{1,...,n\}$?
לאיבר הראשון יש n אפשרויות, אח"כ $n-1$, ואז $n-2$, וכו...

$$\begin{array}{lcccc} & \square & \square & ... & \square \\ \text{כלומר} & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ Options: & n & (n-1) & & (n-k+1) \end{array}$$

ובסה"כ קיבלנו: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)$
אם נכפול את זה ב־ $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ נקבל את הביטוי המבוקש:

$$\frac{n!}{n-k}$$

סדר לא חשוב, ללא חזרות:
כמה תתי קבוצות בעוצמה k יש לקבוצה $\{1,...,n\}$?
ראינו בפסקה הקודמת שמס' הסדרות באורך k של איברים מתוך $\{1,...,n\}$ הוא $\frac{n!}{n-k}$.
וכעת, לכל תת־קבוצה של $\{1,...,n\}$ בת k איברים, מתאימות בדיוק $k!$ סדרות,
כי זהו מספר התמורות על k. ולכן, כדי לשקף את זה שהסדר לא משנה, נחלק ב־$k!$.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{\text{מס' תתי הסדרות}}{k!}=\text{מס' תתי הקבוצות בגודל } k$$

ומסמנים, ("n מעל k", או בלעז (משמאל לימין...), "$n\,choose\,k$")

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

סדר לא חשוב, עם חזרות:
כל מה שחשוב במצב זה הוא לדעת כמה פעמים בחרנו כל איבר מתוך $\{1,...,n\}$.
כלומר, ייצוג ע"י המספר i וכמה פעמים בחרנו אותו, לכל i, ייספק את כל המידע הדרוש.
נשתמש ב**מולטי קבוצות.** מולטי קבוצה היא מה שתואר הרגע:

$$\{(1,m_1),(2,m_2),...,(n,m_n)\,|\,0\leq m_i,\ \sum_{i=1}^{n}m_i=k\}$$

נסביר: לכל $i\in\{1,...,n\}$ סימנו (i,m_i) כאשר m_i היא מספר הפעמים שבחרנו את i.
כמובן שאי אפשר לבחור מספר שלילי של פעמים ולכן $m_i\geq 0$.
כמו כן, אנו מעוניינים לבחור בסה"כ k איברים, ולכן סכום כל הm_i הוא k.
כעת, לכל בחירה של מולטי קבוצה שכזאת, נתאים סדרה שמייצגת אותה, באופן הבא:

$$\underbrace{11\star2222\star...\star nnn}_{(n-1+k)\,members}$$

כלומר התאמנו למולטי קבוצה, סדרה של המספרים $1,...,n$, יחד עם $n-1$ $\star$־ים ביניהם.
יש $n-1$ $\star$ מפרידים, ובנוסף יש k מספרים שאנו בוחרים, סה"כ $n+k-1$.
נשים לב שבכלל לא צריך לכתוב את המספרים במפורש, כי מיקומם ביחס ל$\star$־ים קובע את ערכם.

למשל, עבור $k=9$ והבחירה 111225566 מתוך $\{1,2,3,4,5,6\}$, נייצגה בתור:

$$111 \star 22 \star\star\star 55 \star 66 = \circ\circ\circ\star\circ\circ\star\star\star\star\circ\circ\star\circ\circ$$

כמו כן, נטען שלכל סדרה של $1,...,n$ יחד עם $n-1$ $\star$־ים ביניהם מתאימה מולטי קבוצה בגודל k.
ולכן הבעיה שקולה למציאת מספר הסדרות של k מספרים ו־$n-1$ $\star$־ים ביניהם,
כלומר בחירה ללא חזרות של תת קבוצה בגודל $n-1$ מתוך הקבוצה $\{1,...,(n+k-1)\}$.
כלומר,

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

(ייתכן שההסבר לא מדויק, לא היה ברור בהרצאה).

3.2.2 דוגמאות: פתרונות של משוואה

כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש למשוואה הבאה?

$$x_1+...+x_n=k \qquad (x_i \geq 0)$$

זה שקול בדיוק למה שעשינו עם ה־$\star$־ים וה־$\circ$־ים מקודם: יש לנו $n-1$ מקומות לשים $\star$ "מפרידים" שכאלה, כאשר כל x_i נקבע ע"י מספר ה־$\circ$־ים ששמים ביניהם. אנו דורשים שתמיד יהיו k עיגולים $\circ$ ולכן כל הצירופים השונים של k סימני $\circ$ ו־ $n-1$ סימני $\star$ הם בדיוק מספר הפתרונות המבוקש.
ולכן, התשובה היא $\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$ כמו קודם.
לדוגמא:
כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש למשוואה:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=7$$

פתרון אפשרי לדוגמא: $7 = 3 + 0 + 2 + 2 \Leftrightarrow \circ\circ\star\circ\circ\star\star\circ\circ\circ$
יש לנו $k=7$ כדורים, ו־ $n-1$ כוכבים. (כאשר $n=4$).
סה"כ יש $n+k-1$ מקומות לבחור מה מסדרים בשורה.
ולכן אנו בוחרים $n-1$ אינדקסים מתוך $n+k-1$ אפשויות עבור הכוכבים.
כלומר $\binom{n+k-1}{n-1}$.
דוגמא יותר מסובכת:
כמה פתרונות בשלמים יש למשוואה:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=18$$

כאשר: $x_4 \geq 0 \qquad x_3 \geq -4 \qquad x_2 \geq 2 \qquad x_1 \geq 6$?
נרצה להגיע למצב דומה לשאלה הקודמת. אז נסמן:
$x_4 = y_4 \qquad x_3 = y_3 - 4 \qquad x_2 = 2 + y_2 \qquad x_1 = 6 + y_1$

כאשר $y_i \geq 0$. ולכן קיבלנו:

$$\begin{gathered}6+y_1+2+y_2+y_3-4+y_4=18\\ \Updownarrow\\ y_1+y_2+y_3+y_4=14\end{gathered}$$

ואת זה כבר פותרים כמו קודם.
דוגמא עם חסם מלעיל:
כמה פתרונות שלמים יש למשוואה:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=18$$

כאשר $9 \geq x_4 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_1 \geq 0$?
לפי השיטה הכללית, אם לא היתה ההגבלה של $9 \geq x_4$,
היינו מקבלים שיש $\binom{18+3}{3}=\binom{21}{3}$ פתרונות.
ולכן עלינו **לזרוק** את כל הפתרונות שבהם $x_4 \geq 10$.
כלומר, $x_4 = y_4 + 10$. אז זורקים את כל הפתרונות של:

$$\begin{gathered}x_1+x_2+x_3+y_4+10=18\\ \Updownarrow\\ x_1+x_2+x_3+y_4=8\end{gathered}$$

ויש בדיוק $\binom{11}{3}$ כאלה.
ולכן מס' הפתרונות המבוקש בשאלה הוא $\binom{21}{3}-\binom{11}{3}$.
דוגמה עם שני חסמים מלעיל: (משתמש בעיקרון ההכלה וההדחה)
בשאלה מהדוגמא הקודמת,
אם היינו דורשים בהתחלה את הדרישה:
$9 \geq x_4 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad 2 \geq x_1 \geq 0$
אז היינו צריכים לזרוק בנוסף גם את המקרים שבהם $x_1 \geq 3$, כלומר $x_1 = y_1 + 3$,
ואז היינו מקבלים $y_1+x_2+x_3+x_4=15$ ולכך יש $\binom{18}{3}$ אפשרויות.
אבל **נשים לב** - זרקנו את החיתוך!!
כלומר צריך **להוסיף** את הפתרונות שמקיימים גם $x_1 \geq 3$ וגם $x_4 \geq 10$:
כלומר $y_1+x_2+x_3+y_4=5$ ולכך יש $\binom{8}{3}$ אפשרויות.
ובסה"כ התשובה במקרה זה תהיה $\binom{21}{3}-\binom{11}{3}-\binom{18}{3}+\binom{8}{3}$.
זה היה עקרון ההכלה וההדחה. (בהמשך הסיכום הוא מוגדר).

3.3 בינום ניוטון

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

3.3.1 הסבר כללי

מספר הפעמים שמתקבל הביטוי a^kb^{n-k},
הוא בדיוק מספר תתי־הקבוצות בגודל k של הקבוצה $\{1,...,n\}$.
מספר תתי הקבוצות הוא $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot...\cdot(a+b)}_{n\,times} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^kb^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

3.3.2 טענות וזהויות

טענה 3.2 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

הוכחה: ראשית **בדרך אלגברית:**

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

ובדרך קומבינטורית:
נתבונן ב־ $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. לכל k, זהו מספר תתי הקבוצות בגודל k של $\{1,...,n\}$. כלומר,
2^n=(קבוצת החזקה)$|P(\{1,...,n\})|$=מספר כל תתי הקבוצות של $\{1,...,n\}$= $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
ניזכר שגודל קבוצת החזקה של A הוא $2^{|A|}$, כי לכל איבר ב־A יש 2 אפשרויות ־ או שהוא כלול בתת־קבוצה או שלא. ■

טענה 3.3 $\sum_{k=1}^{n}k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$

הוכחה: בדרך **אלגברית:**
נתבונן בביטוי הבא:

$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\cdot 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

ולכן,

$$[(x+1)^n]'=[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k]'$$

נבצע את הגזירה על שני האגפים, והשויון הזה הוא:

$$n\cdot(x+1)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k\cdot x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k\cdot x^{k-1}$$

נשים לב שהגזירה נכונה: $[(x+1)^n]'=n\cdot(x+1)^{n-1}\cdot(x+1)'=n\cdot(x+1)^{n-1}\cdot 1$,
וכמו כן העלינו את k לסכימה מ־1 כי עבור $k=0$ האיבר בסכום התאפס.

כעת אם נציב $x=1$ נקבל את הנדרש!

$$n\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k$$

הוכחה אלגברית נוספת:
ראשית **טענת עזר:**
לכל n ולכל $1\le k\le n$:

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

הוכחה לטענה:

$$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)(n-k)!}=$$

$$=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}=n\binom{n-1}{k-1}$$

וכעת נוכיח את הנדרש: נסמן $\tilde{k}=k-1$ ואז:

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{\tilde{k}=0}^{n-1}\binom{n-1}{\tilde{k}}=$$

ולפי הטענה הקודמת, מתקיים:

$$=n\cdot 2^{n-1}$$

כנדרש.
הוכחה קומבינטורית:
נזכור ש־$\binom{n}{k}$ הוא מספר תתי הקבוצות בגודל k מתוך n איברים.
כעת, נחשוב על מספר האפשרויות לבחור תת־קבוצות של n איברים, ובנוסף "לסמן" איבר יחיד מכל תת קבוצה.
כדי לבחור תת קבוצה בגודל k יש לנו $\binom{n}{k}$ אפשרויות. בכל אפשרות כזאת, יש k אפשרויות "לסמן" איבר בודד מתת־הקבוצה. ולכן $k\binom{n}{k}$ אפשרויות עבור תת קבוצה בגודל k.
כאשר נסכום $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$, נקבל את כל האפשרויות לכל תת־קבוצה בגודל k בין 1 ל־n.
מצד שני,
אם נבחר בהתחלה את האיבר שאנחנו רוצים "לסמן" מתוך ה־n האפשריים, ואז נבחר את שאר האיברים שיהיו יחד איתו בתת־הקבוצה, אז יש כמובן n אפשרויות לבחירת האיבר הראשון, ואז 2^{n-1} (גודל קבוצת החזקה) אפשרויות לבחירת תת קבוצה מתוך $n-1$ האיברים הנותרים.
ולכן שני אגפי השויון שאנו באים להוכיח הם אותה ספירה, ולכן השויון מתקיים. ■

טענה 3.4 $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ לכל n ולכל $0\le k\le n$.

הוכחה: ראשית זה נכון אלגברית כי $\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\frac{n!}{k!(n-k!)}$.
הוכחה נוספת, (כנראה לא לגמרי פורמלית - יותר בכיוון של הסבר, לדעתי):
בנוסף, זה נכון מכיוון שאם נסמן את הקבוצה האוניברסלית $|U|=n$,
ואנחנו מחפשים את מס' הדרכים לבחור תת קבוצה B כך ש $|B|=k$,
אזי $|B^c|=n-k$. וברור שמס' האפשרויות לבחור את הקבוצה המשלימה הוא שווה למס' האפשרויות לבחירת B, ולכן מתקיים השיון. ■

טענה 3.5 עבור $0\le m\le k\le n$, מתקיים:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

הוכחה: קומבינטורית:
צד שמאל הוא בחירה של k כדורים מתוך n, ולאחר מכן בחירה של m מתוך ה-k שבחרנו כדי לזרוק על מישהו.
צד ימין, הוא בחירת m כדורים מתוך n שאנחנו יודעים מראש שנזרוק על מישהו, ואח"כ בחירת השאר: $k-m$ מתוך ה-$n-m$ שנשארו, שלא נזרוק על מישהו, כדי להשלים שיהיה לנו סה"כ k כדורים. ■

3.3.3 זהות פסקל

טענה 3.6 לכל n ולכל $1\le k\le n$, מתקיים:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$$

הוכחה: קומבינטורית:
צד ימין סופר את מספר תתי הקבוצות בגודל k של $\{1,...,n\}$.
נתבונן בצד שמאל:
$\binom{n-1}{k}$ הוא מספר האפשרויות לבחירת k איברים מהקבוצה $\{1,...,(n-1)\}$, כלומר **ללא** n.
$\binom{n-1}{k-1}$ הוא מספר האפשרויות לבחירת $k-1$ איברים נוספים, **לאחר שבחרנו מראש את** n**,**
מתוך $\{1,...,(n-1)\}$האיברים הנותרים. וסה"כ k איברים גם.
כמובן שחיבור האפשרויות נותן את סך כל האופציות לבחירת k איברים מתוך $\{1,...,n\}$,
ולכן מתקיים השויון בין האגפים. ■

3.3.4 משולש פסקל

זהות פסקל מקודם למעשה נותנת לנו נוסחה רקורסיבית לחישוב המקדמים הבינומיים:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$$

כלומר תלות בין n ל-$(n-1)$.

