

ロジスティック方程式とロジスティック写像

B4 4515054 島 里実

2018 年 5 月 8 日

1 ロジスティック方程式

システムの制御とは別に生物システムや社会システムでは、偏差を拡大する正のフィードバックが存在する。今回は、人口増加の例を用いて考える。

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (1)$$

N : 人口量, r : 自然増加率 とする。 r が正のとき、正のフィードバックとなる。初期では人口は指数関数的に増加するが、実際は食料や住居などの制約によって増加率は人口増加とともに減少し、人口は一定値に漸近する。これをモデル化したものをロジスティック方程式という。以下に、ロジスティック方程式を載せる。

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2)$$

K : その環境条件での最大許容人口量 である。この式に伴う増殖をロジスティック増殖という。この式の解析解は以下の通りとなる。

$$N = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}} \quad (3)$$

この解析解は以下の図のようにシグモイド曲線という S 字カーブを描く。

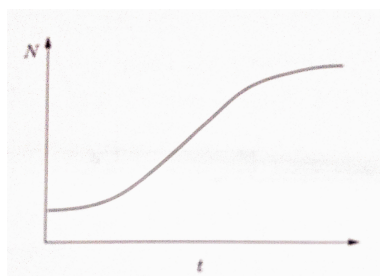


図 1 シグモイド曲線

2 ロジスティック写像

ロジスティック写像とは、個体数の増減のダイナミクスを議論するために導かれた、ロジスティック方程式をオイラ差分することで得られる差分方程式である。以下、ロジスティック写像を導出する。

離散時間でのロジスティック増殖を考えるため、第 t 世代での個体数を $N(t)$ とする。よって、オイラー前進差分により以下のように置き換えられる。

$$N(t+1) - N(t) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (4)$$

ここで変数変換を行う。

$$x(t) = \frac{r}{1+r} \frac{N(t)}{K}, \quad a = 1+r \quad (5)$$

以下のような 1 次元写像が得られ、これをロジスティック写像という。

$$x(t+1) = f(x(t)) = ax(t)(1-x(t)) \quad (0 \leq x(t) \leq 1) \quad (6)$$

a はパラメータである。 $0 \leq x(t) \leq 1$ となるために、 $0 < a \leq 4$ でなければならない。このとき、 t は写像の回数と捉えられる。

