

# Математический анализ—2

## Коллоквиум

Лектор: Зароднюк Алёна Владимировна  
оригинальный  $\text{\LaTeX}$  by Винер Даниил @danya\_vin

Авторы текущего документа:  
Жуков Андрей | [github](#)      coffecat46 | [github](#)

Версия от 4 ноября 2025 г.

## Содержание

<b>1 Основные определения</b>	<b>4</b>
1.1 Определение (замкнутого) бруса (координатного промежутка, параллелепипеда)	4
1.2 Определение меры (объема) бруса	4
1.3 Определение разбиения бруса	4
1.4 Определение диаметра множества в $\mathbb{R}^n$	4
1.5 Определение ограниченного множества в $\mathbb{R}^n$	5
1.6 Определение масштаба (диаметра) разбиения	5
1.7 Определения отмеченных точек и размеченного разбиения	5
1.8 Определение интегральной суммы Римана	5
1.9 Определение интегрируемой по Риману функции на замкнутом бруске в $\mathbb{R}^n$	5
1.10 Определение множества меры нуль по Лебегу	6
1.11 Определение внутренней точки множества	6
1.12 Определение внешней точки множества	6
1.13 Определение граничной точки множества	6
1.14 Определение изолированной точки множества	6
1.15 Определение предельной точки множества	6
1.16 Определение точки прикосновения множества	6
1.17 Определение открытого множества	7
1.18 Определение замкнутого множества	7
1.19 Определение компакта	7
1.20 Определение колебания функции на множестве	7
1.21 Определение колебания функции в точке	7
1.22 Определение непрерывности функции в точке и на множестве	7
1.23 Определение выполнения свойства почти всюду	7
1.24 Определение пересечения двух разбиений	8
1.25 Определение измельчения разбиения	8
1.26 Определение верхней и нижней суммы Дарбу	8
1.27 Определение верхнего и нижнего интеграла Дарбу	8
1.28 Определение допустимого множества	9
1.29 Определение интеграла Римана по допустимому множеству	9
1.30 Определение сходимости функциональной последовательности в точке	9

1.31	Определение множества сходимости функциональной последовательности . . . . .	9
1.32	Определение предельной функции функциональной последовательности . . . . .	9
1.33	Определение поточечной сходимости функциональной последовательности на множестве . . . . .	10
1.34	Определение равномерной сходимости функциональной последовательности на множестве . . . . .	10
1.35	Определение поточечной сходимости функционального ряда на множестве . . . . .	10
1.36	Определение равномерной сходимости функционального ряда на множестве . . . . .	10
1.37	Определение абсолютной сходимости сходимости функционального ряда на множестве . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Основные формулировки</b>	<b>11</b>
2.1	Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	11
2.2	Необходимое условие интегрируемости функции по Риману . . . . .	11
2.3	Свойства интеграла Римана . . . . .	11
2.4	Свойства множества меры нуль по Лебегу . . . . .	11
2.5	Критерий замкнутости множества в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	11
2.6	Теорема о компактности замкнутого бруса в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	12
2.7	Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	12
2.8	Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте . . . . .	12
2.9	Теорема о связи непрерывности функции в точке с колебанием . . . . .	12
2.10	Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману . . . . .	12
2.11	Свойства интегральных сумм Дарбу . . . . .	12
2.12	Теорема об интегралах Дарбу как пределах интегральных сумм Дарбу . . . . .	12
2.13	Критерий Дарбу интегрируемости функции на замкнутом брусе . . . . .	12
2.14	Утверждение о независимости определения допустимого множества от выбора бруса . . . . .	13
2.15	Теорема Фубини о переходе к повторному интегралу . . . . .	13
2.16	Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности . . . . .	13
2.17	Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности . . . . .	13
2.18	Теорема о почленном переходе к пределу для функциональной последовательности . . . . .	13
2.19	Теорема о непрерывности предельной функции . . . . .	13
2.20	Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии разрыва . . . . .	14
2.21	Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии расходимости в точке . . . . .	14
2.22	Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности . . . . .	14
2.23	Теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности . . . . .	14
2.24	Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда . . . . .	14
2.25	Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда . . . . .	14
2.26	Сравнительный признак равномерной сходимости функционального ряда . . . . .	15
2.27	Мажорантный признак Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Вопросы на доказательство</b>	<b>16</b>
3.1	Необходимое условие интегрирования. . . . .	16
3.2	Свойства интеграла Римана . . . . .	16
3.3	Свойства множества меры нуль по Лебегу . . . . .	17
3.4	Критерий замкнутости . . . . .	18
3.5	Теорема о компактности замкнутого бруса . . . . .	19
3.6	Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	20
3.7	Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте . . . . .	21
3.8	Теорема о связи непрерывности функции в точке с колебанием . . . . .	22
3.9	Свойства интегральных сумм Дарбу . . . . .	23
3.9.1	Нижняя сумма Дарбу не больше верхней . . . . .	23
3.9.2	Монотонность сумм относительно измельчений разбиения . . . . .	23

3.9.3	Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же брус	23
3.10	Теорема об интегралах Дарбу как пределах интегральных сумм Дарбу	23
3.11	Критерий Дарбу интегрируемости функции на замкнутом брус	24
3.12	Утверждение о независимости определения допустимого множества от выбора бруса	25
3.13	Теорема Фубини о переходе к повторному интегралу	26
3.14	Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности	27
3.15	Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности	27
3.16	Теорема о почленном переходе к пределу для функциональной последовательности	28
3.17	Теорема о непрерывности предельной функции	28
3.18	Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. наличия разрыва	29
3.19	Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии расходимости в точке	30
3.20	Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности	30
3.21	Теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности	31
3.22	Сравнительный признак равномерной сходимости функционального ряда	33
3.23	Мажорантный признак Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда	33

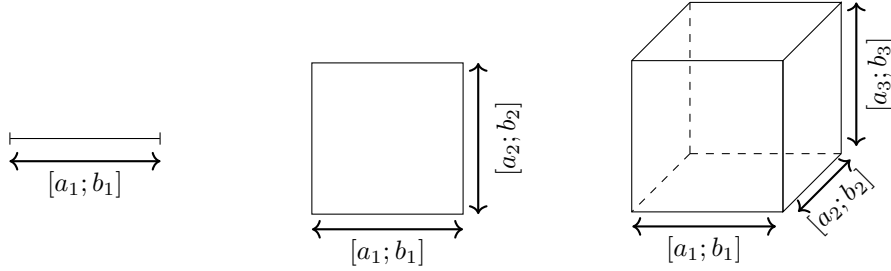
# 1 Основные определения

## 1.1 Определение (замкнутого) бруса (координатного промежутка, параллелепипеда)

**Определение.** Замкнутый брус (координатный промежуток) в  $\mathbb{R}^n$  — множество, описываемое как

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i \in \{1, n\}\} \\ = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

**Примечание.**  $I = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_n, b_n\}$ , где  $\{a_i, b_i\}$  может быть отрезком, интервалом и т.д.



Пример брусов размерности с 1 по 3

## 1.2 Определение меры (объема) бруса

**Определение.** Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

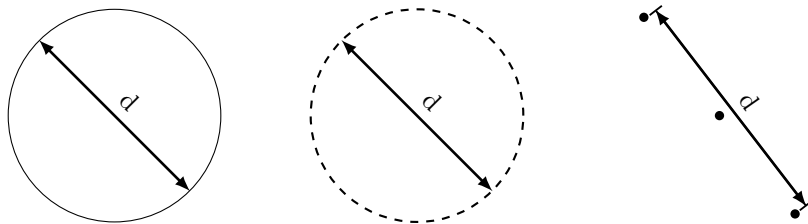
## 1.3 Определение разбиения бруса

**Определение.** Пусть  $I$  — замкнутый, невырожденный брус и  $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$ , где  $I_i$  попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда набор  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$  называется разбиением бруса  $I$

## 1.4 Определение диаметра множества в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Диаметр произвольного ограниченного множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть

$$d(M) = \sup_{x, y \in M} \|x - y\|, \text{ где} \\ \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$



Пример диаметра для разных ограниченных множеств (Для всех трёх он равен  $d$ )

## 1.5 Определение ограниченного множества в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

## 1.6 Определение масштаба (диаметра) разбиения

**Определение.** Масштаб разбиения  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$  — число  $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max_{1 \leq i \leq k} d(I_i)$

## 1.7 Определения отмеченных точек и размеченного разбиения

**Определение.** Пусть  $\forall I_i$  выбрана точка  $\xi_i \in I_i$ . Тогда, набор  $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$  будем называть **отмеченными точками**

