

# Математический Анализ - 2

Авторы [конспекта 24/25 года](#), на основе которого написан текущий:

Винер Даниил | [github](#)

Нарек Хорянян | [github](#)

Авторы [текущего конспекта](#):

Жуков Андрей | [github](#)

Мелисов Тимур | [github](#)

Версия от 28.09.2025 16:19

## Содержание

<b>1</b>	<b>Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману</b>	<b>2</b>
1.1	Брус. Мера бруса	2
1.2	Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$	2
1.3	Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения	2
1.4	Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману	3
1.5	Пример константной функции	4
1.6	Пример неинтегрируемая функция	4
1.7	Вычисление многомерного интеграла	4
<b>2</b>	<b>Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера</b>	<b>6</b>
2.1	Необходимое условие интегрирования.	6
2.2	Свойства интеграла Римана	6
2.3	Множество меры нуль по Лебегу	7
2.4	Свойства множества меры нуль по Лебегу	7
<b>3</b>	<b>Топология в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>10</b>
3.1	Критерий замкнутости	11
<b>4</b>	<b>Компакты в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>13</b>
4.1	Замкнутый брус — компакт	13
4.2	Критерий компактности	14

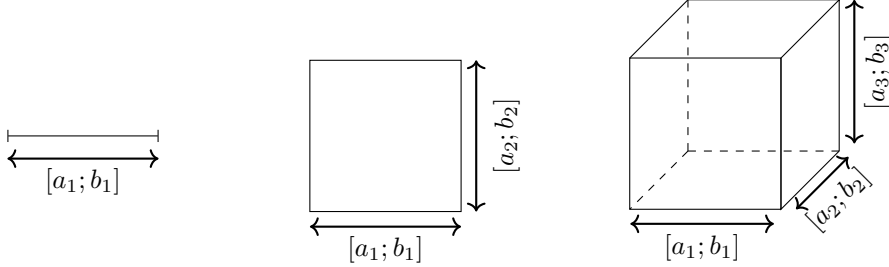
# 1 Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману

## 1.1 Брус. Мера бруса

**Определение.** Замкнутый брус (координатный промежуток) в  $\mathbb{R}^n$  — множество, описываемое как

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i \in \{1, n\}\} \\ = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

**Примечание.**  $I = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_n, b_n\}$ , где  $\{a_i, b_i\}$  может быть отрезком, интервалом и т.д.



Пример брусков размерности с 1 по 3

**Определение.** Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

## 1.2 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:**  $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a, b})$ , где  $\lambda \geq 0$
2. **Аддитивность:** Пусть  $I, I_1, \dots, I_k$  — брусы

Тогда, если  $\forall i, j$   $I_i, I_j$  не имеют общих внутренних точек, и  $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$ , то

$$|I| = \sum_{i=1}^k |I_i|$$

3. **Монотонность:** Пусть  $I$  — брус, покрытый конечной системой брусков, то есть  $I \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$ , тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^k |I_i|$$

## 1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

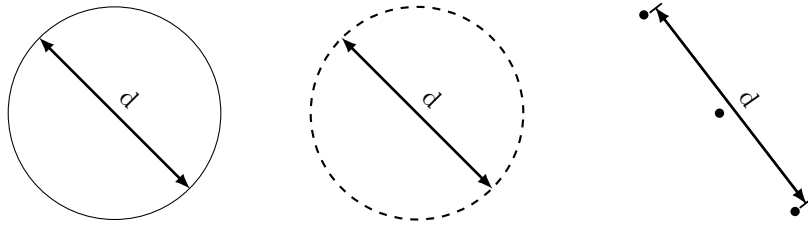
**Определение.**  $I$  — замкнутый, невырожденный брус и  $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$ , где  $I_i$  попарно не имеют общих внутренних точек.

