

# Математический Анализ - 2

Авторы [конспекта 24/25 года](#), на основе которого написан текущий:

Винер Даниил | [github](#)

Нарек Хорянян | [github](#)

Авторы [текущего конспекта](#):

Жуков Андрей | [github](#)

coffecat46 | [github](#)

Версия от 04.11.2025 20:01

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1</b>	<b>3</b>
1.1	Брус. Мера бруса	3
1.2	Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$	3
1.3	Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения	3
1.4	Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману	4
1.5	Пример константной функции	5
1.6	Пример неинтегрируемая функция	5
1.7	Вычисление многомерного интеграла	5
<b>2</b>	<b>Лекция 2</b>	<b>7</b>
2.1	Необходимое условие интегрирования.	7
2.2	Свойства интеграла Римана	7
2.3	Множество меры нуль по Лебегу	8
2.4	Свойства множества меры нуль по Лебегу	8
<b>3</b>	<b>Лекция 3</b>	<b>11</b>
3.1	Критерий замкнутости	12
<b>4</b>	<b>Лекция 4</b>	<b>13</b>
4.1	Замкнутый брус — компакт	13
4.2	Критерий компактности	14
<b>5</b>	<b>Лекция 5</b>	<b>16</b>
5.1	Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте	16
5.2	Расстояние между двумя множествами	16
5.3	Расстояние между непересекающимися компактами	16
5.4	Колебание функции на множестве	17
5.5	Колебание функции в точке	17
5.6	Колебание функции, непрерывной в точке	17
5.7	Пересечение разбиений бруса	17
5.8	Критерий Лебега об интегрируемости функции по Риману	18
5.9	Измельчение разбиения	20

<b>6</b>	<b>Лекция 6</b>	<b>21</b>
6.1	Нижняя и верхняя суммы Дарбу . . . . .	21
6.2	Нижняя сумма Дарбу не больше верхней . . . . .	21
6.3	Монотонность сумм относительно измельчений разбиения . . . . .	21
6.4	Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же бруске . . . . .	21
6.5	Верхние и нижние интегралы Дарбу . . . . .	21
<b>7</b>	<b>Лекция 7</b>	<b>22</b>
7.1	Интеграл Дарбу как предел сумм Дарбу . . . . .	22
7.2	Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману . . . . .	23
7.3	Интегрирование по допустимым множествам . . . . .	23
<b>8</b>	<b>Лекция 8</b>	<b>25</b>
8.1	Интегрирование по допустимым множествам(Продолжение) . . . . .	25
8.2	Теорема Фубини . . . . .	25
8.3	Теорема о замене переменных в кратном интеграле . . . . .	27

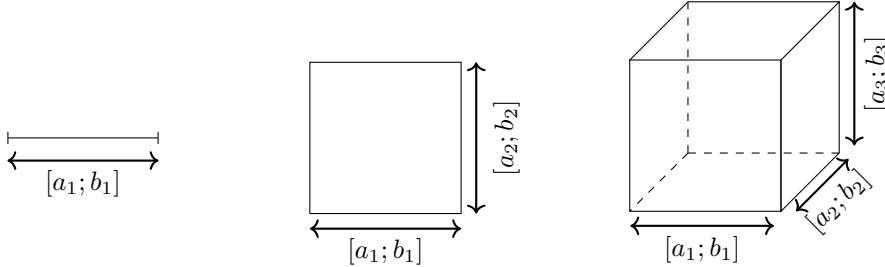
# 1 Лекция 1

## 1.1 Брус. Мера бруса

**Определение.** Замкнутый брус (координатный промежуток) в  $\mathbb{R}^n$  — множество, описываемое как

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i \in \{1, n\}\} \\ = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

**Примечание.**  $I = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_n, b_n\}$ , где  $\{a_i, b_i\}$  может быть отрезком, интервалом и т.д.



Пример брусков размерности с 1 по 3

**Определение.** Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

## 1.2 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:**  $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a, b})$ , где  $\lambda \geq 0$

2. **Аддитивность:** Пусть  $I, I_1, \dots, I_k$  — брусы

Тогда, если  $\forall i, j$   $I_i, I_j$  не имеют общих внутренних точек, и  $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$ , то

$$|I| = \sum_{i=1}^k |I_i|$$

3. **Монотонность:** Пусть  $I$  — брус, покрытый конечной системой брусков, то есть  $I \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$ , тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^k |I_i|$$

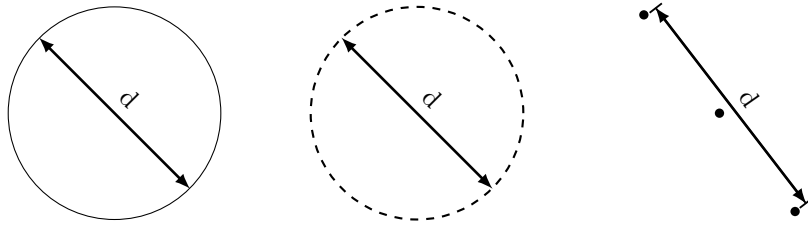
## 1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

**Определение.**  $I$  — замкнутый, невырожденный брус и  $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$ , где  $I_i$  попарно не имеют общих внутренних точек.

Тогда набор  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$  называется разбиением бруса  $I$

**Определение.** Диаметр произвольного ограниченного множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть

$$d(M) = \sup_{x, y \in M} \|x - y\|, \text{ где} \\ \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$



Пример диаметра для разных ограниченных множеств (Для всех трёх он равен  $d$ )

**Определение.** Масштаб разбиения  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$  — число  $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max_{1 \leq i \leq k} d(I_i)$

**Определение.** Пусть  $\forall I_i$  выбрана точка  $\xi_i \in I_i$ . Тогда, набор  $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$  будем называть **отмеченными точками**

**Определение.** Размеченное разбиение — пара  $(\mathbb{T}, \xi)$

## 1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть  $I$  — невырожденный, замкнутый брус, функция  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  определена на  $I$

**Определение.** Интегральная сумма Римана функции  $f$  на  $(\mathbb{T}, \xi)$  — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

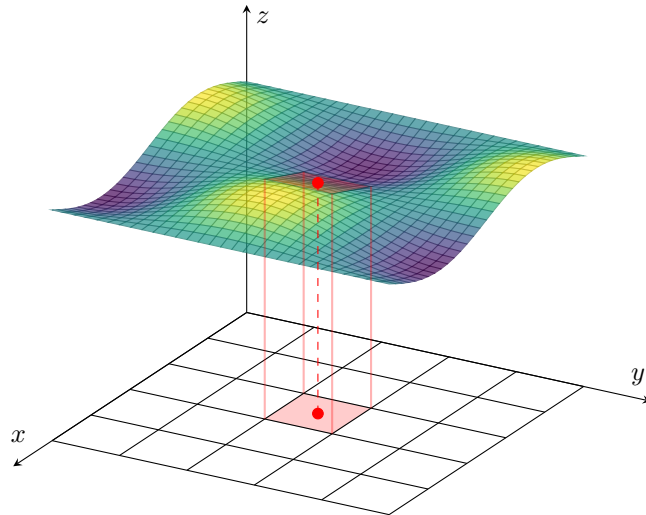
**Определение.** Функция  $f$  интегрируема (по Риману) на замкнутом брусе  $I$  ( $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ), если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$$

Тогда

$$A = \int_I f(x) dx = \int_I \dots \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Обозначение:  $f \in \mathcal{R}(I)$



