Математический Анализ - 2

Авторы конспекта 24/25 года, на основе которого написан текущий:
Винер Даниил | github Нарек Хорянян | github

Авторы текущего конспекта:
Жуков Андрей | github Мелисов Тимур | github

Версия от 28.09.2025 16:58

Содержание

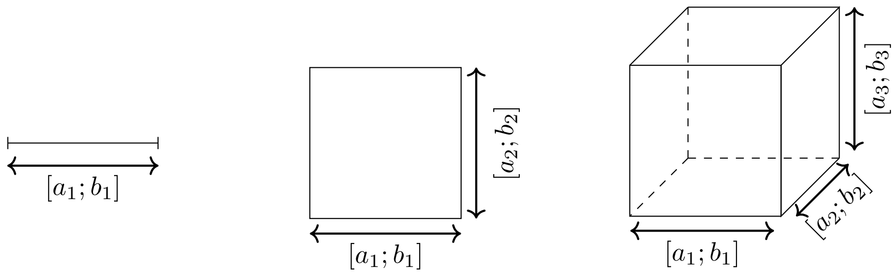
1 Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману

1.1 Брус. Мера бруса

Определение. Замкнутый брус (координатный промежуток) в $\mathbb{R}^n$ — множество, описываемое как

$$\begin{aligned} I &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i \in \{1,n\}\} \\ &= [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n] \end{aligned}$$

Примечание. $I = \{a_1,b_1\} \times \ldots \times \{a_n,b_n\}$, где $\{a_i, b_i\}$ может быть отрезком, интервалом и т.д.



Пример брусов размерности с 1 по 3

Определение. Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

1.2 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a,b})$, где $\lambda \geqslant 0$

2. **Аддитивность:** Пусть $I, I_1, \ldots, I_k$ — брусы

   Тогда, если $\forall i, j\ I_i, I_j$ не имеют общих внтренних точек, и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, то

$$|I| = \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

3. **Монотонность**: Пусть I — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, тогда

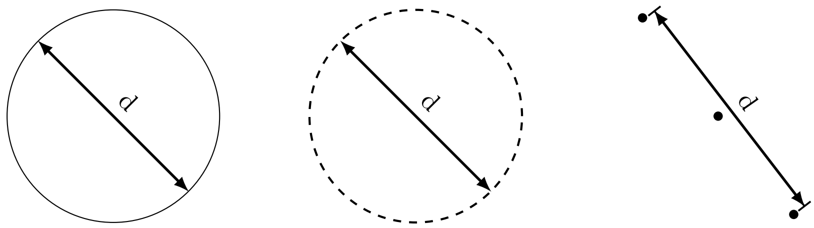
$$|I| < \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

Определение. I — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, где I_i попарно не имеют общих внутренних точек.
Тогда набор $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}\}_{i=1}^{k}$ называется разбиением бруса I
Определение. Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} \|x - y\|, \text{ где}$$

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$



Пример диаметра для разных ограниченных множеств(Для всех трёх он равен d)

Определение. Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k}$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max\limits_{1 \le i \le k} d(I_i)$

Определение. Пусть $\forall\ I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{k}$ будем называть **отмеченными точками**

Определение. Размеченное разбиение — пара $(\mathbb{T}, \xi)$

1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть I — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \to \mathbb{R}$ определена на I

Определение. Интегральная сумма Римана функции f на $(\mathbb{T}, \xi)$ — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

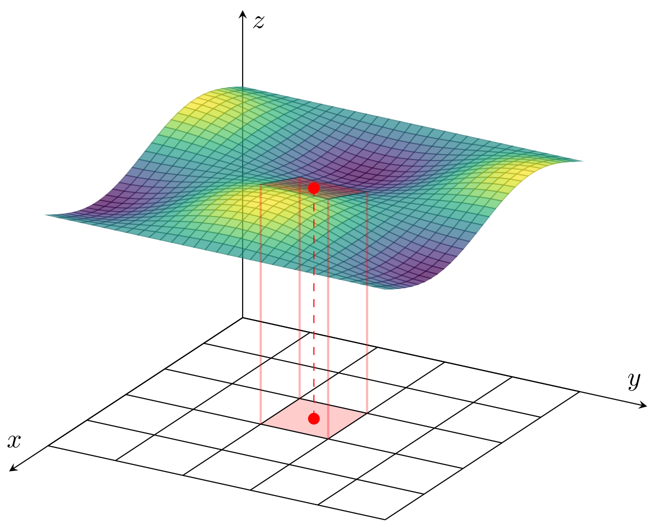
Определение. Функция f интегрируема (по Риману) на замкнутом брусе I $(f : I \to \mathbb{R})$, если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta :$$
$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| - A| < \varepsilon$$