Тогда набор  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$  называется разбиением бруса  $I$

**Определение.** Диаметр произвольного ограниченного множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leq i \leq k} \|x - y\|, \text{ где}$$

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$



Пример диаметра для разных ограниченных множеств (Для всех трёх он равен  $d$ )

**Определение.** Масштаб разбиения  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$  — число  $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max_{1 \leq i \leq k} d(I_i)$

**Определение.** Пусть  $\forall I_i$  выбрана точка  $\xi_i \in I_i$ . Тогда, набор  $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$  будем называть **отмеченными точками**

**Определение.** Размеченное разбиение — пара  $(\mathbb{T}, \xi)$

## 1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть  $I$  — невырожденный, замкнутый брус, функция  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  определена на  $I$

**Определение.** Интегральная сумма Римана функции  $f$  на  $(\mathbb{T}, \xi)$  — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

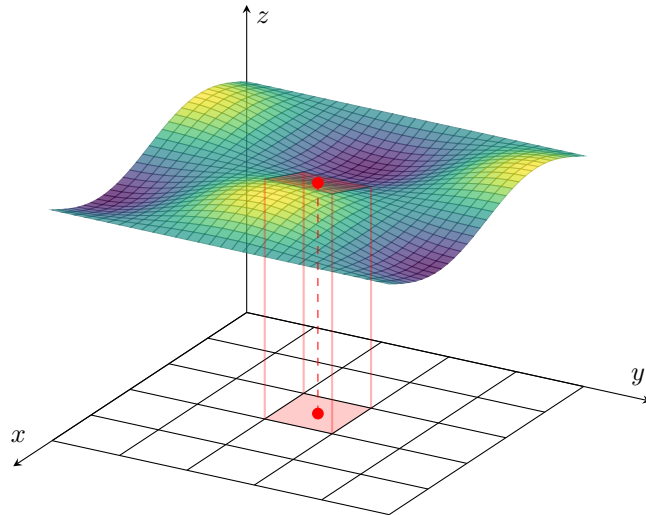
**Определение.** Функция  $f$  интегрируема (по Риману) на замкнутом бресе  $I$  ( $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ), если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$$

Тогда

$$A = \int_I f(x) dx = \int_I \dots \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Обозначение:  $f \in \mathcal{R}(I)$



Пример интегрирования в  $\mathbb{R}^2$  по определению

## 1.5 Пример константной функции

Пусть у нас есть функция  $f = \text{const}$

$$\begin{aligned}\forall(\mathbb{T}, \xi) : \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^k \text{const} \cdot |I_i| \\ &= \text{const} \cdot |I| \implies \int_I f(x) dx = \text{const} \cdot |I|\end{aligned}$$

## 1.6 Пример неинтегрируемая функция

Имеется брус  $I = [0, 1]^n$ , а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \dots, n} \ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

*Доказательство.*  $\forall \mathbb{T}$  можно выбрать  $\xi_i \in \mathbb{Q}$ , тогда для такой пары  $(\mathbb{T}, \bar{\xi})$ :

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^k 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время,  $\forall \mathbb{T}$  можно выбрать  $\xi_i \notin \mathbb{Q}$ , тогда для такой пары  $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$ :

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^k 0 \cdot |I_i| = 0 \implies f \notin \mathcal{R}(I)$$

## 1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны  $\frac{1}{n}$ , выбирая в качестве точек  $\xi_i$  нижние правые вершины ячеек

Имеется функция  $f = xy$ ,  $|I| = \frac{1}{n^2}$

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} i \cdot j = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{n^4} \sum_{i=1}^n i = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4}$$