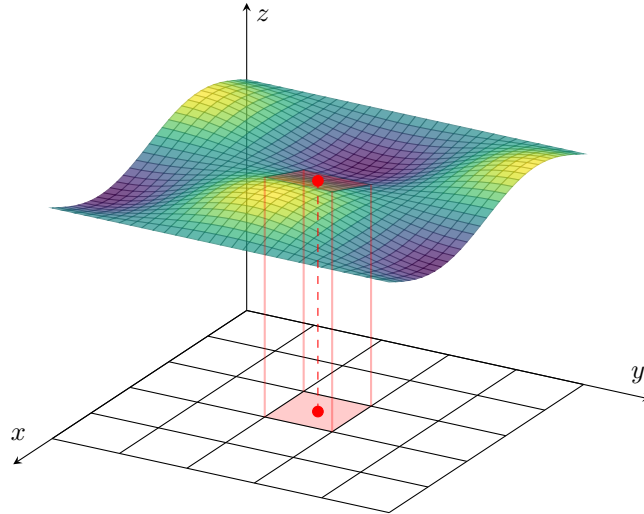
**Определение.** Размеченное разбиение — пара  $(\mathbb{T}, \xi)$

## 1.8 Определение интегральной суммы Римана

Пусть  $I$  — невырожденный, замкнутый брус, функция  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  определена на  $I$

**Определение.** Интегральная сумма Римана функции  $f$  на  $(\mathbb{T}, \xi)$  — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \cdot |I_i|$$



Пример интегрирования в  $\mathbb{R}^2$  по определению

## 1.9 Определение интегрируемой по Риману функции на замкнутом брус в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Функция  $f$  интегрируема по Риману на замкнутом брус  $I$  ( $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ), если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$$

Тогда  $A$  называется *кратным интегралом Римана* и

$$A = \int_I f(x) dx = \int \dots \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Обозначение:  $f \in \mathcal{R}(I)$

### 1.10 Определение множества меры нуль по Лебегу

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов  $\{I_i\}$  и выполняются:

- $M \subset \bigcup_i I_i$
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

### 1.11 Определение внутренней точки множества

**Определение.** Пусть имеется  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Точку  $x_0 \in M$  будем называть *внутренней* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

### 1.12 Определение внешней точки множества

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *внешней* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

### 1.13 Определение граничной точки множества

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *граничной* точкой  $M$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

### 1.14 Определение изолированной точки множества

**Определение.** Точку  $x_0 \in M$  будем называть *изолированной* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M = \emptyset$$

### 1.15 Определение предельной точки множества

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *предельной* точкой  $M$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

### 1.16 Определение точки прикосновения множества

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *точкой прикосновения*  $M$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

## 1.17 Определение открытого множества

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *открытым*, если все его точки внутренние

## 1.18 Определение замкнутого множества

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *замкнутым*, если  $\mathbb{R}^n \setminus M$  — открыто

## 1.19 Определение компакта

**Определение.** Множество  $K \subset \mathbb{R}^n$  называется *компактом*, если из  $\forall$  его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

## 1.20 Определение колебания функции на множестве

**Определение.** Колебанием функции  $f$  на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть число  $\omega(f, M)$ :

$$\omega(f, M) = \sup_{x, y \in M} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{y \in M} f(y)$$

## 1.21 Определение колебания функции в точке

**Определение.** Колебанием функции  $f$  в точке  $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть число

$$\omega(f, x_0) := \lim_{r \rightarrow 0+} \omega(f, B_r^M(x_0)), \text{ где } B_r^M = B_r(x_0) \cap M$$

## 1.22 Определение непрерывности функции в точке и на множестве

**Определение.** Функция  $f: M \subset \mathbb{R}^n; f: M \rightarrow \mathbb{R}$  *непрерывна в точке*  $x_0$ , если

1. **Через колебание:**

$$f \text{ — непрерывна в точке } x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$$

2. **Классическое определение:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in M \text{ такого что } |x - x_0| < \delta \text{ верно } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**На множестве:**

1. Непрерывна на множестве всюду — непрерывность в каждой точке.
2. Непрерывно на множестве почти всюду — непрерывность выполняется везде кроме множества меры нуль.

## 1.23 Определение выполнения свойства почти всюду

**Определение.** Если какое-то свойство не выполняется лишь на множестве меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется почти всюду

## 1.24 Определение пересечения двух разбиений

**Определение.** Пусть  $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$  и  $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$  — два разбиения бруса  $I \subset \mathbb{R}^n$ .

Пересечением разбиений  $(\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)$  будем называть множество всех брусов  $\{I_{ij}\} : \forall I_{ij}$  выполняется

- $\exists k : I_{ij} \in \{I_k^1\}$
- $\exists m : I_{ij} \in \{I_m^2\}$
- $\{I_{ij}\}$  — разбиение бруса  $I$

## 1.25 Определение измельчения разбиения

**Определение.** Разбиение  $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$  будем называть измельчением разбиения  $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$ , если  $\forall k \exists m : I_k^1 \in I_m^2 \implies \mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$  является измельчением  $\mathbb{T}_1$  и  $\mathbb{T}_2$

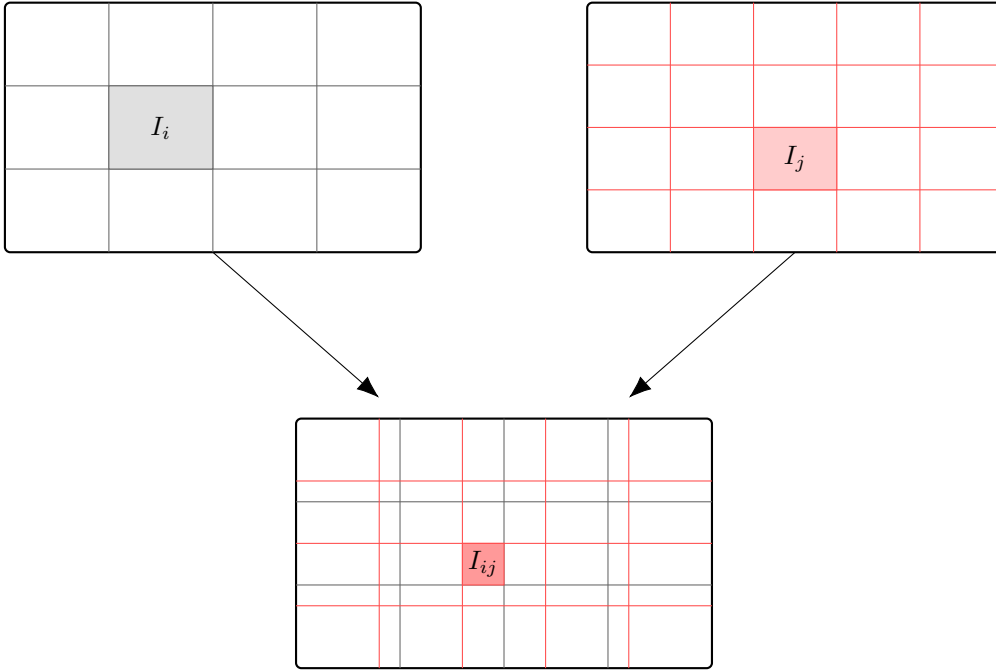


Рис. 1: Пересечение разбиений  $\mathbb{T}_1$  и  $\mathbb{T}_2$

## 1.26 Определение верхней и нижней суммы Дарбу

**Определение.** Пусть  $I$  — замкнутый брус,  $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^K$  — разбиение бруса  $I$ ,  $m_i = \inf_{I_i}(f)$ , и  $M_i = \sup_{I_i}(f)$

Тогда числа  $\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^K m_i |I_i|$  и  $\overline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^K M_i |I_i|$  будем называть *нижней и верхней суммой Дарбу* соответственно

## 1.27 Определение верхнего и нижнего интеграла Дарбу

**Определение.** Верхним и нижним интегралом Дарбу будем называть числа соответственно

$$\overline{\mathcal{I}} := \inf_{\mathbb{T}} \overline{S}(f, \mathbb{T}) \quad \underline{\mathcal{I}} := \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, \mathbb{T})$$



## 1.28 Определение допустимого множества

**Определение.** Множество  $D \subset \mathbb{R}^n$  называется *допустимым*, если

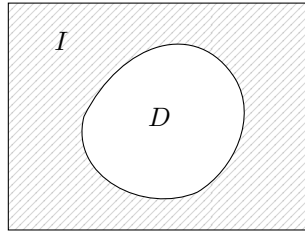
- $D$  — ограничено
- $\partial D$  — множество меры нуль по Лебегу

## 1.29 Определение интеграла Римана по допустимому множеству

**Определение.** Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$  — допустимое множество,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда, интегралом Римана  $f$  по  $D$  называется число  $\mathcal{I}$ :

$$\mathcal{I} = \int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{I \supset D} f \cdot \chi_D(\bar{x}) d\bar{x}, \text{ где } \chi_D = \begin{cases} 1, \bar{x} \in D \\ 0, \bar{x} \notin D \end{cases}$$

