Математический Анализ - 2

Авторы конспекта 24/25 года, на основе которого написан текущий:
Винер Даниил | github   Нарек Хорянян | github

Авторы текущего конспекта:
Жуков Андрей | github   Мелисов Тимур | github

Версия от 19.10.2025 01:17

Содержание

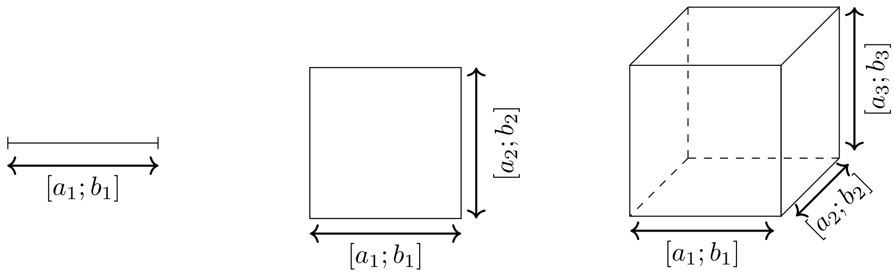
1 Лекция 1

1.1 Брус. Мера бруса

Определение. Замкнутый брус (координатный промежуток) в $\mathbb{R}^n$ — множество, описываемое как

$$\begin{aligned} I &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i \in \{1,n\}\} \\ &= [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n] \end{aligned}$$

Примечание. $I = \{a_1,b_1\} \times \ldots \times \{a_n,b_n\}$, где $\{a_i, b_i\}$ может быть отрезком, интервалом и т.д.



Пример брусов размерности с 1 по 3

Определение. Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

1.2 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a,\lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a,b})$, где $\lambda \geqslant 0$

2. **Аддитивность:** Пусть $I, I_1, \ldots, I_k$ — брусы

   Тогда, если $\forall i, j\ I_i, I_j$ не имеют общих внтренних точек, и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, то

$$|I| = \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

3. **Монотонность**: Пусть I — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

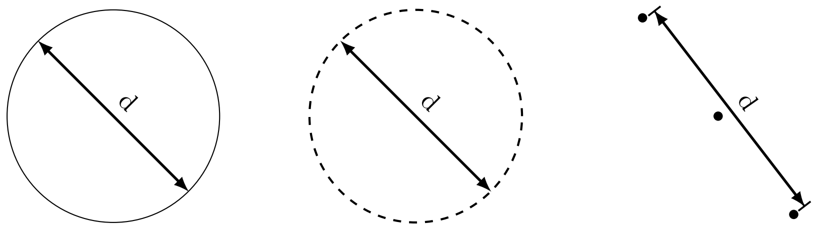
Определение. I — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, где I_i попарно не имеют общих внутренних точек.

Тогда набор $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}\}_{i=1}^{k}$ называется разбиением бруса I

Определение. Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} \|x - y\|, \text{ где}$$

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$



Пример диаметра для разных ограниченных множеств(Для всех трёх он равен d)

Определение. Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_\mathbb{T} = \max\limits_{1\le i\le k} d(I_i)$

Определение. Пусть $\forall\ I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$ будем называть **отмеченными точками**

Определение. Размеченное разбиение — пара $(\mathbb{T}, \xi)$

1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть I — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \to \mathbb{R}$ определена на I

Определение. Интегральная сумма Римана функции f на $(\mathbb{T}, \xi)$ — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

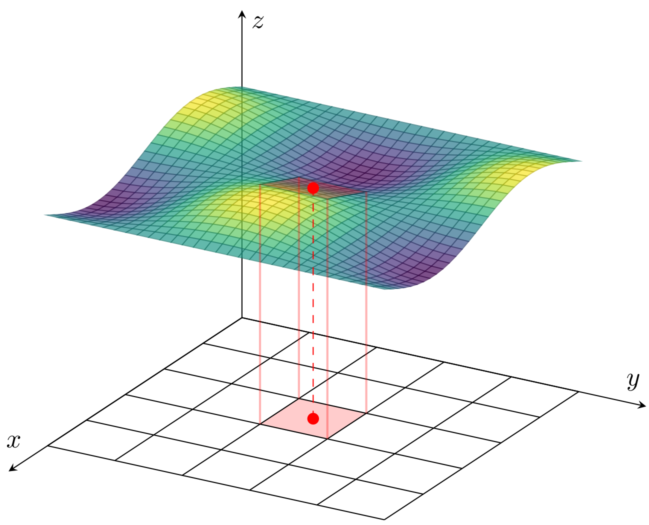
Определение. Функция f интегрируема (по Риману) на замкнутом брусе I $(f : I \to \mathbb{R})$, если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_\mathbb{T} < \delta :$$
$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| - A| < \varepsilon$$

Тогда

$$A = \int\limits_I f(x)\mathrm{d}x = \int \ldots \int\limits_I f(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$



Пример интегрирования в $\mathbb{R}^2$ по определению

1.5 Пример константной функции

Пусть у нас есть функция $f = \text{const}$

$$\begin{aligned}\forall(\mathbb{T},\xi): \ \sigma(f,\mathbb{T},\xi) &= \sum_{i=1}^{k} \text{const}\cdot|I_i| \\ &= \text{const}\cdot|I| \Longrightarrow \int_I f(x)\mathrm{d}x = \text{const}\cdot|I|\end{aligned}$$

1.6 Пример неинтегрируемая функция

Имеется брус $I = [0,1]^n$, а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1,\dots,n}\ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Доказательство. $\forall\,\mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \in \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T},\overline{\xi})$:

$$\sigma(f,\mathbb{T},\overline{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 1\cdot|I_i| = |I| = 1$$

В то же время, $\forall\,\mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \notin \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T},\hat{\xi})$:

$$\sigma(f,\mathbb{T},\hat{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 0\cdot|I_i| = 0 \Longrightarrow f \notin \mathcal{R}(I)$$

1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

$$I = [0,1]\times[0,1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\dfrac{1}{n}$, выбирая в качестве точек ξ_i нижние правые вершины ячеек

Имеется функция $f = xy$, $|I| = \dfrac{1}{n^2}$

$$\sigma(f,\mathbb{T},\xi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2} \quad = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} i\cdot j = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=0}^{n-1} j \quad = \frac{n(n-1)}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4}$$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4} = \dfrac{1}{4}$

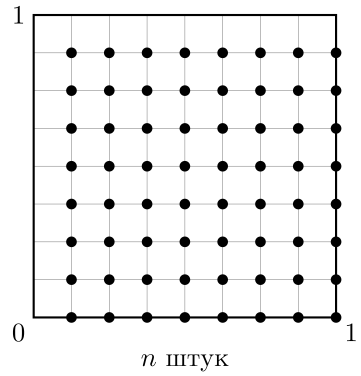


Рисунок того как мы выбираем в примере точки на разбиение

2 Лекция 2

2.1 Необходимое условие интегрирования.

Теорема. Пусть I — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

Доказательство. От противного.