משולש פסקל הוא:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 \; & 4 & & 6 & & 4 & \; 1 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

כל איבר הוא הסכום של השניים שמעליו, כתוצאה מהנוסחה הרקורסיבית.

3.3.5 טענה: סדרת המקדמים הבינומיאליים היא אונימודלית

הגדרה 3.7 סדרה אונימודלית
סדרה שתחילתה עולה עד למקסימום, ואח"כ היא סדרה יורדת.

טענה 3.8 עבור n קבוע, סדרת המקדמים הבינומיים:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n}$$

היא סדרה אונימודלית. (למשל אפשר לראות במשולש פסקל מקודם דוגמא: $1, 4, 6, 4, 1$)

הוכחה: נבדוק **מתי מתקיים** $a_{k-1} \leq a_k$:

$$\binom{n}{k-1} \leq \binom{n}{k}$$

נבדוק מתי מתקיים:

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1))!} \leq \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

אחרי צימצומים,(נחלק ב־$n!$ ונכפיל ב־$(k-1)!,\ (n-k)!$) נקבל:

$$\frac{1}{n-k+1} \leq \frac{1}{k}$$

כלומר $k \leq n-k+1$ ולכן, התנאי מתקיים כאשר: $k \leq \frac{n+1}{2}$.
כעת,
כאשר n זוגי, אז $\frac{n+1}{2}$ הוא לא שלם. ולכן,

$$k = \underbrace{0, 1, ..., \frac{n}{2},}_{going\,up!} \quad \underbrace{(\frac{n}{2}+1), ..., n}_{going\,down!}$$

כאשר n אי זוגי, $\frac{n+1}{2}$ הוא מספר שלם. ואז,

$$k = \underbrace{0,1,...,\frac{n-1}{2}}_{going\, up!},\quad \underbrace{\frac{n+1}{2},...,n}_{going\, down!}$$

ונשים לב שיש שויון בין $k=\frac{n-1}{2}$ ו־$k=\frac{n+1}{2}$ במקרה זה. (כי $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$).
כמו כן העליה \ ירידה במקרה זה היא עליה ממש \ ירידה ממש. ■

3.4 המקדמים המולטינומיים

3.4.1 מוטיבציה והגדרה

ראינו שבעזרת המקדם הבינומי אפשר לחשב כמה תתי קבוצות בגודל k יש לקבוצה בגודל n.
התשובה לכך היא כמובן $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
כעת נשאל:
כמה אפשרויות ישנן לצבוע את הקבוצה $\{1,...,n\}$ ב־l צבעים,
כאשר n_1 צבועים בצבע הראשון,
n_1 בצבע השני,
$\vdots$
n_l צבועים בצבע ה־l.
(כאשר $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$)
לדוגמא:
ניקח $l=3$, ואז $n_1+n_2+n_3=n$. נחשב:

$$\underset{\substack{\#\,of\,options\,to\\ choose\,the\,members\\ to\,paint\,in\,color\,1}}{\underset{\uparrow}{\binom{n}{n_1}\cdot}}\qquad \underset{\substack{\#\,of\,options\,to\\ choose\,the\,members\\ to\,paint\,in\,color\,2}}{\underset{\uparrow}{\binom{n-n_1}{n_2}}}\qquad \underset{\substack{(third\,color\\ is\,determined\\ by\,the\,others)}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}=\binom{n}{n_1,n_2,n_3}$$

כאשר הגדרנו **סימון:** $\binom{n}{n_1,...,n_k}=\frac{n!}{n_1!\cdot...\cdot n_k!}$ (כאשר $n=n_1+...+n_k$).
נשים לב שמתקיים לפי סימון זה: $\binom{n}{n_1}=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}=\frac{n!}{n_1!n_2!}=\binom{n}{n_1,n_2}$.

נשים לב שזוהי שאלה שקולה לשאלה: כמה מילים ניתן לכתוב מהסימנים $\{1,...,k\}$,
כאשר יש n_i סימני i (ואז $\sum n_i=n$ אורך המילה)?

משפט 3.9 מספר המילים שניתן להרכיב מהסימנים $\{1,...,k\}$ כאשר יש n_i סימני i הוא:

$$\frac{(n_1+...+n_k)!}{n_1!\cdot...\cdot n_k!}=\binom{n_1+...+n_k}{n_1,....,n_k}$$

הוכחה: באינדוקציה. עבור $k=1$: יש רק מילה אחת שניתן להרכיב מסימן אחד.
ואכן, $\frac{n_1!}{n_1!}=1$.
עתה, עבור $k>1$ נבחר את המקומות בהם יהיה רשום 1: $A=\binom{n_1+...+n_k}{n_1}$
וכעת יש לנו $n_2+...+n_k$ מקומות לשים בהם $k-1$ סימנים.
מספר האפשרויות לעשות זאת הוא ע"פ הנחת האינדוקציה: $B=\frac{(n_2+...+n_k)!}{n_2!\cdot...\cdot n_k!}$.
ולכן מס' האפשרויות שאנו מחפשים הוא $A\cdot B$:

$$AB=\frac{(n_1+...+n_k)!}{n_1!(n_2+...+n_k)!}\cdot\frac{(n_2+...+n_k)!}{n_2!\cdot...\cdot n_k!}=\frac{(n_1+...+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot...\cdot n_k!}$$

■

3.4.2 הכללה של הבינום (=פיתוח של העלאת חזקה ליותר משני משתנים)

מהמשפט הקודם, אנחנו לומדים שאפשר לדעת בדיוק מהו הפיתוח של ביטוי מהסוג: $(x_1+...+x_k)^n$.
למשל:

$$(x+y+z)^{19}=\binom{19}{19,0,0}x^{19}y^0z^0+\binom{19}{18,1,0}x^{18}y^1z^0+...+\binom{19}{17,1,1}x^{17}y^1z^1+.......$$

ובאופן כללי:

טענה 3.10 הכללה של הבינום:

$$(x_1+...+x_k)^n=\sum_{n_1+...+n_k=n}\binom{n}{n_1,n_2,...,n_k}x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot...\cdot x_k^{n_k}$$

זה נכון כי זה זהה להרכבת מילים כמו קודם -
כל פעם מסתכלים כמה פעמים מופיע הביטוי המבוקש.

3.4.3 זהות פסקל המוכללת

כזכור זהות פסקל היא:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\qquad\Leftrightarrow\qquad\binom{n}{k,n-k}=\binom{n-1}{k-1,n-k}+\binom{n-1}{k-1,n-k-1}$$

ומתקיים:

טענה 3.11 זהות פסקל המוכללת:

$$\binom{n}{n_1,...,n_k}=\sum_{i=1}^{k}\binom{n-1}{n_1,...,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},...,n_k}$$

(לא הוכחנו את זה, זה רק הופיע בתרגול.

3.5 מספרי קטלן

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

דוגמא: מספר הדרכים החוקיות לפתוח ולסגור n זוגות סוגריים.
בביטוי מתמטי, חייבים לסגור כל סוגריים שפותחים.
נניח שיש n זוגות סוגריים. בכמה דרכים חוקיות ניתן לסדר n זוגות סוגריים?
כלומר בכמה דרכים ניתן לסדר n אפסים ו־n אחד־ים כך שלכל $1 \leq m \leq 2n$, עד המקום ה־m, מספר האחד־ים שהופיעו הוא לכל היותר מספר האפסים שהופיעו?

טענה 3.12 מספר הסדרות המאוזנות שכוללות n אפסים ו־n אחדים הוא C_n.

הוכחה: נפנה לידידינו הנאמן, הספר **מתמטיקה בדידה, עמ' 124.** (משפט 4.3.11).
אציין שלמדנו גם את ההוכחה הגיאומטרית בתרגול. ■

עוד שתי טענות שהוכחנו בתרגיל 7:

טענה 3.13 מספר הדרכים לחלק מצולע בעל $n+2$ צלעות ל־n משולשים בעזרת אלכסונים שלא נחתכים, הוא C_n.

טענה 3.14 מתקיים: $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$

3.6 נוסחאות נסיגה ־ רקורסיה

3.6.1 דוגמא פשוטה

בעיה: כמה רצפים של n אותיות עבריות ניתן ליצור אם אסור שיופיע ברצף זוג אותיות זהה?
נסמן את התשובה ב־$u(n)$.
ברור ש־$u(1) = 22$ כי יש 22 אותיות.
כמו כן, $u(2) = 22 \cdot 21$.
ובאופן כללי, $u(n) = u(n-1) \cdot 21$, כי כל פעם אסור שתופיע האות הקודמת ברצף.
כמובן שהפתרון לנוסחת הנסיגה הזו הוא $u(n) = 22 \cdot 21^{n-1}$.

3.6.2 מספרי פיבונצ'י

יש זוג ארנבים שמתרבה כל חודש לזוג נוסף. לוקח לארנב חודש להתבגר מרגע הלידה.
נסמן: $F(n)$ מס' זוגות הארנבים אחרי n יחידות זמן.
אז יש בחודש הראשון זוג אחד, ובחודש השני הם עדיין לא בוגרים. ולכן,

$$F(0) = 1,\ F(1) = 1$$

.

אז מתקיים:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

.

זה נכון, כי $n-2$ ארנבים חדשים נולדו, שכן בחודש שעבר היו עדיין קבוצה של ארנבים לא בוגרים. ובנוסף יש עוד $n-1$ ארנבים בוגרים מהחודש שעבר.
(הסבר יותר מפורט בספר, עמ' 131 ־ יש גם ציור מרהיב ביופיו של ארנבים).

עוד דוגמא לשימוש בפיבונצ'י:
כמה תתי קבוצות של $\{1,...,n\}$ ישנן, כך שכל תת קבוצה איננה מכילה זוג מספרים עוקב?
נסמן מספר זה ב־$u(n)$.
תהי S תת קבוצה שכזו. אז $S\subseteq\{1,...,n\}$.
כעת, יש שתי אפשרויות:
אם $n\in S$, אז בוודאי שלא ייתכן ש־$n-1\in S$, כי אז יהיו שני מספרים עוקבים בה.
ולכן במצב זה יש עוד $u(n-2)$ אופציות לתת הקבוצה. (כי נשארנו עם $\{1,...,n-2\}$).
אם $n\notin S$, אז יש בדיוק $u(n-1)$ אפשרויות לכך.
ולכן $u(n)=u(n-1)+u(n-2)$.
כמו כן, עבור הקבוצה הריקה, $u(0)=1$ כי יש לה תת קבוצה יחידה.
ועבור $\{1\}$, יש שתי תת קבוצות: $\{\emptyset\},\{1\}$. ולכן $u(1)=2$. וכעת יש לנו בסיס לרקורסיה, וניתן לחשב כל $u(n)$ שנרצה באופן רקורסיבי.

3.6.3 מספרי סטירלינג

בעיה: כמה אפשרויות ישנן לחלק את הקבוצה $\{1,...,n\}$ ל־k תת־קבוצות לא ריקות?
נסמן: $S(n,k)$ ־ מס' האפשרויות לחלק $\{1,...,n\}$ ל־k תת־קבוצות לא ריקות.
מתקיים:

$$S(n,1)=1$$

$$S(n,n)=1$$

כי כמובן יש אופציה אחת לחלק n איברים ל־n תת קבוצות,
ויש אופציה אחת לחלק אותם לקבוצה בגודל n.
נרצה לדעת מהו $S(n,k)$.
נתבונן ב־ $\{1,...,n\}$. יש שתי אפשרויות:

אפשרות א': אחת מתתי הקבוצות היא $\{n\}$.
במקרה זה, נותר לנו למצוא עוד את מס' האפשרויות
לחלק את שאר $n-1$ האיברים ל$k-1$ תת־קבוצות לא ריקות. כלומר $S(n-1,k-1)$.
אפשרות ב': תת הקבוצה המכילה את n מכילה יותר מאיבר אחד.
במקרה זה, נתבונן בחלוקה של $\{1,...,n-1\}$ ל־k תת קבוצות לא ריקות.
יש $S(n-1,k)$ אפשרויות לכך, ובנוסף, נכפול ב־k מכיוון שיש k אפשרויות
לגבי באיזו מתת־הקבוצות הללו אנו כוללים את n.
ולכן קיבלנו את מה שנקרא **מספרי סטירלינג**:

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$$

מעניין לציין שלא ידועה נוסחה מפורשת למספרים אלו!

