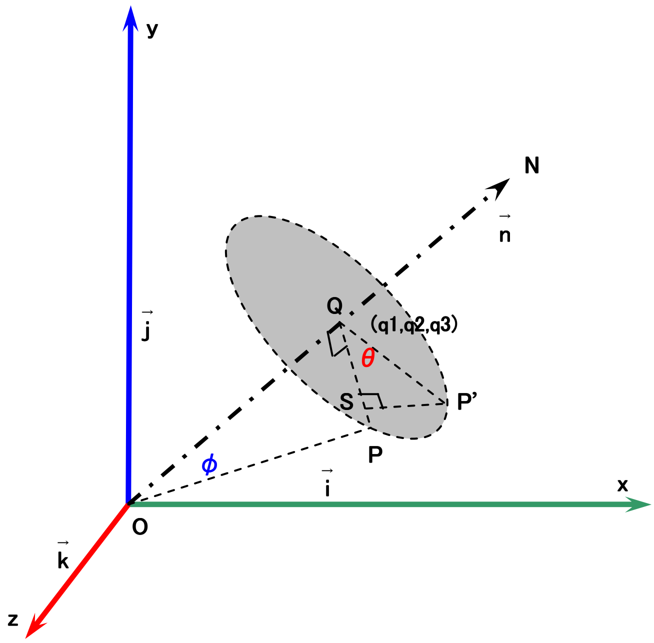
任意軸回りの三次元回転

図 A の点 P を、軸 N の回りに角度 θ だけ回転させて、点 P’ へ移動する。

【図 A】



線分 QP ＝ 線分 QP’ であり、軸 N に対して、共に垂直である。

点 P’ より、線分 QP に垂線を降ろして、その交点を S とする。

ベクトル$\vec{OQ}$ とベクトル$\vec{OP}$ のなす角度を ϕ とする。

上記より、座標 P’ を、座標 P と回転角 θ 、および 回転軸 N の方向を表す単位ベクトル$\vec{n}$ で表現する式を求める。

ベクトル$\vec{OQ}$ ＝ q1$\vec{i}$ ＋ q2$\vec{j}$ ＋ q3$\vec{k}$ が与えられる場合、単位ベクトル$\vec{n}$ は、次により求められる。

なお、ベクトルの大きさ｜$\vec{OQ}$｜は、ベクトル$\vec{OQ}$ の絶対値である。

また、$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ は、それぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{OQ}}{\left|\overrightarrow{OQ}\right|}$$

$$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2}$$

$$n_1 = \frac{q_1}{\sqrt{q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2}}$$

$$n_2 = \frac{q_2}{\sqrt{q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2}}$$

$$n_3 = \frac{q_3}{\sqrt{q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2}}$$

$$\vec{n} = n_1\vec{i} + n_2\vec{j} + n_3\vec{k} = [n_1, n_2, n_3]$$

それでは、順を追って、具体的な式の展開を行う。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP'}$$
$$\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{SP'}$$

ベクトル$\overrightarrow{QS}$ の大きさは、$|\overrightarrow{QS}| = |\overrightarrow{QP'}|\cos\theta = |\overrightarrow{QP}|\cos\theta$ であり、その方向は、ベクトル$\overrightarrow{QP}$ と同じである。
したがって、ベクトル$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QP}\cos\theta$ である。

$$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QP}\cos\theta$$
$$\therefore \overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{QP}\cos\theta + \overrightarrow{SP'}$$
$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$$
$$\therefore \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} + \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right)\cos\theta + \overrightarrow{SP'}$$
$$\left|\overrightarrow{SP'}\right| = \left|\overrightarrow{QP'}\right|\sin\theta = \left|QP\right|\sin\theta = \left|\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right)\right|\sin\theta$$

