

## שיטת נוויל

בהינתן  $n+1$  נקודות  $(x_i, y_i)$  כך שאין  $x_i$  זהים, האינטרפולציה הפולינום  $P$  ממעלה לכל היותר  $n$

בתחום  $p(x_i) = y_i$  לכל  $i = 0, \dots, n$ , הפולינום קיים והוא מיוחד.

האלגוריתם של נוויל מעריך את הפולינום בנקודה  $x$  מסוימת.

יהי  $p_{i,j}$  הפולינום ממעלה  $j-i$  כך שהוא עובר בנקודות  $(x_k, y_k)$  לכל  $k = i, i+1, \dots, j$ ,

$p_{i,j}$  מספק את היחס הרקורסיבי.

$$p_{i,i}(x) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)p_{i,j-1}(x) - (x - x_i)p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}, \quad 0 \leq i < j \leq n.$$

הרקורסיה יכולה לחשב את  $p_{0,n}(x)$  שהוא הערך הנדרש.

למשל עבור  $n=4$  ניתן להשתמש ברקורסיה על מנת למלא את המשולש משאל לימין:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & p_{0,0}(x) = y_0 \\
 & & & & & & p_{0,1}(x) \\
 & & & & & p_{1,1}(x) = y_1 & p_{0,2}(x) \\
 & & & & p_{1,2}(x) & & p_{0,3}(x) \\
 & & p_{2,2}(x) = y_2 & & p_{1,3}(x) & & \boxed{p_{0,4}(x)} \\
 & & & p_{2,3}(x) & & p_{1,4}(x) \\
 & p_{3,3}(x) = y_3 & & p_{2,4}(x) \\
 & & p_{3,4}(x) \\
 p_{4,4}(x) = y_4
 \end{array}$$

התהליך נותן בסופו של דבר את  $p_{0,4}(x)$  ערך הפולינום עבור  $n+1$  נקודות  $(x_i, y_i)$  בנקודה  $x$ .

את נגזרת הפולינום ניתן להשיג באותו אופן:

$$p'_{i,i}(x) = 0, \quad 0 \leq i \leq n,$$

$$p'_{i,j}(x) = \frac{(x_j - x)p'_{i,j-1}(x) - p'_{i,j-1}(x) + (x - x_i)p'_{i+1,j}(x) + p'_{i+1,j}(x)}{x_j - x_i}, \quad 0 \leq i < j \leq n.$$

דוגמת הרצה:

נסתכל על הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  כך ששווה ל 81.

נשתמש בנקודות הבאות:  $x_0 = 16, x_1 = 64, x_2 = 100$ .

התשובות המתקבלות:  $f(x_0) = f(16) = \frac{1}{4} = .25$

$f(x_1) = f(64) = \frac{1}{8} = .125$  ;

$f(x_2) = f(100) = \frac{1}{10} = .1$ .

לפי אלגוריתם נוויל נקבל:  $P_{0,0}(81) = f(x_0) = .25$

$P_{1,1}(81) = f(x_1) = .125$

$P_{2,2}(81) = f(x_2) = .1$ .

$$\begin{aligned} P_{0,1}(81) &= \frac{(x_1 - x)P_{0,0}(x) + (x - x_0)P_{1,1}(x)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{(64 - 81)(.25) + (81 - 16)(.125)}{64 - 16} \\ &= \frac{-4.25 + .8.125}{48} \\ &\approx .080729 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1,2}(81) &= \frac{(x_2 - x)P_{1,1}(x) + (x - x_1)P_{2,2}(x)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(100 - 81)(.125) + (81 - 64)(.1)}{100 - 64} \\ &= \frac{2.375 + 1.7}{36} \\ &\approx .113194. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{0,2}(81) &= \frac{(x_2 - x)P_{0,1}(x) + (x - x_0)P_{1,2}(x)}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{(100 - 81)(.080729) + (81 - 16)(.113194)}{100 - 16} \\ &= \frac{1.533851 + 7.35761}{84} \\ &\approx .105851. \end{aligned}$$

מחברים את כל השיטות לפי הדרגות שלהן עד שמקבלים בסופו של דבר את התוצאה בדוגמא: 0.00526