Заметим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4} = \frac{1}{4}$

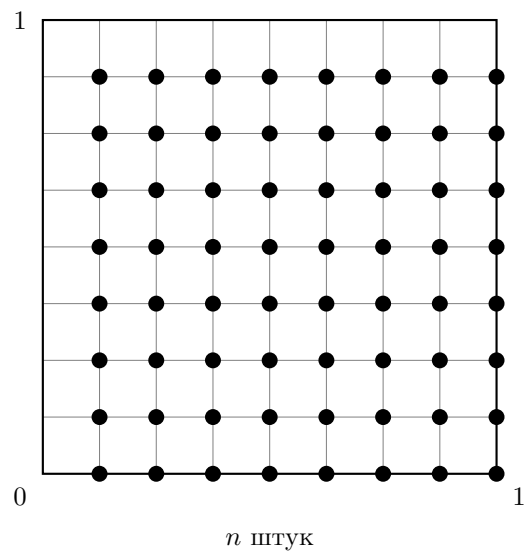


Рисунок того как мы выбираем в примере точки на разбиение

## 2 Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера

### 2.1 Необходимое условие интегрирования.

**Теорема.** Пусть  $I$  — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

*Доказательство.* От противного.

1.  $f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A \in \mathbb{R}$ , такая что  $\forall \varepsilon > 0$ , а значит для  $\varepsilon = 1$  тоже:

$$\exists \delta > 0: \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} \leq \delta \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < 1$$

Отсюда

$$A - 1 < \sigma < A + 1 \implies \sigma \text{ ограничена}$$

2. С другой стороны, так как предположили, что  $f$  — неограничена на  $I$

$$\forall \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k \quad \exists i_0: f \text{ неограничена на } I_{i_0}$$

Тогда рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) \cdot |I_i| + f(\xi_{i_0}) \cdot |I_{i_0}|$$

Выбором подходящего  $\xi_{i_0}$  можно сделать  $f(\xi_{i_0})$  сколь угодно большой  $\implies \sigma$  будет не ограничена - противоречие

Из противоречия пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

### 2.2 Свойства интеграла Римана

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) : \exists A_f, \text{ что } \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \quad \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \quad \text{верно } \left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \int_I f dx \right| &=: |\sigma_f - A_f| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \\ g \in \mathcal{R}(I) : \exists A_g, \text{ что } \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \quad \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \quad \text{верно } \left| \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \int_I g dx \right| &=: |\sigma_g - A_g| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \end{aligned}$$

Тогда  $\forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \min(\delta_f, \delta_g) = \delta :$

$$\begin{aligned} |\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \alpha A_f - \beta A_g| &= \left| \sum (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \cdot |I_i| - \alpha A_f - \beta A_g \right| \leq \\ &\leq |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} < \varepsilon \end{aligned}$$

□

## Монотонность

$$f, g \in \mathcal{R}(I); f \leq g \text{ на } I \implies \int_I f dx \leq \int_I g dx$$

*Доказательство.*

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall (\mathbb{T}, \xi): \Delta_{\mathbb{T}} < \delta, \text{ выполняется } |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Аналогично для  $g \in \mathcal{R}(I)$ , тогда:

$$\begin{cases} A_f - \varepsilon < \sigma_1 < A_f + \varepsilon \\ A_g - \varepsilon < \sigma_2 < A_g + \varepsilon \\ \sigma_f \leq \sigma_g \end{cases}$$

Отсюда

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leq \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f - \varepsilon < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

□

## Оценка интеграла (сверху)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f dx \right| \leq \sup_I |f| |I|$$

*Доказательство.* По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) &\implies f \text{ Ограничена на } I \\ &\implies -\sup_I |f| \leq f \leq \sup_I |f| \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} -\int_I \sup |f| dx &\leq \int_I f dx \leq \int_I \sup |f| dx \\ -\sup |f| |I| &\leq \int_I f dx \leq \sup |f| |I| \end{aligned}$$

□

## 2.3 Множество меры нуль по Лебегу

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов  $\{I_i\}$  и выполняются:

- $M \subset \bigcup_i I_i$
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

**Пример:**  $a \in \mathbb{R}$  — точка.

$$I = [a - \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{3}] \implies |I| = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies a \text{ — множество меры нуль по Лебегу}$$

## 2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. Если в определении  $\{I_i\}$  заменить на открытые брусы, то определение останется верным.