ベクトル$\overrightarrow{SP'}$ の方向は、平面 PQN に垂直であり、ベクトル$\vec{n} \times \overrightarrow{OP}$（外積）の方向と同じである。
その外積の大きさは、$|\vec{n} \times \overrightarrow{OP}| = |\vec{n}|\,|\overrightarrow{OP}|\sin\phi$ であり、その方向の単位ベクトル$\vec{u}$ は、次である。

$$\vec{u} = \frac{\vec{n}\times\overrightarrow{OP}}{\left|\vec{n}\times\overrightarrow{OP}\right|} = \frac{\vec{n}\times\overrightarrow{OP}}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\phi} = \frac{\vec{n}\times\overrightarrow{OP}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\phi}$$

この単位ベクトル$\vec{u}$ より、ベクトル$\overrightarrow{SP'}$ は、次となる。

$$\overrightarrow{SP'} = \vec{u}\left|\overrightarrow{SP'}\right|$$
$$\therefore \overrightarrow{SP'} = \frac{\vec{n}\times\overrightarrow{OP}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\phi}\left|\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right)\right|\sin\theta$$
$$\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\phi = \left|\overrightarrow{QP}\right| = \left|\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right)\right|$$
$$\therefore \overrightarrow{SP'} = \frac{\vec{n}\times\overrightarrow{OP}}{\left|\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right)\right|}\left|\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right)\right|\sin\theta = \left(\vec{n}\times\overrightarrow{OP}\right)\sin\theta$$

以上より、ベクトル$\overrightarrow{OP'}$ は、次となる。

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} + \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right)\cos\theta + \left(\vec{n}\times\overrightarrow{OP}\right)\sin\theta$$
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OQ}\cos\theta + \overrightarrow{OP}\cos\theta + \left(\vec{n}\times\overrightarrow{OP}\right)\sin\theta$$
$$\therefore \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ}\left(1-\cos\theta\right) + \overrightarrow{OP}\cos\theta + \left(\vec{n}\times\overrightarrow{OP}\right)\sin\theta$$

さらに、ベクトル$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}$（内積）より、ベクトル$\overrightarrow{OP'}$ は、次となる。

$$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n} = \left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\vec{n}\right|\cos\phi = \left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\phi = \left|\overrightarrow{OQ}\right|$$
$$\therefore \overrightarrow{OQ} = \left|\overrightarrow{OQ}\right|\vec{n} = \left(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}$$
$$\therefore \overrightarrow{OP'} = \left\{\left(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}\right\}\left(1-\cos\theta\right) + \overrightarrow{OP}\cos\theta + \left(\vec{n}\times\overrightarrow{OP}\right)\sin\theta$$

上記が座標 P' を求める式であり、これを行列で表現する。

$$\overrightarrow{OP'} = \left\{ \left([x, y, z] \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \right) [n_1, n_2, n_3] \right\} (1 - \cos\theta) + [x, y, z] \cos\theta + \left([x, y, z] \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix} \right) \sin\theta$$

$$= [x, y, z] \left\{ \begin{bmatrix} {n_1}^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & {n_2}^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & {n_3}^2 \end{bmatrix} (1 - \cos\theta) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cos\theta + \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix} \sin\theta \right\}$$

上式で、ベクトル $\overrightarrow{OP}$ ＝ ［ x, y, z, 1 ］として、大括弧{}内を、4 × 4 の行列に変更すれば、その行列[R] は、次になる。

$$[R] = \begin{bmatrix} {n_1}^2 + (1 - {n_1}^2)\cos\theta & n_1 n_2 (1 - \cos\theta) + n_3 \sin\theta & n_1 n_3 (1 - \cos\theta) - n_2 \sin\theta & 0 \\ n_1 n_2 (1 - \cos\theta) - n_3 \sin\theta & {n_2}^2 + (1 - {n_2}^2)\cos\theta & n_2 n_3 (1 - \cos\theta) + n_1 \sin\theta & 0 \\ n_1 n_3 (1 - \cos\theta) + n_2 \sin\theta & n_2 n_3 (1 - \cos\theta) - n_1 \sin\theta & {n_3}^2 + (1 - {n_3}^2)\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上記より、座標 P' は、次により求められる。

$$\overrightarrow{OP'} = [x, y, z, 1][R]$$

以上