סמינר בנושא אנלוג להשערת קולץ בפולינומים

13 באוגוסט 2024

רקע מתמטי

סוג של נספח שאפשר לקרוא או לא או חלקית, לחשוב איפה לשים

- השדה $\mathbb{F}_2$ - הגדרה, טבלת כפל וחיבור, הגדרה של החוג $\mathbb{F}_2[x]$ (בלי לקרוא לו חוג)
- יחסים אסימפטוטיים

מבוא

הצגת השערת קולץ

השערת קולץ, הידועה גם כבעיית "$3n+1$" היא בעיה פתוחה מפורסמת במתמטיקה המיוחסת באופן מסורתי ללותר קולץ, אשר נהגתה בשנות ה־30 של המאה ה־20. (ראו [1])

מגדירים מיפוי $\mathcal{C}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא:

$$\mathcal{C}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n\equiv 0 \pmod 2 \\ 3n+1 & n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

ההשערה היא שתהליך של הפעלה חוזרת של המיפוי $\mathcal{C}$, על כל מספר טבעי שנבחר, תביא לאחר מספר סופי של צעדים למספר 1. באופן פורמלי, לכל $n\geq 1$ קיים $k\geq 0$ כך ש$\mathcal{C}^k(n)=1$.

נפעיל לדוגמה את התהליך על המספר $n=11$:

$$11\to 34\to 17\to 52\to 26\to 13\to 40\to 20\to 10\to 5\to 16\to 8\to 4\to 2\to 1$$

מצאנו כי $\mathcal{C}^{14}(11)=1$.

ההשערה הפכה למפורסמת בעיקר בשל פשטות הניסוח שלה, שהופכת אותה לנגישה גם למי שאינו מתמטיקאי.

למרות שההשערה עצמה טרם הוכחה או הופרכה, נעשו נסיונות רבים לפתור אותה ואף התקבלו תוצאות חלקיות מעניינות. (הבולטת בהן היא עבודתו של טרנס טאו, ראו [4])

בעיה אנלוגית ב$\mathbb{F}_2[x]$

עבור בעיות אריתמטיות רבות, טבעי לבחון בעיה אנלוגית בחוגי פולינומים. בעיה אנלוגית כזו נחקרה בשנת 2008 על ידי Hicks, Mullen, Yucas וZavislak (ראו [2]).

מגדירים מיפוי $T:\mathbb{F}_2[x]\to\mathbb{F}_2[x]$ באופן הבא:

$$T(f) = \begin{cases} \frac{f}{x} & f\equiv 0 \pmod x \\ (x+1)f+1 & f\equiv 1 \pmod x \end{cases}$$

ושואלים - האם לכל $0\neq f\in\mathbb{F}_2[x]$ קיים $k\geq 0$ כך ש$T^k(f)=1$? לבעיה זו נקרא בהמשך "בעיית קולץ הפולינומיאלית".

נבצע לדוגמה הפעלה חוזרת של T על הפולינום x^2+1:

$$x^2+1\to x^3+x^2+x\to x^2+x+1\to x^3\to x^2\to x\to 1$$

כלומר $T^6\left(x^2+1\right)=1$.

מהשוואה בין T לבין $\mathcal{C}$ ניתן לראות כי האיבר הראשוני x בחוג $\mathbb{F}_2[x]$ ממלא את תפקידו של המספר הראשוני 2: ההתחלקות בו מורה לאיזה ענף של T לפנות כשם שההתחלקות ב2 מורה לאיזה ענף של $\mathcal{C}$ לפנות.

בהמשך להשוואה זו, לפולינום $f\in\mathbb{F}_2[x]$ המתחלק בx, כלומר מקיים $f\equiv 0 \pmod x$ אנו קוראים פולינום "זוגי" ולפולינום שאינו מתחלק בx אנו קוראים פולינום "אי־זוגי". נעיר כי $f\equiv f(0) \pmod x$ (הכוונה ב$f(0)$ היא לפולינום הקבוע שהמקדם החופשי שלו תוצאת ההצבה של 0 בf) ולכן f הוא זוגי אם ורק אם $f(0)=0$.

"מבט על" של הסמינר

בסמינר זה נציג תשובה חיובית לבעיית קולץ הפולינומיאלית. לאחר קבלת תשובה חיובית זו טבעי לשאול - "כמה מהר" לוקח להגיע ל־1?

לכל מיפוי $M:\mathbb{F}_2[x]\to\mathbb{F}_2[x]$ ולכל $f\in\mathbb{F}_2[x]$ נגדיר:

$$t_{\min}(f,M) = \min\left\{k\geq 0 : M^k(f)=1\right\}$$

אם קיים k כזה, ואחרת נגדיר $t_{\min}(f,M)=\infty$.

למעשה, נוכיח שזמן העצירה סופי על ידי הוכחה כי לכל $0\neq f\in\mathbb{F}_2[x]$ מתקיים:

$$t_{\min}(f,T)\leq \deg(f)^2+2\deg(f)$$

ובסימונים אסימפטוטיים, $t_{\min}(f,T)=O\left(\deg(f)^2\right)$.

בשלב הבא, שמהווה את חלק הארי של הסמינר, נשפר את החסם הזה ונוכיח כי לכל $0\neq f\in\mathbb{F}_2[x]$ מתקיים:

$$t_{\min}(f,T)\leq (2\deg(f))^{1.5}+\deg(f)$$

משמע $t_{\min}(f,T)=O\left(\deg(f)^{1.5}\right)$.

תוצאות

הוכחה שזמן העצירה סופי

- הוכחה שמגיעים בסוף ל1
- גזירת חסם ריבועי

חסם משופר לזמן העצירה

- צמצום למקרה של פולינום אי זוגי
- הגדרת הפולינום ההדדי ומיפויי העזר המתאימים, והראשי שבהם - S_3
  - טענות בסיסיות על התנהגות שלהם
  - קישור בין זמן העצירה שלנו לזמן העצירה של S_3
  - חסימת זמן העצירה של S_3
- חיבור כל התוצאות כדי לחסום את זמן העצירה של T לכל פולינום

סדרות משהו משהו

- אין לי שמץ עוד לא קראתי

שאלות פתוחות

ביבליוגרפיה

1. מאמר של לגריאן
2. מאמר ראשון
3. מאמר שני
4. עבודה של טרי טאו