Если  $\mathcal{I} < \infty$ , то  $f \in \mathcal{R}(D)$



Закрашенная область не вносит вклад в объем  
так как  $f(x) \cdot \chi_D = 0$

## 1.30 Определение сходимости функциональной последовательности в точке

Пусть  $X \subset \mathbb{R}$  и  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Определение.** Последовательность функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  *сходится в точке*  $x_0 \in X$ , если сходится соответствующая числовая последовательность  $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Leftrightarrow |f_n(x_0) - a_{x_0}| < \varepsilon \implies a_{x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n x_0$$

## 1.31 Определение множества сходимости функциональной последовательности

**Определение.** Множество  $D \subset X$  точек, в которых последовательность функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится называется *множеством сходимости*

## 1.32 Определение предельной функции функциональной последовательности

**Определение.** Пусть  $D \subset X$  — множество сходимости  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\forall x \in D f_n(x) \rightarrow f(x)$ . Тогда,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  будем называть *предельной функцией*  $\{f_n(x)\}$

### 1.33 Определение поточечной сходимости функциональной последовательности на множестве

**Определение.**  $D \subset \mathbb{R}, f, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Будем говорить, что  $\{f_n(x)\}$  *сходится поточечно* к  $f(x)$  на  $D$ , если

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение:  $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$

### 1.34 Определение равномерной сходимости функциональной последовательности на множестве

**Определение.** Пусть  $D \subset \mathbb{R}; f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Будем говорить, что  $\{f_n(x)\}$  *сходится равномерно* к  $f(x)$  на  $D$ , Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall x \in D \text{ такое, что } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение:  $f_n \xRightarrow{D} f$

### 1.35 Определение поточечной сходимости функционального ряда на множестве

Пусть  $D \subset \mathbb{R}, f_n, S : D \rightarrow \mathbb{R} (\forall n \in \mathbb{N})$ , а также  $S_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$  — частичные суммы функционального ряда

**Определение.** Если  $\exists S(x) : S_k \xrightarrow{D} S$ , то будем говорить, что функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  *сходится поточечно* к  $S(x)$  на  $D$

### 1.36 Определение равномерной сходимости функционального ряда на множестве

Пусть  $D \subset \mathbb{R}, f_n, S : D \rightarrow \mathbb{R} (\forall n \in \mathbb{N})$ , а также  $S_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$  — частичные суммы функционального ряда

**Определение.** Если  $\exists S(x) : S_k \xRightarrow{D} S$ , то будем говорить, что функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  *сходится равномерно* к  $S(x)$

### 1.37 Определение абсолютной сходимости функционального ряда на множестве

**Определение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  *сходится абсолютно*, если

$$\forall x_0 \in \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \text{ — сходится абсолютно}$$

## 2 Основные формулировки

### 2.1 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:**  $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a, b})$ , где  $\lambda \geq 0$

2. **Аддитивность:** Пусть  $I, I_1, \dots, I_k$  — брусы

Тогда, если  $\forall i, j$   $I_i, I_j$  не имеют общих внутренних точек, и  $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$ , то

$$|I| = \sum_{i=1}^k |I_i|$$

3. **Монотонность:** Пусть  $I$  — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть  $I \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$ , тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^k |I_i|$$

### 2.2 Необходимое условие интегрируемости функции по Риману

**Теорема.** Пусть  $I$  — замкнутый брус

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

### 2.3 Свойства интеграла Римана

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

2. **Монотонность**

$$f, g \in \mathcal{R}(I); f|_I \leq g|_I \implies \int_I f dx \leq \int_I g dx$$

3. **Оценка интеграла (сверху)**

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f dx \right| \leq \sup_I |f| |I|$$

### 2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. В определении множества меры нуль можно использовать *открытые* брусы

2.  $M$  — множество меры нуль,  $L \subset M \implies L$  — множество меры нуль

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль является множеством меры нуль

### 2.5 Критерий замкнутости множества в $\mathbb{R}^n$

**Теорема.**  $M$  — замкнуто  $\iff M$  содержит **все** свои предельные точки

## 2.6 Теорема о компактности замкнутого бруса в $\mathbb{R}^n$

**Теорема.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус  $\implies I$  — компакт

## 2.7 Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$

**Теорема.** Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$ .  $K$  — компакт  $\iff K$  замкнуто и ограничено

## 2.8 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте

**Теорема.** Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$  — компакт и функция  $f : K \mapsto \mathbb{R}$  — непрерывная. Тогда  $f$  на  $K$  достигает наибольшего и наименьшего значений

## 2.9 Теорема о связи непрерывности функции в точке с колебанием

**Теорема.** Пусть  $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ ;  $f : M \mapsto \mathbb{R}$ .  $f$  — непрерывна в точке  $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$

## 2.10 Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману

**Теорема.** Если  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый невырожденный брус,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , то  $f \in R(I) \iff f$  ограничена и непрерывна почти всюду на  $I$

## 2.11 Свойства интегральных сумм Дарбу

1.

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

2. Пусть  $\tilde{\mathbb{T}}$  — измельчение разбиения  $\mathbb{T}$ , тогда

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

3.  $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : \underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$

## 2.12 Теорема об интегралах Дарбу как пределах интегральных сумм Дарбу

**Теорема.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус, а  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  — ограничена. Тогда:

$$\bar{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \bar{S}(f, \mathbb{T}) \quad \text{и} \quad \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \underline{S}(f, \mathbb{T})$$

## 2.13 Критерий Дарбу интегрируемости функции на замкнутом брусе

**Теорема.**  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус,  $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}(I) \iff f$  — ограничена на  $I$  и  $\underline{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}$

## 2.14 Утверждение о независимости определения допустимого множества от выбора бруса

Пусть  $I_1 \supset D, I_2 \supset D$ , тогда

$$\int_{I_1} f \cdot \chi_D dx \text{ и } \int_{I_2} f \cdot \chi_D dx$$

либо существуют и равны, либо оба не существуют вообще

## 2.15 Теорема Фубини о переходе к повторному интегралу

Пусть имеются  $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^m, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n}$  — замкнутые брусы,  $f : I_x \times I_y \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$  и  $\forall$  фиксированного  $x \in I_x \Rightarrow f(x, y) \in \mathcal{R}(I_y) \Rightarrow$

$$\int_{I_x \times I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = \int_{I_x} \left( \int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) d\bar{x} = \int_{I_x} d\bar{x} \int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

**Примечание.** аналогично, если взять для  $\forall$  фиксированного  $y \in I_y$

## 2.16 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности

**Теорема.**  $f_n \xrightarrow{D} f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_D |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

## 2.17 Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

**Теорема.**  $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N, \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

**Примечание.** Отрицание Критерия Коши:

$$f_n(x) \not\xrightarrow{D} f(x) \iff \exists \varepsilon_0 > 0 \forall N : \exists n, m > N, \exists x_0 \in D |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon_0$$

## 2.18 Теорема о почленном переходе к пределу для функциональной последовательности

**Теорема.** Пусть  $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0$  — предельная точка  $D, f_n \xrightarrow{D} f, \forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n$

Тогда,

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ \left( \text{или } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \end{aligned}$$

## 2.19 Теорема о непрерывности предельной функции

**Теорема.** Пусть имеется 
$$\left. \begin{aligned} f_n, f : D &\rightarrow \mathbb{R}, \\ f_n &\xrightarrow{D} f, \\ \forall n \in \mathbb{N} \ f_n &\in C(D) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \in C(D)$$

## 2.20 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии разрыва

$$\left. \begin{array}{l} f_n \in C([a; b]), \\ \text{Теорема. Пусть имеется } f \in C((a; b)) + \text{ разрыв в т. } a, \\ f_n \xrightarrow{[a; b]} f \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{(a; b)} f$$

То есть будет поточечная сходимость, но не будет равномерной:

$$f_n \xrightarrow{(a; b)} f, \text{ но не } f_n \rightrightarrows f$$

## 2.21 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии расходимости в точке

$$\left. \begin{array}{l} f_n \in C([a; b]) \\ \text{Теорема. Пусть имеется } f_n \xrightarrow{(a; b)} f \\ \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{(a; b)} f$$

## 2.22 Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности

$$\left. \begin{array}{l} f_n, f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Теорема. Пусть имеется } f_n \xrightarrow{[a; b]} f \\ f_n \in \mathcal{R}([a; b]) \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a; b]) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

## 2.23 Теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности

$$\left. \begin{array}{l} f_n, f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Теорема. Пусть имеется } f_n \in D([a; b]) \\ \exists c \in [a; b] : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) \\ \exists g(x) : f'_n \xrightarrow{[a; b]} g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists f : f_n \xrightarrow{[a; b]} f \\ \oplus f'(x) = g(x) \end{array}$$

## 2.24 Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда

**Теорема.** Пусть  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{D}$  тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > k > N \forall x \in D \Leftrightarrow |S_m(x) - S_k(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^m f_n(x) \right| < \varepsilon$$

## 2.25 Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда

$$\left. \begin{array}{l} f_n : D \rightarrow \mathbb{R} (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \text{Следствие. Пусть } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{D} \end{array} \right\} \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{D} 0$$

## 2.26 Сравнительный признак равномерной сходимости функционального ряда

**Теорема.** Имеется

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) : \\ \exists N \forall n > N \forall x \in D |a_n(x)| \leq b_n(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \stackrel{D}{\Rightarrow} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \stackrel{D}{\Rightarrow} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ сходится абсолютно на } D$$

## 2.27 Мажорантный признак Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда

**Следствие.** Из признака сравнения.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) : \\ \exists N \forall n > N \sup_D |a_n(x)| \leq M_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} M_n - \text{сходится} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{D}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится абсолютно на } D$$

### 3 Вопросы на доказательство

#### 3.1 Необходимое условие интегрирования.

**Теорема.** Пусть  $I$  — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

*Доказательство.* От противного.