*Доказательство.* Пусть  $\{I_i\}$  — открытые брусы, тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  не более чем счетный набор  $\{I_i\}$ :  $M \subset \bigcup_i I_i$  и  $\sum |I_i| < \varepsilon$

Пусть  $\{\bar{I}_i\}$  — открытые брусы + границы = замкнутые брусы  $I_i$ , причём объем “добавленных” плоскостей будет нулевой, так как объем бруса  $n - 1$  размерности, будет нулевым для объема бруса размерности  $n$

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, \text{ при этом } |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

**Докажем в обратную сторону.** Мы хотим увеличить замкнутый брус в два раза и увеличенный брус взять открытым.

Пусть  $\{I_i\}$  — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_i^1, b_i^1] \times \dots \times [a_i^n, b_i^n], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Так как  $\left(\frac{a_i^k}{2}, \frac{b_i^k}{2}\right)$  — центр  $i$ -го бруса в  $k$ -ом измерении, увеличить изначальный брус в два раза по этому измерению можно сдвинувшись от центра не на половину, а на целую сторону, то есть на  $b_i^k - a_i^k$

Таким образом:

$$\tilde{I}_i = \left(\frac{a_i^1 + b_i^1}{2} - (b_i^1 - a_i^1); \frac{a_i^1 + b_i^1}{2} + (b_i^1 - a_i^1)\right) \times \dots \times \left(\frac{a_i^n + b_i^n}{2} - (b_i^n - a_i^n); \frac{a_i^n + b_i^n}{2} + (b_i^n - a_i^n)\right)$$

$$\implies V_2 = \sum_i |\tilde{I}_i| = 2^n \cdot V_1 < \varepsilon$$

□

Если  $M \subset \mathbb{R}^n$  - множество меры нуль по Лебегу, то из  $L \subset M \implies L$  - множество меры нуль по Лебегу

*Доказательство.* Докажем по транзитивности

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ не более чем счетный набор } \{I_i\} : L \subset M \subset \bigcup_i I_i \implies L \subset \bigcup_i I_i$$

По условию нам дано, что для  $M \subset \bigcup_i I_i$  верно  $\sum_i |I_i| < \varepsilon$ , и тоже самое выполнено и для  $L \subset \bigcup_i I_i$ , тогда  $L$  по определению является множеством меры нуль по Лебегу

□

Не более чем счетное объединение множеств меры нуль по Лебегу, тоже является множеством меры нуль по Лебегу

*Доказательство.* пусть  $M = \bigcup_i^\infty M_k$  - объединение не более чем счетного числа множеств  $\forall k M_k$  - множество меры нуль по Лебегу  $\implies \forall k, \forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}_{i=1}^\infty$  по определению множества меры нуль для них верно

- $M_k \subset \bigcup_i^\infty I_i^k$ <sup>1</sup>
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon_k \quad \forall \varepsilon_k > 0$

---

<sup>1</sup> $I_i^k$  - это  $i$ -ый для  $M_k$ , а не степень



Отсюда получаем  $M = \bigcup_i^\infty M_k \subset \bigcup_i^\infty I_i^k$  и  $\sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |I_i^k| < \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k$  - если теперь взять  $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k}$ , то мы получим

$$\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k = \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon$$

□

### 3 Топология в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Пусть имеется  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Точку  $x_0 \in M$  будем называть *внутренней* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

