

Математический Анализ - 2

Авторы [конспекта 24/25 года](#), на основе которого написан текущий:

Винер Даниил | [github](#)

Нарек Хорянян | [github](#)

Авторы [текущего конспекта](#):

Жуков Андрей | [github](#)

Мелисов Тимур | [github](#)

Версия от 16.09.2025 14:08

Содержание

1	Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману	2
1.1	Брус. Мера бруса	2
1.2	Свойства меры бруса в \mathbb{R}^n	2
1.3	Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения	2
1.4	Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману	2
1.5	Пример константной функции	3
1.6	Неинтегрируемая функция	3
1.7	Вычисление многомерного интеграла	3
2	Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера	5
2.1	Необходимое условие интегрирования.	5
2.2	Свойства интеграла Римана	5
2.3	Множество меры нуль по Лебегу	6
2.4	Свойства множества меры нуль по Лебегу	6

1 Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману

1.1 Брус. Мера бруса

Определение. Замкнутый брус (координатный промежуток) в \mathbb{R}^n — множество, описываемое как

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq q_i, i \in \{1, n\}\} \\ = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Примечание. $I = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_n, b_n\}$, где $\{a_i, b_i\}$ может быть отрезком, интервалом и т.д.

Определение. Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

1.2 Свойства меры бруса в \mathbb{R}^n

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a, b})$, где $\lambda \geq 0$

2. **Аддитивность:** Пусть I, I_1, \dots, I_k — брусы

Тогда, если $\forall i, j$ I_i, I_j не имеют общих внутренних точек, и $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$, то

$$|I| = \sum_{i=1}^k |I_i|$$

3. **Монотонность:** Пусть I — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$, тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^k |I_i|$$

1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

Определение. I — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$, где I_i попарно не имеют общих внутренних точек.

Тогда набор $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$ называется разбиением бруса I

Определение. Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leq i \leq k} \|x - y\|, \text{ где}$$

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Определение. Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max_{1 \leq i \leq k} d(I_i)$

Определение. Пусть $\forall I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$ будем называть **отмеченными точками**

Определение. Размеченное разбиение — пара (\mathbb{T}, ξ)

1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть I — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ определена на I

Определение. Интегральная сумма Римана функции f на (\mathbb{T}, ξ) — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

Определение. Функция f интегрируема (по Риману) на замкнутом брусе I ($f : I \rightarrow \mathbb{R}$), если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$$

Тогда

$$A = \int_I f(x) dx = \int \dots \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$

1.5 Пример константной функции

Пусть у нас есть функция $f = \text{const}$

$$\forall (\mathbb{T}, \xi) : \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^k \text{const} \cdot |I_i| \\ = \text{const} \cdot |I| \implies \int_I f(x) dx = \text{const} \cdot |I|$$

1.6 Неинтегрируемая функция

Имеется брус $I = [0, 1]^n$, а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \dots, n} \ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство. $\forall \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \in \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \bar{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^k 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время, $\forall \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \notin \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^k 0 \cdot |I_i| = 0 \implies f \notin \mathcal{R}(I)$$

1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

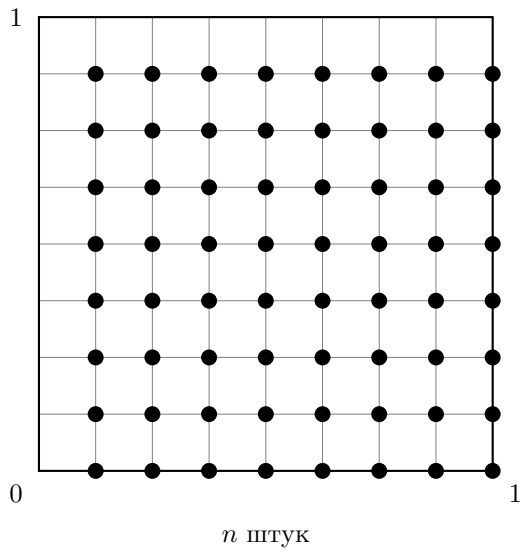
$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая в качестве точек ξ_i нижние правые вершины ячеек

Имеется функция $f = xy$, $|I| = \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}
 \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} i \cdot j \\
 &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i \sum_{j=0}^{n-1} j \\
 &= \frac{n(n-1)}{n^4} \sum_{i=1}^n i \\
 &= \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4}
 \end{aligned}$$

Заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4} = \frac{1}{4}$



2 Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера

2.1 Необходимое условие интегрирования.

Теорема. Пусть I — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

Доказательство. От противного.