1. $f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A \in \mathbb{R}$, такая что $\forall \varepsilon > 0$, а значит для $\varepsilon = 1$ тоже:

$$\exists \delta > 0 \colon \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} \leqslant \delta \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < 1$$

   Отсюда

$$A - 1 < \sigma < A + 1 \implies \sigma \text{ ограничена}$$

2. С другой стороны, так как предположили, что f — неограничена на I

$$\forall\, \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k} \quad \exists i_0 \colon f \text{ неограничена на } I_{i_0}$$

   Тогда рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) \cdot |I_i| + f(\xi_{i_0}) \cdot |I_{i_0}|$$

   Выбором подходящего ξ_{i_0} можно сделать $f(\xi_{i_0})$ сколь угодно большой $\implies$ σ будет не ограничена - противоречние

Из противоречния пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

$\square$

2.2 Свойства интеграла Римана

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) \mathrm{d}x = \alpha \int_I f \mathrm{d}x + \beta \int_I g \mathrm{d}x$$

   Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}(I) : \exists A_f, \text{что} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1 > 0\ \forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \quad \text{верно} \left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \int_I f \mathrm{d}x \right| =: |\sigma_f - A_f| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$
$$g \in \mathcal{R}(I) : \exists A_g, \text{что} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_2 > 0\ \forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \quad \text{верно} \left| \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \int_I g \mathrm{d}x \right| =: |\sigma_g - A_g| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$

   Тогда $\forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < min(\delta_f, \delta_g) = \delta$:

$$|\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \alpha A_f + \beta A_g| = \left| \sum (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \cdot |I_i| - \alpha A_f - \beta A_g \right| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} < \varepsilon$$

$\square$

Монотонность

$$f, g \in \mathcal{R}(I);\ f \leqslant g \text{ на } I \implies \int_I f\mathrm{d}x \leqslant \int_I g\mathrm{d}x$$

Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R}\colon \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\delta : \forall(\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta,\ \text{выполняется } |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Аналогично для $g \in \mathcal{R}(I)$, тогда:

$$\begin{cases} A_f - \varepsilon < \sigma_1 < A_f + \varepsilon \\ A_g - \varepsilon < \sigma_2 < A_g + \varepsilon \\ \sigma_f \leqslant \sigma_g \end{cases}$$

Отсюда

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leqslant \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f - \varepsilon < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \qquad \forall\varepsilon > 0$$

□

Оценка интеграла (сверху)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left|\int_I f\mathrm{d}x\right| \leqslant \sup_I |f||I|$$

Доказательство. По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) &\implies f \text{ Ограничена на } I \\ &\implies -\sup_I |f| \leqslant f \leqslant \sup_I |f| \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} -\int_I \sup|f|\mathrm{d}x \leqslant \int_I f\mathrm{d}x \quad &\leqslant \int_I \sup|f|dx \\ -\sup_I |f||I| \leqslant \int_I f\mathrm{d}x \qquad &\leqslant \sup_I |f||I| \end{aligned}$$

□

2.3 Множество меры нуль по Лебегу

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если $\forall\,\varepsilon > 0$ существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов $\{I_i\}$ и выполняются:

- $M \subset \bigcup\limits_i I_i$
- $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall\,\varepsilon > 0$

Пример: $a \in \mathbb{R}$ — точка.

$$I = [a - \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{3}] \implies |I| = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0 \implies a \text{ — множество меры нуль по Лебегу}$$

2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. Если в определении $\{I_i\}$ заменить на открытые брусы, то определение останется верным.

   Доказательство. Пусть $\{I_i\}$ — открытые брусы, тогда $\forall\varepsilon > 0$ $\exists$ не более чем счетный набор $\{I_i\}$: $M \subset \bigcup\limits_i I_i$ и $\sum |I_i| < \varepsilon$

Пусть $\{\bar{I}_i\}$ — открытые брусы + границы = замкнутые брусы I_i, причём объем "добавленных" плоскостей будет нулевой, так как объем бруса $n-1$ размерности, будет нулевым для объема бруса размерности n

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, \text{ при этом } |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \ \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \ \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

Докажем в обратную сторону. Мы хотим увеличить замкнутый брус в два раза и увеличенный брус взять открытым.

Пусть $\{I_i\}$ — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_i^1, b_i^1] \times \ldots \times [a_i^n, b_i^n], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Так как $\left(\frac{a_i^k}{2}, \frac{b_i^k}{2}\right)$ — центр i-го бруса в k-ом измерении, увеличить изначальный брус в два раза по этому измерению можно сдвинувшись от центра не на половину, а на целую сторону, то есть на $b_i^k - a_i^k$

Таким образом:

$$\tilde{I}_i = \left(\frac{a_i^1 + b_i^1}{2} - (b_i^1 - a_i^1); \frac{a_i^1 + b_i^1}{2} + (b_i^1 - a_i^1)\right) \times \ldots \times \left(\frac{a_i^n + b_i^n}{2} - (b_i^n - a_i^n); \frac{a_i^n + b_i^n}{2} + (b_i^n - a_i^n)\right)$$

$$\implies V_2 = \sum_i |\tilde{I}_i| = 2^n \cdot V_1 < \varepsilon \qquad \square$$

Если $M \subset \mathbb{R}^n$ - множество меры нуль по Лебегу, то из $L \subset M \implies L$ - множество меры нуль по Лебегу

Доказательство. Докажем по транзитивности

$$\forall \varepsilon \ > 0, \ \exists \text{ не более чем счетный набор } \{I_i\} : L \subset M \subset \bigcup_i I_i \implies L \subset \bigcup_i I_i$$

По условию нам дано, что для $M \subset \bigcup\limits_i I_i$ верно $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$, и тоже самое выполнено и для $L \subset \bigcup\limits_i I_i$, тогда L по определнию является множеством меры нуль по Лебегу $\square$

Не более чем счетное объединение множеств меры нуль по Лебегу, тоже является множеством меры нуль по Лебегу

Доказательство. пусть $M = \bigcup\limits_i^{\infty} M_k$ - объединение не более чем счетного числа множеств $\forall k \ M_k$ - множество меры нуль по Лебегу $\implies \forall k, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ по определению множества меры нуль для них верно

- $M_k \subset \bigcup\limits_i^{\infty} I_i^k$ [1]
- $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon_k \qquad \forall \varepsilon_k > 0$

[1] I_i^k - это i-ый для M_k, а не степень

Отсюда получаем $M = \bigcup\limits_{i}^{\infty} M_k \subset \bigcup\limits_{i}^{\infty} I_i^k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_i^k| < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ - если теперь взять $\varepsilon_k = \dfrac{\varepsilon}{2^k}$, то мы получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon$$

$\square$

3 Лекция 3

Определение. Пусть имеется $M \subset \mathbb{R}^n$. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внутренней* точкой M, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

Определение. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внешней* точкой M, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

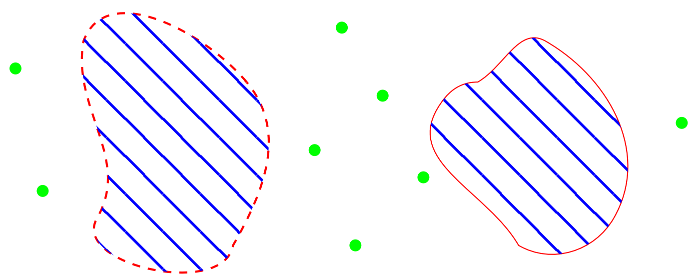
Пример. $M = [0; 1)$. тогда

$$\begin{cases} x = 0.5 & \text{— внутренняя} \\ x = 0 & \text{— не внутренняя} \\ x = 2 & \text{— внешняя} \end{cases}$$

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *граничной* точкой M, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \ (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \varnothing \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \varnothing$$

Обозначение. ∂M — множетсво всех граничных точек M



Синяя область - пример множества внутренних точек
Зеленые - пример внешних (изображена часть точек)
Красные границы - пример множества граничных точек (пример ∂M)