Пример интегрирования в  $\mathbb{R}^2$  по определению

## 1.5 Пример константной функции

Пусть у нас есть функция  $f = \text{const}$

$$\begin{aligned}\forall(\mathbb{T}, \xi) : \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^k \text{const} \cdot |I_i| \\ &= \text{const} \cdot |I| \implies \int_I f(x) dx = \text{const} \cdot |I|\end{aligned}$$

## 1.6 Пример неинтегрируемая функция

Имеется брус  $I = [0, 1]^n$ , а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \dots, n} \ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

*Доказательство.*  $\forall \mathbb{T}$  можно выбрать  $\xi_i \in \mathbb{Q}$ , тогда для такой пары  $(\mathbb{T}, \bar{\xi})$ :

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^k 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время,  $\forall \mathbb{T}$  можно выбрать  $\xi_i \notin \mathbb{Q}$ , тогда для такой пары  $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$ :

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^k 0 \cdot |I_i| = 0 \implies f \notin \mathcal{R}(I)$$

## 1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны  $\frac{1}{n}$ , выбирая в качестве точек  $\xi_i$  нижние правые вершины ячеек

Имеется функция  $f = xy$ ,  $|I| = \frac{1}{n^2}$

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} i \cdot j = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{n^4} \sum_{i=1}^n i = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4}$$

Заметим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4} = \frac{1}{4}$

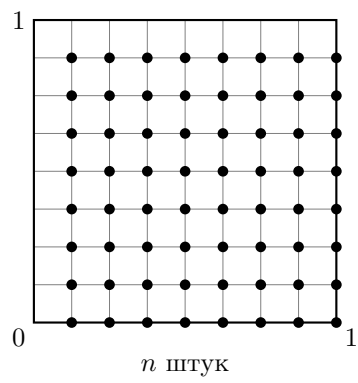


Рисунок того как мы выбираем в примере точки на разбиение

## 2 Лекция 2

### 2.1 Необходимое условие интегрирования.

**Теорема.** Пусть  $I$  — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

*Доказательство.* От противного.

1.  $f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A \in \mathbb{R}$ , такая что  $\forall \varepsilon > 0$ , а значит для  $\varepsilon = 1$  тоже:

$$\exists \delta > 0: \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} \leq \delta \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < 1$$

Отсюда

$$A - 1 < \sigma < A + 1 \implies \sigma \text{ ограничена}$$

2. С другой стороны, так как предположили, что  $f$  — неограничена на  $I$

$$\forall \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k \quad \exists i_0: f \text{ неограничена на } I_{i_0}$$

Тогда рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) \cdot |I_i| + f(\xi_{i_0}) \cdot |I_{i_0}|$$

Выбором подходящего  $\xi_{i_0}$  можно сделать  $f(\xi_{i_0})$  сколь угодно большой  $\implies \sigma$  будет не ограничена - противоречие

Из противоречия пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

### 2.2 Свойства интеграла Римана

#### 1. Линейность.

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) : \exists A_f, \text{ что } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \quad \text{верно } \left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \int_I f dx \right| &= |\sigma_f - A_f| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \\ g \in \mathcal{R}(I) : \exists A_g, \text{ что } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \quad \text{верно } \left| \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \int_I g dx \right| &= |\sigma_g - A_g| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \end{aligned}$$

Тогда  $\forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \min(\delta_f, \delta_g) = \delta :$

$$\begin{aligned} |\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \alpha A_f - \beta A_g| &= \left| \sum (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \cdot |I_i| - \alpha A_f - \beta A_g \right| \leq \\ &\leq |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} < \varepsilon \end{aligned}$$

□

## 2. Монотонность

$$f, g \in \mathcal{R}(I); f \leq g \text{ на } I \implies \int_I f dx \leq \int_I g dx$$

*Доказательство.*

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall (\mathbb{T}, \xi): \Delta_{\mathbb{T}} < \delta, \text{ выполняется } |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Аналогично для  $g \in \mathcal{R}(I)$ , тогда:

$$\begin{cases} A_f - \varepsilon < \sigma_1 < A_f + \varepsilon \\ A_g - \varepsilon < \sigma_2 < A_g + \varepsilon \\ \sigma_f \leq \sigma_g \end{cases}$$

Отсюда

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leq \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f - \varepsilon < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

□

## 3. Оценка интеграла (сверху)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f dx \right| \leq \sup_I |f| |I|$$

*Доказательство.* По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) &\implies f \text{ Ограничена на } I \\ &\implies -\sup_I |f| \leq f \leq \sup_I |f| \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} -\int_I \sup |f| dx &\leq \int_I f dx \leq \int_I \sup |f| dx \\ -\sup |f| |I| &\leq \int_I f dx \leq \sup |f| |I| \end{aligned}$$

□

## 2.3 Множество меры нуль по Лебегу

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов  $\{I_i\}$  и выполняются:

- $M \subset \bigcup_i I_i$
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

**Пример:**  $a \in \mathbb{R}$  — точка.

$$I = [a - \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{3}] \implies |I| = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies a \text{ — множество меры нуль по Лебегу}$$

## 2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. Если в определении  $\{I_i\}$  заменить на открытые брусы, то определение останется верным.

*Доказательство.* Пусть  $\{I_i\}$  — открытые брусы, тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  не более чем счетный набор  $\{I_i\}$ :  $M \subset \bigcup_i I_i$  и  $\sum |I_i| < \varepsilon$



Пусть  $\{\bar{I}_i\}$  — открытые брусы + границы = замкнутые брусы  $I_i$ , причём объем “добавленных” плоскостей будет нулевой, так как объем бруса  $n - 1$  размерности, будет нулевым для объема бруса размерности  $n$

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, \text{ при этом } |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

**Докажем в обратную сторону.** Мы хотим увеличить замкнутый брус в два раза и увеличенный брус взять открытым.

Пусть  $\{I_i\}$  — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_i^1, b_i^1] \times \dots \times [a_i^n, b_i^n], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Так как  $\left(\frac{a_i^k}{2}, \frac{b_i^k}{2}\right)$  — центр  $i$ -го бруса в  $k$ -ом измерении, увеличить изначальный брус в два раза по этому измерению можно сдвинувшись от центра не на половину, а на целую сторону, то есть на  $b_i^k - a_i^k$

Таким образом:

$$\tilde{I}_i = \left(\frac{a_i^1 + b_i^1}{2} - (b_i^1 - a_i^1); \frac{a_i^1 + b_i^1}{2} + (b_i^1 - a_i^1)\right) \times \dots \times \left(\frac{a_i^n + b_i^n}{2} - (b_i^n - a_i^n); \frac{a_i^n + b_i^n}{2} + (b_i^n - a_i^n)\right)$$

$$\implies V_2 = \sum_i |\tilde{I}_i| = 2^n \cdot V_1 < \varepsilon$$

□

2. Если  $M \subset \mathbb{R}^n$  - множество меры нуль по Лебегу, то из  $L \subset M \implies L$  - множество меры нуль по Лебегу

*Доказательство.* Докажем по транзитивности

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ не более чем счетный набор } \{I_i\} : L \subset M \subset \bigcup_i I_i \implies L \subset \bigcup_i I_i$$

По условию нам дано, что для  $M \subset \bigcup_i I_i$  верно  $\sum_i |I_i| < \varepsilon$ , и тоже самое выполнено и для  $L \subset \bigcup_i I_i$ , тогда  $L$  по определению является множеством меры нуль по Лебегу

□

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль по Лебегу, тоже является множеством меры нуль по Лебегу

*Доказательство.* пусть  $M = \bigcup_i^\infty M_k$  - объединение не более чем счетного числа множеств  $\forall k M_k$  - множество меры нуль по Лебегу  $\implies \forall k, \forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}_{i=1}^\infty$  по определению множества меры нуль для них верно