דוגמא לחלוקה שכזו:
עבור $n=4$, $k=2$: אנו מחלקים את $\{1,2,3,4\}$ ל־2 תת קבוצות לא ריקות:
$\{\{1,2\}\{3,4\}\},\{\{1,3\}\{2,4\}\},\{\{1,4\}\{2,3\}\},$
$\{\{1,2,3\}\{4\}\},\{\{1,2,4\}\{3\}\},\{\{1,3,4\}\{2\}\},\{\{2,3,4\}\{1\}\}$

3.6.4 עוד דוגמא לנוסחת נסיגה

ידוע לנו שמספר האפשרויות לסדר את האיברים $\{1,...,n\}$ הוא $n!$.
נשאלת השאלה ־
מהו מס' האפשרויות לסדר את האיברים $\{1,...,n\}$ כך שאף איבר איננו נשאר במקומו?
נסמן את מספר זה ב־ $D(n)$.
מתקיים:

$$D(1)=0,\ D(2)=1$$

$$D(n)=(n-1)\left(D(n-1)+D(n-2)\right)$$

יש הסבר מפורט בספר, עמוד 135־137 (משפט 4.4.8).
נציין שבתרגיל 8 ראינו, שמספר התמורות של $\{1,...,n\}$ ללא נקודות שבת הוא $n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

3.7 עקרון שובך היונים

3.7.1 העקרון, ודוגמאות

משפט 3.15 $n+1$ יונים המחולקות ל־n תאים, מכילות זוג יונים הנמצא באותו התא.

הוכחה: אם נניח שכל תא מכיל לכל היותר יונה אחת, אזי אם נסמן את מספר היונים בתא i ב־a_i,
אז תחת הנחה זו, מתקיים $0\le a_i\le 1$ לכל i. ולכן,

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\le\sum_{i=1}^{n}1=n<n+1$$

וקיבלנו סתירה!!! ■

דוגמאות לשימוש בעקרון שובך היונים

טענה 3.16 אם נבחר 7 מספרים שונים בין 0 ל־11, נמצא בתוכם זוג שסכומו הוא 11.

הוכחה: נחלק את $\{0,...,11\}$ לזוגות שסכומם הוא 11:

$$\{0,11\},\{1,10\},\{2,9\},\{3,8\},\{4,7\},\{5,6\}$$

סה"כ יש 6 זוגות כאלו. נגדיר כל זוג כתא. (וכמובן מספר שבחרנו חייב ללכת לתא שלו).
כעת, לפי עקרון השובך,
כל בחירה של 7 מספרים מתוך $\{0, ..., 11\}$ מכילה זוג מספרים הנמצא באותו תא. ■

טענה 3.17 כל $n+1$ מספרים מהקבוצה $\{1, ..., 2n\}$ מכילה 2 מספרים a, b כך ש־ $a|b$.

הוכחה: כל מספר טבעי m ניתן לרשום כ־ $m = 2^s \cdot t$ כאשר $s \geq 0$, t אי זוגי.
נסמן: נבחר $n+1$ מספרים מתוך ה־$2n$ ונסמנם a_i. כלומר $1 \leq a_i \leq 2n$.
נציג כל אחד מהם בצורה הנ"ל:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & \dots & \dots & a_{n+1} \\ \uparrow & & & \uparrow \\ 2^{s_1} \cdot t_1 & & & 2^{s_{n+1}} \cdot t_{n+1} \end{array}$$

כעת, ברור שלכל t_i ($1 \leq i \leq n+1$), מתקיים $1 \leq t_i \leq 2n$,
כי אחרת המספר a_i לא היה חלק מהקבוצה $\{1, ..., 2n\}$.
כמו כן מההגדרה, t_i הוא אי זוגי.
יש לנו $n+1$ מספרי t_i כאלה. וכמו כן קיימים n מספרים אי זוגיים בין 1 ל־$2n$.
ולכן לפי עקרון השובך, קיימים זוג אינדקסים $i < j$ כך ש:

$$a_i = 2^{s_i} t_i \qquad a_j = 2^{s_j} t_j$$

וגם $t_i = t_j$. כעת, מכיוון ש־ $a_i \neq a_j$ (כי יש רק אחד מכל איבר בקבוצה), אז בהכרח $s_i \neq s_j$.
נניח ש־$a_j > a_i$. אז מתקיים:

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{2^{s_j} t_j}{2^{s_i} t_i} = \frac{2^{s_j}}{2^{s_i}} = 2^{s_j - s_i}$$

ולכן הטענה נכונה. ונשים לב שבנוסף לכך, הוכחנו שזוהי תמיד חזקה של 2. ■

3.7.2 משפט ארדש ־ סקרש ($Erd\ddot{o}s - Szekeres$)

לכל סדרה באורך n^2+1 של מספרים ממשיים שונים,
קיימת תת־סדרה מונוטונית עולה באורך $n+1$ או תת־סדרה מונוטונית יורדת באורך $n+1$.
הוכחה: תהי נתונה סדרה $u_1, ..., u_{n^2+1}$ של מספרים ממשיים שונים.
נניח בשלילה כי לסדרה אין תת־סדרה באורך $n+1$ שהיא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.
לכל u_i ($1 \leq i \leq n^2+1$) נצמיד זוג מספרים טבעיים (s_i, r_i),
s_i ־ האורך המקסימלי של תת־סדרה מונוטונית עולה המתחילה ב־u_i.
לפי ההנחה שאין ת"ס באורך $n+1$, מתקיים: $1 \leq s_i \leq n$.
r_i ־ האורך המקסימלי של תת־סדרה מונוטונית יורדת המתחילה ב־u_i.
לפי ההנחה שאין ת"ס באורך $n+1$, מתקיים: $1 \leq r_i \leq n$.
כלומר קיבלנו:

$$\begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & \dots & u_i & \dots & u_j & \dots & u_{n^2+1} \\ (s_1, r_1) & (s_2, r_2) & & (s_i, r_i) & & (s_j, r_j) & & (s_{n^2+1}, r_{n^2+1}) \end{array}$$

יש לנו n^2+1 זוגות של מס' טבעיים (s_i, r_i).
מכיוון שדרשנו $1 \leq s_i \leq n$, $1 \leq r_i \leq n$, נקבל שיש n^2 זוגות (s_i, r_i) **שונים** אפשריים.

ולכן, מעקרון **שובך היונים**, נקבל שקיימים אינדקסים $i<j$ שעבורם $s_i=s_j$, $r_i=r_j$.
נראה כי מצב זה לא ייתכן, כלומר נקבל סתירה:

אם $u_i<u_j$: אז כל ת"ס מונוטונית עולה המתחילה ב־u_j ניתן להאריך ע"י התחלתה ב־u_i.
ולכן $s_i>s_j$ וקיבלנו סתירה לכך ש $s_i=s_j$.
אם $u_i>u_j$: אז כל סדרה מונוטונית יורדת המתחילה ב־ u_j ניתנת להארכה ע"י הוספת u_i.
ולכן במקרה זה $r_j<r_i$ וקיבלנו סתירה לכך ש $r_i=r_j$. ∎

3.7.3 עקרון השובך המורחב

משפט 3.18 אם נפזר $kn+1$ כדורים ב־n תאים, אז קיים תא שבו לפחות $k+1$ כדורים.

הוכחה: יהיו $a_1,...,a_n$ מספר הכדורים בתאים השונים.
אם **לא קיים** תא שבו $k+1$ כדורים אזי:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} k \le nk$$

סתירה. ∎

3.7.4 דוגמא: היכרות בקבוצה של 6 אנשים

טענה 3.19 בכל קבוצה של 6 אנשים,
קיימים 3 אנשים המכירים זה את זה, או 3 אנשים שאינם מכירים זה את זה.

הוכחה: נקרא לאחד האנשים א'. נחלק את שאר האנשים לשתי קבוצות:
קבוצה 1: אנשים המכירים את א'.
קבוצה 2: אנשים שאינם מכירים את א'.
כעת, עבור $n=2$, יש לנו $2n+1=5$ אנשים לשים ב־ $n=2$ קבוצות.
מעקרון **השובך המורחב**, נקבל שיש קבוצה בעלת 3 אנשים לפחות.
יש 2 אופציות:

- קבוצה 1 מכילה לפחות 3 אנשים:

  אם קיים זוג אנשים בקבוצה 1 המכירים זה את זה, אזי זוג זה + א' הם קבוצה של 3 אנשים המכירים זה את זה.

  אם לא קיים זוג אנשים בקבוצה 1 שמכירים זה את זה, אזי קבוצה 1 שבה לפחות 3 אנשים היא קבוצה של אנשים שלא מכירים זה את זה.

- קבוצה 2 מכילה לפחות 3 אנשים:

  אם קיים זוג בקבוצה 2 שאינם מכירים זה את זה, אז זוג זה + א' זו שלשה שבה כל זוג לא מכיר זה את זה.

  אם לא קיים זוג בקבוצה 2 שאינם מכירים זה את זה, אז בקבוצה 2 שמכילה לפחות 3 אנשים, כולם מכירים זה את זה.

ולכן הוכחנו את הנדרש. ∎

3.8 עקרון ההכלה וההדחה

3.8.1 העקרון

משפט 3.20 תהינה $A_1, ..., A_n$ קבוצות סופיות. אזי,

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| - ... + -...$$

$$... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 ... \cap A_n|$$

הוכחה: נמצאת **בספר**: עמ' 148 (משפט 4.6.3). ■

3.8.2 פונקציית אוילר

עבור $n \in \mathbb{N}$, נסמן: $\{p_1, ..., p_m\}$ את קבוצת כל המספרים הראשוניים שמחלקים את n.
אזי, $\phi(n) = n \prod_{k=1}^{m} (1 - \frac{1}{p_k})$ מספר המספרים הטבעיים הקטנים מ־n שזרים לו.

גם בהוכחה זו, הכי טוב לקרוא **מהספר**.
עמ' 150 (משפט 4.6.10 וההגדרה שלפניו).

4 תורת הגרפים

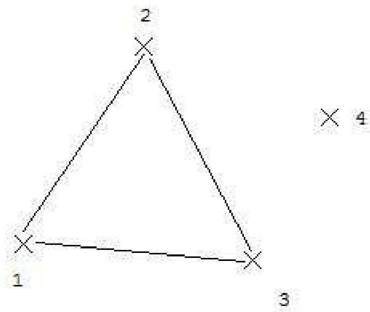
4.1 הגדרות וסימונים

יש הרבה מאוד (!!) הגדרות וסימונים בפרק זה. נתחיל:

הגדרה 4.1 בגרף G, נסמן:
V ־ קבוצת קודקודים (סופית)
E ־ קבוצת צלעות (קשתות)
נסמן: $G = (V, E)$ הגרף בעל הקבוצות הנ"ל.

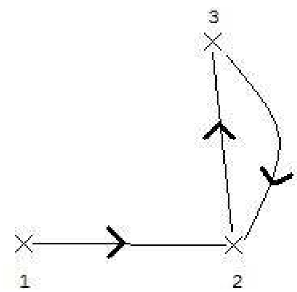
לעיתים נרצה לייצג גרף בעזרת מטריצה:

הגדרה 4.2 ייצוג ע"י מטריצת חילה
עבור גרף לא מכוון:



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	0
4	0	0	0	0

ועבור גרף מכוון, נכתוב: $a_{ij}=1\Leftrightarrow$ קיימת קשת בין i ל־j:



	1	2	3
1	0	1	0
2	0	0	1
3	0	1	0

עוד הגדרות:

הגדרה 4.3 קודקודים שכנים
קודקודים $u,v\in V$ ייקראו שכנים אם קיימת צלע (קשת) בין u ל־v.

הגדרה 4.4 קבוצת השכנים Γ
תהא $S\subseteq V$. קבוצת השכנים של S:

$$\Gamma(S)=\{v\in V\,|\,\exists u\in S\,:\,u,v\,are\,neighbours\}$$

הגדרה 4.5 דרגה של קודקוד
דרגה של קודקוד $v\in V$, שתסומן $d(v)$ או $deg(v)$ היא
מס' הצלעות המחוברות ל־v.
בגרף מכוון, לכל קודקוד ניתן להגדיר דרגת כניסה ודרגת יציאה.

הגדרה 4.6 קודקוד ייקרא **מבודד** אם דרגתו 0.

הגדרה 4.7 מסלול (מסילה)
סדרת קודקודים $(v_0, v_1, ..., v_n)$ תיקרא מסלול (או מסילה) בגרף G,
אם לכל $0 \le i \le n-1$, מתקיים $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
ולכל $0 \le i < j \le n-1$, מתקיים $\{v_i, v_{i+1}\} \ne \{v_j, v_{j+1}\}$,
כלומר לא חוזרים על אותה קשת פעמיים.
מסלול שבו כל הקודקודים שונים נקרא **מסלול פשוט**.

הגדרה 4.8 מעגל:
מסלול שבו $v_0 = v_n$
מעגל פשוט: מעגל שבו לכל $0 \le i < j \le n-1$, $v_i \ne v_j$.

הגדרה 4.9 אורך מסלול:
מס' הקשתות במסלול.