Пример. $M = [0; 1) \implies x = 0; 1$ — граничные

Определение. Точку $x_0 \in M$ будем называть *изолированной* точкой M, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon (x_0) \cap M = \varnothing$$

Пример. $M = [0; 1] \cup \{3\} \implies x = 3$ — изолированная

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *предельной* точкой M, если

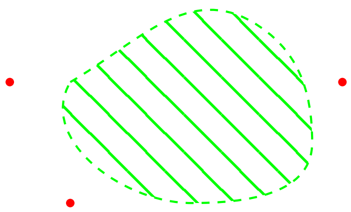
$$\forall \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon (x_0) \cap M \neq \varnothing$$

Примечание. Из определения следует, что изолированные точки не являются предельными

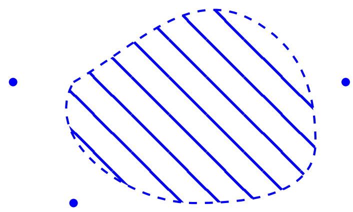
Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *точкой прикосновения* M, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \ B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing$$

Примечание. Точки прикосновения $=$ изолированные точки $\oplus$ предельные точки



Пример точек
Красные - изолированные. Зелёные - предельные



Синие точки - точки прикосновения

Определение. Множество всех точек прикосновения M называется *замыканием* M и обозначается как $\overline{M}$

Пример. $M = (0;1) \cup (1;2] \Longrightarrow \overline{M} = [0;2]$

Пример. $M = \{x \in [0;1] \colon x \in \mathbb{Q}\} \Longrightarrow \overline{M} = [0;1]$

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если все его точки внутренние

Определение. Множество $M \subset R^n$ называется замкнутым, если $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто

Пример. $\begin{cases} (0;1) & \text{— открыто в } \mathbb{R} \\ [0;1] & \text{— замкнуто, т.к. } (-\infty;0) \cup (1;+\infty) \text{ открыто в } \mathbb{R} \\ [0;1) & \text{— ни открыто, ни замкнуто в } \mathbb{R} \end{cases}$

Определение. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если из $\forall$ его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

Примечание. Если хотя бы для какого-то покрытия это не выполняется, то K — не компакт

Пример. Пусть $M = (0{,}1)$ покроем $\left\{ A_n = \left(0; 1 - \dfrac{1}{n}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$

При $n \to \infty$ $M \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, но $\forall$ фиксированного N: $M \not\subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow$ не компакт

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ — называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

3.1 Критерий замкнутости

Теорема. M — замкнуто $\Longleftrightarrow$ M содержит **все** свои предельные точки

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность

1. *(Необходимость)* Докажем $\Longrightarrow$ от противного

   - Пусть x_0 — предельная для M и $x_0 \notin M$. Тогда, $\forall \varepsilon > 0$ $\overset{\circ}{B}_\varepsilon (x_0) \cap M \neq \varnothing$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$
   - По условию M — замкнуто, то есть $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто $\Longrightarrow$ все его точки внутренние и $\exists r > 0$:

   $$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \overset{\circ}{B_r(x_0)} \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B}_r (x_0) \cap M = \varnothing$$

   Пришли к противоречию $\Longrightarrow$ M содержит все свои предельные точки ☐

2. *(Достаточность)* Докажем $\Longleftarrow$

   Пусть y_0 — не является предельной для M, то есть $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \exists r > 0$:

   $$\begin{cases} \overset{\circ}{B}_r (y_0) \cap M = \varnothing \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \Longrightarrow B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

   $\Longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus M$ — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными $\Longrightarrow M$ — замкнуто по определению

☐

4 Лекция 4

4.1 Замкнутый брус — компакт

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус $\Longrightarrow I$ — компакт

Доказательство. Пойдем от противного
Пусть $I = [a_1; b_1] \times \ldots \times [a_n; b_n]$

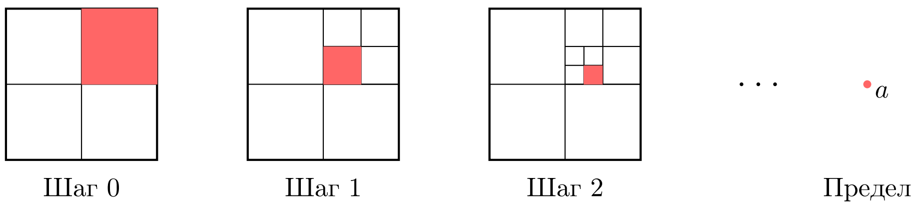
1. Положим, что I — не компакт. Значит, существует его покрытие $\{A_\alpha\}$ — открытые множества, такие что $I \subset \{A_\alpha\}$, не допускающее выделения конечного подкпорытия

2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда, $\exists I_1$, такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе, I — компакт

3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусов:

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

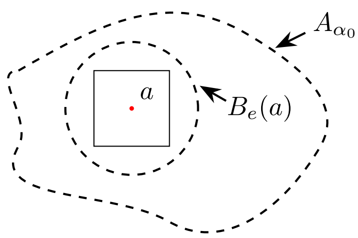
   То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку $a = (a_1, \ldots, a_n)$



Последовательность вложенных брусов в $\mathbb{R}^2$: на каждом шаге выбираем
квадрат, что по предположению нельзя покрыть(выделен цветом)
и делим его на 4 части. В итоге стягиваются в точку.

   При этом, $\exists a = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I_i$

4. $a \in I \Longrightarrow a \in \bigcup A_\alpha \Longrightarrow \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$



Покрытие A_{α_0}

5. Из построения получили, что $I \supset I_1 \supset \ldots \supset a \Longrightarrow \exists N : \forall n > N \ I_n \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$

   Получается, что $\forall n > N \ I_n$ покрывается одним лишь A_{α_0} из системы $\{A_\alpha\}$

   Получаем противоречие тому, что любое I_n не допускает конечного подпокрытия, а у нас получилось, что $I_n \in A_{\alpha_0} \forall n > N \Longrightarrow I$ – компакт ☐

Примечание. Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

4.2 Критерий компактности

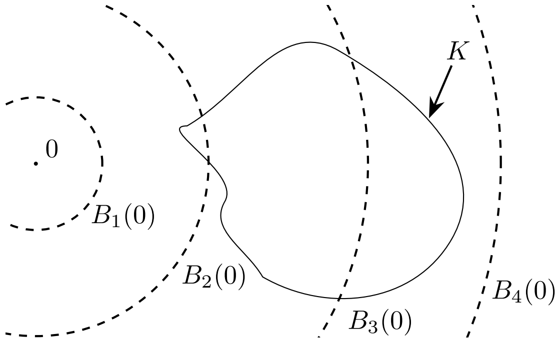
Теорема. $K \subset \mathbb{R}^n$. K — компакт $\iff$ K замкнуто и ограниченно

Доказательство. Докажем необходимость ($\Longrightarrow$)

- *Ограниченность.* K — компакт $\Longrightarrow \forall\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ — можно выделить конечное подпокрытие $\Longrightarrow$

  $\Longrightarrow$ Пусть $\{A_\alpha\} = \{B_n(0)\}_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n(0)$ и так как $B_n(0)$ — вложены шары $\Longrightarrow$

