# Математический Анализ - 2

Авторы конспекта 24/25 года, на основе которого написан текущий:
Винер Даниил | github        Нарек Хорянян | github

Авторы текущего конспекта:
Жуков Андрей | github        Мелисов Тимур | github

Версия от 16.09.2025 17:46

## Содержание

# 1 Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману

## 1.1 Брус. Мера бруса

**Определение.** Замкнутый брус (координатный промежуток) в $\mathbb{R}^n$ — множество, описываемое как

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant q_i,\ i \in \{1{,}n\}\}$$
$$= [a_1{,}b_1] \times \ldots \times [a_n{,}b_n]$$

**Примечание.** $I = \{a_1{,}b_1\} \times \ldots \times \{a_n{,}b_n\}$, где $\{a_i, b_i\}$ может быть отрезком, интервалом и т.д.
**Определение.** Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

## 1.2 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a,b})$, где $\lambda \geqslant 0$

2. **Аддитивность:** Пусть $I, I_1, \ldots, I_k$ — брусы

   Тогда, если $\forall i, j\ I_i, I_j$ не имеют общих внтренних точек, и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, то

$$|I| = \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

3. **Монотонность**: Пусть $I$ — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

## 1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

**Определение.** $I$ — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, где $I_i$ попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда набор $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}\}_{i=1}^{k}$ называется разбиением бруса $I$
**Определение.** Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} \|x - y\|, \text{ где}$$
$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

**Определение.** Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k}$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max\limits_{1 \leq i \leq k} d(I_i)$
**Определение.** Пусть $\forall\ I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{k}$ будем называть **отмеченными точками**
**Определение.** Размеченное разбиение — пара $(\mathbb{T}, \xi)$

## 1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть $I$ — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \to \mathbb{R}$ определена на $I$

**Определение.** Интегральная сумма Римана функции $f$ на $(\mathbb{T}, \xi)$ — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

**Определение.** Функция $f$ интегрируема (по Риману) на замкнутом брусе $I$ ($f : I \to \mathbb{R}$), если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta :$$
$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| - A| < \varepsilon$$

Тогда

$$A = \int\limits_I f(x) \mathrm{d}x = \int \ldots \int\limits_I f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$

## 1.5 Пример константной функции

Пусть у нас есть функция $f = \mathrm{const}$

$$\forall (\mathbb{T}, \xi) : \ \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{const} \cdot |I_i|$$
$$= \mathrm{const} \cdot |I| \Longrightarrow \int_I f(x) \mathrm{d}x = \mathrm{const} \cdot |I|$$

## 1.6 Неинтегрируемая функция

Имеется брус $I = [0, 1]^n$, а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \ldots, n} \ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

*Доказательство.* $\forall \, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \in \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \overline{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \overline{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время, $\forall \, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \notin \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot |I_i| = 0 \Longrightarrow f \notin \mathcal{R}(I)$$

## 1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

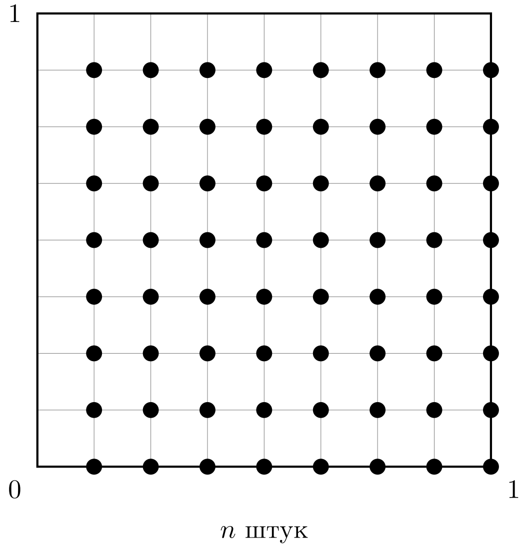
$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\dfrac{1}{n}$, выбирая в качестве точек $\xi_i$ нижние правые вершины ячеек

Имеется функция $f = xy$, $|I| = \dfrac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}
\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} i \cdot j \\
&= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=0}^{n-1} j \\
&= \frac{n(n-1)}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4}
\end{aligned}$$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4} = \dfrac{1}{4}$



# 2 Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера

## 2.1 Необходимое условие интегрирования.

**Теорема.** Пусть $I$ — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

*Доказательство.* От противного.