**Определение.** Точку  $x_0 \in M$  будем называть *внешней* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

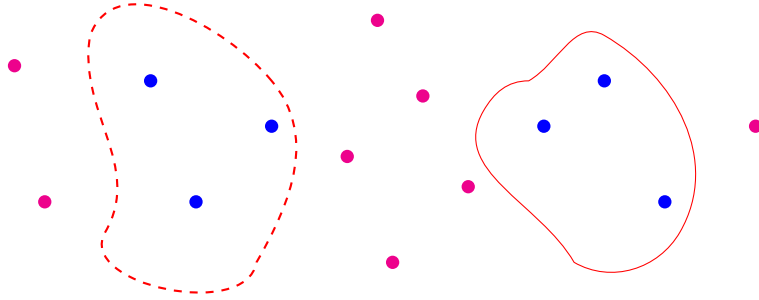
**Пример.**  $M = [0; 1)$ . тогда

$$\begin{cases} x = 0.5 & \text{— внутренняя} \\ x = 0 & \text{— не внутренняя} \\ x = 2 & \text{— внешняя} \end{cases}$$

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *граничной* точкой  $M$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

**Обозначение.**  $\partial M$  — множество всех граничных точек  $M$



Синие точки - пример внутренних точек

Фиолетовые - пример внешних

Красные пример граничных (в данном случае пример  $\partial M$ )

**Пример.**  $M = [0; 1) \Rightarrow x = 0; 1$  — граничные

**Определение.** Точку  $x_0 \in M$  будем называть *изолированной* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M = \emptyset$$

**Пример.**  $M = [0; 1] \cup \{3\} \Rightarrow x = 3$  — изолированная

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *предельной* точкой  $M$ , если

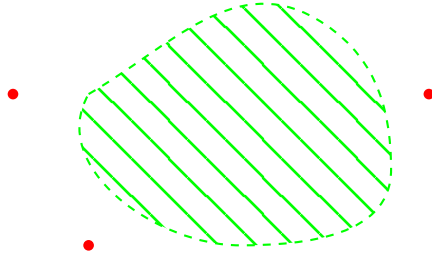
$$\forall \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

**Примечание.** Из определения следует, что изолированные точки не являются предельными

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *точкой прикосновения*  $M$ , если

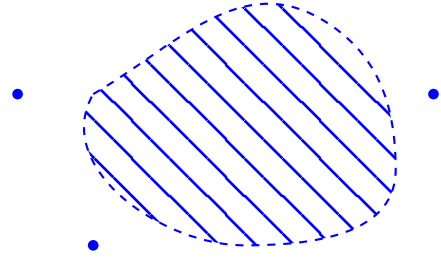
$$\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

**Примечание.** Точки прикосновения = изолированные точки  $\oplus$  предельные точки



Пример точек

Красные - изолированные. Зелёные - предельные



Синие точки - точки прикосновения

**Определение.** Множество всех точек прикосновения  $M$  называется *замыканием*  $M$  и обозначается как  $\overline{M}$

**Пример.**  $M = (0; 1) \cup (1; 2] \Rightarrow \overline{M} = [0; 2]$

**Пример.**  $M = \{x \in [0; 1] : x \in \mathbb{Q}\} \Rightarrow \overline{M} = [0; 1]$

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *открытым*, если все его точки внутренние

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *замкнутым*, если  $\mathbb{R}^n \setminus M$  — открыто

**Пример.**  $\begin{cases} (0; 1) & \text{— открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1] & \text{— замкнуто, т.к. } (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \text{ открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1) & \text{— ни открыто, ни замкнуто в } \mathbb{R} \end{cases}$

**Определение.** Множество  $K \subset \mathbb{R}^n$  называется *компактом*, если из  $\forall$  его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

**Примечание.** Если хотя бы для какого-то покрытия это не выполняется, то  $K$  — не компакт

**Пример.** Пусть  $M = (0; 1)$  покроем  $\left\{ A_n = \left( 0; 1 - \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$

При  $n \rightarrow \infty$   $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , но  $\forall$  фиксированного  $N$ :  $M \not\subset \bigcup_{n=1}^N A_n \Rightarrow$  не компакт

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  — называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