  $\Longrightarrow K \subset B_N(0) \Longrightarrow$ по определению K — ограничено



Пример покрытия K вокруг точки 0 с помощью шаров

- *Замкнутость.* Пойдем от противного. K — компакт, тогда возьмем $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(0)\}_{x\in K}$ — покрытие открытыми шарами, где $\delta(x) = \rho(x,x_0)$. x_0 — предельная точка, которая $\notin K$ (или же $\in \mathbb{R}^n \setminus K$)

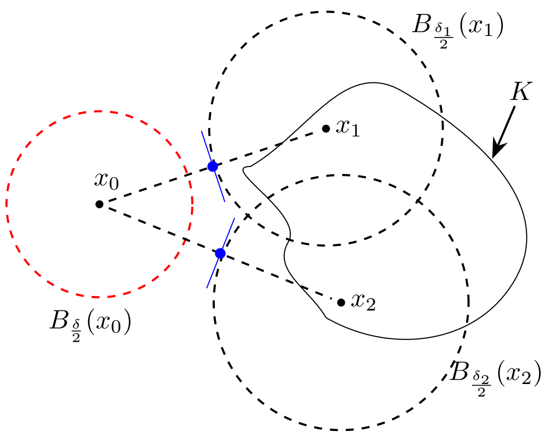
  Так как K — компакт, $\exists x_1,\ldots,x_s : K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

  Пусть $\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant s} \delta(x_i)$, тогда

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^{s} B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) = \varnothing \Longrightarrow B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$$

$$\Longrightarrow \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \varnothing$$

  Значит, x_0 *не является предельной точкой* K, что противоречит нашему предположению



Пример как мы строим $B_{\frac{\delta}{2}}$ вокруг точки x_0.
Синие точки - середины отрезков на которых они лежат

Доказательство. Докажем достаточность

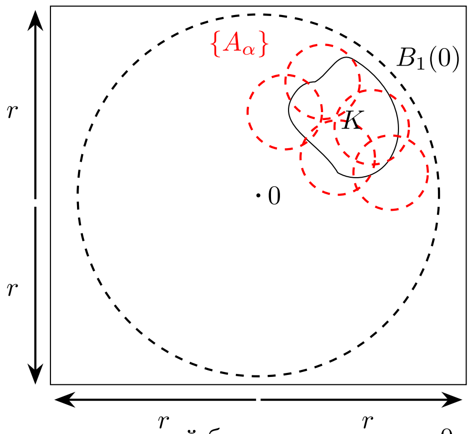
K — замкнуто и ограничено $\Longrightarrow \exists r > 0 : B_r(0) \supset K \Longrightarrow \exists I$ — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n$$

Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ — произвольное покрытие открытыми множествами для K. Тогда, $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$. Так как I — компакт, то $\exists$ конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K \text{ — покрытие для } I$$

Значит, $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ — конечное и $\{A_\alpha\}$ — произвольное, тогда K — компакт по определению $\square$



Строим замкнутый брус вокруг точки 0, пользуясь существованием конечного покрытия покрываем наш компакт K

5 Лекция 5

5.1 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте

Теорема. Пусть $K \in \mathbb{R}^n$ — компакт и функция $f : K \mapsto \mathbb{R}$ - непрерывная. Тогда f на K достигает наибольшее и наименьшее значения.

Доказательство.

- *Ограниченность.* От противного: пусть существует последовательность $\{x^k\} \subset K : |f(x^k)| > k$. Из ограниченности K следует ограниченность последовательности $\{x^k\}$, и как следствие ограничены последовательности отдельных коордиант:

$$|x_i^k| = \sqrt{|x_i^k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^k|^2} = ||x^k|| \leqslant C \quad \text{для некоторого } C$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса у $\{x_1^k\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_1^{k_{j_1}} \to a_1, j_1 \to \infty$. Для последовательности $\{x_2^{k_{j_1}}\}$ существует сходящаяся последовательность $x_2^{k_{j_2}} \to a_2, j_2 \to \infty$. И т.д. Получаем сходящуюся подпоследовательность:

$$x^{k_j} = (x_1^{k_j}, x_2^{k_J}, \dots, x_n^{k_j}) \to (a_1, a_2, \dots, a_n) = a$$

Точка a — предельная для K. В силу замкнутости K т. $a \in K$. А из непрерывности функции f получаем $f(x^{k_j}) \to f(a)$. А с другой стороны, $f(x^{k_j}) \to \infty$ из выбора исходной последовательности. **противоречие**

- *Достижение наибольшего (наименьшего) значения.* Итак, мы доказали, что f — ограничена на K. Выберем последовательность $\{x^k\}$:

$$\sup_K f - \frac{1}{k_j} \leq f(x^{k_j}) \leq \sup_K f$$

в силу непрерывности f:

$$\sup_K f \leq f(a) \leq \sup_K f$$

Получаем $f(a) = \sup\limits_K f$, т.е. максимальное значение достиигается в точке $x = a$. Для $\inf\limits_K f$ доказательство аналогично □

5.2 Расстояние между двумя множествами

Определение. Расстоянием между двумя множествами X и Y, где $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число $\rho(X, Y)$:

$$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} ||x - y||$$

Примеры:

1. $X \cap Y \neq \varnothing \implies \rho(X, Y) = 0$
2. $\rho(X, Y) = 0 \implies X \cap Y \neq \varnothing$? — нет, пример: $X = (0, 1); (Y = (1; 2)$ - не компакты

5.3 Расстояние между непересекающимися компактами

Теорема. Если $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ — компакты и $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, то $\rho(K_1, K_2) > 0$

Доказательство. Функция $f(x,y) = ||x-y||$ определена на $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, причем f–непрерывная функция. По теореме Вейерштрасса эта функция достигает своего максимального и минимального значений. Т.е. существуют $x_0 \in K_1, y_0 \in K_1 : f(x_0, y_0) = \rho(K_1, K_2)$. А $f(x_0,y_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_0 = y_0$. □

5.4 Колебание функции на множестве

Определение. Колебанием функции f на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число $\omega(f, M)$:

$$\omega(f, M) = \sup_{x,y \in M} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{y \in M} f(y)$$

5.5 Колебание функции в точке

Определение. Колебанием функции f в точке $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число

$$\omega(f, x_0) := \lim_{r \to 0+} \omega(f, B_r^M(x_0)), \quad \text{где } B_r^M = B_r(x_0) \cap M$$

Напоминание: По определению, функция $f : M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_o \in M$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in M \quad |x - x_0| < \delta \iff x \in B_\delta(x_0) \cap M$ верно $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

5.6 Колебание функции, непрерывной в точке

Теорема. Пусть $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$; $f : M \mapsto \mathbb{R}$. f — непрерывна в точке $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$

Доказательство.

- *Необходимость*

  f — непрерывна в т. $x_0 \in M \implies \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in B_\delta(x_0) \cap M = B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
  Рассмотрим $\omega(f, x_0) := \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$:

  $$\omega(f, B_\delta^M(x_0)) = \sup_{x,y \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)| + \sup_{y \in B_\delta(x_0)} |f(y) - f(x_0)| \leq \frac{2\,\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

  При $\varepsilon \to 0 \implies \delta \to 0$ и $\omega(f, B_\delta^M(x_0)) \to 0$, т.е. $\omega(f, x_0) = 0$

- *Достаточность*

  Пусть $0 = \omega(f, x_0) := \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$, т.е.

  $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in B_\delta^M(x_0) \qquad \sup_{x,y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

  Получаем, что

  $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \implies$$

□

Определение. Если какое-то свойство не выполняется лишь на множестве меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется почти всюду.