1.  $f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A \in \mathbb{R}$ , такая что  $\forall \varepsilon > 0$ , а значит для  $\varepsilon = 1$  тоже:

$$\exists \delta > 0: \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} \leq \delta \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < 1$$

Отсюда

$$A - 1 < \sigma < A + 1 \implies \sigma \text{ ограничена}$$

2. С другой стороны, так как предположили, что  $f$  — неограничена на  $I$

$$\forall \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k \quad \exists i_0: f \text{ неограничена на } I_{i_0}$$

Тогда рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) \cdot |I_i| + f(\xi_{i_0}) \cdot |I_{i_0}|$$

Выбором подходящего  $\xi_{i_0}$  можно сделать  $f(\xi_{i_0})$  сколь угодно большой  $\implies \sigma$  будет не ограничена - противоречие

Из противоречия пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

#### 3.2 Свойства интеграла Римана

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) : \exists A_f, \text{ что } \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \quad \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \quad \text{верно } \left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \int_I f dx \right| &=: |\sigma_f - A_f| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \\ g \in \mathcal{R}(I) : \exists A_g, \text{ что } \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \quad \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \quad \text{верно } \left| \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \int_I g dx \right| &=: |\sigma_g - A_g| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \end{aligned}$$

Тогда  $\forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \min(\delta_f, \delta_g) = \delta :$

$$\begin{aligned} |\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \alpha A_f - \beta A_g| &= \left| \sum (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \cdot |I_i| - \alpha A_f - \beta A_g \right| \leq \\ &\leq |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} < \varepsilon \end{aligned}$$



□

## 2. Монотонность

$$f, g \in \mathcal{R}(I); f \leq g \text{ на } I \implies \int_I f dx \leq \int_I g dx$$

*Доказательство.*

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall (T, \xi) : \Delta_T < \delta, \text{ выполняется } |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Аналогично для  $g \in \mathcal{R}(I)$ , тогда:

$$\begin{cases} A_f - \varepsilon < \sigma_1 < A_f + \varepsilon \\ A_g - \varepsilon < \sigma_2 < A_g + \varepsilon \\ \sigma_f \leq \sigma_g \end{cases}$$

Отсюда

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leq \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f - \varepsilon < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

□

## 3. Оценка интеграла (сверху)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f dx \right| \leq \sup_I |f| |I|$$

*Доказательство.* По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) &\implies f \text{ Ограничена на } I \\ &\implies -\sup_I |f| \leq f \leq \sup_I |f| \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} -\int_I \sup |f| dx &\leq \int_I f dx \leq \int_I \sup |f| dx \\ -\sup_I |f| |I| &\leq \int_I f dx \leq \sup_I |f| |I| \end{aligned}$$

□

## 3.3 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. Если в определении  $\{I_i\}$  заменить на открытые брусы, то определение останется верным.

*Доказательство.* Пусть  $\{I_i\}$  — открытые брусы, тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  не более чем счетный набор  $\{I_i\}$ :  $M \subset \bigcup_i I_i$  и  $\sum |I_i| < \varepsilon$

Пусть  $\{\bar{I}_i\}$  — открытые брусы + границы = замкнутые брусы  $I_i$ , причём объем “добавленных” плоскостей будет нулевой, так как объем бруса  $n-1$  размерности, будет нулевым для объема бруса размерности  $n$

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, \text{ при этом } |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

**Докажем в обратную сторону.** Мы хотим увеличить замкнутый брус в два раза и увеличенный брус взять открытым.

Пусть  $\{I_i\}$  — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_i^1, b_i^1] \times \dots \times [a_i^n, b_i^n], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Так как  $\left(\frac{a_i^k}{2}, \frac{b_i^k}{2}\right)$  — центр  $i$ -го бруса в  $k$ -ом измерении, увеличить изначальный брус в два раза по этому измерению можно сдвинувшись от центра не на половину, а на целую сторону, то есть на  $b_i^k - a_i^k$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_i &= \left( \frac{a_i^1 + b_i^1}{2} - (b_i^1 - a_i^1); \frac{a_i^1 + b_i^1}{2} + (b_i^1 - a_i^1) \right) \times \dots \times \left( \frac{a_i^n + b_i^n}{2} - (b_i^n - a_i^n); \frac{a_i^n + b_i^n}{2} + (b_i^n - a_i^n) \right) \\ \implies V_2 &= \sum_i |\tilde{I}_i| = 2^n \cdot V_1 < \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

2. Если  $M \subset \mathbb{R}^n$  - множество меры нуль по Лебегу, то из  $L \subset M \implies L$  - множество меры нуль по Лебегу

*Доказательство.* Докажем по транзитивности

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ не более чем счетный набор } \{I_i\} : L \subset M \subset \bigcup_i I_i \implies L \subset \bigcup_i I_i$$

По условию нам дано, что для  $M \subset \bigcup_i I_i$  верно  $\sum_i |I_i| < \varepsilon$ , и тоже самое выполнено и для  $L \subset \bigcup_i I_i$ , тогда  $L$  по определению является множеством меры нуль по Лебегу  $\square$

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль по Лебегу, тоже является множеством меры нуль по Лебегу

*Доказательство.* пусть  $M = \bigcup_i M_k$  - объединение не более чем счетного числа множеств  $\forall k M_k$  - множество меры нуль по Лебегу  $\implies \forall k, \forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}_{i=1}^\infty$  по определению множества меры нуль для них верно

- $M_k \subset \bigcup_i I_i^k$ <sup>1</sup>
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon_k \quad \forall \varepsilon_k > 0$

Отсюда получаем  $M = \bigcup_i M_k \subset \bigcup_i I_i^k$  и  $\sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |I_i^k| < \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k$  - если теперь взять  $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k}$ , то мы получим

$$\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k = \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon$$

$\square$

### 3.4 Критерий замкнутости

**Теорема.**  $M$  — замкнуто  $\iff M$  содержит **все** свои предельные точки

*Доказательство.* Докажем необходимость и достаточность

---

<sup>1</sup> $I_i^k$  - это  $i$ -ый для  $M_k$ , а не степень

1. (Необходимость) Докажем  $\Rightarrow$  от противного

- Пусть  $x_0$  — предельная для  $M$  и  $x_0 \notin M$ . Тогда,  $\forall \varepsilon > 0 \quad \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$  и  $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- По условию  $M$  — замкнуто, то есть  $\mathbb{R}^n \setminus M$  — открыто  $\Rightarrow$  все его точки внутренние и  $\exists r > 0$ :

$$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \Rightarrow \overset{\circ}{B}_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B}_r(x_0) \cap M = \emptyset$$

Пришли к противоречию  $\Rightarrow M$  содержит все свои предельные точки □

2. (Достаточность) Докажем  $\Leftarrow$

Пусть  $y_0$  — не является предельной для  $M$ , то есть  $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \Rightarrow \exists r > 0$ :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{B}_r(y_0) \cap M = \emptyset \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \Rightarrow B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus M$  — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными  $\Rightarrow M$  — замкнуто по определению □