Тогда

$$A = \int\limits_I f(x)\mathrm{d}x = \int \dots \int\limits_I f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$



Пример интегрирования в $\mathbb{R}^2$ по определению

1.5 Пример константной функции

Пусть у нас есть функция $f = \text{const}$

$$\forall (\mathbb{T}, \xi) : \ \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^{k} \text{const} \cdot |I_i|$$
$$= \text{const} \cdot |I| \Longrightarrow \int_I f(x) \mathrm{d}x = \text{const} \cdot |I|$$

1.6 Пример неинтегрируемая функция

Имеется брус $I = [0, 1]^n$, а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \dots, n} \ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство. $\forall\, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \in \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \overline{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \overline{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время, $\forall\, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \notin \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot |I_i| = 0 \Longrightarrow f \notin \mathcal{R}(I)$$

1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\dfrac{1}{n}$, выбирая в качестве точек ξ_i нижние правые вершины ячеек

Имеется функция $f = xy$, $|I| = \dfrac{1}{n^2}$

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \quad = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} i \cdot j = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=0}^{n-1} j \quad = \frac{n(n-1)}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4}$$

Заметим, что $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4} = \dfrac{1}{4}$

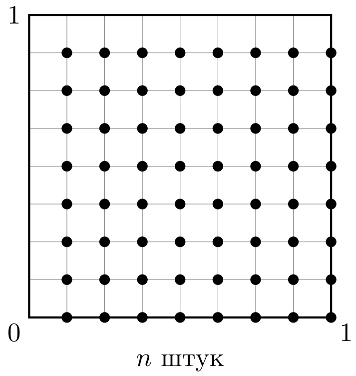


Рисунок того как мы выбираем в примере точки на разбиение

2 Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера

2.1 Необходимое условие интегрирования.

Теорема. Пусть I — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

Доказательство. От противного.

1. $f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A \in \mathbb{R}$, такая что $\forall \varepsilon > 0$, а значит для $\varepsilon = 1$ тоже:

   $$\exists \delta > 0 \colon \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} \leqslant \delta \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < 1$$

   Отсюда

   $$A - 1 < \sigma < A + 1 \implies \sigma \text{ ограничена}$$

2. С другой стороны, так как предположили, что f — неограничена на I

   $$\forall\, \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k} \quad \exists i_0 \colon f \text{ неограничена на } I_{i_0}$$

   Тогда рассмотрим интегральную сумму

   $$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) \cdot |I_i| + f(\xi_{i_0}) \cdot |I_{i_0}|$$

   Выбором подходящего ξ_{i_0} можно сделать $f(\xi_{i_0})$ сколь угодно большой $\implies$ σ будет не ограничена - противоречние

Из противоречния пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

2.2 Свойства интеграла Римана

1. **Линейность.**

   $$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   И верно, что:

   $$\int_I (\alpha f + \beta g) \mathrm{d}x = \alpha \int_I f \mathrm{d}x + \beta \int_I g \mathrm{d}x$$

   Доказательство.

   $$f \in \mathcal{R}(I) : \exists A_f, \text{что} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1 > 0\ \forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \quad \text{верно } \left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \int_I f \mathrm{d}x \right| =: |\sigma_f - A_f| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$
   $$g \in \mathcal{R}(I) : \exists A_g, \text{что} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_2 > 0\ \forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \quad \text{верно } \left| \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \int_I g \mathrm{d}x \right| =: |\sigma_g - A_g| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$

   Тогда $\forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < min(\delta_f, \delta_g) = \delta$:

   $$|\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \alpha A_f + \beta A_g| = \left| \sum (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \cdot |I_i| - \alpha A_f - \beta A_g \right| \leqslant$$
   $$\leqslant |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} < \varepsilon$$