- $M_k \subset \bigcup_i^\infty I_i^k$ <sup>1</sup>
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon_k \quad \forall \varepsilon_k > 0$

---

<sup>1</sup> $I_i^k$  - это  $i$ -ый для  $M_k$ , а не степень

Отсюда получаем  $M = \bigcup_i^\infty M_k \subset \bigcup_i^\infty I_i^k$  и  $\sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |I_i^k| < \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k$  - если теперь взять  $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k}$ , то мы получим

$$\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k = \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon$$

□

### 3 Лекция 3

**Определение.** Пусть имеется  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Точку  $x_0 \in M$  будем называть *внутренней* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

**Определение.** Точку  $x_0 \in M$  будем называть *внешней* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

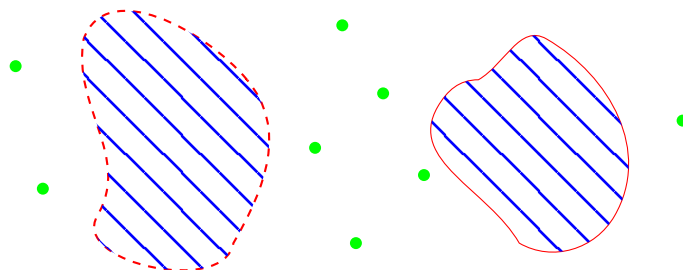
**Пример.**  $M = [0; 1)$ . тогда

$$\begin{cases} x = 0.5 & \text{— внутренняя} \\ x = 0 & \text{— не внутренняя} \\ x = 2 & \text{— внешняя} \end{cases}$$

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *граничной* точкой  $M$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

**Обозначение.**  $\partial M$  — множество всех граничных точек  $M$



Синяя область - пример множества внутренних точек

Зеленые - пример внешних (изображена часть точек)

Красные границы - пример множества граничных точек (пример  $\partial M$ )

**Пример.**  $M = [0; 1) \implies x = 0; 1$  — граничные

**Определение.** Точку  $x_0 \in M$  будем называть *изолированной* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M = \emptyset$$

**Пример.**  $M = [0; 1] \cup \{3\} \implies x = 3$  — изолированная

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *предельной* точкой  $M$ , если

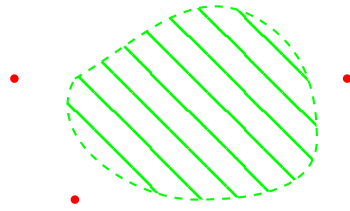
$$\forall \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

**Примечание.** Из определения следует, что изолированные точки не являются предельными

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *точкой прикосновения*  $M$ , если

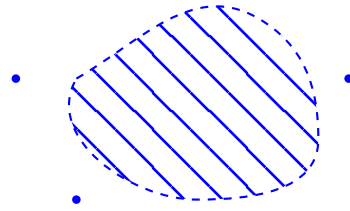
$$\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

**Примечание.** Точки прикосновения = изолированные точки  $\oplus$  предельные точки



Пример точек

Красные - изолированные. Зелёные - предельные



Синие точки - точки прикосновения

**Определение.** Множество всех точек прикосновения  $M$  называется *замыканием*  $M$  и обозначается как  $\overline{M}$

**Пример.**  $M = (0; 1) \cup (1; 2] \implies \overline{M} = [0; 2]$

**Пример.**  $M = \{x \in [0; 1] : x \in \mathbb{Q}\} \implies \overline{M} = [0; 1]$

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *открытым*, если все его точки внутренние

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *замкнутым*, если  $\mathbb{R}^n \setminus M$  — открыто

**Пример.**  $\begin{cases} (0; 1) & \text{— открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1] & \text{— замкнуто, т.к. } (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \text{ открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1) & \text{— ни открыто, ни замкнуто в } \mathbb{R} \end{cases}$

**Определение.** Множество  $K \subset \mathbb{R}^n$  называется *компактом*, если из  $\forall$  его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

**Примечание.** Если хотя бы для какого-то покрытия это не выполняется, то  $K$  — не компакт

**Пример.** Пусть  $M = (0; 1)$  покроем  $\left\{ A_n = \left( 0; 1 - \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$

При  $n \rightarrow \infty$   $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , но  $\forall$  фиксированного  $N$ :  $M \not\subset \bigcup_{n=1}^N A_n \implies$  не компакт

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  — называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

### 3.1 Критерий замкнутости

**Теорема.**  $M$  — замкнуто  $\iff M$  содержит все свои предельные точки

*Доказательство.* Докажем необходимость и достаточность

1. (Необходимость) Докажем  $\implies$  от противного

- Пусть  $x_0$  — предельная для  $M$  и  $x_0 \notin M$ . Тогда,  $\forall \varepsilon > 0$   $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$  и  $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- По условию  $M$  — замкнуто, то есть  $\mathbb{R}^n \setminus M$  — открыто  $\implies$  все его точки внутренние и  $\exists r > 0$ :

$$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \implies \overset{\circ}{B}_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B}_r(x_0) \cap M = \emptyset$$

Пришли к противоречию  $\implies M$  содержит все свои предельные точки □

2. (Достаточность) Докажем  $\Leftarrow$

Пусть  $y_0$  — не является предельной для  $M$ , то есть  $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \implies \exists r > 0$ :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{B}_r(y_0) \cap M = \emptyset \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \implies B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

$\implies \mathbb{R}^n \setminus M$  — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными  $\implies M$  — замкнуто по определению □

## 4 Лекция 4

### 4.1 Замкнутый брус — компакт

**Теорема.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус  $\implies I$  — компакт

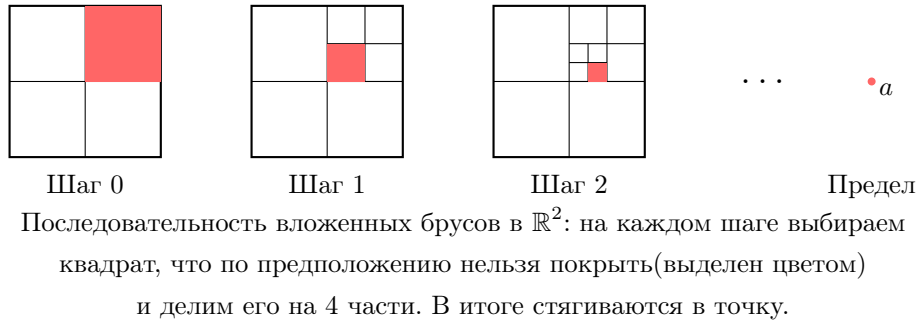
*Доказательство.* Пойдем от противного

Пусть  $I = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$

1. Положим, что  $I$  — не компакт. Значит, существует его покрытие  $\{A_\alpha\}$  — открытые множества, такие что  $I \subset \{A_\alpha\}$ , не допускающее выделения конечного подпокрытия
2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда,  $\exists I_1$ , такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе,  $I$  — компакт
3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусков:

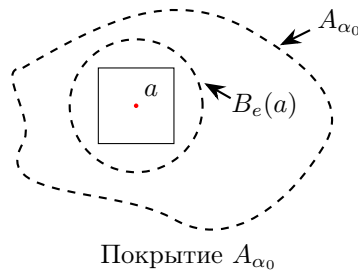
$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку  $a = (a_1, \dots, a_n)$



При этом,  $\exists a = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$

4.  $a \in I \implies a \in \bigcup A_\alpha \implies \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$



5. Из построения получили, что  $I \supset I_1 \supset \dots \supset a \implies \exists N : \forall n > N \ I_n \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$