Пример:

1. $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ — непрерывна почти всюду на $\mathbb{R}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$ — разрывна в любой точке $\implies$ НЕ является непрерывной почти всюду.

5.7 Пересечение разбиений бруса

Определение. Пусть $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$ и $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$ — два разбиения бруса $I \subset \mathbb{R}^n$.

Пересечением разбиений $(\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)$ будем называть мн-во всех брусов $\{I_{ij}\} : \forall I_{ij} \begin{cases} 1)\exists k : I_{ij} \in \{I_k^1\} \\ 2)\exists m : I_{ij} \in \{I_m^2\} \\ 3)\{I_{ij}\} - \text{ разбиение бруса } I \end{cases}$

5.8 Критерий Лебега об интегрируемости функции по Риману

Теорема. Если $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый невырожденный брус, $f : I \to \mathbb{R}$, то $f \in R(I) \iff f$ ограничена и непрерывна почти всюду на I

Доказательство. • *Необходимость*

Если f интегрируема, то она ограничена по необходимому условию интегрируемости. Осталось показать, что множества разрыва меры нуль. От противного: пусть это не так.

Обозначим множество всех точек разрыва ф-ии f на I за T и заметим, что $T = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} T_k$, где

$T_k = \{x \in I | \omega(f, x) \geq \frac{1}{k}\}$. Если T не меры нуль, то существует T_{k_0} не меры нуль (если они все меры нуль, то по свойству множеств меры нуль счетное объединение таких множеств тоже было бы меры нуль).

Для произвольного разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^m$ бруска I разобъем эти бруски на две кучи: первая $A = \{I_i | I_i \cap T_{k_0} \neq \varnothing, \omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}\}$ и вторая $B = \mathbb{T} \backslash A$. Покажем что A является покрытием множества T_{k_0}, т.е. $T_{k_0} \subset \bigcup\limits_{i: I_i \in A} I_i$ любая точка $x \in T_{k_0}$ является либо

a) внутренней для некоторого бруска I_i. В этом случае $\omega(f, I_i) \geq \omega(f, x) \geq \frac{1}{k_0} > \frac{1}{2k_0}$, т.е. $I_i \in A$, либо

b) точка x лежит на границе некоторого количества брусков (не более чем 2^n штук). Тогда хотя бы на одном из них колебание $\omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}$ (т.е. $I_i \in A$): если бы такого не нашлось, то в любой малой окрестности $B_\varepsilon(x)$ выполняется следующее:

$$\omega(f, x) \leq \sup_{x', x'' \in B_\varepsilon(x)} |f(x') - f(x'')| \leq \sup_{x' \in B_\varepsilon(x)} |f(x') - f(x)| + \sup_{x'' \in B_\varepsilon(x)} |f(x) - f(x'')| < \frac{1}{2k_0} + \frac{1}{2k_0} = \frac{1}{k_0}$$

т.е. $x \notin T_{k_0}$ — **противоречие**.

Таким образом, каждая точка $x \in T_{k_0}$ покрывается некоторым бруском $I_i \in A$, т.е. A - покрытие T_{k_0}. Тогда существует $c : \sum\limits_{i: I_i \in A} |I_i| \geq c > 0$ для всех разбиений $\mathbb{T}$ (если бы меняя разбиения мы могли получить сумму объемов этих брусков сколь угодно маленькую, то получилось бы, что T_{k_0} меры нуль)

Возьмем два набора отмеченных точек ξ^1 и ξ^2. На брусках из кучки B будем их брать одинаковыми, т.е. для $I_i \in B$ $\xi_i^1 = \xi_i^2$. А на брусках из кучки A будем брать такие, чтобы

$$f(\xi_i^1) - f(\xi_i)^2 \geq \frac{1}{3k_0} \text{ (у нас там колебания} \geq 1/2k_0, \text{ так что такие найдутся)}$$

Получаем:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi^2) = \left| \sum_i (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right|$$
$$= \left| \sum_{i: I_i \in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| + \sum_{i: I_i \in B} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right|$$
$$= \left| \sum_{i: I_i \in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \geq \frac{1}{3k_0} \sum_{i: I_i \in A} |I_i| \geq \frac{c}{3k_0} > 0$$

т.е. интегральные суммы не могут стремиться к одному и тому же числу, значит f не интегрируема — **противоречие**.

- *Достаточность*

  Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим $T_\varepsilon = \{x \in I | \omega(f,x) \geq \varepsilon\}$. Покажем, что это множество - компакт. Ограниченность очевидна (подмножества бруска), а замкнутость проверим от противного. Пусть a - предельная точка $T_\varepsilon:\ a \notin T_\varepsilon$. Т.к. она предельная, то существует $\{x^k\} : x^k \in B_{\frac{1}{k}}(a)$. Т.к. $B_{\frac{1}{k}}$ - открытые шары, то наши точки лежат в них с окрестностями, т.е. сущесвтуют $\delta_k : B_{\delta_k}(x_K) \subset B_{\frac{1}{k}}(a)$. Тогда

  $$\omega(f, B_{\frac{1}{k}}(a)) \geq \omega(f, B_{\delta_k}(x_K)) \geq \omega(f, x_k) \geq \varepsilon$$

  Переходя к пределу $k \to \infty : \omega(f,a) \geq \varepsilon$, т.е. $a \in T_\varepsilon$ - противоречие. Значит T_ε - замкнуто, и, следовательно, компактно.

  Множество T_ε - множество меры нуль (как подмножество множества меры нуль). Значит, его можно покрыть не более чем счетным объединением открытых брусков $I_i : \sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$. Т.к. это открытое покрытие, а T_ε - компакт, то существует конечное подпокрытие: $T_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^m I_i$, при этом $\sum\limits_{i=1}^m |I_i| < \varepsilon$.

  Обозначим три множества: $C_1 = \bigcup\limits_{i=1}^m I_i, \quad C_2 = \bigcup\limits_{i=1}^m I_i', C_3 = \bigcup\limits_{i=1}^m I_i''$, где I_i', I_i'' - бруски, полученные гомотетией с центром в центре I_i с коэффициентом 2 и 3 соответственно.

  Заметим, что

  a) $|C_3| \leq \sum\limits_{i=1}^m |I_i''|| = 3^n \sum\limits_{i=1}^m |I_i| < 3^n\,\varepsilon$

  b) расстояние $\rho(\partial C_2, \partial C_3) = \delta_1 > 0$ (теорема про расстояние между компактами)

  c) Множество $K = I \backslash (C_2 \backslash \partial C_2)$ - компакт. Кстати, любое множество с диаметром меньше δ_1 либо польностью лежит в C_3, либо полностью в K.

  d) $T_\varepsilon \cap K = \varnothing$, т.к. $T_\varepsilon \subset C_1 \subset C_2$. Следовательно, $\forall x \in K\ \omega(f,x) < \varepsilon$. Тогда по теореме Кантора-Гейне $\exists \delta_2 > 0 :\ \forall x \in K\ \omega(f, B_{\delta_2}(x)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon$

  Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любых разбиений $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}, \mathbb{T}_2 = \{I_i^2\} : \lambda \mathbb{T}_1 < \delta, \lambda(\mathbb{T}_2) < \delta$

  Рассмотрим пересечение этих разбиений $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$, т.е. такое разбиение $\mathbb{T} = \{I_{ik}\}$, что $I_k^1 = I_{i_1 k} \bigsqcup \ldots \bigsqcup I_{i_m k}$ и $I_i^2 = I_{ik_1} \bigsqcup \ldots \bigsqcup I_{ik_l}$. Очевидно $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$.