   □

Монотонность

$$f, g \in \mathcal{R}(I);\ f \leqslant g \text{ на } I \implies \int_I f \mathrm{d}x \leqslant \int_I g \mathrm{d}x$$

Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R} \colon \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta, \text{ выполняется } |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Аналогично для $g \in \mathcal{R}(I)$, тогда:

$$\begin{cases} A_f - \varepsilon < \sigma_1 < A_f + \varepsilon \\ A_g - \varepsilon < \sigma_2 < A_g + \varepsilon \\ \sigma_f \leqslant \sigma_g \end{cases}$$

Отсюда

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leqslant \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f - \varepsilon < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

□

Оценка интеграла (сверху)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f \mathrm{d}x \right| \leqslant \sup_I |f||I|$$

Доказательство. По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) &\implies f \text{ Ограничена на } I \\ &\implies -\sup_I |f| \leqslant f \leqslant \sup_I |f| \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} -\int_I \sup |f| \mathrm{d}x \leqslant \int_I f \mathrm{d}x \quad &\leqslant \int_I \sup |f| dx \\ -\sup_I |f||I| \leqslant \int_I f \mathrm{d}x \qquad &\leqslant \sup_I |f||I| \end{aligned}$$

□

2.3 Множество меры нуль по Лебегу

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов $\{I_i\}$ и выполняются:

- $M \subset \bigcup_i I_i$
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Пример: $a \in \mathbb{R}$ — точка.

$$I = [a - \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{3}] \implies |I| = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies a \text{ — множество меры нуль по Лебегу}$$

2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. Если в определении $\{I_i\}$ заменить на открытые брусы, то определение останется верным.

   Доказательство. Пусть $\{I_i\}$ — открытые брусы, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ не более чем счетный набор $\{I_i\}$: $M \subset \bigcup_i I_i$ и $\sum |I_i| < \varepsilon$

Пусть $\{\bar{I}_i\}$ — открытые брусы + границы = замкнутые брусы I_i, причём объем "добавленных" плоскостей будет нулевой, так как объем бруса $n-1$ размерности, будет нулевым для объема бруса размерности n

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, \text{ при этом } |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \ \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \ \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

Докажем в обратную сторону. Мы хотим увеличить замкнутый брус в два раза и увеличенный брус взять открытым.

Пусть $\{I_i\}$ — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_i^1, b_i^1] \times \ldots \times [a_i^n, b_i^n], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Так как $\left(\frac{a_i^k}{2}, \frac{b_i^k}{2}\right)$ — центр i-го бруса в k-ом измерении, увеличить изначальный брус в два раза по этому измерению можно сдвинувшись от центра не на половину, а на целую сторону, то есть на $b_i^k - a_i^k$

Таким образом:

$$\tilde{I}_i = \left(\frac{a_i^1 + b_i^1}{2} - (b_i^1 - a_i^1); \frac{a_i^1 + b_i^1}{2} + (b_i^1 - a_i^1)\right) \times \ldots \times \left(\frac{a_i^n + b_i^n}{2} - (b_i^n - a_i^n); \frac{a_i^n + b_i^n}{2} + (b_i^n - a_i^n)\right)$$

$$\implies V_2 = \sum_i |\tilde{I}_i| = 2^n \cdot V_1 < \varepsilon \qquad \square$$

Если $M \subset \mathbb{R}^n$ - множество меры нуль по Лебегу, то из $L \subset M \implies L$ - множество меры нуль по Лебегу

Доказательство. Докажем по транзитивности

$$\forall \varepsilon \ > 0, \ \exists \text{ не более чем счетный набор } \{I_i\} : L \subset M \subset \bigcup_i I_i \implies L \subset \bigcup_i I_i$$

По условию нам дано, что для $M \subset \bigcup_i I_i$ верно $\sum_i |I_i| < \varepsilon$, и тоже самое выполнено и для $L \subset \bigcup_i I_i$, тогда L по определнию является множеством меры нуль по Лебегу $\square$