הגדרה 4.10 מרחק:
יהיו $u, v \in V$. אזי המרחק בין uל־v מוגדר כ:
$d(u,v) =$(האורך המינימלי של מסלול בין u ו־v אם קיים מסלול כזה, או ∞ אחרת)

הגדרה 4.11 קוטר של גרף:
הקוטר של גרף $G = (V, E)$ מוגדר להיות:

$$max_{v_1, v_2 \in V}\, d(v_1, v_2)$$

...עוד הגדרות!

הגדרה 4.12 הסרת קודקוד \ צלע

- יהי $x \in V$. אז $G \backslash x$ הוא הגרף G שהוצאו\נלקחו ממנו הקודקוד x וכל הצלעות החלות בו.
- תהי $S \subseteq V$. אז $G \backslash S$ הוא הגרף G שהוצאו ממנו הקודקודים הנמצאים ב־S,
  וכל הצלעות החלות בקודקודי S.

הגדרה 4.13 תת־גרף
יהי $G = (V, E)$. תת גרף של G הוא גרף $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$,
כך ש־ $\hat{V} \subseteq V$, $\hat{E} \subseteq E$.
אם $\hat{e} \in \hat{E}$, אזי הקודקודים בהם חלה הצלע $\hat{e}$ נמצאים ב־$\hat{V}$.
תת־גרף פורש:
תת־גרף פורש של $G = (V, E)$ הוא תת גרף המכיל את כל קודקודי G.

הגדרה 4.14 הגרף המשלים
אם $G = (V, E)$ אזי הגרף המשלים ל־G הוא $\overline{G} = (V, \overline{E})$,
כך שכל צלע שחלה ב־G לא חלה ב־$\overline{G}$, וכל צלע שלא חלה ב־G חלה ב־$\overline{G}$.

הגדרה 4.15 גרף ריק
גרף שלא מכיל אף צלע.

הגדרה 4.16 גרף שלם
גרף המכיל את כל הקשתות האפשריות בין הקודקודים.
גרף שלם מסדר n (בעל n קודקודים) מכיל $\binom{n}{2}$ צלעות.
גרף שלם מסדר n יסומן בד"כ ב־ K_n.

הגדרה 4.17 קליק, אנטי־קליק
אם $G=(V,E)$ גרף, אז תת קבוצה $S\subseteq V$ נקראת **קליק**
אם כל הקשתות בין קודקודי S נמצאות ב־G.

תת קבוצה $U\subseteq V$ תיקרא **אנטי־קליק** אם אין בין קודקודי U קשתות ב־G.
("קבוצה בלתי תלויה")

הגדרה 4.18 גרף רגולרי
גרף שהדרגות כל הקודקודים בו שוות. ("גרף k־רגולרי").

הגדרה 4.19 גרף קשיר, קשיר חזק

גרף לא מכוון ייקרא **קשיר** אם לכל $u,v\in V$ ישנו מסלול בין u ל־v.
גרף מכוון ייקרא **קשיר חזק** אם לכל זוג נקודות $u,v\in V$
קיים מסלול (מכוון) בין u ל־v ומסלול (מכוון) בין v ל־u.

הגדרה 4.20 רכיב קשירות
יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון.
נגדיר יחס שקילות על קודקודי G:
$v_1\sim v_2$ (כלומר $(v_1,v_2)\in R\wedge(v_2,v_1)\in R$)
אם קיימת מסילה בין v_1 ל v_2.
מחלקת שקילות של יחס זה נקראת **רכיב קשירות** של הגרף G.
בגרף מכוון: נגדיר $v_1\sim v_2$ אם קיימת מסילה מ־v_1 ל־v_2 וגם מ־v_2 ל־v_1.
כל מחלקת שקילות במקרה זה נקראת **רכיב קשירות חזק.**

4.1.1 קצת טענות \ הוכחות

למה 4.21 היחס R הנ"ל הוא יחס שקילות.

1. רפלקסיביות: ברור ש $(v,v)\in R$.
2. סימטריות: אם קיימת מסילה מ־v_1 ל־v_2 אז ברור שגם קיימת מv_2 ל־v_1 (הגרף לא מכוון).
3. טרנזיטיביות: אם קיימת מסילה מ־v_1 ל־v_2 וגם מ־v_2 ל־v_3 אז "נחבר אותן" ויש מסילה מv_1 לv_3.
(ראו הסבר בהמשך לגבי אי שויון המשולש, בהוכחת היות פונק' המרחק מטריקה)

טענה 4.22 יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. אזי:

$$\sum_{v\in V} deg(v)=2|E|$$

הוכחה: תהי $e \in E$.
e מחברת בין שני קודקודים $v_1, v_2 \in V$,
ולכן הצלע e תורמת 1 ל־$deg(v_1)$, ו־1 ל־$deg(v_2)$.
כלומר היא תורמת 1+1=2 ל־ $\sum deg(v)$.
מאידך, e תורמת 1 ל־$|E|$. ולכן תורמת 2 ל־$2|E|$. ■

מסקנה 4.23 בגרף, ישנו מספר **זוגי** של קודקודים בעלי דרגה אי זוגית.
(כי הסכום שלהם זוגי).

טענה 4.24 יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון קשיר. אזי הפונקציה $d(u, v)$ (מרחק), $d : V \times V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, היא **מטריקה:**

1. מתקיים: $d(u, v) \geq 0 \qquad \forall u, v \in V$
   ובנוסף, $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
2. $d(u, v) = d(v, u)$
3. אי שויון המשולש: לכל $u, v, w \in V$,
   $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

הוכחה: שתי התכונות הראשונות ברורות.
לגבי השלישית: לפי הנתון, יש מסלול מ־u ל־w העובר דרך v.
אבל ייתכן גם מסלול קצר יותר, **למשל** אם הוא עובר ישירות מu ל־w. ולכן זה נכון. ■

טענה 4.25 יהי G גרף קשיר, ותהי $\emptyset \neq S \subsetneqq V$.
אז קיים $u \in V$, $u \notin S$ כך ש־u שכן של S.

הוכחה: קיים קודקוד $w \in V$ כך ש־$w \notin S$, מכיוון ש $S \subsetneqq V$.
אז נבחר קודקוד $t \in S$ (קיים כזה כי $S \neq \emptyset$).
מכיוון שהגרף קשיר, ישנה מסילה בין w ל־t.
המסילה הזו מתחילה ב־$w \notin S$, וקיים בה קודקוד **ראשון** הנמצא ב־S. נסמנו: $\hat{t}$.
הקודקוד העומד לפניו במסילה, נסמנו $\hat{w}$, איננו ב־S.
וכעת, ל־$\hat{w}$ יש שכן ב־S. ■

טענה 4.26 יהי G גרף בעל n קודקודים.
אם G קשיר, אזי ב־G לפחות $n-1$ צלעות.

הוכחה: יהי G גרף בעל n קודקודים. נראה כי אם ב־G m צלעות, ו־ $m < n-1$,
אז ב־G לפחות $n-m$ רכיבי קשירות. זה יוכיח את הטענה, כי אז הגרף לא קשיר.
(כי $m < n-1 \Leftarrow m \leq n-2$ ואז יש לפחות 2 רכיבי קשירות כי $n-(n-2) = 2$).
נוכיח טענה זו באינדוקציה על m.
אם $m = 0$, אזי בגרף אין צלעות, כלומר ב־G יש n רכיבי קשירות. $n - m = n - 0 = n$.
נניח כי הטענה נכונה עבור $m-1$ ונראה עבור m.
יהי $\hat{G} = G \backslash e$ (כלומר פחות צלע אחת).
ב־G ישנן n צלעות, ולכן ב־$\hat{G}$ יש $n-1$ צלעות.
לפי הנחת האינדוקציה, בגרף $\hat{G}$ יש לפחות $n-(m-1)$ רכיבי קשירות.
הגרף G מתקבל מ־$\hat{G}$ ע"י הוספת קשת אחת.
אם קודקודי הקשת (הנוספת) נמצאים באותו רכיב קשירות,
אזי ב־G לפחות $n-m+1$ רכיבי קשירות (כמו קודם).

אם קודקודי הקשת הנוספת נמצאים ברכיבי קשירות שונים,
אזי מספר רכיבי הקשירות של G קטן ב־1 מזה של $\hat{G}$,
כלומר ב־G לפחות $m-n$ רכיבי קשירות. ■

טענה 4.27 יהי G גרף בעל $n \geq 3$ קודקודים, ו־ $m \geq n$ צלעות.
אזי G מכיל מעגל.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n.
עבור $n=3$, נקבל מעגל, כלומר "משולש" של 3 קודקודים מחוברים.
נניח כי הטענה נכונה עבור גרף בעל $n-1$ קודקודים,
ונתבונן בדרגות הקודקודים בגרף G (שהוא בעל n קודקודים).
מקרה א': נניח כי קיים קודקוד $v \in V$ שהוא בעל דרגה 1 או 0.
נגדיר: $\hat{G} = (G \backslash e) \backslash v$.
מס' הקודקודים ב־$\hat{G}$ הוא $n-1$. מס' הקשתות ב־$\hat{G}$ הוא $m-1$.
מכיוון ש־$m \geq n$, אז גם $m-1 \geq n-1$. ולכן לפי ההנחה יש מעגל ב־$\hat{G}$.
כמובן שאם $deg(v)$ היה 0, אז מס' הקשתות ב־$\hat{G}$ היה m,
ואז גם הטענה היתה נכונה כי $m \geq n-1$.
מקרה ב': הדרגה של כל קודקוד ב־G היא לפחות 2.
אז נבחר קודקוד מסויים, ונלך לאורך הגרף מבלי לחזור אחורה לקודקוד שהרגע היינו בו.
בגלל ההנחה שהדרגה של כל קודקוד היא לפחות 2, אז תמיד יהיה לאן להתקדם מבלי לחזור.
ומכיוון שאנו לא עוסקים בגרפים אינסופיים, אז בהכרח ניתקל בקודקוד ההתחלתי עוד פעם,
ולכן יש מעגל גם במקרה זה. ■

טענה 4.28 יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר.
אז $G \backslash e$ קשיר $\Leftrightarrow$ e שייך למעגל ב־G.

הוכחה: כיוון א':
נניח כי $G \backslash e$ קשיר. אז יהי $e=\{u,v\}$.
מכיוון ש$G \backslash e$ קשיר, אז קיים מסלול בין u ל־v גם לפני שנוסיף את e.
ולכן, כאשר נוסיף את e לגרף, אז הוא ישלים מעגל כי ניתן ללכת מ־v ל־u בדרך הישנה, ואז להמשיך עם e חזרה אל v.
כיוון ב':
נניח ש־e הוא חלק ממעגל ב־G, ונרצה להראות כי $G \backslash e$ קשיר.
כלומר להראות שבין כל זוג קודקודים $x,y \in V$, קיים מסלול ב־$G \backslash e$.
כלומר להראות שקיים מסלול ב־G שלא מכיל את e.
כעת, G הוא קשיר (נתון), ולכן יש מסלול בין x ל־y שלא כולל את e, מכיוון ש־e הוא חלק ממעגל:
כלומר אם היינו צריכים "לעבור ב־e" כדי להגיע מ־x ל־y, אז ניתן לעקוף אותו מהצד השני, כי הוא חלק ממעגל. ולכן $G \backslash e$ קשיר. ■

4.1.2 עוד קצת הגדרות וטענות (קוביות, גרפים דו צדדיים)

קוביות:

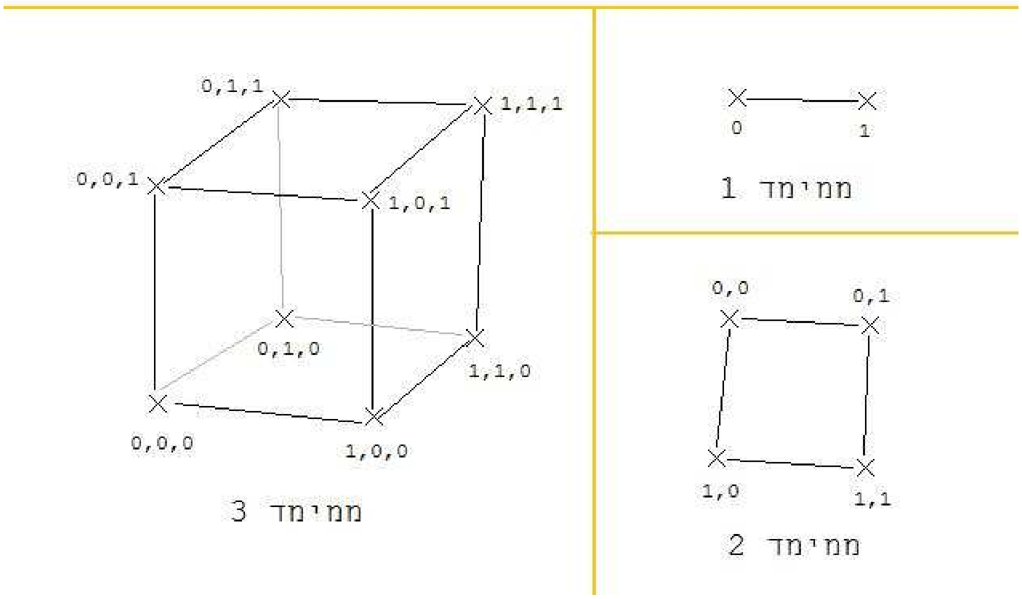
הגדרה 4.29 גרף של קוביה ממימד n:

קודקוד של גרף כזה הוא מהטיפוס $(a_1, ..., a_n)$ כאשר $a_i \in \{0,1\}$.
בנוסף יש 2^n קודקודים, כי זהו מספר הסדרות באורך n של 1 או 0.