  Для произвольных наборов отмеченных точек:

  $$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2)| \leq |\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| + |\sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)|$$

  Рассмотрим отдельное слагаемое:

  $$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| = \left| \sum_{i,j} (f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij}))|I_{ij} \right| \leq \sum_{I_{ij} \in C_3} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})||I_{ij}| + \sum_{I_{ij \in K}} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})||I_{ij}| \leq 2M \cdot e^n\,\varepsilon + 2\,\varepsilon\,|$$

  т.к. f ограничена некоторой константой M и см пункты $a), d)$, то

  Т.к. для $(\mathbb{T}_2, \xi^2)$ все выкладки аналогичные, то получаем:

  $$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| \leq \varepsilon(2M \cdot 3^n + 2|I|)$$

  Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$ (Критерий коши для функций)

  $\square$

5.9 Измельчение разбиения

Определение. Разбиение $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$ будем называть измельчением разбиения $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$, если $\forall k\ \exists m : I_k^1 \in I_m^2 \implies \mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ является измельчением $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$

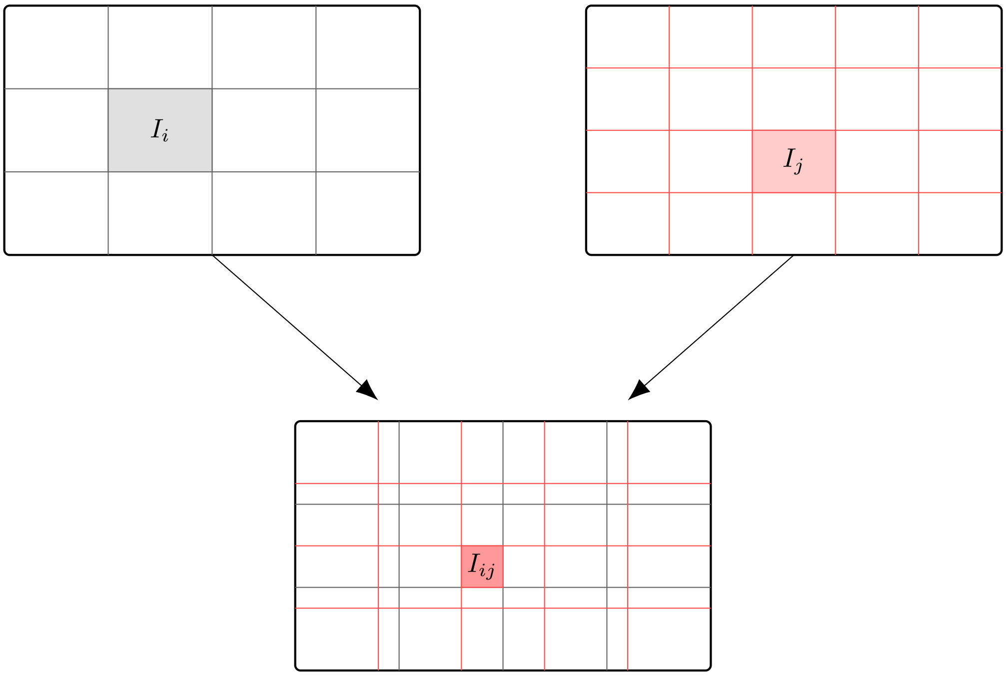


Рис. 1: Пересечение разбиений $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$

6 Лекция 6

6.1 Нижняя и верхняя суммы Дарбу

Определение. Пусть I - замкнутый брус, $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^K$ -разбиение бруса I, $m_i = \inf\limits_{I_i}(f)$, и $M_i = \sup\limits_{I_i}(f)$. Тогда числа $\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum\limits_{i=1}^{K} m_i|I_i|$ и $\overline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum\limits_{i=1}^{K} M_i|I_i|$ будем называть **нижней и верхней суммой Дарбу** соответственно

6.2 Нижняя сумма Дарбу не больше верхней

Теорема.

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) = \int_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

Доказательство.

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^{K} m_i|I_i| = \sum_{i} \inf_{\xi_i}(f(\xi_i))|I_i| = \inf_{\xi} \sum_{i} f(\xi_i)|I_i| = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq$$
$$\sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i} (f(\xi_i))|I_i| = \sum_{i} M_i|I_i| = \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

6.3 Монотонность сумм относительно измельчений разбиения

Теорема. Пусть $\tilde{\mathbb{T}}$ — измельчение разбиения $\mathbb{T}$, тогда

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

□

Доказательство. Если $L \subset M$, то $\inf L \geq \inf M$ и $\sup L \leq \sup M$, тогда:

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \underset{\text{по } 6.2}{\leq} \overline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

□

6.4 Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же брусе

Теорема. $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : \quad \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_2)$

Доказательство. $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ рассмотрим $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$, тогда по 6.3:

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1) \leq \underline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_2)$$

□

6.5 Верхние и нижние интегралы Дарбу

Определение. Верхним и нижним интегралом Дарбу будем называть числа соответственно

$$\overline{\mathcal{I}} := \inf_{\mathbb{T}} \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \qquad \underline{\mathcal{I}} := \sup_{\mathbb{T}} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

7 Лекция 7

7.1 Интеграл Дарбу как предел сумм Дарбу

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, а $f : I \mapsto \mathbb{R}$ — ограничена. Тогда:

$$\overline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \qquad \text{и} \qquad \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

Доказательство. Докажем, что $\underline{\mathcal{I}} = \lim\limits_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \quad (= \sup\limits_{\mathbb{T}} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}))$

1. f-ограничена на $I \implies \exists C > 0 : \forall x \in I \quad |f(x)| \leqslant C$

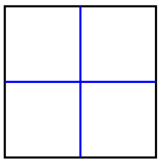
2. т.к. по определению $\underline{I} = \sup\limits_{\mathbb{T}} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \mathbb{T}_1 = \{I_i^1\}_{i=1}^{m_1} :\ \underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1) \leqslant \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon$

3. Пусть $G = \bigcup\limits_{i=1}^{m_1} \partial I_i^1$ - объединение границ брусов $I_i^1 \in \mathbb{T}_1$ (без повторов). Тогда G множество меры нуль по Лебегу (т.к. границы — мн-ва меры нуль по Лебегу)

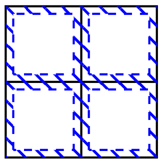
4. Пусть $\mathbb{T}_2$ - произвольное разбиение $I :\ \mathbb{T}_2 = \{I_i^2\}_{i=1}^{m_2}$
   Рассмотрим два множества брусов:

$$A = \{I_i^2 \in \mathbb{T}_2 : I_i^2 \cap G \neq \varnothing\} \qquad \text{и} \qquad B = \mathbb{T}_2 \setminus A \implies$$
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, \mathbb{T}_2 : \Delta_{\mathbb{T}_2} < \delta \text{ верно, что } \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| < \varepsilon$$

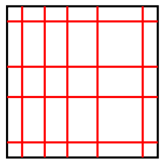
   т.к. наши брусочки I_i^2 по построению лежат в G, а по 3 пункту оно множество меры нуль.