### 3.1 Критерий замкнутости

**Теорема.**  $M$  — замкнуто  $\iff M$  содержит **все** свои предельные точки

*Доказательство.* Докажем необходимость и достаточность

1. (*Необходимость*) Докажем  $\implies$  от противного

- Пусть  $x_0$  — предельная для  $M$  и  $x_0 \notin M$ . Тогда,  $\forall \varepsilon > 0$   $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$  и  $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- По условию  $M$  — замкнуто, то есть  $\mathbb{R}^n \setminus M$  — открыто  $\implies$  все его точки внутренние и  $\exists r > 0$ :

$$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \implies \overset{\circ}{B}_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B}_r(x_0) \cap M = \emptyset$$

Пришли к противоречию  $\implies M$  содержит все свои предельные точки □

2. (*Достаточность*) Докажем  $\impliedby$

Пусть  $y_0$  — не является предельной для  $M$ , то есть  $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \implies \exists r > 0$ :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{B}_r(y_0) \cap M = \emptyset \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \implies B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

$\implies \mathbb{R}^n \setminus M$  — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными  $\implies M$  — замкнуто по определению  $\square$

## 4 Компакты в $\mathbb{R}^n$

### 4.1 Замкнутый брус — компакт

**Теорема.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус  $\implies I$  — компакт

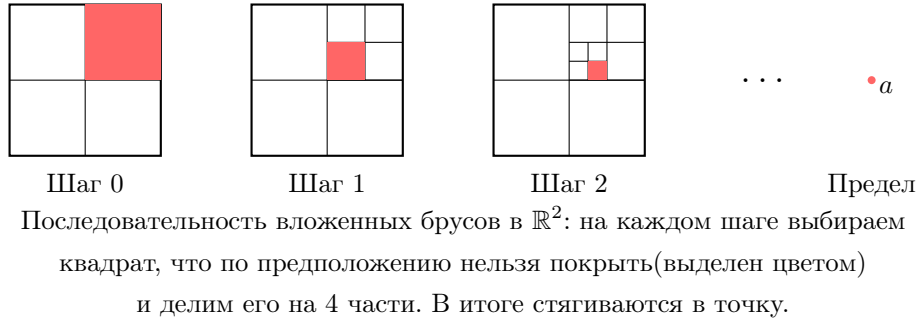
*Доказательство.* Пойдем от противного

Пусть  $I = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$

1. Положим, что  $I$  — не компакт. Значит, существует его покрытие  $\{A_\alpha\}$  — открытые множества, такие что  $I \subset \{A_\alpha\}$ , не допускающее выделения конечного подпокрытия
2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда,  $\exists I_1$ , такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе,  $I$  — компакт
3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусков:

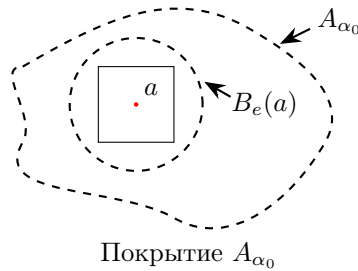
$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку  $a = (a_1, \dots, a_n)$



При этом,  $\exists a = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$

4.  $a \in I \implies a \in \bigcup A_\alpha \implies \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$



5. Из построения получили, что  $I \supset I_1 \supset \dots \supset a \implies \exists N : \forall n > N \ I_n \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$

Получается, что  $\forall n > N \ I_n$  покрывается одним лишь  $A_{\alpha_0}$  из системы  $\{A_\alpha\}$

Получаем противоречие тому, что любое  $I_n$  не допускает конечного подпокрытия, а у нас получилось, что  $I_n \in A_{\alpha_0} \forall n > N \implies I$  — компакт □

**Примечание.** Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

## 4.2 Критерий компактности

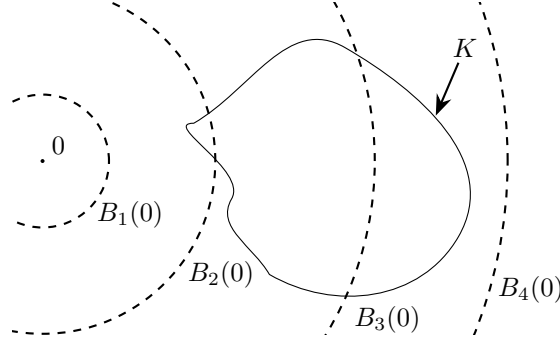
**Теорема.**  $K \subset \mathbb{R}^n$ .  $K$  — компакт  $\iff K$  замкнуто и ограничено