Не более чем счетное объединение множеств меры нуль по Лебегу, тоже является множеством меры нуль по Лебегу

Доказательство. пусть $M = \bigcup_i^{\infty} M_k$ - объединение не более чем счетного числа множеств $\forall k \ M_k$ - множество меры нуль по Лебегу $\implies \forall k, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ по определению множества меры нуль для них верно

- $M_k \subset \bigcup_i^{\infty} I_i^k$ [1]
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon_k \qquad \forall \varepsilon_k > 0$

[1] I_i^k - это i-ый для M_k, а не степень

Отсюда получаем $M = \bigcup\limits_{i}^{\infty} M_k \subset \bigcup\limits_{i}^{\infty} I_i^k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_i^k| < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ - если теперь взять $\varepsilon_k = \dfrac{\varepsilon}{2^k}$, то мы получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon$$

$\square$

3 Топология в $\mathbb{R}^n$

Определение. Пусть имеется $M \subset \mathbb{R}^n$. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внутренней* точкой M, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

Определение. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внешней* точкой M, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

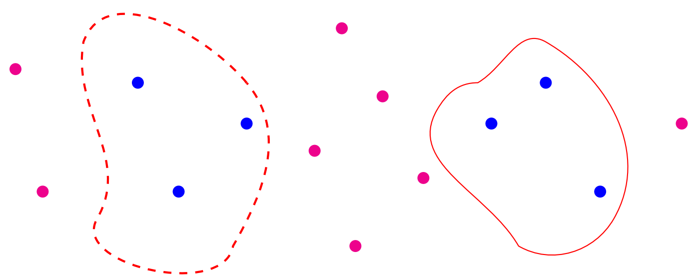
Пример. $M = [0; 1)$. тогда

$$\begin{cases} x = 0.5 & \text{— внутренняя} \\ x = 0 & \text{— не внутренняя} \\ x = 2 & \text{— внешняя} \end{cases}$$

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *граничной* точкой M, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \ (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \varnothing \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \varnothing$$

Обозначение. ∂M — множетсво всех граничных точек M



Синие точки - пример внутренних точек

Фиолетовые - пример внешних

Красные пример граничных(в данном случае пример ∂M)

Пример. $M = [0; 1) \implies x = 0; 1$ — граничные

Определение. Точку $x_0 \in M$ будем называть *изолированной* точкой M, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon (x_0) \cap M = \varnothing$$

Пример. $M = [0; 1] \cup \{3\} \implies x = 3$ — изолированная

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *предельной* точкой M, если

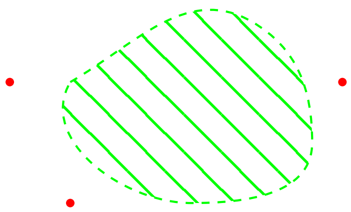
$$\forall \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon (x_0) \cap M \neq \varnothing$$

Примечание. Из определения следует, что изолированные точки не являются предельными

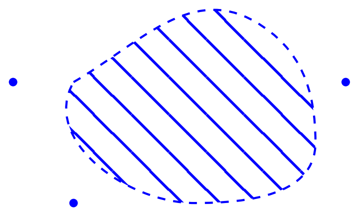
Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *точкой прикосновения* M, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \ B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing$$

Примечание. Точки прикосновения $=$ изолированные точки $\oplus$ предельные точки



Пример точек
Красные - изолированные. Зелёные - предельные



Синие точки - точки прикосновения

Определение. Множество всех точек прикосновения M называется *замыканием* M и обозначается как $\overline{M}$

Пример. $M = (0;1) \cup (1;2] \Longrightarrow \overline{M} = [0;2]$

Пример. $M = \{x \in [0;1] \colon x \in \mathbb{Q}\} \Longrightarrow \overline{M} = [0;1]$

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если все его точки внутренние

Определение. Множество $M \subset R^n$ называется замкнутым, если $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто

Пример. $\begin{cases} (0;1) & \text{— открыто в } \mathbb{R} \\ [0;1] & \text{— замкнуто, т.к. } (-\infty;0) \cup (1;+\infty) \text{ открыто в } \mathbb{R} \\ [0;1) & \text{— ни открыто, ни замкнуто в } \mathbb{R} \end{cases}$