הקודקוד $(a_1, ..., a_n)$ מחובר בצלע ל־ $(\hat{a_1}, ..., \hat{a_n})$ אם הם שונים רק באינדקס בודד.

כלומר $\forall i \neq i_0 \, : \, a_i = \hat{a}_i \qquad \exists i_0 \, : \, a_{i_0} \neq \hat{a}_{i_0}$

קוביות



כמה צלעות יש לגרף של קוביה n מימדית?
כל קודקוד מחובר ל־n צלעות (כי יש n קודקודים ששונים ממנו בקואורדינטה אחת).
וראינו שיש 2^n קודקודים.
ולכן סכום כל הדרגות בקוביה הוא $2^n \cdot n$.
ראינו בטענה קודמת, שמתקיים $\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$.
כלומר $2^n \cdot n = 2|E|$.
ולכן, מספר הצלעות של קוביה n מימדית הוא:

$$\frac{2^n \cdot n}{2} = 2^{n-1}n$$

הגדרה 4.30 גרף דו־צדדי
נסמן: $G = (V_1, V_2, E)$.
זהו גרף שקודקודיו "מפוצלים" לשתי קבוצות זרות,
וכל קשת בגרף מחברת קודקוד ב־V_1 עם קודקוד ב־V_2.

משפט 4.31 גרף G הוא דו־צדדי $\Leftrightarrow$
כל המעגלים ב־G הם בעלי אורך זוגי $\Leftrightarrow$
כל המעגלים הפשוטים הם באורך זוגי.

הוכחה: בספר, עמוד 178, משפטים 5.2.15 וגם 5.2.16 (כדי להשלים את האם"ם האחרון). ■

4.2 עצים

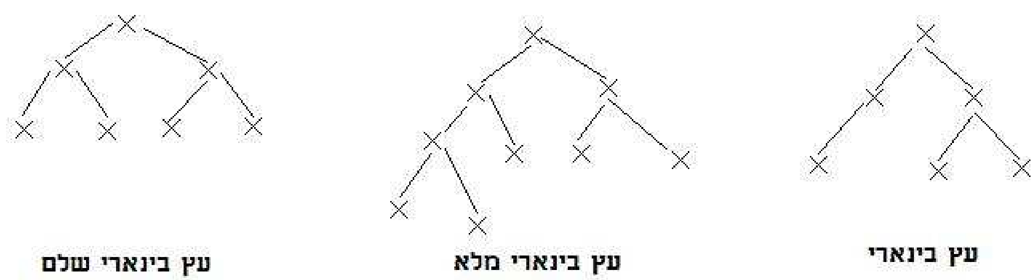
4.2.1 הגדרות

הגדרה 4.32 **יער** הוא גרף חסר מעגלים.

הגדרה 4.33 **עץ** הוא יער קשיר.

הגדרה 4.34 **עלה** הוא קודקוד בעץ בעל דרגה 1.
שורש: מסמנים קודקוד מסויים כשורש. לשורש אין אבות קדמונים.
אב קדמון של $v \in V$: קודקוד ש"נמצא יותר גבוה מ־v בהירכיה". (נמצא ברמה יותר גבוהה).
צאצא של $v \in V$: קודקוד ש־v הוא אב קדמון שלו.
הורה וילד: הם כמו אב קדמון וצאצא, במרחק 1 זה מזה.
קודקוד פנימי: הוא לא עלה.
גובה העץ: המרחק המקסימלי מעלה לשורש.
עומק של קודקוד: המרחק מהקודקוד לשורש.

הגדרה 4.35 **סוגי עצים:**
עץ בינארי: מספר הילדים של כל קודקוד הוא לכל היותר 2.
עץ בינארי מלא: לכל קודקוד שאינו עלה יש תמיד 2 ילדים.
עץ בינארי שלם: עץ בינארי מלא שכל העלים באותה רמה \ עומק.
עץ k־ארי: לכל קודקוד יש לכל היותר k ילדים.



כמה קודקודים יש לעץ k־ארי שלם בגובה h?

$$1 + k + k^2 + ... + k^h = \frac{k^{h+1} - 1}{k - 1}$$

מס' הקשתות הוא המספר הנ"ל פחות 1.
(נובע מהמסקנה בהמשך: "עץ בעל n קודקודים מכיל $n - 1$ צלעות").

4.2.2 טענות

טענה 4.36 בכל עץ בעל n קודקודים, $n \geq 2$, קיים עלה.

הוכחה: יהי $T(V, E)$ עץ. יהי $v_0 \in V$. נלך על המסלול עד שנגיע לקצה, וזהו העלה. (העץ סופי). ■

מסקנה 4.37 עץ בעל n קודקודים מכיל $n-1$ צלעות.

הוכחה: באינדוקציה. עבור $n=2$, זה נכון. (יש צלע אחת).
נניח שנכון ל־$n-1$. אז יהי T עץ בעל n קודקודים.
ותהי e צלע שמחוברת לעלה v בו.
נסתכל על $T\backslash e\backslash v$ (כלומר נסיר את e ואת העלה v).
יש בו $n-1$ קודקודים, ולכן מההנחה, יש בו $(n-1)-1$ צלעות.
ולכן אם נוסיף חזרה את e אז יש $n-1$ צלעות. ∎

טענה 4.38 גרף G הוא עץ אם ורק אם מתקיים אחד מהבאים: (מספיק אחד בלבד כמובן)

1. G קשיר ומינימלי בעל תכונה זו ־ לכל $e\in E$, $G\backslash e$ איננו קשיר.
2. G איננו מכיל מעגלים והוא מקסימלי בעל תכונה זו: הוספה של קשת ל־G מוסיפה מעגל.
3. גרף קשיר עם n קודקודים ו־$n-1$ צלעות.

לא ניתנה הוכחה בהרצאה, עד כמה שידוע לי.

הגדרה 4.39 תזכורת: תת־גרף פורש
תת־גרף פורש של $G=(V,E)$ הוא תת גרף המכיל את כל קודקודי G.
(נזכור שתת־גרף מכיל גם צלעות).
כמו כן, **עץ פורש** הוא תת גרף פורש שהוא גם עץ.

משפט 4.40 $G=(V,E)$ הוא קשיר אם"ם ל־G קיים עץ פורש.

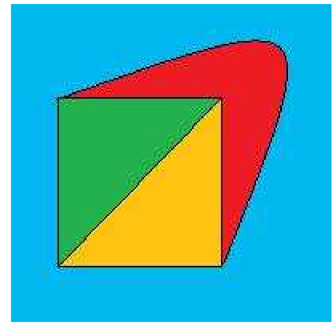
הוכחה: כיוון א:
אם ל־G יש תת־עץ פורש T, אזי T קשיר מהיותו עץ, ולכן גם G קשיר.
כיוון ב: נניח ש G קשיר.
כעת, אם G איננו עץ בעצמו, אזי ב־G יש מעגל, (כי עץ הוא גרף חסר מעגלים קשיר),
ולכן ישנה ב־G צלע e הנמצאת במעגל, ואז $G\backslash e$ קשיר. נמשיך כך עד שנקבל עץ.
(כלומר ניתן להסיר את כל מה שלא נחוץ עד שנגיע לעץ). ∎

4.3 גרפים מישוריים

4.3.1 הגדרות

הגדרה 4.41 גרף מישורי
זהו גרף שניתן לייצג במישור, ע"י נקודות המתאימות לקודקודי הגרף,
ומסלולים **שאינם נחתכים** במישור המתאימים לקשתות הגרף.
(או בקיצור גרף שניתן לציור כך שאף צלע בו לא חותכת צלע אחרת).

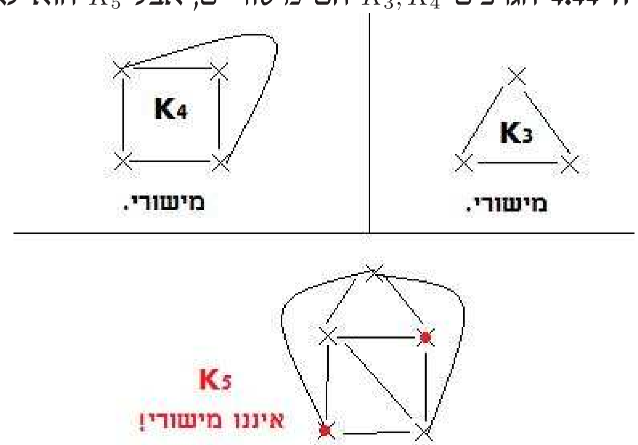
הגדרה 4.42 פאה
זהו תחום במישור, ששפתו היא מעגל פשוט של הגרף, והתחום הזה לא מכיל אף מסלול מהגרף.
נסמן בגרף את הפיאות באות F. כלומר יש $|F|$ פיאות לגרף.



מימין: פאות. נשים לב לפאה החיצונית (בכחול).
כל צלע גובלת בפאה אחת או שתיים.
השפה של כל פיאה (חסומה) מכילה לפחות 3 צלעות.
אם הגרף מכיל יותר משתי צלעות, אזי גם הפאה הלא חסומה שפתה מכילה לפחות 3 צלעות.

הגדרה 4.43 עידון
עידון של גרף הוא גרף המתקבל ע"י הוספת קודקודים נוספים מדרגה 2 לאורך הצלעות.
(כלומר הוספת קודקודים לאורך הצלעות).

הערה 4.44 הגרפים K_3, K_4 הם מישוריים, אבל K_5 הוא לא:



4.3.2 נוסחת אוילר

משפט 4.45 נוסחת אוילר
יהי G גרף מישורי קשיר. אזי,

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

הוכחה: נניח כי ל־G יש $n = |V|$ קודקודים, ו־$m = |E|$ צלעות.
G קשיר, ולכן $m \geq n - 1$.
נוכיח באינדוקציה על m:
תחילה נוכיח עבור $m = n - 1$. אח"כ נניח נכונות עבור $m - 1$ ונוכיח ל־m.
כאשר $m = n - 1$, הגרף הוא עץ. ואז,

$|F| = 1$ כי בעץ אין מעגלים. $|E| = n - 1$, $|V| = n$.
אז מתקיים: $|V| - |E| + |F| = n - (n-1) + 1 = 2$.
הוכחנו בסיס, וכעת נניח נכונות עבור $m - 1$ של הנוסחה.
מכיוון שכבר הוכחנו עבור $m = n - 1$, ואמרנו ש$m \geq n - 1$,
אז כעת נניח ש־ $m \geq n$.
עקב הנחה זו, קיים ב־G מעגל.
("יהי G גרף בעל $n \geq 3$ קודקודים, ו־ $m \geq n$ צלעות. אזי G מכיל מעגל.")
ולכן קיימת ב־G צלע e שהיא חלק ממעגל.
הוכחנו כי במקרה זה, $G \backslash e$ קשיר, וכמובן מישורי.
("יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר. אז $G \backslash e$ קשיר $\Leftrightarrow$ e שייך למעגל ב־G.")
לפי ההנחה, $G \backslash e$ מקיים את נוסחת אוילר.
וכעת,

$$|V_{G\backslash e}| = |V_G| = n \qquad\qquad |E_{G\backslash e}| = |E_G| - 1$$

וכמו כן, מכיוון ש־e צלע במעגל, אז הסרתו מורידה את מספר הפאות ב־1. כלומר,

$$|F_{G\backslash e}| = |F_G| - 1$$

ואז נחשב:

$$|V_G| - |E_G| + |F_G| =$$

$$= |V_{G\backslash e}| - (|E_{G\backslash e}| + 1) + (|F_{G\backslash e}| + 1) =$$

$$= |V_{G\backslash e}| - |E_{G\backslash e}| + |F_{G\backslash e}| = 2$$

כאשר השויון ל־2 הוא לפי הנחת האינדוקציה. ■

4.3.3 עוד טענות

משפט 4.46 בכל גרף מישורי קשיר (פרט לגרף המכיל צלע אחת), מתקיים:

$$|E| \leq 3(|V| - 2)$$

הוכחה: ראשית, נזכור שמתקיים:
- כל צלע גובלת בפאה אחת או שתיים.
- השפה של כל פיאה (חסומה) מכילה לפחות 3 צלעות.
- אם הגרף מכיל יותר משתי צלעות, אזי גם הפאה הלא חסומה שפתה מכילה לפחות 3 צלעות.