### 3.5 Теорема о компактности замкнутого бруса

**Теорема.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус  $\Rightarrow I$  — компакт

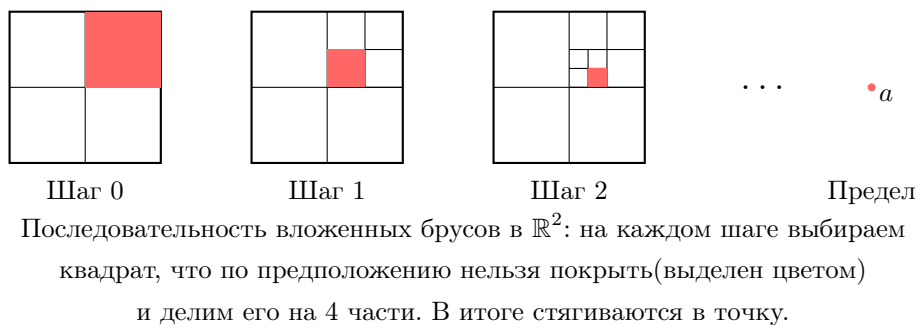
*Доказательство.* Пойдем от противного

Пусть  $I = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$

1. Положим, что  $I$  — не компакт. Значит, существует его покрытие  $\{A_\alpha\}$  — открытые множества, такие что  $I \subset \{A_\alpha\}$ , не допускающее выделения конечного подпокрытия
2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда,  $\exists I_1$ , такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе,  $I$  — компакт
3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусков:

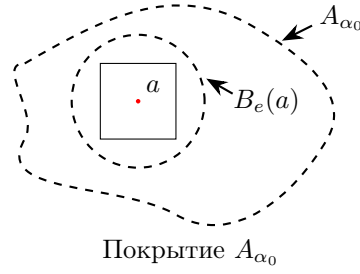
$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку  $a = (a_1, \dots, a_n)$



При этом,  $\exists a = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$

$$4. a \in I \Rightarrow a \in \bigcup A_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$$



Покрывание  $A_{\alpha_0}$

5. Из построения получили, что  $I \supset I_1 \supset \dots \supset a \implies \exists N : \forall n > N \ I_n \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$

Получается, что  $\forall n > N \ I_n$  покрывается одним лишь  $A_{\alpha_0}$  из системы  $\{A_\alpha\}$

Получаем противоречие тому, что любое  $I_n$  не допускает конечного подпокрывания, а у нас получилось, что  $I_n \in A_{\alpha_0} \forall n > N \implies I$  — компакт  $\square$

**Примечание.** Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

### 3.6 Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$

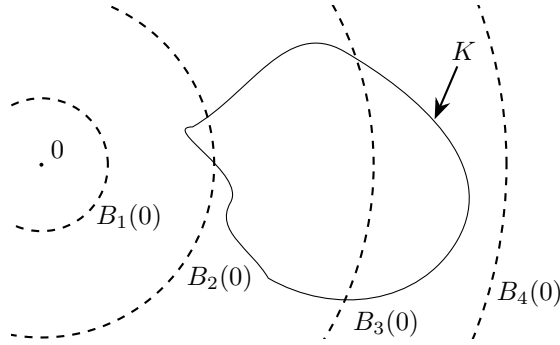
**Теорема.**  $K \subset \mathbb{R}^n$ .  $K$  — компакт  $\iff K$  замкнуто и ограничено

*Доказательство.* Докажем необходимость ( $\implies$ )

- *Ограниченность.*  $K$  — компакт  $\implies \forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$  — можно выделить конечное подпокрывание  $\implies$

$\implies$  Пусть  $\{A_\alpha\} = \{B_n(0)\}_{n=1}^\infty \implies \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ K \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(0)$  и так как  $B_n(0)$  — вложены шары  $\implies$

$\implies K \subset B_N(0) \implies$  по определению  $K$  — ограничено



Пример покрытия  $K$  вокруг точки 0 с помощью шаров

- *Замкнутость.* Пойдем от противного.  $K$  — компакт, тогда возьмем  $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(0)\}_{x \in K}$  — покрытие открытыми шарами, где  $\delta(x) = \rho(x, x_0)$ .  $x_0$  — предельная точка, которая  $\notin K$  (или же  $\in \mathbb{R}^n \setminus K$ )

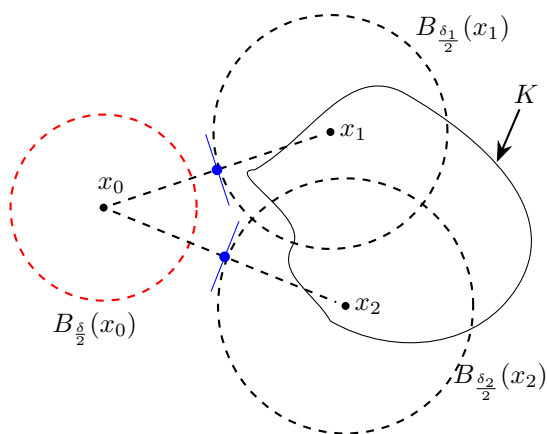
Так как  $K$  — компакт,  $\exists x_1, \dots, x_s : K \subset \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

Пусть  $\delta = \min_{1 \leq i \leq s} \delta(x_i)$ , тогда

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) = \emptyset \implies B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$$

$$\implies \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \emptyset$$

Значит,  $x_0$  не является предельной точкой  $K$ , что противоречит нашему предположению



Пример как мы строим  $B_{\frac{\delta}{2}}$  вокруг точки  $x_0$ .  
Синие точки - середины отрезков на которых они лежат

*Доказательство.* Докажем достаточность

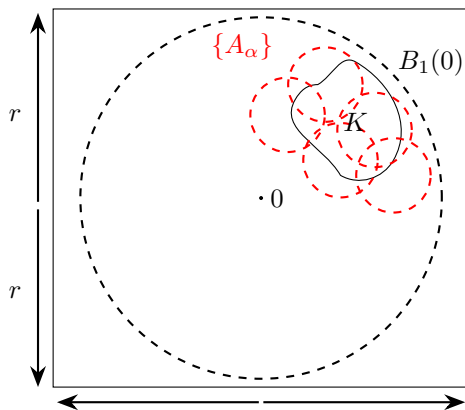
$K$  — замкнуто и ограничено  $\implies \exists r > 0 : B_r(0) \supset K \implies \exists I$  — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n$$

Пусть  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$  — произвольное покрытие открытыми множествами для  $K$ . Тогда,  $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$ . Так как  $I$  — компакт, то  $\exists$  конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K \text{ — покрытие для } I$$

Значит,  $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$  — конечное и  $\{A_\alpha\}$  — произвольное, тогда  $K$  — компакт по определению □



Строим замкнутый брус вокруг точки 0, пользуясь  
существованием конечного покрытия покрываем наш компакт  $K$

### 3.7 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте

**Теорема.** Пусть  $K \in \mathbb{R}^n$  — компакт и функция  $f : K \mapsto \mathbb{R}$  — непрерывная. Тогда  $f$  на  $K$  достигает наибольшее и наименьшее значения.

*Доказательство.* • *Ограниченность.* От противного: пусть существует последовательность  $\{x^k\} \subset K : |f(x^k)| > k$ . Из ограниченности  $K$  следует ограниченность последовательности  $\{x^k\}$ , и как следствие ограничены по-

следовательности отдельных координат:

$$|x_i^k| = \sqrt{|x_i^k|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^k|^2} = \|x^k\| \leq C \quad \text{для некоторого } C$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса у  $\{x_1^k\}$  существует сходящаяся подпоследовательность  $x_1^{k_{j_1}} \rightarrow a_1, j_1 \rightarrow \infty$ . Для последовательности  $\{x_2^{k_{j_1}}\}$  существует сходящаяся последовательность  $x_2^{k_{j_2}} \rightarrow a_2, j_2 \rightarrow \infty$ . И т.д. Получаем сходящуюся подпоследовательность:

$$x^{k_j} = (x_1^{k_j}, x_2^{k_j}, \dots, x_n^{k_j}) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = a$$

Точка  $a$  — предельная для  $K$ . В силу замкнутости  $K$  т.  $a \in K$ . А из непрерывности функции  $f$  получаем  $f(x^{k_j}) \rightarrow f(a)$ . А с другой стороны,  $f(x^{k_j}) \rightarrow \infty$  из выбора исходной последовательности. **противоречие**

- *Достижение наибольшего (наименьшего) значения.* Итак, мы доказали, что  $f$  — ограничена на  $K$ . Выберем последовательность  $\{x^k\}$ :

$$\sup_K f - \frac{1}{k_j} \leq f(x^{k_j}) \leq \sup_K f$$

в силу непрерывности  $f$ :

$$\sup_K f \leq f(a) \leq \sup_K f$$

Получаем  $f(a) = \sup_K f$ , т.е. максимальное значение достигается в точке  $x = a$ . Для  $\inf_K f$  доказательство аналогично  $\square$

### 3.8 Теорема о связи непрерывности функции в точке с колебанием

**Теорема.** Пусть  $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ ;  $f : M \mapsto \mathbb{R}$ .  $f$  — непрерывна в точке  $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$