Определение. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если из $\forall$ его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

Примечание. Если хотя бы для какого-то покрытия это не выполняется, то K — не компакт

Пример. Пусть $M = (0{,}1)$ покроем $\left\{A_n = \left(0; 1 - \dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

При $n \to \infty$ $M \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, но $\forall$ фиксированного N: $M \not\subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow$ не компакт

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ — называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

3.1 Критерий замкнутости

Теорема. M — замкнуто $\Longleftrightarrow$ M содержит **все** свои предельные точки

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность

1. *(Необходимость)* Докажем $\Longrightarrow$ от противного

   - Пусть x_0 — предельная для M и $x_0 \notin M$. Тогда, $\forall \varepsilon > 0$ $\mathring{B}_\varepsilon (x_0) \cap M \neq \varnothing$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$
   - По условию M — замкнуто, то есть $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто $\Longrightarrow$ все его точки внутренние и $\exists r > 0$:

   $$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \mathring{B}_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \mathring{B}_r (x_0) \cap M = \varnothing$$

   Пришли к противоречию $\Longrightarrow$ M содержит все свои предельные точки □

2. *(Достаточность)* Докажем $\Longleftarrow$

   Пусть y_0 — не является предельной для M, то есть $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \exists r > 0$:

   $$\begin{cases} \mathring{B}_r (y_0) \cap M = \varnothing \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \Longrightarrow B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

   $\Longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus M$ — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными $\Longrightarrow M$ — замкнуто по определению □

4 Компакты в $\mathbb{R}^n$

4.1 Замкнутый брус — компакт

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус $\Longrightarrow I$ — компакт

Доказательство. Пойдем от противного

Пусть $I = [a_1; b_1] \times \ldots \times [a_n; b_n]$

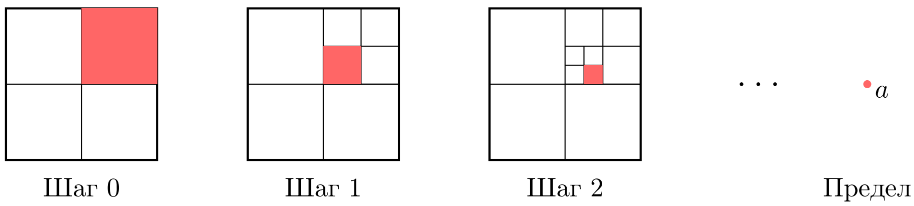
1. Положим, что I — не компакт. Значит, существует его покрытие $\{A_\alpha\}$ — открытые множества, такие что $I \subset \{A_\alpha\}$, не допускающее выделения конечного подкпорытия

2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда, $\exists I_1$, такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе, I — компакт

3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусов:

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

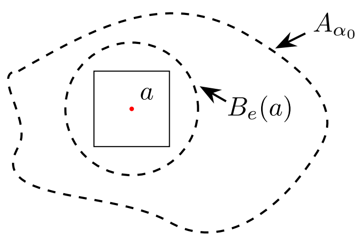
   То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку $a = (a_1, \ldots, a_n)$



Последовательность вложенных брусов в $\mathbb{R}^2$: на каждом шаге выбираем квадрат, что по предположению нельзя покрыть(выделен цветом) и делим его на 4 части. В итоге стягиваются в точку.

   При этом, $\exists a = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I_i$

4. $a \in I \Longrightarrow a \in \bigcup A_\alpha \Longrightarrow \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$



Покрытие A_{α_0}

5. Из построения получили, что $I \supset I_1 \supset \ldots \supset a \Longrightarrow \exists N : \forall n > N \ I_n \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$

   Получается, что $\forall n > N \ I_n$ покрывается одним лишь A_{α_0} из системы $\{A_\alpha\}$

   Получаем противоречие тому, что любое I_n не допускает конечного подпокрытия, а у нас получилось, что $I_n \in A_{\alpha_0} \forall n > N \Longrightarrow I$ – компакт ☐