ולכן,
$2|E| \geq$סכום כל מספרי הצלעות החלות בכל הפיאות $\geq 3|F|$.
כלומר $|F| \leq \frac{2}{3}|E|$.
וכעת, **נוסחת אוילר** אומרת:

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

$$|E| - |F| = |V| - 2$$

אבל, $|E| - |F| \geq |E| - \frac{2}{3}|E| = \frac{1}{3}|E|$ ולכן,

$$\frac{1}{3}|E| \leq |V| - 2$$

$$|E| \leq 3(|V| - 2)$$

■

מסקנה 4.47 דוגמא לכך ש-K_5 וגם $K_{3,3}$ אינם מישוריים.
נראה ש-K_5 הוא לא מישורי:
מתקיים: $|V| = 5$, $|E| = \binom{5}{2} = 10$.
אילו K_5 היה מישורי, אזי היה מתקיים לפי המשפט הקודם:

$$10 \leq 3(5 - 2) = 9$$

סתירה!!! ולכן הוא לא מישורי.
נראה ש־$K_{3,3}$ הוא לא מישורי:
מתקיים: $|V| = 6$, $|E| = 9$.
ננסה לקבל סתירה מהמשפט הקודם, ולא נצליח:

$$9 \leq 3(6 - 2) = 12$$

אז לפי נוסחת אוילר:

$$|V| - |E| + |F| = 6 - 9 + |F| = 2$$

כלומר קיבלנו שצריך להתקיים: $|F| = 5$.
בגרף דו־צדדי, אורכו של כל מעגל הוא זוגי, ולכן לפחות 4.
כלומר, שפה של כל פאה אורכה 4 לפחות. אז,

$$4|F| \leq 2|E| \Rightarrow 2|F| \leq |E|$$

(לא ברור למה זה מתקיים...?)
נציב: $|E| = 9, |F| = 5$ **ונקבל** $10 \leq 9$, סתירה.

4.3.4 משפט *Kuratovski*

לא הוכחנו את המשפט הזה, למרות זה שצויין במפורש ש"אפשר להוכיח שהוא קשה להוכחה"....

משפט 4.48 *Kuratovski*
יהי G גרף. אזי,
G איננו מישורי **אם ורק אם** G מכיל תת־גרף שהוא עידון של K_5 או $K_{3,3}$.

4.3.5 עוד טענה! לגבי קיום קודקוד מדרגה ≤ 5 בגרף מישורי

משפט 4.49 יהי G גרף מישורי. אזי קיים ב־G קודקוד מדרגה ≤ 5.

הוכחה: ראשית, מספיק להתבונן ברכיב קשירות של G, ולכן ניתן להניח כי G קשיר.
לפי משפט שהוכחנו, $|E| \leq 3(|V| - 2)$.
כמו כן הוכחנו, $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$.
אז נסתכל על הממוצע:

$$\frac{\sum_{v \in V} deg(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|} \leq \frac{6(|V| - 2)}{|V|} < 6$$

מכיוון שהממוצע של סכום הדרגות של כל הקודקודים הוא קטן מ־6,
אז חייב להיות קיים קודקוד מדרגה ≤ 5. ■

4.4 מסלולים בגרפים (אוילר, המילטון)

4.4.1 אוילר ־ הגדרה

נשאלת השאלה: האם קיים בגרף מסלול (או מעגל) העובר על כל צלעות הגרף?

הגדרה 4.50 מסלול \ מעגל אוילר
יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר. (מכוון או לא מכוון, לאו דווקא מישורי...!)
מסלול (מעגל) אוילר בגרף הוא מסלול או מעגל העובר על כל קשתות הגרף.

4.4.2 טענות ומסקנות

משפט 4.51 בגרף קשיר לא מכוון קיים מעגל אוילר $\Leftrightarrow$ כל הדרגות זוגיות.
בגרף קשיר מכוון קיים מעגל אוילר $\Leftrightarrow$ דרגת הכניסה שווה לדרגת היציאה לכל קודקוד בגרף.

הוכחה: בספר, עמ' 191 (משפט 5.3.2) ■

מסקנה 4.52 אם G גרף קשיר ולא מכוון,
אז קיים ב־G **מסלול** אוילר $\Leftrightarrow$ קיימים בו בדיוק 0 או 2 קודקודים בעלי דרגה אי זוגית.

הוכחה: בספר, עמ' 193 (מסקנה 5.3.5. כדאי גם לא לפספס את הבדיחה בתחתית העמוד!) ■

4.4.3 סדרת $De\,Bruijn$

פעם נוספת, עדיף לפנות **לספר:** עמ' 194 (דוגמה 5.3.7)

4.4.4 המילטון - הגדרה

הגדרה 4.53 מסלול \ מעגל המילטון
יהי G גרף קשיר. **מסלול (מעגל) המילטוני** הוא מסלול (מעגל) העובר דרך כל קודקודי הגרף, כל קודקוד פעם אחת בלבד.

דיברנו בהרצאה בקצרה על "בעיית הסוכן הנוסע". כדאי לקרוא קצת בנידון, זה די מעניין.

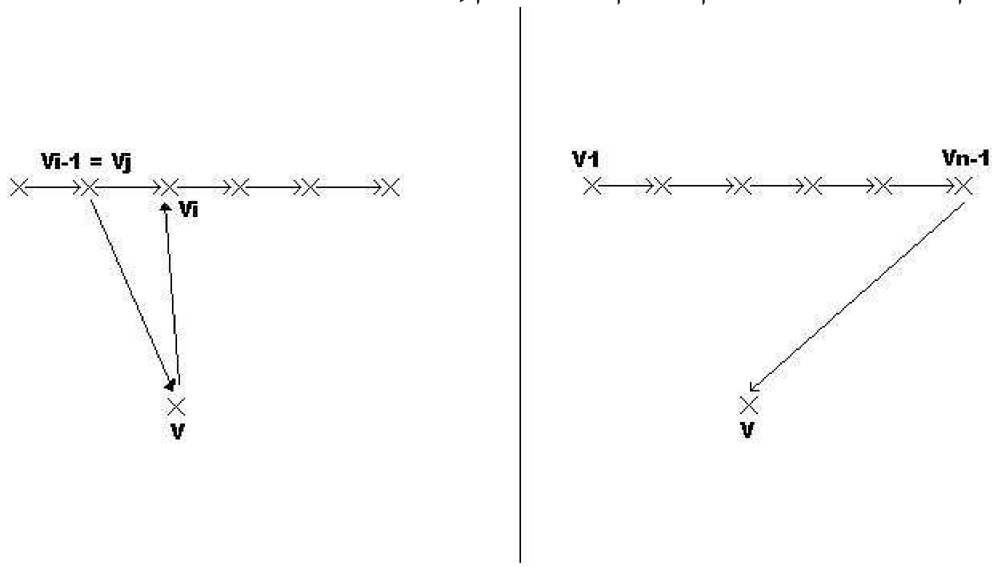
4.4.5 גרף תחרות ומשפט $Szele$

הגדרה 4.54 תחרות
גרף מכוון $G=(V,E)$ על n קודקודים שבו לכל זוג קודקודים $x,y\in V$ קיימת צלע מ־x ל־y או צלע מ־y ל־x, **אך לא שתיהן**, נקרא **תחרות**.

משפט 4.55 $Szele$
בכל גרף תחרות קיים מסלול המילטון.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על מספר הקודקודים בגרף.
עבור $n=2$: יש לנו: $\odot\rightarrow\odot$ וזה כמובן מכיל מסלול המילטון.
כעת נניח כי הטענה נכונה לגרף תחרות בעל $n-1$ קודקודים ונוכיח לגרף תחרות בעל n קודקודים.
יהי G גרף תחרות בעל n קודקודים. נבחר קודקוד $v\in V$ מתוכו.
נסתכל על $\hat{G}=G\backslash v$. הוא עדיין גרף תחרות (כי זרקנו את כל הצלעות שחלות ב־v גם כן),
בעל $n-1$ קודקודים. לפי הנחת האינדוקציה, ב־$\hat{G}$ קיים מסלול המילטון.
(המשך ההוכחה לא היה ברור, אני כותב את זה מהזיכרון אז תיתכן טעות).
כעת, נסדר את קודקודי $\hat{G}$ בשורה, כך שכל אחד מצביע זה שמימין לו.
(ניתן לעשות כך כי יש מסלול המילטון).
נסמנם $v_1,...,v_{n-1}$.
ננסה לראות איך הקודקוד שהסרנו v יכול להשתלב לתוך הגרף:
יש כמה אופציות:
תחילה נניח שקיים v_i כך ש־v מצביע על v_i, ונבחר ב־v_i **המינימלי** הזה.
אז אם $v_i=v_1$, אז וודאי שסיימנו, כי ניקח את המסלול $v,v_1,...,v_n$.
אחרת, קיים אינדקס **מקסימלי** j שמקיים $j<i$, כך שיש צלע מ־v_j אל v.
כעת, בהכרח מתקיים ש־$j=i-1$,

כי אחרת היינו מקבלים שיש צלע מ־v אל v_{i-1}, בסתירה למינימליות v_i.
וכעת, גם במצב זה יש מסלול המילטון, כי ניקח את $v_1, ..., v_{i-1}, v, v_i, ..., v_{n-1}$.
אחרת, בהכרח כל הקשתות בין v לבין $\hat{G}$ הן בכיוון של יוצאות מ־$\hat{G}$ ומצביעות על v.
גם במקרה זה יש מסלול המילטון, כי ניקח $v_1, ..., v_{n-1}, v$.
ולכן בכל מקרה יש מסלול המילטון. מצורף ציור מושקע ומרהיב:



■

4.5 זיווגים בגרפים

4.5.1 הגדרה

הגדרה 4.56 זיווג
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. **זיווג** M בגרף G הוא אוסף של קשתות, כך שקבוצת הקודקודים המתאימה לקשת אחת ב־M זרה לקבוצת הקודקודים המתאימה לכל קשת אחרת ב־M.
(כלומר "כל זוג קשתות לא נוגעות אחת בשניה", או, אין שתי צלעות ב־M בעלות קודקוד משותף).
זיווג ייקרא **זיווג מושלם** אם כל קודקוד בגרף חל באחת הצלעות בזיווג.

4.5.2 למת החתונה של $Hall$

משפט 4.57 יהי $G = (V_1, V_2, E)$ גרף דו־צדדי לא מכוון, שבו $|V_1| = |V_2|$.
ל־G קיים זיווג מושלם אם"ם לכל תת־קבוצה $S \subseteq V_1$: $|\Gamma(S)| \geq |S|$.

הוכחה: בספר. עמ' 202 (משפט 5.4.2) ■

מסקנה 4.58 הכללה פשוטה:
ללא ההנחה ש־ $|V_1| = |V_2|$, מתקיים
לכל $S \subseteq V_1$, מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$ אם"ם קיים זיווג המכיל את כל קודקודי V_1.
(כנראה שלא הוכחנו זאת).

מסקנה 4.59 מסקנה מיידית של משפט $Hall$
בגרף $G = (V_1, V_2, E)$ דו־צדדי k־רגולרי ($k \geq 1$) קיים זיווג מושלם.

הוכחה: ראשית, מספר הצלעות בגרף G הוא: (נזכור שבגרף רגולרי, הדרגות של כל הקודקודים שוות)

$$|E| = k \cdot |V_1| = k \cdot |V_2|$$

ולכן $|V_1| = |V_2|$.
תהי $S \subseteq V_1$. אזי,
מספר הצלעות החלות בקודקודי S הוא $|S| \cdot k$.
כמו כן, מספר הצלעות שחלות בקודקודי $\Gamma(S)$ הוא $|\Gamma(S)| \cdot k$.
אבל, כל צלע שחלה בקודקודי S נספרת גם ב־$|\Gamma(S)|$, וייתכנו עוד צלעות שם שזרות ל־S,
ולכן מתקיים:
מספר הצלעות החלות בקודקודי $\Gamma(S) \leq$ מספר הצלעות החלות בקודקודי S,
כלומר $|S| \cdot k \leq |\Gamma(S)| \cdot k$ ולכן $|S| \leq |\Gamma(S)|$.
זה נכון לכל תת־קבוצה $S \subseteq V_1$, ובנוסף ראינו ש־$|V_1| = |V_2|$,
ולכן מתקיימים התנאים של המשפט של $Hall$, ולכן קיים זיווג מושלם ב־G. ∎

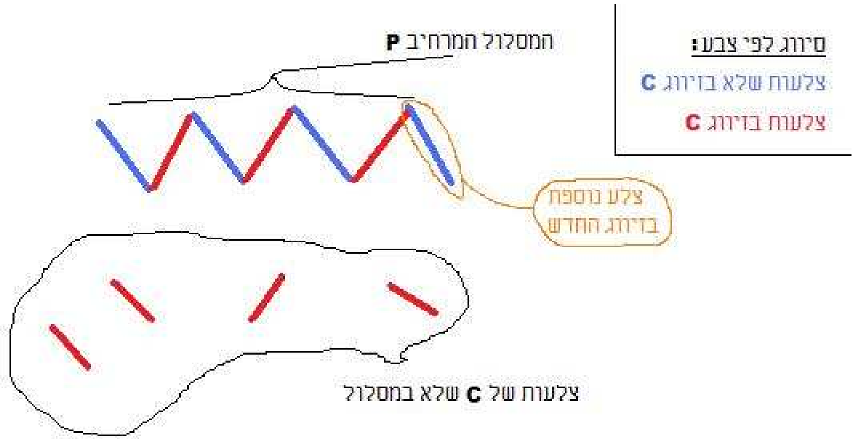
4.5.3 מסלול מתחלף, מרחיב

הגדרה 4.60 מסלול מתחלף (ביחס לזיווג)
יהי $P = v_0, ..., v_l$ מסלול פשוט בגרף G,
[כלומר לכל $0 \leq i < j \leq n-1$, מתקיים $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\}$,
(לא חוזרים על אותה קשת פעמיים), וכל הקודקודים שונים.]
ויהי C זיווג בגרף G.
מסלול מתחלף ב־G הוא מסלול שהצלעות בו שייכות ולא שייכות לזיווג C, לסירוגין.