*Доказательство.*

- *Необходимость*

$f$  — непрерывна в т.  $x_0 \in M \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap M = B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$   
Рассмотрим  $\omega(f, x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$ :

$$\omega(f, B_\delta^M(x_0)) = \sup_{x, y \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)| + \sup_{y \in B_\delta(x_0)} |f(y) - f(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0 \implies \delta \rightarrow 0$  и  $\omega(f, B_\delta^M(x_0)) \rightarrow 0$ , т.е.  $\omega(f, x_0) = 0$

- *Достаточность*

Пусть  $0 = \omega(f, x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in B_\delta^M(x_0) \quad \sup_{x, y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \implies$$

$\square$

### 3.9 Свойства интегральных сумм Дарбу

#### 3.9.1 Нижняя сумма Дарбу не больше верхней

**Теорема.**

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \int_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \mathbb{T}) &= \sum_{i=1}^K m_i |I_i| = \sum_i \inf_{\xi_i} (f(\xi_i)) |I_i| = \inf_{\xi} \sum_i f(\xi_i) |I_i| = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \\ \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_i (f(\xi_i)) |I_i| = \sum_i M_i |I_i| = \bar{S}(f, \mathbb{T}) \end{aligned}$$

#### 3.9.2 Монотонность сумм относительно измельчений разбиения

**Теорема.** Пусть  $\tilde{\mathbb{T}}$  — измельчение разбиения  $\mathbb{T}$ , тогда

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

□

*Доказательство.* Если  $L \subset M$ , то  $\inf L \geq \inf M$  и  $\sup L \leq \sup M$ , тогда:

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \underset{\text{по 6.2}}{\leq} \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

□

#### 3.9.3 Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же бросе

**Теорема.**  $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : \underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$

*Доказательство.*  $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$  рассмотрим  $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ , тогда по 6.3:

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$$

□

### 3.10 Теорема об интегралах Дарбу как пределах интегральных сумм Дарбу

**Теорема.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус, а  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  — ограничена. Тогда:

$$\bar{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \bar{S}(f, \mathbb{T}) \quad \text{и} \quad \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \underline{S}(f, \mathbb{T})$$

*Доказательство.* Докажем, что  $\underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \underline{S}(f, \mathbb{T}) \quad (= \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, \mathbb{T}))$

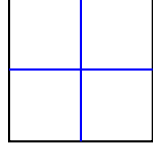
1.  $f$ -ограничена на  $I \implies \exists C > 0 : \forall x \in I \quad |f(x)| \leq C$
2. т.к. по определению  $\underline{\mathcal{I}} = \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, \mathbb{T})$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathbb{T}_1 = \{I_i^1\}_{i=1}^{m_1} : \underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon$
3. Пусть  $G = \bigcup_{i=1}^{m_1} \partial I_i^1$  — объединение границ брусков  $I_i^1 \in \mathbb{T}_1$  (без повторов). Тогда  $G$  множество меры нуль по Лебегу (т.к. границы — мн-ва меры нуль по Лебегу)

4. Пусть  $\mathbb{T}_2$  - произвольное разбиение  $I : \mathbb{T}_2 = \{I_i^2\}_{i=1}^{m_2}$

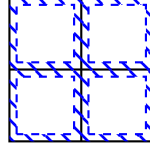
Рассмотрим два множества брусов:

$$A = \{I_i^2 \in \mathbb{T}_2 : I_i^2 \cap G \neq \emptyset\} \quad \text{и} \quad B = \mathbb{T}_2 \setminus A \implies \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \mathbb{T}_2 : \Delta_{\mathbb{T}_2} < \delta \text{ верно, что } \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| < \varepsilon$$

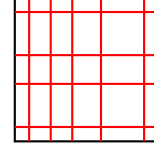
т.к. наши брусочки  $I_i^2$  по построению лежат в  $G$ , а по 3 пункту оно множество меры нуль.



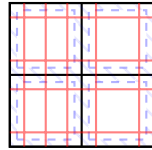
разбиение  $T_1$



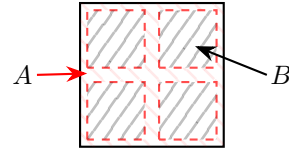
Граница  $G$  бруса  $T_1$



Какое-то разбиение  $T_2$



Как прошлые разбиения и граница  $G$  выглядят на одном рисунке



Как выглядят множества  $A$  и  $B$

5. С другой стороны  $\forall I_i^2 \in B$  верно, что  $I_i^2 \in \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$

Хотим рассмотреть

$$|\underline{I} - \underline{S}(f, \mathbb{T}_2)| = |I - \underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) + \underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{S}(f, \mathbb{T}_2)| \leq \underbrace{|I - \underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)|}_* + \underbrace{|\underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{S}(f, \mathbb{T}_2)|}_{**} \\ < \varepsilon + 2C\varepsilon = \varepsilon(1 + 2C)$$

□

\* из пункта 2:  $\underline{I} - \varepsilon < \underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) \leq \underline{I} < \underline{I} + \varepsilon \implies |\underline{I} - \underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)| < \varepsilon$

\*\* Пояснение ниже

$$|\underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{S}(f, \mathbb{T}_2)| = \left| \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| + \sum_{I_i \in \mathbb{T}_1 \cap A} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \quad \text{Переход с равном по пункту 5} \\ \leq \left| \sum_{I_i \in \mathbb{T}_1 \cap A} m_i |I_i^2| \right| + \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\ \leq 2 \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \quad \text{Следующий переход по пункту 1} \\ \leq 2C \left| \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| \right| \quad \text{Следующий переход по пункту 4} \\ < 2C\varepsilon$$

### 3.11 Критерий Дарбу интегрируемости функции на замкнутом брусе

$I \in \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус,  $f : I \mapsto \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I) \iff f$  — ограничена на  $I$  и  $\underline{I} = \bar{I}$



*Доказательство. Необходимость*

- $f \in \mathcal{R}(I) \implies$  по необходимому условию интегрируемости функции по Риману на замкнутом бруске,  $f$  — ограничена на  $I$
- Покажем, что  $\underline{I} = \underline{I}, \bar{I} = \bar{I} \implies \underline{I} = \bar{I}$

$$1. f \in \mathcal{R}(I) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \implies |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \underline{I}| < \varepsilon$$

$$2. \underline{I} = \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, \mathbb{T}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \underline{S}(f, \mathbb{T}) \implies |\underline{I} - \underline{S}| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \exists \mathbb{T} : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : |\underline{I} - \underline{S}| < \varepsilon$$

$$3. \underline{S}(\mathbb{T}, \xi) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$$

$$\forall \mathbb{T}, \forall \varepsilon > 0 \exists \xi : |\underline{S} - \sigma| < \varepsilon$$

$$|\underline{I} - \bar{I}| \leq |\underline{I} - \underline{S} + \sigma + \sigma - \underline{S}| \leq |\underline{I} - \sigma| + |\underline{I} - \underline{S}| + |\sigma - \underline{S}| < 3\varepsilon$$

□

*Доказательство. Достаточность*

$f$  — ограничена и  $\underline{I} = \bar{I}$ . Имеем

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

Тогда, при  $\lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \underline{S} = \underline{I}$ ,  $\lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \bar{S} = \bar{I}$  получаем  $\underline{I} = \bar{I}$  (Условие ограниченности  $f$  даёт нам возможность применять неравенство выше)

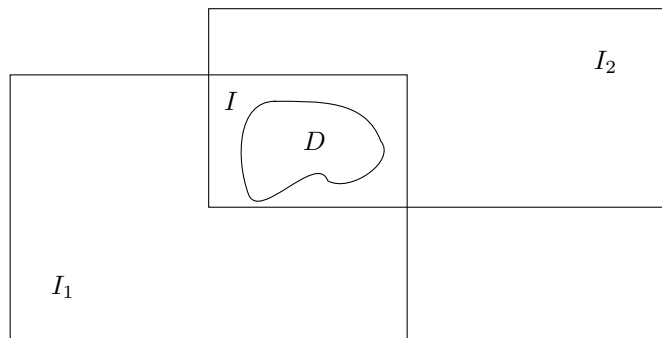
□

### 3.12 Утверждение о независимости определения допустимого множества от выбора бруса

Пусть  $D \subset I_1 \subset \mathbb{R}^n, D \subset I_2 \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутые брусы, тогда

$$\int_{I_1} f \cdot \chi_D dx \text{ и } \int_{I_2} f \cdot \chi_D dx$$

либо существуют и равны, либо оба не существуют вообще



Как выглядят наши множества  $I_1, I_2, I, D$

*Доказательство.* Введем  $I = I_1 \cap I_2 \supset D$ ,  $I$  не пустое по построению. Покажем существование

- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \implies$  по критерию Лебега  $f \cdot \chi_D$  ограничена на  $I_1 \implies f \cdot \chi_D$  ограничена на  $D \implies f$  ограничена на  $D \implies f \cdot \chi_D$  ограничена на  $I_2$

- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \implies$  по критерию Лебега  $f \cdot \chi_D$  непрерывна почти всюду на  $I_1 \implies f \cdot \chi_D$  непрерывна почти всюду на  $D \implies$  в худшем случае для  $f \cdot \chi_D$  на  $I_2$  добавятся разрывы на  $\partial D \implies f \cdot \chi_D$  непрерывна почти всюду на  $I_2$
- Тогда,  $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \iff f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_2)$

Покажем равенство

- Пусть  $\mathbb{T}_i$  — разбиение на  $I_i : \mathbb{T}_1$  и  $\mathbb{T}_2$  совпадают на  $I$
- Пусть  $\xi^i$  — отмеченные точки для  $\mathbb{T}_i$
- $\sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_1, \xi^1) = \sum_j f\chi_D(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum_j f(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum_j f(\xi_j^2)|I_j^2| = \sum_j f\chi_D(\xi_j^2)|I_j^2| = \sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_2, \xi^2)$

□

**Примечание.** Все свойства интеграла Римана и критерия Лебега для бруса справедливы и для других допустимых множеств

### 3.13 Теорема Фубини о переходе к повторному интегралу

Пусть имеются  $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^m, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n}$  — замкнутые брусy,  $f : I_x \times I_y \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$  и  $\forall$  фиксированного  $x \in I_x \implies f(x, y) \in \mathcal{R}(I_y) \implies$

$$\int_{I_x \times I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = \int_{I_x} \left( \int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) d\bar{x} = \int_{I_x} d\bar{x} \int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

**Примечание.** аналогично, если взять для  $\forall$  фиксированного  $y \in I_y$

*Доказательство.* Воспользуемся тем, что  $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y), f \in \mathcal{R}(I_y)$ , а также Критерием Дарбу

- $\mathbb{T}_x = \{I_i^x\}$  — разбиение на  $I_x, \mathbb{T}_y = \{I_j^y\}$  — разбиение на  $I_y, \mathbb{T}_{x,y} = \{I_i^x \times I_j^y\} = \{I_{ij}\}$  — разбиение на  $I_x \times I_y$ , и при этом верно  $|I_i^x| \cdot |I_j^y| = |I_{ij}|$
- 

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{S}}(f, \mathbb{T}_{x,y}) &= \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in I_{ij}} f(x,y) |I_{ij}| \underset{\text{рис. ниже}}{\leq} \sum_{i,j} \inf_{x \in I_i^x} \left( \inf_{y \in I_j^y} f(x,y) \cdot |I_j^y| \right) |I_i^x| = \sum_i \inf_{I_i^x} \left( \underbrace{\sum_j \inf_{I_j^y} f(x,y) |I_j^y|}_{\underline{\mathbb{S}}(f(y), \mathbb{T}_y)} \right) |I_i^x| \\ &\leq \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left( \int_{I_y} f(x,y) dy \right)}_{g(x)} |I_i^x| \leq \underline{\mathbb{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) \\ &\leq \bar{\mathbb{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) \end{aligned}$$

$$\underline{\mathbb{S}}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \leq \underline{\mathbb{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) \leq \bar{\mathbb{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) \leq \bar{\mathbb{S}}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \implies \exists \bar{I} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{\mathbb{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) = \int_{I_x \times I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}$$

**Примечание.** Последний знак неравенства, получен аналогичными действиями для длинного неравенства выше, просто развернув в обратную сторону знаки неравенства для  $\sup$

□

### 3.14 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности

**Теорема.**  $f_n \xrightarrow{D} f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_D |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

*Доказательство.* Докажем необходимость ( $\implies$ )

Заметим, что  $\sup_D |f_n(x) - f(x)| \geq 0$ . Тогда,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall x \in D \hookrightarrow \sup_D |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$f_n \xrightarrow{D} f \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

В худшем случае,  $\sup_D |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

*Доказательство.* Докажем достаточность ( $\impliedby$ )

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \hookrightarrow \sup_D |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ тем более } \forall x \in D \sup_D \geq |f_n(x) - f(x)|$$

Тогда,  $f_n \xrightarrow{D} f$  □

**Примечание.**  $f \rightrightarrows f \implies f_n \longrightarrow f$ , но в обратную сторону это не работает

### 3.15 Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

**Теорема.**  $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N, \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

*Доказательство.*  $\implies$  Докажем необходимость

Так как  $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Рассмотрим } |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Таким образом, мы показали, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N, \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$  □

*Доказательство.*  $\impliedby$  Докажем достаточность

Распишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N, \exists x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Зафиксируем  $x_0 \in D \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ <sup>1</sup>

$$x_0 \in D : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

В худшем случае,  $\forall x \in D : \text{при } m \rightarrow \infty |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Тогда,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

---

<sup>1</sup> по критерию Коши для числовой последовательности  $f_n(x_0)$

**Примечание.** Отрицание Критерия Коши:

$$f_n(x) \not\stackrel{D}{\rightrightarrows} f(x) \iff \exists \varepsilon_0 > 0 \forall N : \exists n, m > N, \exists x_0 \in D |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon_0$$

### 3.16 Теорема о почленном переходе к пределу для функциональной последовательности

**Теорема.** Пусть  $f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная точка  $D$ ,  $f_n \stackrel{D}{\rightrightarrows} f$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n$

Тогда,

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ \left( \text{или } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \right) \end{aligned}$$

*Доказательство.* Сначала покажем, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ , а потом что  $\exists c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

$$1. \text{ Рассмотрим } |c_n - c| \leq \underbrace{|c_n - f_n|}_{(a)} + \underbrace{|f_n - f_m|}_{(b)} + \underbrace{|f_m - c_m|}_{(c)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

(a), (c) По условию,  $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n$  получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f_n(x) - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(b)  $f_n \stackrel{D}{\rightrightarrows} f \implies$  по Критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Получаем, что  $\forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0)$

Собираем:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |c_n - c_m| < \varepsilon \implies \exists c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

□

2. Теперь покажем, что  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ , то есть  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |f(x) - c| < \varepsilon$

$$\text{Рассмотрим } |f(x) - c| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(a)} + \underbrace{|f_n(x) - c_n|}_{(b)} + \underbrace{|c_n - c|}_{(c)}$$

$$(a) \ f_n \stackrel{D}{\rightrightarrows} f(x) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$(b) \ \forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) \hookrightarrow |f_n(x) - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(c) По доказанному в п. 1 следует, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n > N_2 \hookrightarrow |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Собираем:  $\forall \varepsilon > 0 (\exists N = \max(N_1, N_2)) \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |f(x) - c| < \varepsilon$

□

### 3.17 Теорема о непрерывности предельной функции

**Теорема.** Пусть имеется 
$$\left. \begin{aligned} f_n, f : D &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ f_n &\stackrel{D}{\rightrightarrows} f, \\ \forall n \in \mathbb{N} \ f_n &\in C(D) \end{aligned} \right\} \implies f \in C(D)$$

*Доказательство.* Нужно доказать, что  $f \in C(D)$ . Значит, надо показать, что

$$\forall x_0 \in D : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)|$$

$$\text{Рассмотрим } |f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{(2)} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{(3)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$1. f_n \xrightarrow{D} f : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$2. \text{ Так как } \forall n \in \mathbb{N} f_n \in C(D) \implies \forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$3. f_n \xrightarrow{D} f : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall x_0 \in D \hookrightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда, собрав три части, получим, что  $\forall x_0 \in D$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\exists N : \forall n > N) \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon &\implies f(x) \in C(x_0) \forall x_0 \in D \\ &\implies f(x) \in C(D) \end{aligned}$$

□

### 3.18 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. наличия разрыва

$$\left. \begin{array}{l} f_n \in C([a; b]), \\ \text{Теорема. Пусть имеется } f \in C((a; b)) + \text{разрыв в т.а.}, \\ f_n \xrightarrow{[a; b]} f \end{array} \right\} \implies f_n \not\xrightarrow{(a; b)} f$$

То есть будет поточечная сходимость, но не будет равномерной:

$$f_n \xrightarrow{(a; b)} f, \text{ но не } f_n \rightrightarrows f$$

*Доказательство.* От противного

$$1. \text{ Пусть } f_n \xrightarrow{(a; b)} f \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$2. f_n \xrightarrow{[a; b]} f \implies f_n(a) \longrightarrow f(a) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 \hookrightarrow |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

$$3. f_n \xrightarrow{[a; b]} f, \text{ так как } \forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) \forall n > N, \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

4. Получаем, что

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{[a; b]} f \\ f_n \in C([a; b]) \end{array} \right.$$

Тогда, по теореме о непрерывности предельной функции следует, что  $f \in C([a; b])$ , но  $f$  имеет разрыв в точке  $a$ . Противоречие