1. $f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A \in \mathbb{R}$, такая что $\forall \varepsilon > 0$, а значит для $\varepsilon = 1$ тоже:

$$\exists \delta > 0 \colon \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} \leqslant \delta \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < 1$$

   Отсюда

$$A - 1 < \sigma < A + 1 \implies \sigma \text{ ограничена}$$

2. С другой стороны, так как предположили, что $f$ — неограничена на $I$

$$\forall\, \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k} \quad \exists i_0 \colon f \text{ неограничена на } I_{i_0}$$

   Тогда рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) \cdot |I_i| + f(\xi_{i_0}) \cdot |I_{i_0}|$$

   Выбором подходящего $\xi_{i_0}$ можно сделать $f(\xi_{i_0})$ сколь угодно большой $\implies$ $\sigma$ будет не ограничена - противоречние

Из противоречния пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

## 2.2 Свойства интеграла Римана

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) \mathrm{d}x = \alpha \int_I f \mathrm{d}x + \beta \int_I g \mathrm{d}x$$

   *Доказательство.*

$$f \in \mathcal{R}(I) : \exists A_f, \text{что} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1 > 0\ \forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \quad \text{верно} \left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \int_I f \mathrm{d}x \right| =: |\sigma_f - A_f| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$
$$g \in \mathcal{R}(I) : \exists A_g, \text{что} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_2 > 0\ \forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \quad \text{верно} \left| \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \int_I g \mathrm{d}x \right| =: |\sigma_g - A_g| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$

   Тогда $\forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < min(\delta_f, \delta_g) = \delta :$

$$|\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \alpha A_f + \beta A_g| = \left| \sum (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \cdot |I_i| - \alpha A_f - \beta A_g \right| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} < \varepsilon$$

□

**Монотонность**

$$f, g \in \mathcal{R}(I);\ f \leqslant g \text{ на } I \implies \int_I f \mathrm{d}x \leqslant \int_I g \mathrm{d}x$$

*Доказательство.*

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R} \colon \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta, \text{ выполняется } |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Аналогично для $g \in \mathcal{R}(I)$, тогда:

$$\begin{cases} A_f - \varepsilon < \sigma_1 < A_f + \varepsilon \\ A_g - \varepsilon < \sigma_2 < A_g + \varepsilon \\ \sigma_f \leqslant \sigma_g \end{cases}$$

Отсюда

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leqslant \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f - \varepsilon < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

□

**Оценка интеграла (сверху)**

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f \mathrm{d}x \right| \leqslant \sup_I |f| |I|$$

*Доказательство.* По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) &\implies f \text{ Ограничена на } I \\ &\implies -\sup_I |f| \leqslant f \leqslant \sup_I |f| \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} -\int_I \sup |f| \mathrm{d}x \leqslant \int_I f \mathrm{d}x \quad &\leqslant \int_I \sup |f| dx \\ -\sup_I |f||I| \leqslant \int_I f \mathrm{d}x \qquad &\leqslant \sup_I |f||I| \end{aligned}$$

□

## 2.3 Множество меры нуль по Лебегу

**Определение.** Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов $\{I_i\}$ и выполняются:

- $M \subset \bigcup\limits_i I_i$
- $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon < 0$

**Пример:** $a \in \mathbb{R}$ — точка.

$$I = [a - \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{3}] \implies |I| = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies a \text{ — множество меры нуль по Лебегу}$$

## 2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. Если в определении $\{I_i\}$ заменить на открытые брусы, то определение останется верным.
2. *Доказательство.* Пусть $\{I_i\}$ — открытые брусы, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ не более чем счетный набор $\{I_i\}$: $M \subset \bigcup\limits_i I_i$ и $\sum |I_i| < \varepsilon$

Пусть $\{\bar{I}_i\}$ — открытые брусы + границы = замкнутые брусы $I_i$, причём объем "добавленных" плоскостей будет нулевой, так как объем бруса $n-1$ размерности, будет нулевым для объема бруса размерности $n$

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, \text{ при этом } |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \; \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \; \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

**Докажем в обратную сторону.** Мы хотим увеличить замкнутый брус в два раза и увеличенный брус взять открытым.

Пусть $\{I_i\}$ — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_i^1, b_i^1] \times \ldots \times [a_i^n, b_i^n], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Так как $\left(\dfrac{a_i^k}{2}, \dfrac{b_i^k}{2}\right)$ — центр $i$-го бруса в $k$-ом измерении, увеличить изначальный брус в два раза по этому измерению можно сдвинувшись от центра не на половину, а на целую сторону, то есть на $b_i^k - a_i^k$

Таким образом:

$$\tilde{I}_i = \left(\frac{a_i^1 + b_i^1}{2} - (b_i^1 - a_i^1); \frac{a_i^1 + b_i^1}{2} + (b_i^1 - a_i^1)\right) \times \ldots \times \left(\frac{a_i^n + b_i^n}{2} - (b_i^n - a_i^n); \frac{a_i^n + b_i^n}{2} + (b_i^n - a_i^n)\right)$$

$$\implies V_2 = \sum_i |\tilde{I}_i| = 2^n \cdot V_1 < \varepsilon \qquad \square$$