סמינר בנושא אנלוג להשערת קולץ בפולינומים

12 באוגוסט 2024

רקע מתמטי

סוג של נספח שאפשר לקרוא או לא או חלקית, לחשוב איפה לשים

- השדה $\mathbb{F}_2$ - הגדרה, טבלת כפל וחיבור, הגדרה של החוג $\mathbb{F}_2[x]$ (בלי לקרוא לו חוג)
- יחסים אסימפטוטיים

מבוא

הצגת השערת קולץ

- מה זו השערת קולץ, דוגמה וגרף של איזה מספר הולך לאיזה עבור מספרים קטנים, רקע היסטורי שלה

השערת קולץ, הידועה גם כבעיית "$3n+1$" היא בעיה פתוחה מפורסמת במתמטיקה המיוחסת באופן מסורתי ללותר קולץ, אשר נהגתה בשנות ה־30 של המאה ה־20. (ראו [1])

מגדירים מיפוי $\mathcal{C}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא:

$$\mathcal{C}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n\equiv 0 \pmod 2 \\ 3n+1 & n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

ההשערה היא שתהליך של הפעלה חוזרת של המיפוי $\mathcal{C}$, על כל מספר טבעי שנבחר, תביא לאחר מספר סופי של צעדים למספר 1. באופן פורמלי, לכל $n\geq 1$ קיים $k\geq 1$ כך ש$\mathcal{C}^k(n)=1$.

נפעיל לדוגמה את התהליך על המספר $n=11$:

$$11\to 34\to 17\to 52\to 26\to 13\to 40\to 20\to 10\to 5\to 16\to 8\to 4\to 2\to 1$$

מצאנו כי $\mathcal{C}^{14}(11)=1$.

ההשערה הפכה למפורסמת בעיקר בשל פשטות הניסוח שלה, שהופכת אותה לנגישה גם למי שאינו מתמטיקאי.

למרות שההשערה עצמה טרם הוכחה או הופרכה, נעשו נסיונות רבים לפתור אותה ואף התקבלו תוצאות חלקיות מעניינות. (הבולטת בהן היא עבודתו של טרנס טאו, ראו [4])

בעיה אנלוגית ב$\mathbb{F}_2[x]$

- הצגה של המיפוי, דוגמה וגרף של איזה פולינום הולך לאיזה עבור מעלות קטנות

עבור בעיות אריתמטיות רבות, טבעי לבחון בעיה אנלוגית בחוגי פולינומים. בעיה אנלוגית כזו נחקרה בשנת 2008 על ידי Hicks, Mullen, Yucas וZavislak (ראו [2]).
מגדירים מיפוי $T:\mathbb{F}_2[x]\to\mathbb{F}_2[x]$ כך:

$$T(f) = \begin{cases} \\ \end{cases}$$

"מבט על" של הסמינר

- הצגה במבט על של השאלות שנשאל ושל התוצאות שנשיג

תוצאות

הוכחה שזמן העצירה סופי

- הוכחה שמגיעים בסוף ל1
- גזירת חסם ריבועי

חסם משופר לזמן העצירה

- צמצום למקרה של פולינום אי זוגי
- הגדרת הפולינום ההדדי ומיפויי העזר המתאימים, והראשי שבהם - S_3
  - טענות בסיסיות על התנהגות שלהם
  - קישור בין זמן העצירה שלנו לזמן העצירה של S_3
  - חסימת זמן העצירה של S_3
- חיבור כל התוצאות כדי לחסום את זמן העצירה של T לכל פולינום

סדרות משהו משהו

- אין לי שמץ עוד לא קראתי

שאלות פתוחות

ביבליוגרפיה

1. מאמר של לגריאן
2. מאמר ראשון

3. מאמר שני

4. עבודה של טרי טאו