הגדרה 4.61 מסלול מרחיב (ביחס לזיווג)
מסלול מתחלף P ייקרא **מסלול מרחיב**
אם הקודקוד הראשון והאחרון במסלול הם שונים, ולא חלים בקשת השייכת לזיווג C.

משפט 4.62 יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, ויהי C זיווג ב־G. אז,
הזיווג C הוא זיווג בעל מספר מקסימלי של צלעות ב־G $\Leftrightarrow$
ב־G לא קיים מסלול מרחיב ביחס לזיווג C.

הוכחה: נוכיח את אם־ורק־אם של השלילה, וזה שקול למקור. (כנראה?)
כיוון א': נניח כי קיים מסלול מרחיב ב־G ביחס לזיווג C. (זה ייגרור שהוא לא מקסימלי).
יהי P המסלול המרחיב.
נגדיר זיווג חדש המורכב מצלעות הזיווג C שאינן במסלול המרחיב,
בנוסף לכל הצלעות במסלול המרחיב שאינן ב־C. (הן לא "נוגעות" אחת בשניה ולכן זה אפשרי).
בסה"כ, יש בזיווג החדש צלע אחת בדיוק יותר מבזיווג C ולכן C לא מקסימלי.
(כי יש במסלול P מספר זהה של צלעות מהזיווג החדש והישן, ובנוסף צלע נוספת כי גם ההתחלה וגם הסוף הם לא ב־C, ובנוסף כללנו את כל צלעות C שלא נמצאות במסלול בזיווג החדש. ולכן יש בדיוק צלע אחת יותר בזיווג החדש). (יותר ברור בציור):



כיוון ב': נניח כי הזיווג C אינו מקסימלי, ונרצה להראות שקיים זיווג מרחיב.
אם כן, נניח כי C איננו זיווג מקסימלי. אזי קיים זיווג D בגרף כך ש־ $|C| < |D|$.
ההפרש הסימטרי $D\Delta C$ מוגדר כ־ $D\Delta C = (D\backslash C) \cup (C\backslash D)$.
נתבונן בגרף $\hat{G}$ שנגדיר ע"י:

$$\hat{G} = (V, D\Delta C)$$

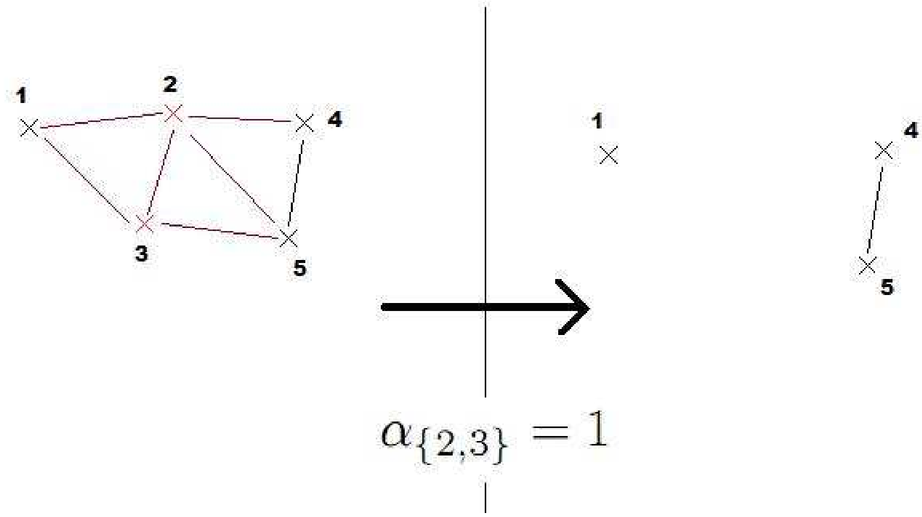
מהי דרגת הקודקודים ב־$\hat{G}$?
נתבונן בגרף $\hat{G}$, שבו לכל הקודקודים דרגות 0,1, או 2 . (אלה האופציות היחידות)
כל רכיב קשירות בגרף שכזה, הוא אחת מהאפשרויות הבאות:

- קודקוד בודד ־ אין צלעות
- מסלול פשוט
- מעגל פשוט ־ מספר הצלעות מ־C שווה למספר הצלעות מ־D.

ובכל מקרה, אם יש ב־$\hat{G}$ מסלול, אז הוא מורכב לסירוגין מצלעות מ־$|D\backslash C|$ ומ־$|C\backslash D|$.
אבל אנחנו יודעים ש־ $|C| < |D|$, ולכן גם $|C\backslash D| < |D\backslash C|$.
ולכן גם קיים רכיב קשירות ב־$\hat{G}$ שהוא מסלול פשוט, ובו:
מס' הצלעות מ־D >מספר הצלעות מ־C.
מסלול פשוט כזה הוא מסלול מרחיב בהכרח, כי אמרנו שהוא מורכב לסירוגין מצלעות משני הזיווגים C, D, ובנוסף יש צלע אחת יותר שמקורה ב־D, כלומר הוא מתחיל בצלע מ־D, ממשיך לסירוגין, ונגמר בצלע מ־D, ולכן הוא מרחיב.
(ההוכחה מאוד לא היתה לי ברורה, יכול להיות שיש כאן טעות. בכל מקרה יש משפט שקול **בספר**, בעמ' 204, משפט 5.4.5) ■

4.5.4 משפטאט $Tutte$

הגדרה 4.63 α_s
יהי $G = (V, E)$ גרף, ותהי $S \subseteq V$ תת קבוצה של קודקודים.
נסמן ב־α_s את **מספר רכיבי הקשירות של** $G\backslash S$ **שבהם מספר אי זוגי של קודקודים**.



לדוגמא:
הוכחנו בהרצאה רק כיוון אחד של המשפט הבא. ייתכן שהכיוון השני הוכח גם בתרגול, אני לא בטוח.

משפט 4.64 $Tutte$
בגרף G לא מכוון,
קיים זיווג מושלם $\Leftrightarrow$ לכל תת־קבוצה $S \subseteq V$ מתקיים $\alpha_s \leq |S|$.

הוכחה: כיוון א': נניח שב־G קיים זיווג מושלם. תהי $S \subseteq V$.
רכיב קשירות של $G \backslash S$ שלו מספר אי זוגי של קודקודים חייב להכיל קודקוד שבן זוגו בזיווג נמצא בקבוצה S.
ולכן אם נניח בשלילה ש־ $|S| > \alpha_s$, אז יש יותר רכיבי קשירות ב־$G \backslash S$ בעלי מס' אי זוגי של קודקודים, מאשר שיש קודקודים בקבוצה S. אבל אמרנו שלכל רכיב קשירות כזה יש קודקוד שבן זוגו בזיווג נמצא ב־S, כלומר יש רכיב קשירות אחד לפחות שיש בו קודקוד "בודד" ללא בן זוג ב־$|S|$ (אפשר לראות את זה משובך היונים), ולכן קיבלנו סתירה.
ולכן $\alpha_s \leq |S|$.
כיוון ב' לא הוכחנו בהרצאה, ייתכן שהוכחנו אותו בתרגול? אין הוכחה בספר. ■

4.6 בעיות מניה בגרפים

4.6.1 עצים מתוייגים (משפט $Cayley$)

הגדרה 4.65 עץ מתוייג
ניתן לכל קודקוד שם או סימון.
שני עצים מתוייגים הם זהים אם יש איזומורפיזם בין שניהם ששומר את התיוג.
כלומר, (הסבר שלי, כי כל העניין ממש לא ברור לי):
מתייגים את הקודקודים, ואז מתייחסים לכל צלע כאל $\{u,v\}$ כאשר $u,v \in V$.
שני עצים מתוייגים הם זהים אם רשימת הצלעות המתוייגות שלהם זהה. (כנראה).

נשאלת השאלה: כמה עצים מתויגים בעלי n קודקודים ישנם?

משפט 4.66 $Cayley$
מספר העצים המתוייגים בעלי n קודקודים הוא n^{n-2} (כאשר $n \geq 2$).

הוכחה: בספר: עמ' 214 (משפט 5.6.1)
(עשינו בתרגול את ההוכחה הראשונה, וראינו בהרצאה את ההוכחה השניה).

■

4.6.2 עצים לא מתוייגים

לצערי ההרצאות בנושא זה לא היו לי ברורות ורישומיי במחברת הם חסרי ערך בנושא.
נפנה **לספר:** עמוד 221 להגדרה ודיון, ועמוד 223: משפט 5.6.9.
ראינו בהרצאה את החסם התחתון של משפט זה, ובתרגול את החסם העליון.

4.7 בעיות קיצון בגרפים

4.7.1 מספרי $Ramsey$

נתון גרף שלם G על n קודקודים.
בהינתן שני מספרים $s,t \in \mathbb{N}$, מהו n המינימלי המבטיח כי בכל צביעה של G בשני צבעים כחול ואדום, קיים תת־גרף שלם K_s הצבוע כולו בכחול או תת גרף שלם K_t הצבוע כולו באדום?

הגדרה 4.67 n מינימלי כזה נקרא **מספר רמזי** $R(s,t)$.

4.7.2 דוגמא קטנה ־ נקודת מבט שונה על טענה שעשינו בשובך היונים

טענה 4.68 בגרף שלם בעל 6 קודקודים או יותר,
אם נצבע צלעותיו בשני צבעים, נמצא משולש הצבוע באותו הצבע.

הוכחה: יהי $v \in K_6$.
ל־v יש 5 שכנים. לכן לפחות 3 שכנים מחוברים ל־v באותו צבע. (כחול)
אם יש צלע מחברת בכחול בין אחד מה־3, אז יש משולש ביניהם.
(כי יש שתי צלעות ביניהם ולבין v ועוד צלע מחברת נוספת).
אם לא, אז יש ביניהם משולש באדום!
(כי יש 3 צלעות שלא מחוברות בכחול אז בהכרח הן מחוברות באדום).
הוכחנו בזאת כי $R(3,3) \leq 6$.
אך ניתן למצוא צביעה בשני צבעים של K_5 כך שאין משולש באותו הצבע,
ולכן $R(3,3) > 5$, כלומר $R(3,3) = 6$, אז 6 הוא המספר המינימלי שמבטיח זאת! ■

4.7.3 משפט $Erdös - Szekeres$ (השני!)

משפט 4.69 מתקיים:

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$$

הוכחה: **בספר:** עמ' 233 (משפט 5.7.2)

■

4.7.4 משפט $Mantel$

בעיה: נתבונן באוסף הגרפים מסדר n.
מהו מספר הצלעות המינימלי המבטיח קיום משולש בגרף?

משפט 4.70 $Mantel$
יהי $G=(V,E)$ גרף מסדר n, שלא מכיל משולש.
אזי: $|E| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, וחסם זה הדוק.

הוכחה: ראשית נראה כי החסם הדוק:
עבור $n=2l$, נתבונן בגרף הדו־צדדי השלם שבכל צד l קודקודים: $K_{l,l}$.
מס' הצלעות ב־$K_{l,l}$ הוא $|E|=l^2$.
כעת, $n=2l \Rightarrow n^2=(2l)^2 \Rightarrow l^2=\frac{n^2}{4}$
ולכן מכיוון ש־ $|E|=l^2$, קיבלנו ש־

$$|E|=\frac{n^2}{4}=\frac{(2l)^2}{4}$$

וכעת, $K_{l,l}$ הוא גרף דו צדדי, ולכן כל מעגל בו הוא באורך זוגי.
אורך כל מעגל הוא ≥ 4, ולכן לא ייתכנו משולשים. ולכן החסם הדוק.
כעת נוכיח את המשפט:
נניח כי $n=2l$ (קל להוכיח גם לאי זוגי).
נוכיח את המשפט באינדוקציה על n.
עבור $n=2$, ברור כי בכל גרף מסדר 2 אין משולש.
כעת, נניח כי הטענה נכונה לכל $\hat{l}<l$ ונראה כי היא נכונה ל־l.
יהי $G=(V,E)$ גרף מסדר n ללא משולשים. ($n=2l$).
יהיו $u,v \in V$ קודקודים המחוברים בצלע ב־G.
נתבונן בתת־הגרף $\hat{G}$ המכיל את הקודקודים האחרים $x_1,...,x_{n-2}$ והצלעות ביניהם.
(כלומר $\hat{G}=G \backslash \{u,v\}$).
לפי הנחת האינדוקציה, מספר הצלעות $|\hat{E}|$ בגרף $\hat{G}$ הוא לכל היותר:

$$\frac{(n-2)^2}{4}=\frac{(2l-2)^2}{4}=(l-1)^2$$

נספור את הצלעות בין הקודקודים u,v לבין הקודקודים $x_1,...,x_{n-2}$:
כל קודקוד מהקבוצה $x_1,...,x_{n-2}$ מחובר בצלע ל־u או ל־v או לאף אחד מהם,
אך לא לשניהם (כי הנחנו שאין ב־G מעגלים).
ולכן, מספר הצלעות המחבר את u,v לקודקודים $x_1,...,x_{n-2}$ הוא $n-2=2(l-1)$ לכל היותר.
בסה"כ, בגרף G ישנן לכל היותר:

$$|E| \leq (l-1)^2+2(l-1)+1=l^2$$

צלעות. ומתקיים: $n=2l \Rightarrow n^2=4l^2$ ולכן

$$|E| \leq l^2=\frac{n^2}{4}$$

כנדרש. ■

4.7.5 צביעה בגרפים

הגדרה 4.71 צביעה
יהי נתון גרף $G = (V, E)$.
צביעה של גרף ב־k צבעים היא העתקה:

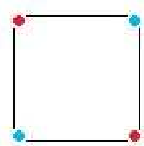
$$f : V \to \{1, ..., k\}$$

כך שאם $x, y \in V$ ו־ $(x, y) \in E$ אזי $f(x) \neq f(y)$.
(כלומר לשני שכנים יש צבעים שונים).

