ניוטון רפסון

שיטת ניוטון-רפסון (או כלל ניוטון) היא אלגוריתם יעיל באנליזה נומרית, למציאת שורשים של פונקציה ממשית כלשהי, דהיינו נקודות בהן הפונקציה מתאפסת. השיטה פותחה באופן בלתי תלוי בידי אייזק ניוטון וג'וזף רפסון

השיטה מבוססת על הרעיון הבא: בהינתן פונקציה שאת השורש שלה אנחנו מחפשים, ואנו מגבילים את עצמנו לתחום בו יש לפונקציה רק שורש אחד, אם נבחר נקודה קרובה לשורש, השורש של המשיק לפונקציה באותה נקודה יהיה קרוב יותר לשורש שאנו מחפשים. בכל איטרציה של הלולאה, יתקבל קירוב טוב יותר ויותר.

$$x1 = x0 - \frac{f(x0)}{f'(x0)}$$

סדר הפעולות בשיטת ניוטון רפסון הוא:

1. בחירת נקודה קרובה לשורש המבוקש.
2. חישוב שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה זו; זוהי הנגזרת של הפונקציה באותה נקודה.
3. חישב משוואת המשיק, באמצעות גאומטריה אנליטית.
4. מציאת שורש המשיק, כלומר הנקודה בה המשיק חותך את ציר ה-x.

אם בחירת הנקודה ההתחלתית הייתה טובה, הנקודה החדשה שהתקבלה קרובה יותר ממנה לשורש, ויש לחזור על התהליך עם הנקודה החדשה כנקודת ההתחלה. אם לא, הנקודה המתקבלת תחרוג מהתחום הנידון. תחת תנאים מסוימים ניתן להבטיח שהשיטה תעבוד היטב, גם עבור נקודות התחלתיות רחוקות מאוד מהשורש.

יתרונות של השיטה :

1. אין צורך לזכור 2 נקודות
2. ההתכנסות היא ריבועית P=2
3. אפשר להכליל להרבה מימדים.

חסרונות:

1. חישוב נגזרת עלול להיות קשה.
2. נגזרת עלולה להתאפס(לדוגמה בנק קיצון).

ניוטון רפסון

- יש ערך התחלתי
- x0 בהנחה ש x0 מספיק קרוב לשורש, השיטת תתכנס בצורה יותר יעילה מכל השיטות שהזכרנו
- סדר ההתכנסות הוא ריבועי, בניגוד לשיטות הקודמות שהן בסדר התכנסות לינארי. הכוונה היא שהאינטרוול קטן בקצב ריבועי.

הרעיון הוא להסתכל על, f (x0) ולהעביר משיק דרך הנקודה הזו. נקודת המפגש של המשיק הזה עם ציר ה x תהיה ה x0 החדשה(כלומר)x1

חישוב המשיק: נזכור ששיפוע המשיק הוא בעצם נגזרת:

$$\tan\theta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

כלומר

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ובאופן כללי

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

מימוש

evaluate $f(x_0), f'(x_0)$;
if $(f(x_0) \neq 0 \wedge f'(x_0) \neq 0)$ **then**

repeat

$x_1 = x_0$;

$x_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$;

until $|x_1 - x_0| < \text{Tol}_1$ **or** $|f(x_0)| < \text{Tol}_2$