Получается, что  $\forall n > N \ I_n$  покрывается одним лишь  $A_{\alpha_0}$  из системы  $\{A_\alpha\}$

Получаем противоречие тому, что любое  $I_n$  не допускает конечного подпокрытия, а у нас получилось, что  $I_n \in A_{\alpha_0} \forall n > N \implies I$  — компакт □

**Примечание.** Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

## 4.2 Критерий компактности

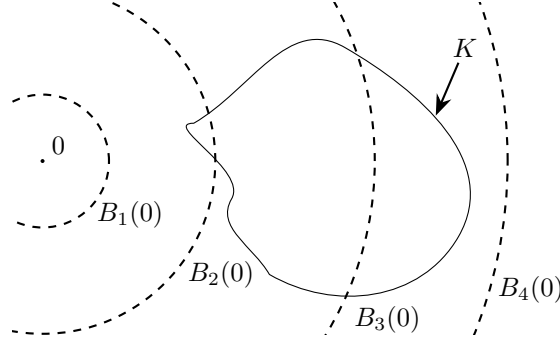
**Теорема.**  $K \subset \mathbb{R}^n$ .  $K$  — компакт  $\iff K$  замкнуто и ограничено

*Доказательство.* Докажем необходимость ( $\implies$ )

- *Ограниченность.*  $K$  — компакт  $\implies \forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$  — можно выделить конечное подпокрытие  $\implies$

$\implies$  Пусть  $\{A_\alpha\} = \{B_n(0)\}_{n=1}^\infty \implies \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ K \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(0)$  и так как  $B_n(0)$  — вложены шары  $\implies$

$\implies K \subset B_N(0) \implies$  по определению  $K$  — ограничено



Пример покрытия  $K$  вокруг точки 0 с помощью шаров

- *Замкнутость.* Пойдем от противного.  $K$  — компакт, тогда возьмем  $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)\}_{x \in K}$  — покрытие открытыми шарами, где  $\delta(x) = \rho(x, x_0)$ .  $x_0$  — предельная точка, которая  $\notin K$  (или же  $\in \mathbb{R}^n \setminus K$ )

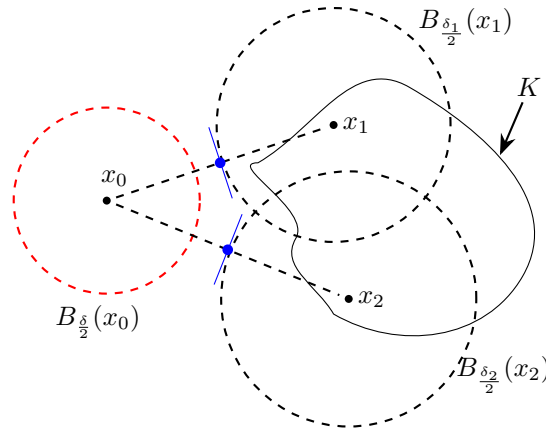
Так как  $K$  — компакт,  $\exists x_1, \dots, x_s : K \subset \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

Пусть  $\delta = \min_{1 \leq i \leq s} \delta(x_i)$ , тогда

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) = \emptyset \implies B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$$

$$\implies \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \emptyset$$

Значит,  $x_0$  не является предельной точкой  $K$ , что противоречит нашему предположению



Пример как мы строим  $B_{\frac{\delta}{2}}$  вокруг точки  $x_0$ .

Синие точки — середины отрезков на которых они лежат

*Доказательство.* Докажем достаточность

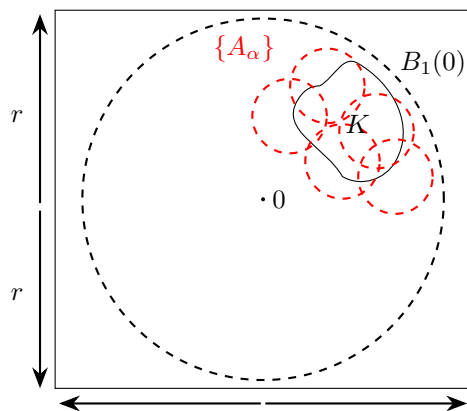
$K$  — замкнуто и ограничено  $\implies \exists r > 0 : B_r(0) \supset K \implies \exists I$  — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n$$

Пусть  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$  — произвольное покрытие открытыми множествами для  $K$ . Тогда,  $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$ . Так как  $I$  — компакт, то  $\exists$  конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K \text{ — покрытие для } I$$

Значит,  $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$  — конечное и  $\{A_\alpha\}$  — произвольное, тогда  $K$  — компакт по определению □



Строим замкнутый брус вокруг точки 0, пользуясь существованием конечного покрытия покрываем наш компакт  $K$

## 5 Лекция 5

### 5.1 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте

**Теорема.** Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$  — компакт и функция  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная. Тогда  $f$  на  $K$  достигает наибольшее и наименьшее значения.

*Доказательство.* • **Ограниченность.** От противного: пусть существует последовательность  $\{x^k\} \subset K : |f(x^k)| > k$ . Из ограниченности  $K$  следует ограниченность последовательности  $\{x^k\}$ , и как следствие ограничены последовательности отдельных координат:

$$|x_i^k| = \sqrt{|x_i^k|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^k|^2} = \|x^k\| \leq C \quad \text{для некоторого } C$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса у  $\{x_1^k\}$  существует сходящаяся подпоследовательность  $x_1^{k_{j_1}} \rightarrow a_1, j_1 \rightarrow \infty$ . Для последовательности  $\{x_2^{k_{j_1}}\}$  существует сходящаяся последовательность  $x_2^{k_{j_2}} \rightarrow a_2, j_2 \rightarrow \infty$ . И т.д. Получаем сходящуюся подпоследовательность:

$$x^{k_j} = (x_1^{k_j}, x_2^{k_j}, \dots, x_n^{k_j}) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = a$$

Точка  $a$  — предельная для  $K$ . В силу замкнутости  $K$  т.  $a \in K$ . А из непрерывности функции  $f$  получаем  $f(x^{k_j}) \rightarrow f(a)$ . А с другой стороны,  $f(x^{k_j}) \rightarrow \infty$  из выбора исходной последовательности. **противоречие**

- **Достижение наибольшего (наименьшего) значения.** Итак, мы доказали, что  $f$  — ограничена на  $K$ . Выберем последовательность  $\{x^k\}$ :

$$\sup_K f - \frac{1}{k_j} \leq f(x^{k_j}) \leq \sup_K f$$

в силу непрерывности  $f$ :

$$\sup_K f \leq f(a) \leq \sup_K f$$

Получаем  $f(a) = \sup_K f$ , т.е. максимальное значение достигается в точке  $x = a$ . Для  $\inf_K f$  доказательство аналогично □

### 5.2 Расстояние между двумя множествами

**Определение.** Расстоянием между двумя множествами  $X$  и  $Y$ , где  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  будем называть число  $\rho(X, Y)$ :

$$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \|x - y\|$$

**Примеры:**

1.  $X \cap Y \neq \emptyset \implies \rho(X, Y) = 0$
2.  $\rho(X, Y) = 0 \implies X \cap Y \neq \emptyset$ ? — нет, пример:  $X = (0, 1); Y = (1, 2)$  — не компакты

### 5.3 Расстояние между непересекающимися компактами

**Теорема.** Если  $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$  — компакты и  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ , то  $\rho(K_1, K_2) > 0$