*Доказательство.* Докажем необходимость ( $\implies$ )

- *Ограниченность.*  $K$  — компакт  $\implies \forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$  — можно выделить конечное подпокрытие  $\implies$

$\implies$  Пусть  $\{A_\alpha\} = \{B_n(0)\}_{n=1}^\infty \implies \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ K \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(0)$  и так как  $B_n(0)$  — вложены шары  $\implies$

$\implies K \subset B_N(0) \implies$  по определению  $K$  — ограничено



Пример покрытия  $K$  вокруг точки 0 с помощью шаров

- *Замкнутость.* Пойдем от противного.  $K$  — компакт, тогда возьмем  $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(0)\}_{x \in K}$  — покрытие открытыми шарами, где  $\delta(x) = \rho(x, x_0)$ .  $x_0$  — предельная точка, которая  $\notin K$  (или же  $\in \mathbb{R}^n \setminus K$ )

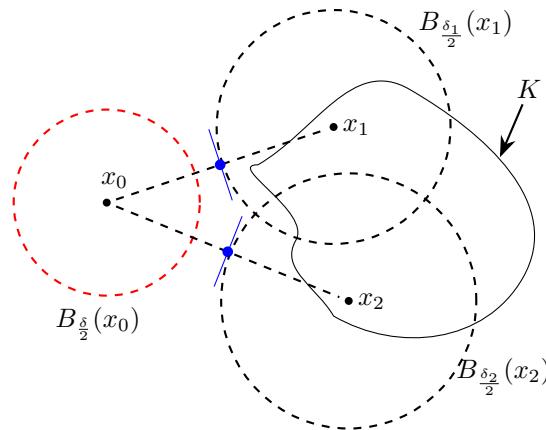
Так как  $K$  — компакт,  $\exists x_1, \dots, x_s : K \subset \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

Пусть  $\delta = \min_{1 \leq i \leq s} \delta(x_i)$ , тогда

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) = \emptyset \implies B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$$

$$\implies \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \emptyset$$

Значит,  $x_0$  не является предельной точкой  $K$ , что противоречит нашему предположению



Пример как мы строим  $B_{\frac{\delta}{2}}$  вокруг точки  $x_0$ .

Синие точки — середины отрезков на которых они лежат

*Доказательство.* Докажем достаточность

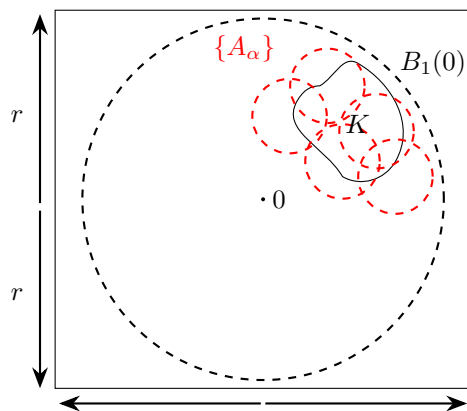
$K$  — замкнуто и ограничено  $\implies \exists r > 0 : B_r(0) \supset K \implies \exists I$  — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n$$

Пусть  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$  — произвольное покрытие открытыми множествами для  $K$ . Тогда,  $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$ . Так как  $I$  — компакт, то  $\exists$  конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K \text{ — покрытие для } I$$

Значит,  $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$  — конечное и  $\{A_\alpha\}$  — произвольное, тогда  $K$  — компакт по определению □



Строим замкнутый брус вокруг точки 0, пользуясь существованием конечного покрытия покрываем наш компакт  $K$