

## כלכלת תחבורה – תשפ"ד

### תרגיל מס' 4 – אגרות גודש – פתרון

I. הביקוש לשירותי תחבורה בנתיב מסוים הוא:  $X = 5000 - 5000\pi$

כאשר  $X$  הוא מספר כלי הרכב העובר בנתיב בשעה, ו- $\pi$  הוצאה הנסיעה הכוללת לק"מ (בש"ח). הנח שהוצאות התפעול של המכונית הן 0.10 ₪ לק"מ, שמחיר הזמן הוא אחיד ברמה של 5 ₪ לשעה, וששיעור התפוסה הוא 1 נוסע למכונית.

תהיה פונקציית המהירות:

$$\begin{array}{ll} S=80 & 50 > D \\ S=4000/D & 50 \leq D \end{array} \quad \text{כאשר}$$

כאשר המהירות  $S$  נמדדת בק"מ לשעה, והצפיפות  $D$  במספר מכוניות לק"מ.

נשים לב תחילה שמתקיים  $\pi = P + kT = 0.1 + 5T$  לכן:

$$X = 5000 \cdot (1 - \pi) = 5000 \cdot (0.9 - 5T) = 4500 - 25000T$$

א. התווה את פונקציית הייצור של הנתיב כפונקציה של המהירות  $X = f(S)$ .

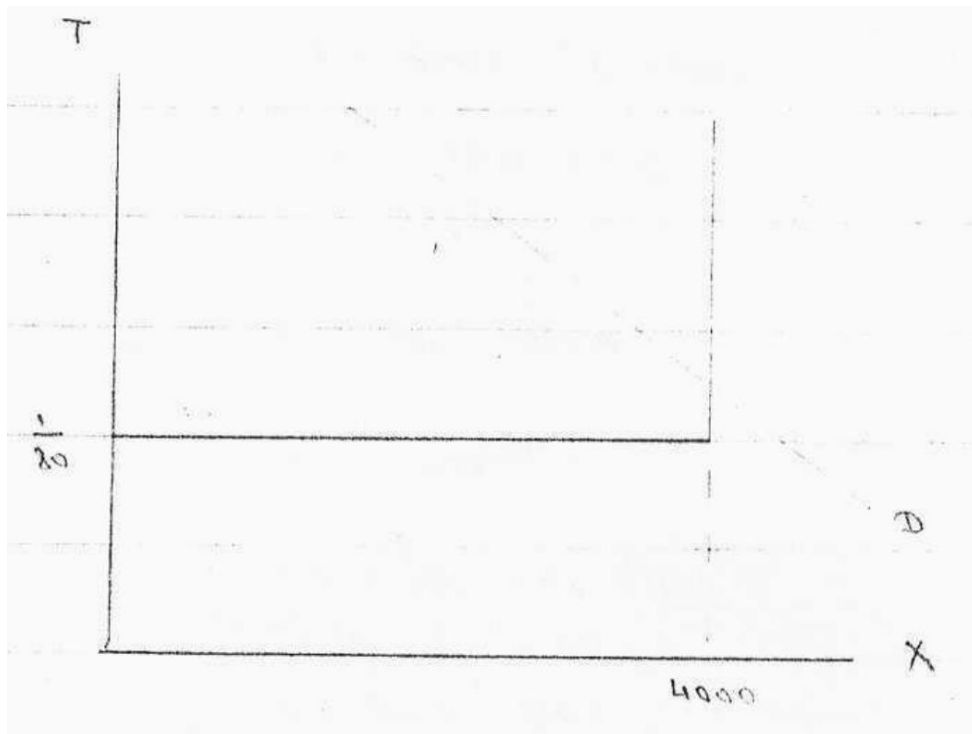
נתבונן בפונקציית המהירות:

$$S = 80 \iff 50 > D \iff X = D \cdot S < 4000$$

$$X = D \cdot S = 4000 \iff 50 \leq D$$

לכן:

$$S = \begin{cases} 80, & X < 4000 \\ \rightarrow 0, & X = 4000 \end{cases}$$



ב. מה תהיה תפוקת הכביש? מה תהיה מהירות הנסיעה? מה יהיו הוצאות הנסיעה?