*Доказательство.* Функция  $f(x, y) = \|x - y\|$  определена на  $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ , причем  $f$  — непрерывная функция. По теореме Вейерштрасса эта функция достигает своего максимального и минимального значений. Т.е. существуют  $x_0 \in K_1, y_0 \in K_2 : f(x_0, y_0) = \rho(K_1, K_2)$ . А  $f(x_0, y_0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x_0 = y_0$ . □



## 5.4 Колебание функции на множестве

**Определение.** Колебанием функции  $f$  на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть число  $\omega(f, M)$ :

$$\omega(f, M) = \sup_{x, y \in M} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{y \in M} f(y)$$

## 5.5 Колебание функции в точке

**Определение.** Колебанием функции  $f$  в точке  $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть число

$$\omega(f, x_0) := \lim_{r \rightarrow 0+} \omega(f, B_r^M(x_0)), \quad \text{где } B_r^M = B_r(x_0) \cap M$$

**Напоминание:** По определению, функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $x_0 \in M$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in M \quad |x - x_0| < \delta \iff x \in B_\delta(x_0) \cap M$  верно  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

## 5.6 Колебание функции, непрерывной в точке

**Теорема.** Пусть  $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ ;  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  — непрерывна в точке  $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$

*Доказательство.* • **Необходимость**

$f$  — непрерывна в т.  $x_0 \in M \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap M = B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Рассмотрим  $\omega(f, x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$ :

$$\omega(f, B_\delta^M(x_0)) = \sup_{x, y \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)| + \sup_{y \in B_\delta(x_0)} |f(y) - f(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0 \implies \delta \rightarrow 0$  и  $\omega(f, B_\delta^M(x_0)) \rightarrow 0$ , т.е.  $\omega(f, x_0) = 0$

• **Достаточность**

Пусть  $0 = \omega(f, x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in B_\delta^M(x_0) \quad \sup_{x, y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \implies$$

□

**Определение.** Если какое-то свойство не выполняется лишь на множестве меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется почти всюду.

**Пример:**

1.  $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, x \in \mathbb{Z} \end{cases}$  — непрерывна почти всюду на  $\mathbb{R}$
2.  $f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, x \notin [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$  — разрывна в любой точке  $\implies$  НЕ является непрерывной почти всюду.

## 5.7 Пересечение разбиений бруса

**Определение.** Пусть  $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$  и  $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$  — два разбиения бруса  $I \subset \mathbb{R}^n$ .

Пересечением разбиений  $(\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)$  будем называть мн-во всех брусов  $\{I_{ij}\} : \forall I_{ij} \begin{cases} 1) \exists k : I_{ij} \in \{I_k^1\} \\ 2) \exists m : I_{ij} \in \{I_m^2\} \\ 3) \{I_{ij}\} - \text{разбиение бруса } I \end{cases}$

## 5.8 Критерий Лебега об интегрируемости функции по Риману

**Теорема.** Если  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый невырожденный брус,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , то  $f \in R(I) \iff f$  ограничена и непрерывна почти всюду на  $I$

*Доказательство.* • **Необходимость**

Если  $f$  интегрируема, то она ограничена по необходимому условию интегрируемости. Осталось показать, что множества разрыва меры нуль. От противного: пусть это не так.

Обозначим множество всех точек разрыва ф-ии  $f$  на  $I$  за  $T$  и заметим, что  $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$ , где

$T_k = \{x \in I \mid \omega(f, x) \geq \frac{1}{k}\}$ . Если  $T$  не меры нуль, то существует  $T_{k_0}$  не меры нуль (если они все меры нуль, то по свойству множеств меры нуль счетное объединение таких множеств тоже было бы меры нуль).

Для произвольного разбиения  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^m$  бруса  $I$  разобьем эти бруски на две кучи: первая  $A = \{I_i \mid I_i \cap T_{k_0} \neq \emptyset, \omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}\}$  и вторая  $B = \mathbb{T} \setminus A$ . Покажем что  $A$  является покрытием множества  $T_{k_0}$ , т.е.  $T_{k_0} \subset \bigcup_{i: I_i \in A} I_i$

любая точка  $x \in T_{k_0}$  является либо

- а) внутренней для некоторого бруса  $I_i$ . В этом случае  $\omega(f, I_i) \geq \omega(f, x) \geq \frac{1}{k_0} > \frac{1}{2k_0}$ , т.е.  $I_i \in A$ , либо
- б) точка  $x$  лежит на границе некоторого количества брусов (не более чем  $2^n$  штук). Тогда хотя бы на одном из них колебание  $\omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}$  (т.е.  $I_i \in A$ ): если бы такого не нашлось, то в любой малой окрестности  $B_\varepsilon(x)$  выполняется следующее:

$$\omega(f, x) \leq \sup_{x', x'' \in B_\varepsilon(x)} |f(x') - f(x'')| \leq \sup_{x' \in B_\varepsilon(x)} |f(x') - f(x)| + \sup_{x'' \in B_\varepsilon(x)} |f(x) - f(x'')| < \frac{1}{2k_0} + \frac{1}{2k_0} = \frac{1}{k_0}$$

т.е.  $x \notin T_{k_0}$  — **противоречие**.

Таким образом, каждая точка  $x \in T_{k_0}$  покрывается некоторым бруском  $I_i \in A$ , т.е.  $A$  — покрытие  $T_{k_0}$ . Тогда существует  $c : \sum_{i: I_i \in A} |I_i| \geq c > 0$  для всех разбиений  $\mathbb{T}$  (если бы меняя разбиения мы могли получить сумму объемов этих брусов сколь угодно маленькую, то получилось бы, что  $T_{k_0}$  меры нуль)

Возьмем два набора отмеченных точек  $\xi^1$  и  $\xi^2$ . На брусках из кучки  $B$  будем их брать одинаковыми, т.е. для  $I_i \in B$   $\xi_i^1 = \xi_i^2$ . А на брусках из кучки  $A$  будем брать такие, чтобы

$$f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2) \geq \frac{1}{3k_0} \quad (\text{у нас там колебания } \geq 1/2k_0, \text{ так что такие найдутся})$$

Получаем:

$$\begin{aligned} |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi^2)| &= \left| \sum_i (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \\ &= \left| \sum_{i: I_i \in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| + \sum_{i: I_i \in B} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \\ &= \left| \sum_{i: I_i \in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \geq \frac{1}{3k_0} \sum_{i: I_i \in A} |I_i| \geq \frac{c}{3k_0} > 0 \end{aligned}$$

т.е. интегральные суммы не могут стремиться к одному и тому же числу, значит  $f$  не интегрируема — **противоречие**.

• *Достаточность*

Для любого  $\varepsilon > 0$  рассмотрим  $T_\varepsilon = \{x \in I \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$ . Покажем, что это множество - компакт. Ограниченность очевидна (подмножества бруска), а замкнутость проверим от противного. Пусть  $a$  - предельная точка  $T_\varepsilon$  :  $a \notin T_\varepsilon$ . Т.к. она предельная, то существует  $\{x^k\} : x^k \in B_{\frac{1}{k}}(a)$ . Т.к.  $B_{\frac{1}{k}}$  - открытые шары, то наши точки лежат в них с окрестностями, т.е. существуют  $\delta_k : B_{\delta_k}(x_K) \subset B_{\frac{1}{k}}(a)$ . Тогда

$$\omega(f, B_{\frac{1}{k}}(a)) \geq \omega(f, B_{\delta_k}(x_K)) \geq \omega(f, x_k) \geq \varepsilon$$

Переходя к пределу  $k \rightarrow \infty$  :  $\omega(f, a) \geq \varepsilon$ , т.е.  $a \in T_\varepsilon$  - противоречие. Значит  $T_\varepsilon$  - замкнуто, и, следовательно, компактно.

