## שיטת Jacobi

בשיטת Jacobi בוחרים את $Q = \operatorname{diag} A$. כלומר, מתקבל האלגוריתם הבא:

<u>$\text{Jacobi}(A, b, x^0)$</u>

1. for $n = 1, \dots, K$
   a. for $i = 1, \dots, N$
      i. $x_i^{n+1} = -\sum_{j \neq i} \frac{A_{ij}}{A_{ii}} x_j^n + \frac{b_i}{A_{ii}}$

באלגוריתם $K$ הוא מספר האיטרציות שנקבע מראש. אידיאלית, מוטב היה להפסיק כאשר התהליך מתכנס, אבל קשה לבחור מדד טוב להתכנסות. למשל, ניתן להמשיך באיטרציות כל עוד $\|Ax^n - b\| \geq \varepsilon$, אבל אם מדובר בווקטורים קטנים הנורמה הזאת יכולה להיות קטנה גם כאשר התהליך עוד לא התכנס. ובכל זאת, מאחר שאין משהו טוב יותר, זה המדד שנהוג להשתמש בו.

כל איטרציה באלגוריתם לוקחת $O(N^2)$ עבור מטריצות מלאות, אך אם המטריצה דלילה ניתן לרדת ל-$O(N)$. ואם מספר האיטרציות קטן ולא תלוי ב-$N$ אז אנחנו במצב טוב.

**<u>הגדרה</u>**: נאמר שמטריצה $A$ היא **דומיננטית אלכסונית** אם לכל $1 \leq i \leq N$ מתקיים $|A_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$.

**<u>משפט</u>**: שיטת Jacobi מתכנסת עבור מטריצות דומיננטיות אלכסונית ולכל ניחוש ראשוני בקצב $\|I - Q^{-1}A\|_\infty$.

היא בעלת אלכסון, $A$ אם מטריצה שולט לחלוטין אז התהליך האיטרטיבי של שיטת יעקובי יתכנס עבור כל בחירה של וקטור התחלתי.

אם נתבונן בסדרת הערכים האיטרטיביים המקורבים הרי שניתן להסיק כי התהליך מתכנס די מהר לפתרון המדויק.