

אינטרפולציה לגראנז':

הקדמה:

- המטרה היא למצוא ערכי ביניים של פונקציה מתוך ערכים בדידים ידועים ומדויקים.
 - מתוך $N+1$ נקודות ידועות נתאים עקום $g(x)$ שעובר דרך הנקודות. העקום ימצא ע"י אינטרפולציה פולינומית.
- לאחר התאמת העקום ניתן למצוא את ערכי הביניים $f(y) \cong g(y)$ כאשר $g(y)$ הוא הפולינום/ הקירוב שמצאנו ו- $f(y)$ הוא הפונקציה האמיתית/ הערך שאנחנו מחפשים.

מתי:

- תוצאות ניסויים - ערכים בדידים ולא פונקציה מדויקת.
- פתרונות נומריים למשוואות דיפרנציאליות מצריכות אותנו להשתמש בשיטה זו.
- ערכים מטבלאות - אם נרצה לדעת ערך בין 2 ערכים ידועים וכדומה.

הסיבוכיות היא:

- נחשב את מספר הכפלים במונה $(x-a)(x-b)\dots(x-c)$ כאשר מחשבים את המקדמים.
 - עבור $(x-a)$ 0 כפלים.
 - עבור $(x-a)(x-b)$ יש כפל אחד.
 - עבור $(x-a)(x-b)(x-c)$ יש $1+2$ כפלים וכן הלאה, ולכן
 - עבור $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ יש $1+2+3+\dots+(n-1)=n(n-1)/2$ כפלים.
- את המונה יש לכפול במקדם שהוא מכפלה ומנה של $(n+1)$ גורמים, ובטוי זה יש לחלק בכל מקדמי המונה, ולכן יש עוד $2(n+1)$ כפלים או חלוקות, ובסך הכל, במחובר לגרנז אחד יש:
- $$n(n-1)/2 + 2(n+1) = [n(n-1) + 4(n+1)]/2 = [n^2 + 3n + 4]/2$$
- בכל הפולינום יש $(n+1)(n^2+3n+4)/2$ כפלים וחלוקות.

המקרה הכללי:

הפולינום: $p_N(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \dots + L_N(x)f(x_N) = \sum_{n=0}^N L_n(x)f(x_n)$

$$L_n(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq n}^N (x - x_i)}{\prod_{i=0, i \neq n}^N (x_n - x_i)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - x_{n+1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n+1})}$$

עבור 2 נקודות: $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$

כפלי לגרנז':

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

פולינום האיטרפולציה:

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

- הפולינום עובר דרך שתי הנקודות.

חסרון השיטה: בהתוסף נתון נוסף (נקודה נוספת) יש לבצע את החישוב מחדש.