כאשר  $S = 80$ ,

$$X = 5000 \cdot \left(0.9 - \frac{5}{80}\right) = 4187.5$$

כאשר  $X = 4000$ ,

$$4000 = 5000 \cdot \left(0.9 - \frac{5}{S}\right) \Rightarrow S = 50, \quad \pi = 0.1 + \frac{5}{50} = 0.2$$

ג. הוצע להגביל את הביקוש לנתיב על-ידי חלוקת רשיונות. כמה רשיונות תחלק?

$$X_0 = 4000 \quad \left(\pi = 0.1 + \frac{5}{80} = 0.1625\right)$$

ד. הצעה אלטרנטיבית קוראת להקטנת הביקוש על-ידי הטלת אגרה. מה תהיה האגרה האופטימלית (בש"ח לק"מ)?

$$A = 0.2 - \left(0.1 + \frac{5}{80}\right) = 0.375$$

ה. איזו משתי ההצעות עדיפה לדעתך? נמק.

אם לכל הצרכנים אותם טעמים אין הבדל בין שני הפתרונות מנקודת ראות הרווחה וקיימים רק הבדלי חלוקה. כאשר קיימים הבדלי טעמים מבטיחה האגרה שהמשתמשים בכביש הם בעלי ההעדפה הגבוהה ביותר לשרות זה. פתרון אלטרנטיבי מקביל יהיה בלתי גמיש כי יקפיא את המצב בו 4000 המשתמשים הקודמים בכביש הם היחידים שיורשו להשתמש בו בעתיד.

$$X_1 = 2500 - 1000 \pi_1 \quad \text{פונקציית הביקוש לנסיעות של בעלי רכב פרטי היא}$$

כאשר  $X_1$  הוא מספר הנוסעים בשעה ו-  $\pi_1$  הוא המחיר הכולל (הוצאות תפעול + ערך זמן)

$$X_2 = 6000 - 1000 \pi_2 \quad \text{פונקציית הביקוש לנסיעות באוטובוס היא}$$

כאשר  $X_2$  הוא מספר הנוסעים באוטובוס בשעה ו-  $\pi_2$  הוא המחיר הכולל שהם משלמים (מחיר כרטיס + ערך זמן).

המחיר הכולל ( $\pi_i$ ) תלוי במספר כלי הרכב המתוקננים המשתמש בנתיב ( $Y$ ) והוא שווה

$$\pi_1 = .25 + .001 Y$$

$$\pi_2 = .375 + .0005 Y$$

מקדם המילוי של הרכב הפרטי הוא 1 (נוסע למכונית) ושל האוטובוס הוא .40.

מקדם ההפרעה של האוטובוס (במונחי רכב פרטי) הוא 2.

א. מהי ההנחה הסמויה בפונקציית הביקוש ביחס לגמישויות התחלופה (ביקוש) בין נסיעות באוטובוס וברכב פרטי?

ההנחה היא שאין תחלופה בין הביקוש לנסיעות באוטובוס וברכב פרטי.

ב. מהן פונקציות ההוצאה מנקודת ראות הפרט ( $\pi_i$ ) במונחי מספר הנוסעים באמצעי ההובלה השונים ( $X_1$  ו-  $X_2$ ) ?

במספר כלי הרכב המתוקננים  $Y$  נלקח בחשבון הן מקדם המילוי והן מקדם ההפרעה של כל אחד מהרכבים. לכן :

$$Y = X_1 + \frac{2}{40} \cdot X_2 = X_1 + 0.05 \cdot X_2$$

$$\pi_1 = 0.25 + 0.001 \cdot (X_1 + 0.05 \cdot X_2)$$

$$\pi_2 = 0.375 + 0.0005 \cdot (X_1 + 0.05 \cdot X_2)$$

ג. מה יהיה מספר הנוסעים לשעה בכלי רכב פרטיים ובאוטובוסים ומה יהיו המחירים  $\pi_1$  ו-  $\pi_2$  בהעדר התערבות של רשות מרכזית?