1. $f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A \in n\mathbb{R}$, такая что $\forall \varepsilon > 0$, а значит для $\varepsilon = 1$ тоже:

$$\exists \delta > 0: \forall (\mathbb{T}, \xi): \Delta_{\mathbb{T}} \leq \omega \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < 1$$

Отсюда

$$A - 1 < \sigma < A + 1 \implies \sigma \text{ ограничена}$$

2. С другой стороны, так как предположили, что f — неограничена на I

$$\forall \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k \quad \exists i_0: f \text{ неограничена на } I_{i_0}$$

Тогда рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) \cdot |I_i| + f(\xi_{i_0}) \cdot |I_{i_0}|$$

Выбором подходящего ξ_{i_0} можно сделать $f(\xi_{i_0})$ сколь угодно большой $\implies \sigma$ тоже.

Из противоречия пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

2.2 Свойства интеграла Римана

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I): \exists A_f, \text{ что } \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \quad \forall (\mathbb{T}, \xi): \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \quad \text{верно } \left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \int_I f dx \right| &=: |\sigma_f - A_f| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \\ g \in \mathcal{R}(I): \exists A_g, \text{ что } \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \quad \forall (\mathbb{T}, \xi): \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \quad \text{верно } \left| \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \int_I g dx \right| &=: |\sigma_g - A_g| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \end{aligned}$$

Тогда $\forall (\mathbb{T}, \xi): \Delta_{\mathbb{T}} < \min(\delta_f, \delta_g) = \delta$:

$$\begin{aligned} |\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \alpha A_f + \beta A_g| &= \left| \sum (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \cdot |I_i| - \alpha A_f - \beta A_g \right| \leq \\ &\leq |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon \end{aligned}$$

□

Монотонность

$$f, g \in \mathcal{R}(I); f \leq g \text{ на } I \implies \int_I f dx \leq \int_I g dx$$

Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall (\mathbb{T}, \xi): \Delta_{\mathbb{T}} < \delta, \text{ выполняется } |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Аналогично для $g \in \mathcal{R}(I)$, тогда:

$$\begin{cases} A_f - \varepsilon < \sigma_1 < A_f + \varepsilon \\ A_g - \varepsilon < \sigma_2 < A_g + \varepsilon \\ \sigma_f \leq \sigma_g \end{cases}$$

Отсюда

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leq \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f - \varepsilon < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

□

Оценка интеграла (сверху)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f dx \right| \leq \sup_I |f| |I|$$

Доказательство. По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) &\implies f \text{ Ограничена на } I \\ &\implies -\sup_I |f| \leq f \leq \sup_I |f| \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} -\int_I \sup |f| dx &\leq \int_I f dx \leq \int_I \sup |f| dx \\ -\sup |f| |I| &\leq \int_I f dx \leq \sup |f| |I| \end{aligned}$$

□

2.3 Множество меры нуль по Лебегу

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусков $\{I_i\}$ и выполняются:

- $M \subset \bigcup_i I_i$
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Пример: $a \in \mathbb{R}$ — точка.

$$I = [a - \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{3}] \implies |I| = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies a \text{ — множество меры нуль по Лебегу}$$

2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. Если в определении $\{I_i\}$ заменить на открытые брусы, то определение останется верным.
2. *Доказательство.* Пусть $\{I_i\}$ — открытые брусы, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ не более чем счетный набор $\{I_i\}$: $M \subset \bigcup_i I_i$ и $\sum |I_i| < \varepsilon$

Пусть $\{\bar{I}_i\}$ — открытые брусы + границы = замкнутые брусы I_i , причём объем “добавленных” плоскостей нулевой

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

Докажем в обратную сторону. Мы хотим увеличить замкнутый брус в два раза и увеличенный брус взять открытым.

Пусть $\{I_i\}$ — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_i^1, b_i^1] \times \dots \times [a_i^n, b_i^n], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Так как $\left(\frac{a_i^k}{2}, \frac{b_i^k}{2}\right)$ — центр i -го бруса в k -ом измерении, увеличить изначальный брус в два раза по этому измерению можно сдвинувшись от центра не на половину, а на целую сторону, то есть на $b_i^k - a_i^k$

Таким образом:

$$\tilde{I}_i = \left(\frac{a_i^1 + b_i^1}{2} - (b_i^1 - a_i^1); \frac{a_i^1 + b_i^1}{2} + (b_i^1 - a_i^1)\right) \times \dots \times \left(\frac{a_i^n + b_i^n}{2} - (b_i^n - a_i^n); \frac{a_i^n + b_i^n}{2} + (b_i^n - a_i^n)\right)$$

$$\implies V_2 = \sum_i |\tilde{I}_i| = 2^n \cdot V_1 < \varepsilon$$

□