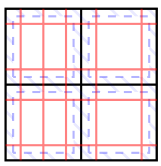
разбиение T_1



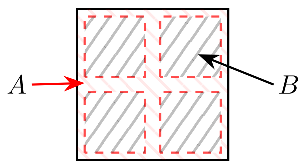
Граница G бруса T_1



Какое-то разбиение T_2



Как прошлые разбиения и граница G выглядят на одном рисунке



Как выглядят множества A и B

5. С другой стороны $\forall I_i^2 \in B$ верно, что $I_i^2 \in \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$

Хотим рассмотреть

$$|\underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_2)| = |I - \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) + \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_2)| \leqslant \underbrace{|I - \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)|}_{*} + \underbrace{|\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_2)|}_{**}$$
$$< \varepsilon + 2C\,\varepsilon = \varepsilon(1 + 2C)$$

$\square$

* из пункта 2: $\underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1) \leqslant \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) \leqslant \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon \implies |\underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)| < \varepsilon$

** Пояснение ниже

$$
\begin{aligned}
|\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}_1\cap\mathbb{T}_2)-\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}_2)| &= \left|\sum_{I_i^2\in B} m_i|I_i^2| + \sum_{I_i\in\mathbb{T}_1\cap A} m_i|I_i^2| - \sum_{I_i^2\in B} m_i|I_i^2| - \sum_{I_i^2\in A} m_i|I_i^2|\right| \quad \textit{Переход с равном по пункту 5}\\
&\leqslant \left|\sum_{I_i\in\mathbb{T}_1\cap A} m_i|I_i^2|\right| + \left|\sum_{I_i^2\in A} m_i|I_i^2|\right|\\
&\leqslant 2\left|\sum_{I_i^2\in A} m_i|I_i^2|\right| \quad \textit{Следующий переход по пункту 1}\\
&\leqslant 2C\left|\sum_{I_i^2\in A} |I_i^2|\right| \quad \textit{Следующий переход по пункту 4}\\
&< 2C\,\varepsilon
\end{aligned}
$$

7.2 Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману

$I\in\mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, $f: I\mapsto\mathbb{R}, f\in\mathcal{R}(I) \iff f$ — ограничена на I и $\underline{\mathcal{I}}=\overline{\mathcal{I}}$

Доказательство. Необходимость

- $f\in\mathcal{R}(I)\implies$ по необходимому условию интегрируемости функции по Риману на замкнутом брусе, f — ограничена на I
- Покажем, что $\underline{\mathcal{I}}=\mathcal{I},\overline{\mathcal{I}}=\mathcal{I}\implies\underline{\mathcal{I}}=\overline{\mathcal{I}}$

 1. $f\in\mathcal{R}(I)\implies\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(\mathbb{T},\xi):\Delta_{\mathbb{T}}<\delta\ |\sigma(f,\mathbb{T},\xi)-\mathcal{I}|<\varepsilon$
 2. $\underline{\mathcal{I}}=\sup\limits_{\mathbb{T}}\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T})=\lim\limits_{\Delta\to0}\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T})\implies|\,\underline{\mathcal{I}}-\underline{\mathrm{S}}\,|<\varepsilon$
 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\ \exists\mathbb{T}:\Delta_{\mathbb{T}}<\delta:|\,\underline{\mathcal{I}}-\underline{\mathrm{S}}\,|<\varepsilon$
 3. $\underline{\mathrm{S}}(\mathbb{T},\xi)=\inf\limits_{\xi}\sigma(f,\mathbb{T},\xi)$
 $\forall\mathbb{T},\ \forall\varepsilon>0\ \exists\xi:|\,\underline{\mathrm{S}}-\sigma|<\varepsilon$

$|\mathcal{I}-\underline{\mathcal{I}}\,|\leqslant|\mathcal{I}-\underline{\mathcal{I}}-\sigma+\sigma+\underline{\mathrm{S}}-\underline{\mathrm{S}}\,|\leqslant|\mathcal{I}-\sigma|+|\,\underline{\mathcal{I}}-\underline{\mathrm{S}}\,|+|\sigma-\underline{\mathrm{S}}\,|<3\,\varepsilon$ □

Доказательство. Достаточность
f — ограничена и $\underline{\mathcal{I}}=\overline{\mathcal{I}}$. Имеем

$$\underline{\mathrm{S}}(f,\mathcal{T})=\inf_{\xi}\leqslant\sigma(f,\mathbb{T},\xi)\leqslant\sup_{\xi}(f,\mathbb{T},\xi)=\overline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T})$$

Тогда, при $\lim\limits_{\Delta_{\mathbb{T}}\to0}\underline{\mathrm{S}}=\underline{\mathcal{I}},\ \lim\limits_{\Delta_{\mathbb{T}}\to0}\overline{\mathrm{S}}=\overline{\mathcal{I}}$ получаем $\underline{\mathcal{I}}=\overline{\mathcal{I}}$(Условие ограниченнсоти f даёт нам возможность применять неравенство выше) □

7.3 Интегрирование по допустимым множествам

Определение. Множество $D\subset\mathbb{R}^n$ называется *допустимым*, если

- D — ограниченно
- ∂D — множество меры нуль по Лебегу

Пример. Допустимого и не допустимого множества

1. $D_1=(0,1)$
 - ограничено - да
 - $\partial D_1=\{0\}\cup\{1\}$ - мн-во меры нуль - да

D_1 - допустимое множество

2. $D_2 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

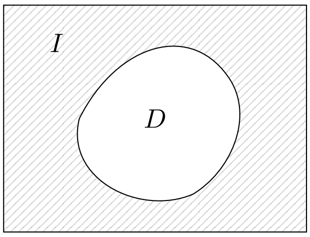
- ограничено - да
- $\partial D_2 = [0,1]$ - мн-во меры нуль - нет

D_2 - не допустимое множество

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$. Тогда, интегралом Римана f по D называется число $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = \int\limits_D f(\overline{x}) \mathrm{d}\overline{x} = \int\limits_{I \supset D} f \cdot \chi_D(\overline{x}) \mathrm{d}\overline{x}, \text{ где } \chi_D = \begin{cases} 1, \overline{x} \in D \\ 0, \overline{x} \notin D \end{cases}$$

Если $\mathcal{I} < \infty$, то $f \in \mathcal{R}(D)$



Закрашенная область не вносит вклад в объем
так как $f(x) \cdot \chi_D = 0$

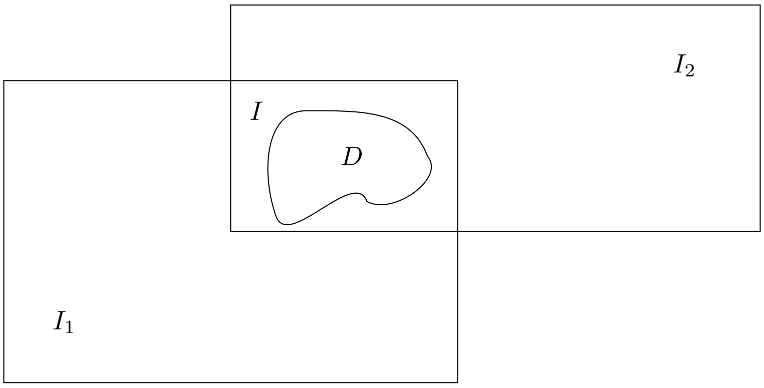
8 Лекция 8

8.1 Интегрирование по допустимым множествам(Продолжение)