Множество  $T_\varepsilon$  - множество меры нуль (как подмножество множества меры нуль). Значит, его можно покрыть не более чем счетным объединением открытых брусков  $I_i$  :  $\sum_i |I_i| < \varepsilon$ . Т.к. это открытое покрытие, а  $T_\varepsilon$  - компакт,

то существует конечное подпокрытие:  $T_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^m I_i$ , при этом  $\sum_{i=1}^m |I_i| < \varepsilon$ .

Обозначим три множества:  $C_1 = \bigcup_{i=1}^m I_i$ ,  $C_2 = \bigcup_{i=1}^m I'_i$ ,  $C_3 = \bigcup_{i=1}^m I''_i$ , где  $I'_i, I''_i$  - бруски, полученные гомотетией с центром в центре  $I_i$  с коэффициентом 2 и 3 соответственно.

Заметим, что

$$a) |C_3| \leq \sum_{i=1}^m |I''_i| = 3^n \sum_{i=1}^m |I_i| < 3^n \varepsilon$$

b) расстояние  $\rho(\partial C_2, \partial C_3) = \delta_1 > 0$  (теорема про расстояние между компактами)

c) Множество  $K = I \setminus (C_2 \setminus \partial C_2)$  - компакт. Кстати, любое множество с диаметром меньше  $\delta_1$  либо полностью лежит в  $C_3$ , либо полностью в  $K$ .

d)  $T_\varepsilon \cap K = \emptyset$ , т.к.  $T_\varepsilon \subset C_1 \subset C_2$ . Следовательно,  $\forall x \in K \omega(f, x) < \varepsilon$ . Тогда по теореме Кантора-Гейне  $\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in K \omega(f, B_{\delta_2}(x)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Выберем  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Тогда для любых разбиений  $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}, \mathbb{T}_2 = \{I_k^2\} : \lambda(\mathbb{T}_1) < \delta, \lambda(\mathbb{T}_2) < \delta$

Рассмотрим пересечение этих разбиений  $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ , т.е. такое разбиение  $\mathbb{T} = \{I_{ik}\}$ , что  $I_k^1 = I_{i_1 k} \sqcup \dots \sqcup I_{i_m k}$  и  $I_i^2 = I_{i k_1} \sqcup \dots \sqcup I_{i k_l}$ . Очевидно  $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ .

Для произвольных наборов отмеченных точек:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2)| \leq |\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| + |\sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)|$$

Рассмотрим отдельное слагаемое:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| = \left| \sum_{i,j} (f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})) |I_{ij}| \right| \leq \sum_{I_{ij} \in C_3} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})| |I_{ij}| + \sum_{I_{ij} \in K} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})| |I_{ij}| \leq 2M \cdot e^n \varepsilon + 2\varepsilon$$

т.к.  $f$  ограничена некоторой константой  $M$  и см пункты a), d), то

Т.к. для  $(\mathbb{T}_2, \xi^2)$  все выкладки аналогичные, то получаем:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| \leq \varepsilon(2M \cdot 3^n + 2|I|)$$

Следовательно, существует предел  $\lim_{\lambda(\mathbb{T}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$  (Критерий Коши для функций)

□

## 5.9 Измельчение разбиения

**Определение.** Разбиение  $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$  будем называть измельчением разбиения  $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$ , если  $\forall k \exists m : I_k^1 \in I_m^2 \implies \mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$  является измельчением  $\mathbb{T}_1$  и  $\mathbb{T}_2$

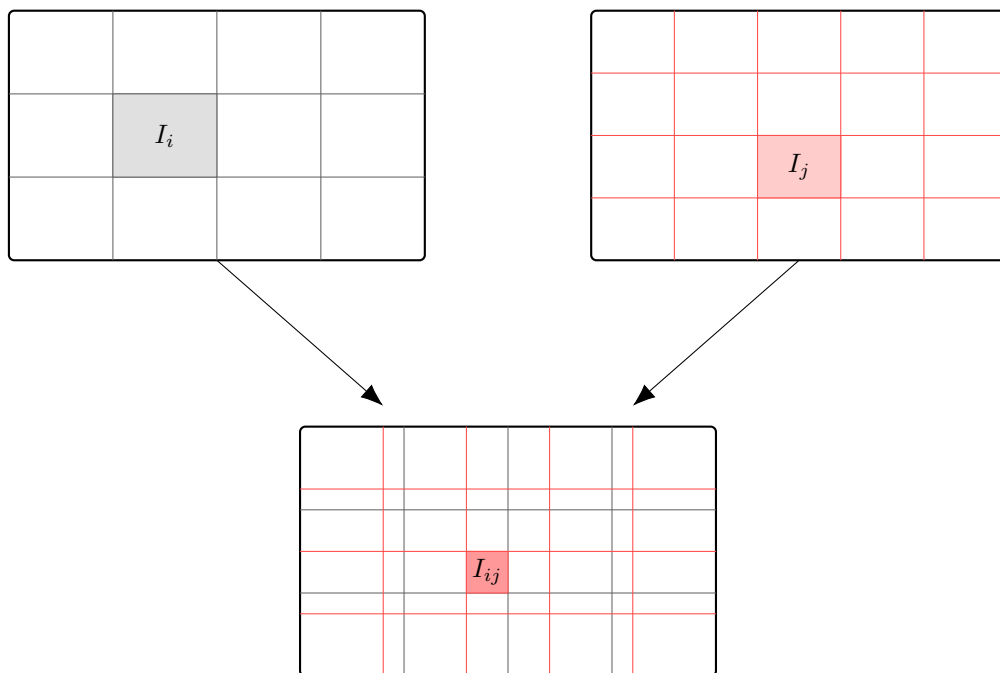


Рис. 1: Пересечение разбиений  $\mathbb{T}_1$  и  $\mathbb{T}_2$

## 6 Лекция 6

### 6.1 Нижняя и верхняя суммы Дарбу

**Определение.** Пусть  $I$  - замкнутый брус,  $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^K$  - разбиение бруса  $I$ ,  $m_i = \inf_{I_i}(f)$ , и  $M_i = \sup_{I_i}(f)$ . Тогда числа  $\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^K m_i |I_i|$  и  $\bar{S}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^K M_i |I_i|$  будем называть **нижней и верхней суммой Дарбу** соответственно

### 6.2 Нижняя сумма Дарбу не больше верхней

**Теорема.**

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \int_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \mathbb{T}) &= \sum_{i=1}^K m_i |I_i| = \sum_i \inf_{\xi_i} (f(\xi_i)) |I_i| = \inf_{\xi} \sum_i f(\xi_i) |I_i| = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \\ \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_i (f(\xi_i)) |I_i| = \sum_i M_i |I_i| = \bar{S}(f, \mathbb{T}) \end{aligned}$$

### 6.3 Монотонность сумм относительно измельчений разбиения

**Теорема.** Пусть  $\tilde{\mathbb{T}}$  — измельчение разбиения  $\mathbb{T}$ , тогда

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

□

*Доказательство.* Если  $L \subset M$ , то  $\inf L \geq \inf M$  и  $\sup L \leq \sup M$ , тогда:

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \underset{\text{по 6.2}}{\leq} \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

□

### 6.4 Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же бруссе

**Теорема.**  $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : \underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$

*Доказательство.*  $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$  рассмотрим  $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ , тогда по 6.3:

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$$

□

### 6.5 Верхние и нижние интегралы Дарбу

**Определение.** Верхним и нижним интегралом Дарбу будем называть числа соответственно

$$\bar{\mathcal{I}} := \inf_{\mathbb{T}} \bar{S}(f, \mathbb{T}) \quad \underline{\mathcal{I}} := \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, \mathbb{T})$$