3 ロジスティック写像の時系列データ

以下に、ロジスティック写像の a の値を変化させたときの $x(t)$ の時間変化を載せる。

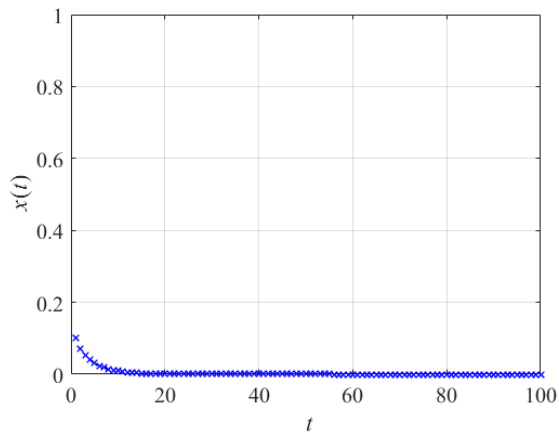


図2 $a = 0.8$

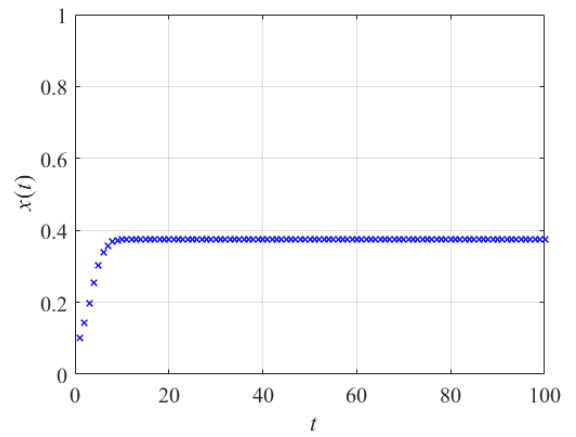


図3 $a = 1.6$

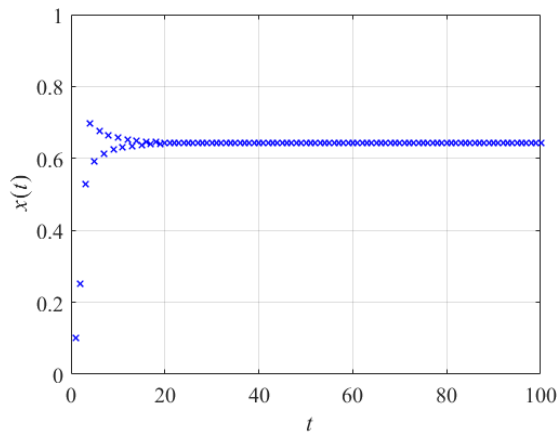


図4 $a = 2.8$

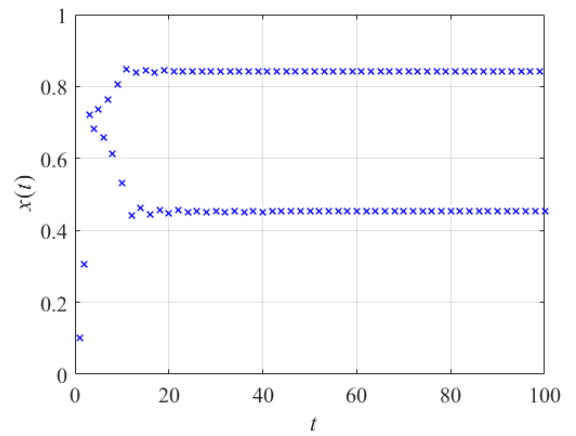


図5 $a = 3.4$

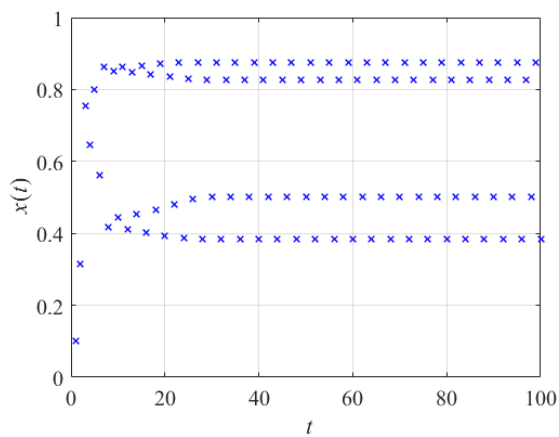


図6 $a = 3.5$

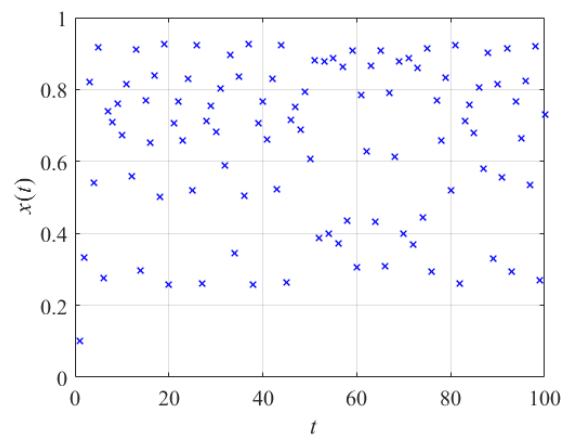


図7 $a = 3.7$

4 ロジスティック写像の分岐図

周期倍分岐とはロジスティック写像でみられる, 典型的な遷移で, 不動点から 2 周期軌道, 4 周期軌道, 8 周期軌道を経てカオスに至る分岐である.

連続な関数 $f(x)$ において, $n \geq 1$ に対して f を n 回作用させた合成写像を f^n とする. 力学系の解析で重要な概念に不動点及び周期点がある. $f(p) = p$ となるとき, p は不動点である. 特に, $f^n(p) = p$ かつ $f^{n+1}(p) \neq p$ のとき p を n 周期点 (周期軌道) と呼ぶ.

次に, 不動点の安定性を考える. 不動点近傍にある初期値から出発した軌道が不動点に収束するか, それとも遠ざかるかは以下の不動点の安定性により決まる.

1. $|f'(p)| \leq 1$ のとき p は安定, 吸引不動点
2. $|f'(p)| \geq 1$ のとき p は不安定, 反発不動点

n 周期点に関する安定性は f^n を用いる. f のパラメータ値によって, 不動点, 周期解, カオスなどが現れる. 以下, ロジスティック写像で現れる周期倍分岐を安定性原理を考える. 以下に, a における x の最大値と最小値をプロットしたロジスティック写像の分岐図を載せる.