Корректность определения допустимых множеств. Пусть $D \subset I_1 \subset \mathbb{R}^n, D \subset I_2 \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутые брусы, тогда

$$\int\limits_{I_1} f \cdot \chi_D \mathrm{d}x \text{ и } \int\limits_{I_2} f \cdot \chi_D \mathrm{d}x$$

либо существуют и равны, либо оба не существуют вообще



Как выглядят наши множества I_1, I_2, I, D

Доказательство. Введем $I = I_1 \cap I_2 \supset D$, I не пустое по построению. Покажем существование

- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \Longrightarrow$ по критерию Лебега $f \cdot \chi_D$ ограничена на $I_1 \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ ограничена на $D \Longrightarrow f$ ограничена на $D \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ ограничена на I_2
- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \Longrightarrow$ по критерию Лебега $f \cdot \chi_D$ непрерывна почти всюду на $I_1 \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ непрерынва почти всюду на $D \Longrightarrow$ в худшем случае для $f \cdot \chi_D$ на I_2 добавятся разрывы на $\partial D \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ непрерынва почти всюду на I_2
- Тогда, $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \Longleftrightarrow f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_2)$

Покажем равенство

- Пусть $\mathbb{T}_i$ — разбиение на $I_i : \mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$ совпадают на I
- Пусть ξ^i — отмеченные точки для $\mathbb{T}_i$
- $\sigma(f\chi_D,\mathbb{T}_1,\xi^1) = \sum\limits_j f\chi_D(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum\limits_j f(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum\limits_j f(\xi_j^2)|I_j^2| = \sum\limits_j f\chi_D(\xi_j^2)|I_j^2| = \sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_2, \xi^2)$

□

Примечание. Все свойства интеграла Римана и критерия Лебега для бруса справедливы и для других допустимых множеств

8.2 Теорема Фубини

Пусть имеются $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^m, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ — замкнутые брусы, $f : I_x \times I_y \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$ и $\forall$ фиксированного $x \in I_x \implies f(x,y) \in \mathcal{R}(I_y) \Longrightarrow$

$$\int\limits_{I_x \times I_y} f(\overline{x}, \overline{y}) \mathrm{d}\overline{x}\mathrm{d}\overline{y} = \int\limits_{I_x} \left(\int\limits_{I_y} f(\overline{x},\overline{y}) \mathrm{d}\overline{y} \right) \mathrm{d}\overline{x} = \int\limits_{I_x} \mathrm{d}\overline{x} \int\limits_{I_y} f(\overline{x}, \overline{y}) \mathrm{d}\overline{y}$$

Примечание. аналагочино, если взять для $\forall$ фиксированного $y \in I_y$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y),\ f \in \mathcal{R}(I_y)$, а также Критерием Дарбу

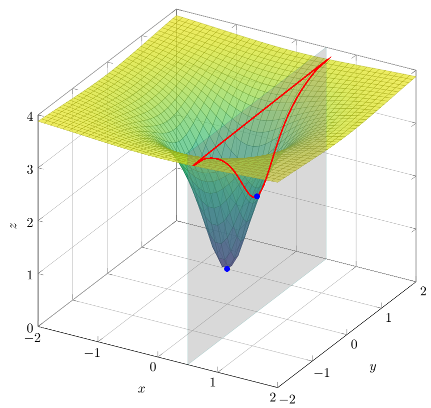
- $\mathbb{T}_x = \{I_i^x\}$ — разбиение на I_x, $\mathbb{T}_y = \{I_j^y\}$ — разбиение на I_y, $\mathbb{T}_{x,y} = \{I_i^x \times I_j^y\} = \{I_{ij}\}$ — разбиение на $I_x \times I_y$, и при этом верно $|I_i^x| \cdot |I_j^y| = |I_{ij}|$

- $$\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}_{x,y}) = \sum_{i,j} \inf_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y)|I_{ij}| \underset{\text{рис. ниже}}{\leqslant} \sum_{i,j} \inf_{x\in I_i^x} \left(\inf_{y\in I_j^y} f(x,y) \cdot |I_j^y| \right) |I_i^x| = \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left(\sum_j \inf_{I_j^y} f(x,y)|I_j^y| \right)}_{\underline{\mathrm{S}}(f(y),\mathbb{T}_y)} |I_i^x|$$
$$\leqslant \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left(\int\limits_{I_y} f(x,y)\mathrm{d}y \right)}_{g(x)} |I_i^x| \leqslant \underline{\mathrm{S}}(g(x),\mathbb{T}_x)$$
$$\leqslant \overline{\mathrm{S}}(g(x),\mathbb{T}_x)$$

$$\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}_{x,y}) \leqslant \underline{\mathrm{S}}(g(x),\mathbb{T}_x) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(g(x),\mathbb{T}_x) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}_{x,y}) \Longrightarrow \exists \overline{\mathcal{I}} = \lim_{\delta\to 0} \underline{\mathrm{S}}(g(x),\mathbb{T}_x) = \int\limits_{I_x\times I_y} f(\overline{x},\overline{y})\mathrm{d}\overline{x}\mathrm{d}\overline{y}$$

Примечание. Последний знак неравентсва, получен аналогичными действиями для длинного неравенства выше, просто развернув в обратную сторону знаки неравенства для sup

□



Если зафиксировать какой-то x и искать inf по y
то он всегда будет больше, чем inf на всей области

Пример. Случай, где нельзя интегрировать по т. Фубини
Возьмем следущую функцию

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{на} \quad [-1;1]\times[-1;1]$$

Она не интегрируема по Риману на данной области области, т.к. функция неограничена

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^4} = -\infty$$

Что будет, если мы не поверили и решили применить т. Фубине? Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,y)dy \right) dx$. Заметим следущее внесение под дифференциал

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Получаем, тогда

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \right) dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Теперь сошлемся на то что $f(x,y) = -f(y,x)$ и получим что $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,y)dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$

8.3 Теорема о замене переменных в кратном интеграле

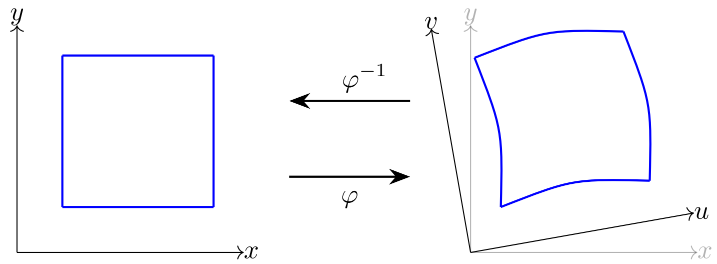
Теорема. *(Без доказательства)* Пусть имеется $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^n$ — открытые множества. $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ — биективно, φ, φ^{-1} — непрерывно дифференцируемые отображения
$D : \overline{D} \subset M_1$ — допустимое множество
$f : \varphi(D) \longrightarrow \mathbb{R}$
$f \in \mathcal{R}(\varphi(D)) \Longleftrightarrow f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi(t)| \in \mathcal{R}(D)$ и

$$\int\limits_{\varphi(D)} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_D f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi(t)|\mathrm{d}t, \text{ где } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

Примечание. $(x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow{\varphi} (t_1, \ldots, t_n)$, где $x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_n)$

Пример. Ранее мы переходили к полярным координатам так: $(x,y) \to (r,\varphi)$, при этом $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \cdot r \\ \sin\varphi & \cos\varphi \cdot r \end{pmatrix}$
$|J_{\varphi^{-1}}| = |J_\varphi|^{-1}$



Отображение допустимого множества в новые координаты