Примечание. Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

4.2 Критерий компактности

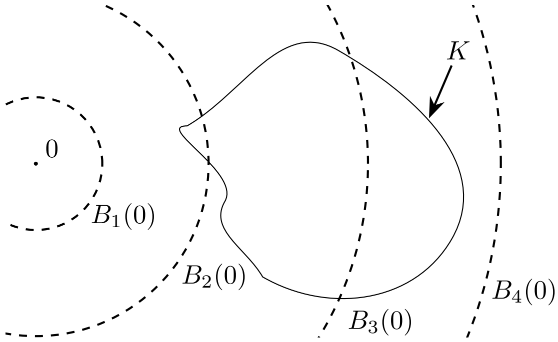
Теорема. $K \subset \mathbb{R}^n$. K — компакт $\Longleftrightarrow$ K замкнуто и ограниченно

Доказательство. Докажем необходимость ($\Longrightarrow$)

- *Ограниченность.* K — компакт $\Longrightarrow \forall\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ — можно выделить конечное подпокрытие $\Longrightarrow$

  $\Longrightarrow$ Пусть $\{A_\alpha\} = \{B_n(0)\}_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n(0)$ и так как $B_n(0)$ — вложены шары $\Longrightarrow$

  $\Longrightarrow K \subset B_N(0) \Longrightarrow$ по определению K — ограничено



Пример покрытия K вокруг точки 0 с помощью шаров

- *Замкнутость.* Пойдем от противного. K — компакт, тогда возьмем $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(0)\}_{x\in K}$ — покрытие открытыми шарами, где $\delta(x) = \rho(x,x_0)$. x_0 — предельная точка, которая $\notin K$ (или же $\in \mathbb{R}^n \setminus K$)

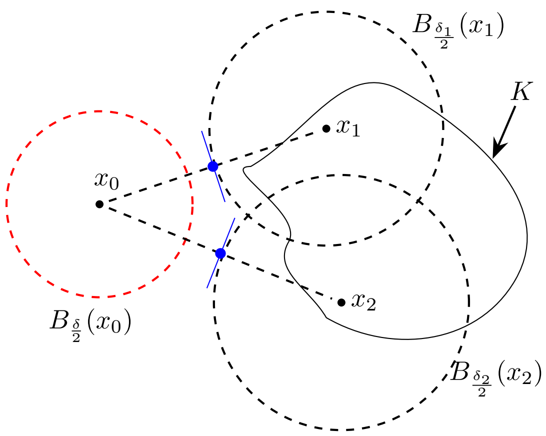
  Так как K — компакт, $\exists x_1,\dots,x_s : K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

  Пусть $\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant s} \delta(x_i)$, тогда

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^{s} B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) = \varnothing \Longrightarrow B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$$

$$\Longrightarrow \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \varnothing$$

  Значит, x_0 *не является предельной точкой* K, что противоречит нашему предположению



Пример как мы строим $B_{\frac{\delta}{2}}$ вокруг точки x_0.
Синие точки - середины отрезков на которых они лежат

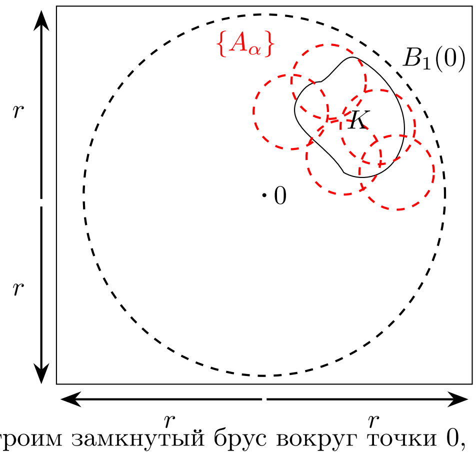
Доказательство. Докажем достаточность
K — замкнуто и ограничено $\Longrightarrow \exists r > 0 : B_r(0) \supset K \Longrightarrow \exists I$ — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n$$

Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ — произвольное покрытие открытыми множествами для K. Тогда, $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$. Так как I — компакт, то $\exists$ конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K \text{ — покрытие для } I$$

Значит, $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ — конечное и $\{A_\alpha\}$ — произвольное, тогда K — компакт по определению $\square$



Строим замкнутый брус вокруг точки 0, пользуясь существованием конечного покрытия покрываем наш компакт K