## 7 Лекция 7

### 7.1 Интеграл Дарбу как предел сумм Дарбу

**Теорема.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус, а  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  — ограничена. Тогда:

$$\bar{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \bar{S}(f, T) \quad \text{и} \quad \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \underline{S}(f, T)$$

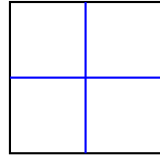
*Доказательство.* Докажем, что  $\underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \underline{S}(f, T) = (\sup_T \underline{S}(f, T))$

1.  $f$ -ограничена на  $I \implies \exists C > 0 : \forall x \in I \quad |f(x)| \leq C$
2. т.к. по определению  $\underline{\mathcal{I}} = \sup_T \underline{S}(f, T)$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists T_1 = \{I_i^1\}_{i=1}^{m_1} : \underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{S}(f, T_1) \leq \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon$
3. Пусть  $G = \bigcup_{i=1}^{m_1} \partial I_i^1$  — объединение границ брусков  $I_i^1 \in T_1$  (без повторов). Тогда  $G$  множество меры нуль по Лебегу (т.к. границы — мн-ва меры нуль по Лебегу)
4. Пусть  $T_2$  — произвольное разбиение  $I : T_2 = \{I_i^2\}_{i=1}^{m_2}$   
Рассмотрим два множества брусков:

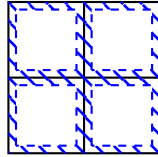
$$A = \{I_i^2 \in T_2 : I_i^2 \cap G \neq \emptyset\} \quad \text{и} \quad B = T_2 \setminus A \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T_2 : \Delta_{T_2} < \delta \text{ верно, что } \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| < \varepsilon$$

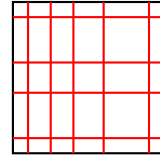
т.к. наши брусочки  $I_i^2$  по построению лежат в  $G$ , а по 3 пункту оно множество меры нуль.



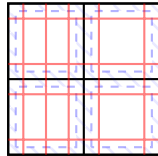
разбиение  $T_1$



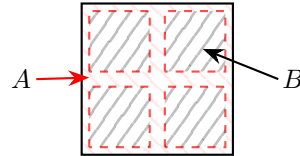
Граница  $G$  бруса  $T_1$



Какое-то разбиение  $T_2$



Как прошлые разбиения и граница  $G$  выглядят на одном рисунке



Как выглядят множества  $A$  и  $B$

5. С другой стороны  $\forall I_i^2 \in B$  верно, что  $I_i^2 \in T_1 \cap T_2$

Хотим рассмотреть

$$|\underline{\mathcal{I}} - \underline{S}(f, T_2)| = |I - \underline{S}(f, T_1 \cap T_2) + \underline{S}(f, T_1 \cap T_2) - \underline{S}(f, T_2)| \leq \underbrace{|I - \underline{S}(f, T_1 \cap T_2)|}_* + \underbrace{|\underline{S}(f, T_1 \cap T_2) - \underline{S}(f, T_2)|}_{**}$$

$$< \varepsilon + 2C\varepsilon = \varepsilon(1 + 2C)$$

□

\* из пункта 2:  $\underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{S}(f, T_1) \leq \underline{S}(f, T_1 \cap T_2) \leq \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon \implies |\underline{\mathcal{I}} - \underline{S}(f, T_1 \cap T_2)| < \varepsilon$

\*\* Пояснение ниже

$$\begin{aligned}
|\underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{S}(f, \mathbb{T}_2)| &= \left| \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| + \sum_{I_i \in \mathbb{T}_1 \cap A} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| && \text{Переход с равном по пункту 5} \\
&\leq \left| \sum_{I_i \in \mathbb{T}_1 \cap A} m_i |I_i^2| \right| + \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\
&\leq 2 \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| && \text{Следующий переход по пункту 1} \\
&\leq 2C \left| \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| \right| && \text{Следующий переход по пункту 4} \\
&< 2C \varepsilon
\end{aligned}$$

## 7.2 Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману

$I \in \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус,  $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}(I) \iff f$  — ограничена на  $I$  и  $\underline{I} = \bar{I}$

*Доказательство.* Необходимость

- $f \in \mathcal{R}(I) \implies$  по необходимому условию интегрируемости функции по Риману на замкнутом бресе,  $f$  — ограничена на  $I$
- Покажем, что  $\underline{I} = I, \bar{I} = I \implies \underline{I} = \bar{I}$

1.  $f \in \mathcal{R}(I) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \implies |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - I| < \varepsilon$
2.  $\underline{I} = \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, \mathbb{T}) = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \underline{S}(f, \mathbb{T}) \implies |\underline{I} - \underline{S}| < \varepsilon$   
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \exists \mathbb{T} : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : |\underline{I} - \underline{S}| < \varepsilon$
3.  $\underline{S}(\mathbb{T}, \xi) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$   
 $\forall \mathbb{T}, \forall \varepsilon > 0 \exists \xi : |\underline{S} - \sigma| < \varepsilon$

$$|I - \underline{I}| \leq |I - \underline{I} - \sigma + \sigma + \underline{S} - \underline{S}| \leq |I - \sigma| + |\underline{I} - \underline{S}| + |\sigma - \underline{S}| < 3\varepsilon \quad \square$$

*Доказательство.* Достаточность

$f$  — ограничена и  $\underline{I} = \bar{I}$ . Имеем

$$\underline{S}(f, \mathcal{T}) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

Тогда, при  $\lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \underline{S} = \underline{I}$ ,  $\lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \bar{S} = \bar{I}$  получаем  $\underline{I} = \bar{I}$  (Условие ограниченности  $f$  даёт нам возможность применять неравенство выше)  $\square$

## 7.3 Интегрирование по допустимым множествам

**Определение.** Множество  $D \subset \mathbb{R}^n$  называется *допустимым*, если

- $D$  — ограничено
- $\partial D$  — множество меры нуль по Лебегу

**Пример.** Допустимого и не допустимого множества

$$1. D_1 = (0, 1)$$

- ограничено - да
- $\partial D_1 = \{0\} \cup \{1\}$  - мн-во меры нуль - да

$D_1$  - допустимое множество

2.  $D_2 = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$

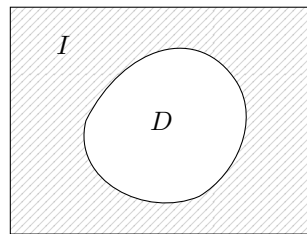
- ограничено - да
- $\partial D_2 = [0, 1]$  - мн-во меры нуль - нет

$D_2$  - не допустимое множество

**Определение.** Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$  — допустимое множество,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда, интегралом Римана  $f$  по  $D$  называется число  $\mathcal{I}$ :

$$\mathcal{I} = \int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{I \supset D} f \cdot \chi_D(\bar{x}) d\bar{x}, \text{ где } \chi_D = \begin{cases} 1, \bar{x} \in D \\ 0, \bar{x} \notin D \end{cases}$$