נסמן:
$\chi(G) = min(k)\{$ניתן לצבוע את קודקודי G ב־k צבעים$\}$

למשל:

- את K_t ניתן לצבוע ע"י t צבעים.
- גרף דו־צדדי אפשר לצבוע בשני צבעים. (ניתן להוכיח שגרף שניתן לצבוע ב־2 צבעים הוא דו־צדדי).



- בגרף מרובע מספיקים שני צבעים:

4.7.6 משפט טוראן $Turan$

משפט 4.72 בגרף לא מכוון G מסדר n שלא מכיל תת־גרף שלם K_t יש לכל היותר:

$$n^2 \frac{t-2}{2(t-1)}$$

צלעות.

הוכחה: בספר: עמ' 236 להסבר, ואח"כ הוכחת המשפט בעמ' 238 (משפט 5.7.6)
ההוכחה ממש מסובכת!! x_x

■

4.7.7 צביעה של מפות מישוריות

בהמשך להגדרת הצביעה מקודם, אנחנו מתעניינים בשאלה ־ בכמה צבעים אפשר לצבוע מפה של מדינות, אם לכל שתי מדינות שכנות צריך שיהיו צבעים שונים? ניתן לייצג כל מפה כגרף, כאשר מדינה מיוצגת ע"י קודקוד, ויש צלע בין שני קודקודים אם יש גבול בין שתי המדינות. ולכן הבעיה שקולה לבעייה של מציאת ה־k המינימלי כך שניתן לצבוע את הגרף ב־k צבעים.

משפט מפורסם שלא הוכחנו:
משפט ארבעת הצבעים:

כל מפה מישורית ניתנת לצביעה בעזרת 4 צבעים.
משפט 4 הצבעים $\Leftrightarrow$ כל גרף מישורי ניתן לצביעה ב־4 צבעים.

וכעת למשפט שכן הוכחנו:

משפט 4.73 כל גרף מישורי ניתן לצבוע ב־6 צבעים.

הוכחה: יהי G גרף מישורי. אם ב־G לא יותר מ־6 קודקודים, הטענה טריויאלית.
נוכיח באינדוקציה על מספר הקודקודים בגרף.
יהי G גרף מישורי בעל n קודקודים.
הוכחנו בעזרת **נוסחת אוילר** כי בגרף מישורי, תמיד קיים קודקוד v בעל דרגה ≤ 5.
נתבונן ב־ $\hat{G} = G \backslash \{v\}$.
$\hat{G}$ גרף מישורי בעל $n-1$ קודקודים, ולכן לפי הנחת האינדוקציה הוא ניתן לצביעה בעזרת 6 צבעים.
שכני $\hat{G}$ צבועים בלכל היותר 5 צבעים. נשלים את צביעת G ע"י צביעת v בצבע הנותר.

$\blacksquare$

5 תמצית החומר

סוגי יחסים (שקילות, סדר)

- יחס נקרא **יחס שקילות** אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.
- יחס נקרא **יחס סדר חלקי** אם הוא רפלקסיבי, אנטי־סימטרי, וטרנזיטיבי.
- יחס סדר חלקי ייקרא **יחס סדר קוי (ליניארי\מלא)** אם לכל x, y מתקיים xRy או yRx.
- יחס סדר קוי ייקרא **סדר טוב** אם לכל תת־קבוצה $B \subseteq A$ קיים איבר מינימלי.
  כלומר $\forall \emptyset \neq B \subseteq A \qquad \exists b_m \in B \,:\, \forall b \in B \,:\, (b_m, b) \in R$.

זהויות קומבינטוריות

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ לכל n ולכל $0 \leq k \leq n$.
- עבור $0 \leq m \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$
- לכל n ולכל $1 \leq k \leq n$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

מקדמים מולטינומיים

סימון: $\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ (כאשר $n = n_1 + \ldots + n_k$).

משפט 5.1 מספר המילים שניתן להרכיב מהסימנים $\{1, \ldots, k\}$ כאשר יש n_i סימני i הוא:

$$\frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots., n_k}$$

כמסקנה מכך, יש הכללה של הבינום של ניוטון:

טענה 5.2

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1 + \ldots + n_k = n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$$

מספרי קטלן

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- מספר הסדרות המאוזנות שכוללות n אפסים ו־n אחדים הוא C_n.
- מספר הדרכים לחלק מצולע בעל $n+2$ צלעות
ל־n משולשים בעזרת אלכסונים שלא נחתכים, הוא C_n.
- מתקיים: $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$

מספרי סטירלינג

כמה אפשרויות ישנן לחלק את הקבוצה $\{1, ..., n\}$ ל־k תת־קבוצות לא ריקות?
נסמן: $S(n,k)$ ־ מס' האפשרויות לחלק $\{1, ..., n\}$ ל־k תת־קבוצות לא ריקות.
מתקיים:$S(n,1) = 1$, $S(n,n) = 1$ וגם:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

ונשים לב שזה כמעט זהות פסקל! הרעיון דומה.

תמורות ללא נקודות שבת

מספר התמורות של $\{1, ..., n\}$ ללא נקודות שבת הוא $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

משפט ארדש ־ סקרש ($Erdös - Szekeres$)

לכל סדרה באורך n^2+1 של מספרים ממשיים שונים,
קיימת תת־סדרה מונוטונית עולה באורך $n+1$ או תת־סדרה מונוטונית יורדת באורך $n+1$.

שובך יונים

- $n+1$ יונים המחולקות ל־n תאים, מכילות זוג יונים הנמצא באותו התא.
- אם נפזר $kn+1$ כדורים ב־n תאים, אז קיים תא שבו לפחות $k+1$ כדורים.

פונקציית אוילר

עבור $n \in \mathbb{N}$, נסמן: $\{p_1, ..., p_m\}$ את קבוצת כל המספרים הראשוניים שמחלקים את n.
אזי, $\phi(n) = n\prod_{k=1}^{m}(1 - \frac{1}{p_k})$ מספר המספרים הטבעיים הקטנים מ־n שזרים לו.

טענה 5.3 יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. אזי:

$$\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$$

מסקנה 5.4 בגרף, ישנו מספר **זוגי** של קודקודים בעלי דרגה אי זוגית.
(כי הסכום שלהם זוגי).

טענה 5.5 יהי G גרף בעל n קודקודים.
אם G קשיר, אזי ב־G לפחות $n-1$ צלעות.

טענה 5.6 יהי G גרף בעל $n \geq 3$ קודקודים, ו־ $m \geq n$ צלעות.

אזי G מכיל מעגל.

טענה 5.7 יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר.

אז $G\backslash e$ קשיר $\Leftrightarrow$ e שייך למעגל ב־G

כמה צלעות יש לגרף של קוביה n מימדית?
כל קודקוד מחובר ל־n צלעות (כי יש n קודקודים ששונים ממנו בקואורדינטה אחת).
ויש 2^n קודקודים. ולכן סכום כל הדרגות בקוביה הוא $2^n \cdot n$.
ראינו בטענה קודמת, שמתקיים $\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$.
כלומר $2^n \cdot n = 2|E|$.
ולכן, מספר הצלעות של קוביה n מימדית הוא:

$$\frac{2^n \cdot n}{2} = 2^{n-1}n$$

משפט 5.8 גרף G הוא דו־צדדי $\Leftrightarrow$
כל המעגלים ב־G הם בעלי אורך זוגי $\Leftrightarrow$
כל המעגלים הפשוטים הם באורך זוגי.

טענה 5.9 עץ בעל n קודקודים מכיל $n-1$ צלעות.

משפט 5.10 נוסחת אוילר
יהי G גרף מישורי קשיר. אזי,

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

מסקנה 5.11 בכל גרף מישורי קשיר (פרט לגרף המכיל צלע אחת), מתקיים:

$$|E| \leq 3(|V|-2)$$

משפט 5.12 $Kuratovski$
יהי G גרף. אזי,
G איננו מישורי **אם ורק אם** G מכיל תת־גרף שהוא עידון של K_5 או $K_{3,3}$.
(לא הוכחנו אותו, לא להיבהל).

משפט 5.13 הי G גרף מישורי. אזי קיים ב־G קודקוד מדרגה ≤ 5.

הגדרה 5.14 מסלול \ מעגל אוילר
יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר. (מכוון או לא מכוון).
מסלול (מעגל) אוילר בגרף הוא מסלול או מעגל העובר על כל קשתות הגרף.

משפט 5.15 בגרף קשיר לא מכוון קיים מעגל אוילר $\Leftrightarrow$ כל הדרגות זוגיות.
בגרף קשיר מכוון קיים מעגל אוילר $\Leftrightarrow$ דרגת הכניסה שווה לדרגת היציאה לכל קודקוד בגרף.

מסקנה 5.16 אם G גרף קשיר ולא מכוון,
אז קיים ב־G **מסלול** אוילר $\Leftrightarrow$ קיימים בו בדיוק 0 או 2 קודקודים בעלי דרגה אי זוגית.

הגדרה 5.17 מסלול \ מעגל המילטון
יהי G גרף קשיר. **מסלול (מעגל) המילטוני** הוא מסלול (מעגל) העובר דרך כל קודקודי הגרף, כל קודקוד פעם אחת בלבד.

משפט 5.18 $Szele$
בכל גרף תחרות קיים מסלול המילטון.

הגדרה 5.19 זיווג
יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. **זיווג** M בגרף G הוא אוסף של קשתות, כך שקבוצת הקודקודים המתאימה לקשת אחת ב־M זרה לקבוצת הקודקודים המתאימה לכל קשת אחרת ב־M.
(כלומר "כל זוג קשתות לא נוגעות אחת בשניה", או, אין שתי צלעות ב־M בעלות קודקוד משותף).
זיווג ייקרא **זיווג מושלם** אם כל קודקוד בגרף חל באחת הצלעות בזיווג.

למת החתונה של $Hall$

משפט 5.20 יהי $G=(V_1,V_2,E)$ גרף דו־צדדי לא מכוון, שבו $|V_1|=|V_2|$.
ל־G קיים זיווג מושלם אס"ם לכל תת־קבוצה $S\subseteq V_1$: $|\Gamma(S)|\geq|S|$.

מסקנה 5.21 הכללה פשוטה:
ללא ההנחה ש־ $|V_1|=|V_2|$, מתקיים
לכל $S\subseteq V_1$, מתקיים $|\Gamma(S)|\geq|S|$ אס"ם קיים זיווג המכיל את כל קודקודי V_1.

משפט 5.22 $Tutte$
בגרף G לא מכוון,
קיים זיווג מושלם $\Leftrightarrow$ לכל תת־קבוצה $S\subseteq V$ מתקיים $\alpha_s\leq|S|$.

משפט 5.23 $Cayley$
מספר העצים המתוייגים בעלי n קודקודים הוא n^{n-2} (כאשר $n\geq 2$).

משפט 5.24 מספר העצים הלא מתויגים בעלי n קודקודים מקיים:
לכל $A<e$ ולכל n גדול מספיק, מתקיים: $A^n<U_n<4^n$.

מספרי $Ramsey$

נתון גרף שלם G על n קודקודים.
בהינתן שני מספרים $s,t \in \mathbb{N}$, מהו n המינימלי המבטיח כי בכל צביעה של G בשני צבעים כחול ואדום, קיים תת־גרף שלם K_s הצבוע כולו בכחול או תת גרף שלם K_t הצבוע כולו באדום?

הגדרה 5.25 n מינימלי כזה נקרא **מספר רמזי** $R(s,t)$**.**

משפט 5.26 $Erdös - Szekeres$ **(השני!)**

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s+t-2}{t-1}$$

משפט 5.27 $Mantel$

יהי $G=(V,E)$ גרף מסדר n, שלא מכיל משולש.
אזי: $|E| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, וחסם זה הדוק.

משפט 5.28 $Turan$

בגרף לא מכוון G מסדר n שלא מכיל תת־גרף שלם K_t יש לכל היותר:

$$n^2 \frac{t-2}{2(t-1)}$$

צלעות.

משפט 5.29 כל גרף מישורי ניתן לצבוע ב־6 צבעים. (אפילו ב־4, אבל לא הוכחנו זאת).