□

### 3.19 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии расходимости в точке

$$\text{Теорема. Пусть имеется } \left. \begin{array}{l} f_n \in C([a; b)) \\ f_n \xrightarrow{(a; b)} f \\ \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{(a; b)} f$$

*Доказательство.* От противного

1. Пусть  $f_n \xrightarrow{(a; b)} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \forall x \in (a; b) \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$
2.  $f_n \in C([a; b))$ , тогда

$$\forall x_0 \in [a; b) : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap [a; b) \hookrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

В частности, это верно для  $x_0 = a$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap (a; b)^2 \hookrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

3. Рассмотрим

$$|f_n(a) - f_m(a)| \leq \underbrace{|f_n(a) - f_n(x)|}_{\text{по п.2}} + \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\text{по п.1}} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(a)|}_{\text{по п.2}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N (\exists \delta > 0) : \forall n, m > N (\forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap (a; b)) \hookrightarrow |f_n(a) - f_m(a)| < \varepsilon$$

то есть, по Критерию Коши для числовой последовательности  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ , что противоречит условию, а значит

$$f_n \not\xrightarrow{(a; b)} f$$

□

### 3.20 Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности

$$\text{Теорема. Пусть имеется } \left. \begin{array}{l} f_n, f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n \xrightarrow{[a; b]} f \\ f_n \in \mathcal{R}([a; b]) \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a; b]) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

*Доказательство.* По Критерию Дарбу  $f \in \mathcal{R}([a; b]) \iff f$  — ограничена на  $[a; b]$  и  $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}}$

- Покажем *ограниченность*

1.  $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{R}([a; b]) \Rightarrow f_n$  ограничена на  $[a; b]$  и

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists M_n \geq 0 \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |f_n(x)| \leq M_n$$

2.  $f_n \xrightarrow{[a; b]} f$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Рассмотрим  $\varepsilon = 1$ , тогда  $\exists N_1 = N : \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |f_{N_1+1}(x) - f(x)| < 1$

Тогда, для  $f(x)$  верно  $\forall x \in [a; b]$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{N_1+1}(x)| + |f_{N_1+1}(x)| < 1 + M_{N_1+1},$$

то есть  $f(x)$  — ограничена

---

<sup>2</sup> верно  $\forall x \in B_\delta(a) \cap [a; b)$ , а потому  $a$  выколота

- Покажем *интегрируемость*

Напомним, что  $\overline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \overline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})$  и  $\underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \underline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})$

Рассмотрим  $\mathbb{T}$  — разбиение  $[a; b]$

$$|\underline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})| \leq \underbrace{|\underline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T}) - \underline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T})|}_{(1)} + \underbrace{|\underline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T})|}_{(2)} + \underbrace{|\overline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})|}_{(3)}$$

(1) Распишем в виде неравенств

$$|\underline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T}) - \underline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T})| \leq \sum_i |\inf_{I_i}(f) - \inf_{I_i}(f_n)| |I_i| \leq \sum_i \sup_{I_i} |f - f_n| \cdot |I_i| \leq \sup_{[a; b]} |f - f_n| \cdot |b - a| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Так как  $f_n \xrightarrow{[a; b]} f$ , то по супремальному критерию:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \hookrightarrow \sup_{[a; b]} |f - f_n| < \frac{\varepsilon}{3|b - a|}$$

(2)  $f_n \in \mathcal{R}([a; b]) \implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \mathbb{T} : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \implies |\underline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(3) Аналогично (1):  $|\overline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})| \leq \sup_{[a; b]} |f - f_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

Получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\exists N) \forall \mathbb{T} : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta (\forall n > N) \hookrightarrow |\underline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\implies f(x) \in \mathcal{R}([a; b])$

- Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Рассмотрим

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \sup_{[a; b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b - a| < \varepsilon$$

Так как  $f_n \xrightarrow{[a; b]} f$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \sup_{[a; b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|b - a|}$  и получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \hookrightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

□

### 3.21 Теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности

$$\left. \begin{array}{l} f_n, f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n \in D([a; b]) \\ \exists c \in [a; b] : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) \\ \exists g(x) : f'_n \xrightarrow{[a; b]} g(x) \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \exists f : f_n \xrightarrow{[a; b]} f \\ \oplus f'(x) = g(x) \end{array}$$

*Доказательство.* Покажем существование

**Теорема.** (Лагранжа)  $f \in C([a,b]), f \in D((a,b)) \implies \exists c \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

1. Рассмотрим  $\varphi(x) = f_n(x) - f_m(x)$

2.  $\forall n \in \mathbb{N} f_n \in D([a,b]) \implies f_n \in C([a,b]) \implies \varphi(x) \in D([a,b])$  и  $\varphi(x) \in C([a,b])$

3. Рассмотрим: для  $c$  из условия теоремы Лагранжа

$$\varphi(x) - \varphi(c) = \varphi'(\xi) \cdot (x - c), \text{ где } \xi \in [c; x] \text{ } ([x; c])$$

$$\text{Тогда, } \varphi(x) = \varphi'(\xi)(x - c) + \varphi(c)$$

$$4. \text{ Оценим } |\varphi(x)| \leq |\varphi'(\xi)| \cdot |x - c| + |\varphi(c)| = \underbrace{|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|}_{\star} \cdot |x - c| + \underbrace{|f_n(c) - f_m(c)|}_{\star\star}$$

$$\star f'_n \xrightarrow{[a;b]} g(x) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n, m > N_1 \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$$

$$\star\star \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n, m > N_2 \hookrightarrow |f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда,

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi'(\xi)| \cdot |x - c| + |\varphi(c)| = \underbrace{|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|}_{\star} \cdot |x - c| + \underbrace{|f_n(c) - f_m(c)|}_{\star\star} < \frac{\varepsilon}{2|b-a|} \cdot |x - c| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max\{N_1, N_2\} : \forall n, m > N \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |\varphi(x)| = |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \implies \exists f : f_n \xrightarrow{[a;b]} f$$

*Доказательство.* Покажем, что  $f'(x) = g(x)$

Пусть имеется  $x_0 \in [a; b]$ , но он произвольный

$$1. \text{ Рассмотрим } \psi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$$

Покажем по Критерию Коши, что  $\psi_n(x) \xrightarrow{[a;b]}$

$$\begin{aligned} |\psi_n(x) - \psi_m(x)| &= \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0) - f_m(x) + f_m(x_0)}{x - x_0} \right| \\ &= \left| \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0} \right| \\ &= \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \right| \\ &\quad \exists \xi \in [x_0, x] \\ &= \frac{|\varphi'(\xi)| |x - x_0|}{|x - x_0|} \\ &= |\varphi'(\xi)| \\ &= |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \varepsilon \end{aligned}$$

так как  $f_n \xrightarrow{[a;b]}$ , то есть

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, \forall x \in [a, b] \hookrightarrow |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$$

то  $\psi \xrightarrow{[a;b]}$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}, \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \psi_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f'_n(x_0), \text{ так как } f_n \in D([a, b])$$



Получаем, что  $\psi_n(x) \xrightarrow{[a,b]}$  и  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \psi_n(x) = f'_n(x_0)$ , тогда по теореме о почленном переходе к пределу

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \psi_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

□

### 3.22 Сравнительный признак равномерной сходимости функционального ряда

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) : \\ \text{Теорема. Имеется } \exists N \forall n > N \forall x \in D |a_n(x)| \leq b_n(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \xrightarrow{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{D} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ сходится абсолютно на } D$$

*Доказательство.* Докажем по критерию Коши

$$(\star) \quad |a_{m+1}(x) + \dots + a_k(x)| \leq |a_{m+1}(x)| + \dots + |a_k(x)| \underset{\forall m, k > N \forall x \in D}{\leq} b_{m+1}(x) + \dots + b_k(x) \underset{\forall m, k > N_1 \forall x \in D}{<} \varepsilon$$

Получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} = \max\{N, N_1\} : \forall k > m > \tilde{N} \forall x \in D \hookrightarrow |a_{m+1}(x) + \dots + a_k(x)| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{D}$$

Так как  $(\star)$  выполняется для любого  $x \in D$ , то  $\forall x_0 \in D$  выполняется

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} = \max\{N, N_1\} : \forall k > m > \tilde{N} \hookrightarrow |a_{m+1}(x)| + \dots + |a_k(x)| < \varepsilon,$$

то есть  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x_0)|$  — сходится, а значит сходится абсолютно  $\forall x_0 \in D$

□

### 3.23 Мажорантный признак Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) : \\ \text{Следствие. } \exists N \forall n > N \sup_D |a_n(x)| \leq M_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ — сходится} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{D} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится абсолютно на } D$$

*Доказательство.* Если в признаке сравнения принять, что  $\forall n \in \mathbb{N} b_n(x) = M_n = \text{const}(n)$ , то условие теоремы выполняется

□