Если  $\mathcal{I} < \infty$ , то  $f \in \mathcal{R}(D)$



Закрашенная область не вносит вклад в объем  
так как  $f(x) \cdot \chi_D = 0$



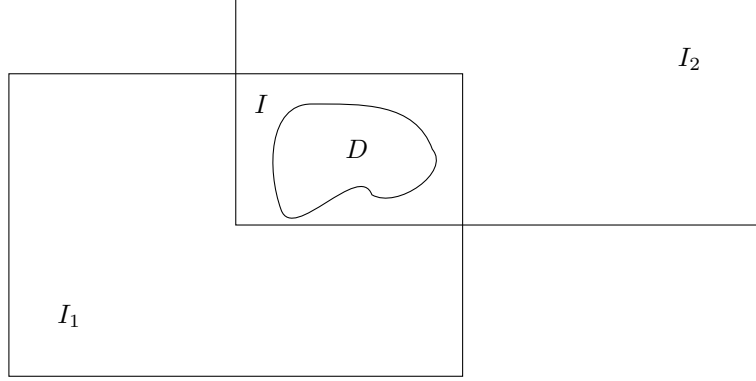
## 8 Лекция 8

### 8.1 Интегрирование по допустимым множествам(Продолжение)

**Корректность определения допустимых множеств.** Пусть  $D \subset I_1 \subset \mathbb{R}^n, D \subset I_2 \subset \mathbb{R}^n$  - замкнутые брусы, тогда

$$\int_{I_1} f \cdot \chi_D dx \text{ и } \int_{I_2} f \cdot \chi_D dx$$

либо существуют и равны, либо оба не существуют вообще



Как выглядят наши множества  $I_1, I_2, I, D$

*Доказательство.* Введем  $I = I_1 \cap I_2 \supset D$ ,  $I$  не пустое по построению. Покажем существование

- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \implies$  по критерию Лебега  $f \cdot \chi_D$  ограничена на  $I_1 \implies f \cdot \chi_D$  ограничена на  $D \implies f$  ограничена на  $D \implies f \cdot \chi_D$  ограничена на  $I_2$
- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \implies$  по критерию Лебега  $f \cdot \chi_D$  непрерывна почти всюду на  $I_1 \implies f \cdot \chi_D$  непрерывна почти всюду на  $D \implies$  в худшем случае для  $f \cdot \chi_D$  на  $I_2$  добавятся разрывы на  $\partial D \implies f \cdot \chi_D$  непрерывна почти всюду на  $I_2$
- Тогда,  $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \iff f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_2)$

Покажем равенство

- Пусть  $\mathbb{T}_i$  — разбиение на  $I_i$ :  $\mathbb{T}_1$  и  $\mathbb{T}_2$  совпадают на  $I$
- Пусть  $\xi^i$  — отмеченные точки для  $\mathbb{T}_i$
- $\sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_1, \xi^1) = \sum_j f\chi_D(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum_j f(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum_j f(\xi_j^2)|I_j^2| = \sum_j f\chi_D(\xi_j^2)|I_j^2| = \sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_2, \xi^2)$

□

**Примечание.** Все свойства интеграла Римана и критерия Лебега для бруса справедливы и для других допустимых множеств

### 8.2 Теорема Фубини

Пусть имеются  $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^m, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n}$  — замкнутые брусы,  $f : I_x \times I_y \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$  и  $\forall$  фиксированного  $x \in I_x \implies f(x, y) \in \mathcal{R}(I_y) \implies$

$$\int_{I_x \times I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = \int_{I_x} \left( \int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) d\bar{x} = \int_{I_x} d\bar{x} \int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

**Примечание.** аналогично, если взять для  $\forall$  фиксированного  $y \in I_y$

*Доказательство.* Воспользуемся тем, что  $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y), f \in \mathcal{R}(I_y)$ , а также Критерием Дарбу

- $\mathbb{T}_x = \{I_i^x\}$  — разбиение на  $I_x$ ,  $\mathbb{T}_y = \{I_j^y\}$  — разбиение на  $I_y$ ,  $\mathbb{T}_{x,y} = \{I_i^x \times I_j^y\} = \{I_{ij}\}$  — разбиение на  $I_x \times I_y$ , и при этом верно  $|I_i^x| \cdot |I_j^y| = |I_{ij}|$

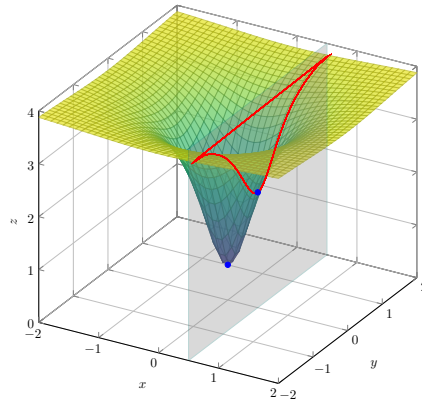
•

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \mathbb{T}_{x,y}) &= \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in I_{ij}} f(x,y) |I_{ij}| \underset{\text{рис. ниже}}{\leq} \sum_{i,j} \inf_{x \in I_i^x} \left( \inf_{y \in I_j^y} f(x,y) \cdot |I_j^y| \right) |I_i^x| = \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left( \sum_j \inf_{I_j^y} f(x,y) |I_j^y| \right)}_{\underline{S}(f(y), \mathbb{T}_y)} |I_i^x| \\ &\leq \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left( \int_{I_y} f(x,y) dy \right)}_{g(x)} |I_i^x| \leq \underline{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \\ &\leq \bar{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \end{aligned}$$

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \leq \underline{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \leq \bar{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \implies \exists \bar{I} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{S}(g(x), \mathbb{T}_x) = \int_{I_x \times I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}$$

**Примечание.** Последний знак неравенства, получен аналогичными действиями для длинного неравенства выше, просто развернув в обратную сторону знаки неравенства для  $\sup$

□



Если зафиксировать какой-то  $x$  и искать  $\inf$  по  $y$  то он всегда будет больше, чем  $\inf$  на всей области

**Пример.** Случай, где нельзя интегрировать по т. Фубини

Возьмем следующую функцию

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ на } [-1; 1] \times [-1; 1]$$

Она не интегрируема по Риману на данной области, т.к. функция неограничена

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^4} = -\infty$$

Что будет, если мы не поверили и решили применить т. Фубини? Вычислим интеграл  $\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ . Заметим следующее внесение под дифференциал

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Получаем, тогда

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^1 d \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Теперь сошлемся на то что  $f(x, y) = -f(y, x)$  и получим что  $\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$

### 8.3 Теорема о замене переменных в кратном интеграле

**Теорема.** (Без доказательства) Пусть имеется  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^n$  — открытые множества.  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  — биективно,  $\varphi, \varphi^{-1}$  — непрерывно дифференцируемые отображения

$D : \overline{D} \subset M_1$  — допустимое множество

$f : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{R}(\varphi(D)) \iff f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi(t)| \in \mathcal{R}(D)$  и

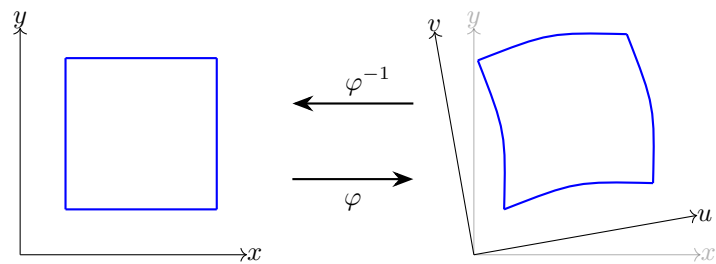
$$\int_{\varphi(D)} f(x) dx = \int_D f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi(t)| dt, \text{ где } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

**Примечание.**  $(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\varphi} (t_1, \dots, t_n)$ , где  $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_n)$

**Пример.** Ранее мы переходили к полярным координатам так:  $(x, y) \rightarrow (r, \varphi)$ , при этом  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

$$J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \cdot r \\ \sin \varphi & \cos \varphi \cdot r \end{pmatrix}$$

$$|J_{\varphi^{-1}}| = |J_\varphi|^{-1}$$



Отображение допустимого множества в новые координаты