בהעדר התערבות של רשות מרכזית, נציב את ההוצאות שמצאנו בפונקציות הביקוש:

$$X_1 = 2500 - 1000 \cdot \pi_1 = 2500 - 1000 \cdot [0.25 + 0.001 \cdot (X_1 + 0.05 \cdot X_2)]$$

$$X_2 = 6000 - 1000 \cdot \pi_2 = 6000 - 1000 \cdot [0.375 + 0.0005 \cdot (X_1 + 0.05 \cdot X_2)]$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$X_1 = 2250 - X_1 - 0.05 \cdot X_2$$

$$X_2 = 5625 - 0.5 \cdot X_1 - 0.025 \cdot X_2$$

$$X_1 = 1125 - 0.025 \cdot X_2$$

$$1.025 \cdot X_2 = 5625 - 0.5 \cdot (1125 - 0.025 \cdot X_2)$$

$$X_2 = 5000 \Rightarrow X_1 = 1000, Y = 1250$$

ד. מהי פונקציית ההוצאה הכוללת למשק להובלת נוסעים.

$$\pi_1 \cdot X_1 + \pi_2 \cdot X_2 =$$

$$= [0.25 + 0.001 \cdot (X_1 + 0.05 \cdot X_2)] \cdot X_1 + [0.375 + 0.0005 \cdot (X_1 + 0.05 \cdot X_2)] \cdot X_2$$

$$= 0.25 \cdot X_1 + 0.375 \cdot X_2 + 0.001 \cdot X_1^2 + 0.000025 \cdot X_2^2 + 0.00055 \cdot X_1 \cdot X_2$$

ה. חשב את פונקציית ההוצאה השולית החברתית של שני האמצעים, ונסח את התנאים הקובעים את מספר הנוסעים האופטימלי (אין צורך לחשב מספר זה). האם מחייב הפתרון האופטימלי הטלת אגרה חיובית של שני האמצעים? מה יקבע את גודלן היחסי של שתי האגרות?

$$MSC_1 = \frac{\partial(\pi_1 \cdot X_1 + \pi_2 \cdot X_2)}{\partial X_1} = 0.25 + 0.002 \cdot X_1 + 0.00055 \cdot X_2$$

$$MSC_2 = \frac{\partial(\pi_1 \cdot X_1 + \pi_2 \cdot X_2)}{\partial X_2} = 0.375 + 0.00055 \cdot X_1 + 0.00005 \cdot X_2$$

האופטימום מתקבל כאשר  $MSC_i = \pi_i$ :

$$MSC_1 = 0.25 + 0.002 \cdot X_1 + 0.00055 \cdot X_2 = 2.5 - 0.001 \cdot X_1 = \pi_1$$

$$MSC_2 = 0.375 + 0.00055 \cdot X_1 + 0.00005 \cdot X_2 = 6 - 0.001 \cdot X_2 = \pi_2$$

האגרות ייקבעו כך ש- $A_i = MSC_i - \pi_i$ :

$$A_1 = 0.001 \cdot (X_1 + 0.025 \cdot X_2)$$

$$A_2 = 0.0001 \cdot (-4.25 \cdot X_1 + 0.25 \cdot X_2) = 0.000025 \cdot (X_2 - 17 \cdot X_1)$$

ככל ש- $X_1$  גדול יותר, הגמישות של  $\pi_2$  ביחס ל- $X_2$  קטנה יותר ועל כן האגרה נמוכה יותר.

ו. הנח שמוטלות אגרות על שני אמצעי הובלה. מהן ההשפעות השונות שיש לאגרות על מספר הנוסעים בכל אחד מאמצעי ההובלה? האם יתכן מצב שבו מספר הנוסעים באוטובוס, כאשר מוטלות האגרות האופטימליות, עולה על מספר נוסעים באוטובוס בהעדר אגרה?

ז. בגלל מגבלה חיצונית נמנע מהרשות המרכזית להטיל אגרה על כלי הרכב הפרטיים (הרשות לא נתקלה בשום קושי בגביית האגרה האופטימלית מנוסעי האוטובוס ע"י התאמת תעריפי הנסיעה) האם בעקבות עובדה זו תמליץ לסבסד את התחבורה הציבורית? האם הייתה תשובתך עשויה להשתנות במידה וקיימת תחלופה בין נסיעות באוטובוס וברכב פרטי?