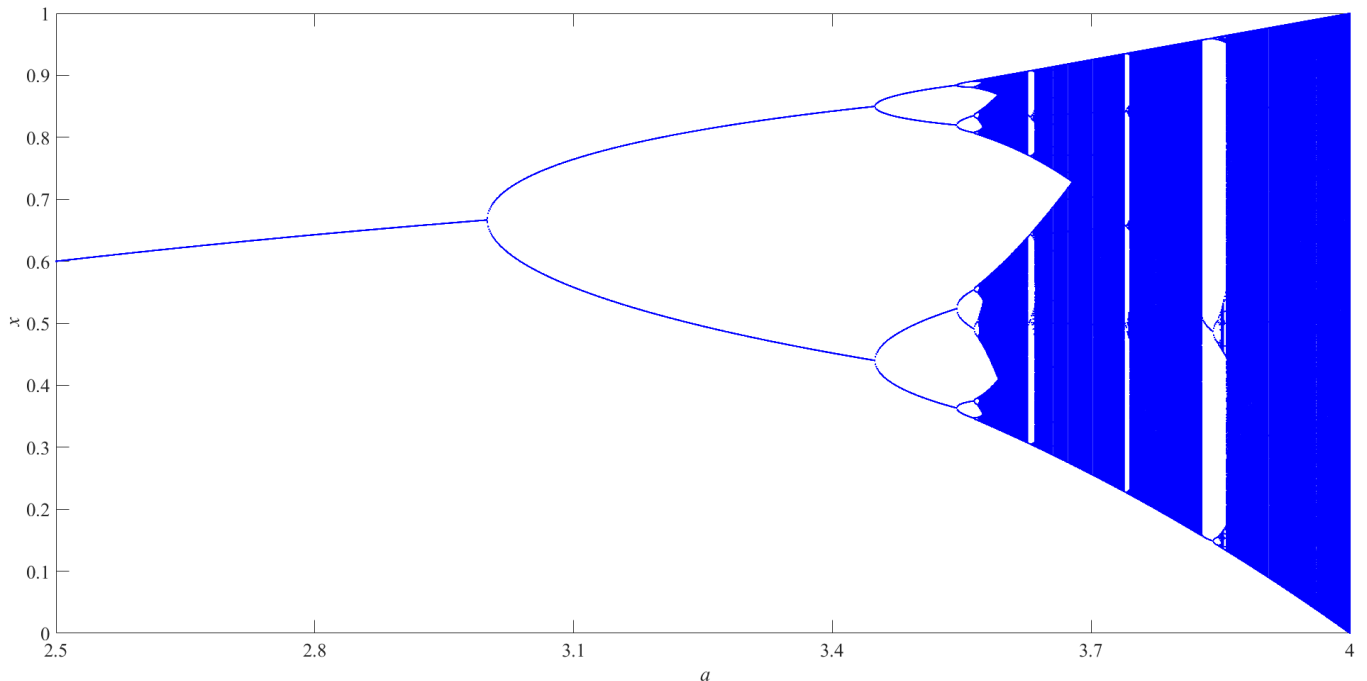


図 8 ロジスティック写像の分岐図

ロジスティック写像の f の不動点は

$$ap(1-p) = p \quad (7)$$

の根として, $p = 0, 1 - 1/a$ が求まる. また, $f'(p) = a(1-2p)$ から, $f'(0) = a, f'(1 - 1/a) = 2 - a$ を得る. したがって,

- 1). $0 < a \leq 1$ のとき $p = 0$ は吸引不動点, $p = 1 - 1/a$ は反発不動点 (図 1)
- 2). $1 < a \leq 3$ のとき $p = 0$ は反発不動点, $p = 1 - 1/a$ は吸引不動点 (図 2,3)

と分類される. a を 3 より大きくすると, 両不動点はともに不安定になる. 次に, 周期が 2 の解を求めると以下のような. 2 周期解は, $f^2(p) = p$ つまり,

$$a^2 p(1-p)(1-ap(1-p)) = p \quad (8)$$

の根として $p_1, p_2 = 1/2 + 1/(2a) \mp \sqrt{(a-3)(a+1)}/(2a)$ が求まる. $(f^2(p_1))' = (f^2(p_2))'$ から

- 3). $3 < a \leq 1 + \sqrt{6}$ のとき 安定な 2 周期で, $p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2$ を繰り返す (図 4)
- 4). $1 + \sqrt{6} \leq a < 3.5699456$ のとき 4 周期, 8 周期など安定した解が順に現れる (図 5)

このように, 2 周期軌道が不安定になり, 安定な 4 周期軌道が現れる. このような分岐が周期倍分岐である.

5). $3.5699456 \leq a$ のとき 周期が無限になり, カオスが現れる (図 6)

以上のように, カオスが現れ始める分岐点 $a^* = 3.5699456\cdots$ は臨界点と呼ばれ, 周期倍分岐の集積点で, 周期が無限の周期解が現れる. $a < a^*$ は周期倍分岐で特徴づけられ, $a = a^*$ でカオスが始まる. カオス領域内に周期軌道が存在するパラメータ領域がいくつも存在する. この領域を窓と呼ぶ. $a = 1 + 2\sqrt{2}$ で最大の窓である 3 周期現れる. この窓の中においても周期倍分岐が見られる.

参考文献

- [1] 松葉育雄 (2004) 『複雑系の数理』 朝倉書店
- [2] 合原一幸 (2000) 『カオス時系列解析の基礎と応用』 産業図書株式会社