

# 研究会第3回

B4 福田真悟

2020.5.26

## 1 進捗状況

論文講読「Analysis of chaotic saddles in high-dimensional dynamical systems: The Kuramoto-Sivashinsky equation」 [1]

論文講読「FOURTH-ORDER TIME-STEPPING FOR STIFF PDEs」 [2]

KS方程式のReservoir computingでの予測の改善

KS方程式のパラメータを変更したときのReservoir computingでの予測

## 2 1D gKS方程式のガラーキンスペクトル法を適用

1D gKS方程式について数値解析を行う．ガラーキンスペクトル法と4次元ルンゲクッタ法を用いる．まず1D gKS方程式を下記に示す．

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\end{aligned}\tag{1}$$

このときの $u(x, t)$ に対して，下記の周期的な境界条件を満たす．

$$u(x, t) = u(x + 2N, t)\tag{2}$$

関数 $u(x, t)$ を $x$ で複素フーリエ級数展開を行うものを下記に示す．

$$u(x, t) = \sum_{m=-N}^N \hat{u}_m(t) e^{im \frac{\pi}{N} x}\tag{3a}$$

$$\hat{u}_m(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x=-N}^N u(x, t) e^{-im \frac{\pi}{N} x}\tag{3b}$$

$$u^2(x, t) = \sum_{m=-N}^N \hat{u}^2_m(t) e^{im \frac{\pi}{N} x} \left( \hat{u}^2_m(t) \neq \hat{u}_m(t) \cdot \hat{u}_m(t) \right)\tag{3c}$$

$$\hat{u}^2_m(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x=-N}^N u^2(x, t) e^{-im \frac{\pi}{N} x}\tag{3d}$$

$$\tag{3e}$$

ここでの $N$ は $x$ 方向のデータ点数,  $\hat{u}(t)$ はフーリエ係数である. この式(3a)を式(1)に代入いたものを下記に示す.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-N}^N \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial t} e^{im \frac{\pi}{N} x} &= -\frac{1}{2} \sum_{m=-N}^N im \frac{\pi}{N} \hat{u}_m^2(t) e^{im \frac{\pi}{N} x} + \sum_{m=-N}^N \left(m \frac{\pi}{N}\right)^2 \hat{u}_m(t) e^{im \frac{\pi}{N} x} \\
&\quad + \delta \sum_{m=-N}^N i \left(m \frac{\pi}{N}\right)^3 \hat{u}_m(t) e^{im \frac{\pi}{N} x} - \nu \sum_{m=-N}^N \left(m \frac{\pi}{N}\right)^4 \hat{u}_m(t) e^{im \frac{\pi}{N} x} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{m=-N}^N im \frac{\pi}{N} \hat{u}_m^2(t) e^{im \frac{\pi}{N} x} \\
&\quad + \sum_{m=-N}^N \left[ \left(m \frac{\pi}{N}\right)^2 + \delta i \left(m \frac{\pi}{N}\right)^3 - \nu \left(m \frac{\pi}{N}\right)^4 \right] \hat{u}_m(t) e^{im \frac{\pi}{N} x}
\end{aligned} \tag{4}$$

この式を三角関数の直交性を用いて, 逆フーリエ変換を行う. 両辺に $e^{-il \frac{\pi}{N} x}$ をかけたものを下記に示す.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-N}^N \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial t} e^{i(m-l) \frac{\pi}{N} x} &= -\frac{1}{2} \sum_{m=-N}^N im \frac{\pi}{N} \hat{u}_m^2(t) e^{i(m-l) \frac{\pi}{N} x} \\
&\quad + \sum_{m=-N}^N \left[ \left(m \frac{\pi}{N}\right)^2 + \delta i \left(m \frac{\pi}{N}\right)^3 - \nu \left(m \frac{\pi}{N}\right)^4 \right] \hat{u}_m(t) e^{i(m-l) \frac{\pi}{N} x}
\end{aligned} \tag{5}$$

この式を $x$ を $-N \sim N$ で総和をとる.

### 3 KS方程式のReservoir computingでの予測

今回で用いた方程式は1D gKS方程式である．まず1D gKS方程式を下記に示す．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (6)$$

今回のKS方程式でのパラメータを下記にまとめる．

KS方程式導出のパラメータ

システムサイズ  $L = -100 \sim 100$ ，刻み幅  $dx = 0.2$ ，刻み時間  $dt = 0.1$ ，時間  $t = 0 \sim 10000$ ， $\delta = 0$ ， $\nu = 1.0$

次にスペクトル法によって導出されたKS方程式の解の最大値と最小値をそれぞれを  $u_{max}, u_{min}$  とし， $-1 \sim 1$  となるように入力正規化を行う．正規化された  $u_{normal}$  の導出方法を下記に示す．

$$u_{normal} = 2 \left( \frac{u - u_{min}}{u_{max} - u_{min}} - 0.5 \right) \quad (7)$$

RCへと入力値を下記にまとめる．

入力されるKS方程式

刻み幅  $dx = 1$  ごとに並んだ入力値を用いる．

時間  $dt = 0.1$  後を予測を行う．

入力値は  $-1 \sim 1$  に正規化された値を用いる．

最後にRCのパラメータを下記にまとめる．

RCのパラメータ

学習回数97001回，初期のダイナミクスを除去するために最初の1000回は無視する． ( $t = 0 \sim 100$ )

出力回数1000回，入力層の数201個 ( $L = -100 \sim 100$ )，出力層の数201個，中間層の数5000個

記憶力  $\alpha = 1.0$

入力層の重み  $W_{in}$  は， $-0.00258 \sim 0.00258$  の一様分布

中間層の重み  $W_{res}$  は， $-0.000536 \sim 0.000536$  の一様分布

以上のパラメータを用いて予測を行う．元の時系列データの  $dt = 0.1$  刻みで  $t = 0 \sim 50$  までの時空構造，RCで予測した出力の500回の時空構造，その2つの絶対誤差の時空構造の3つを下記に示す．

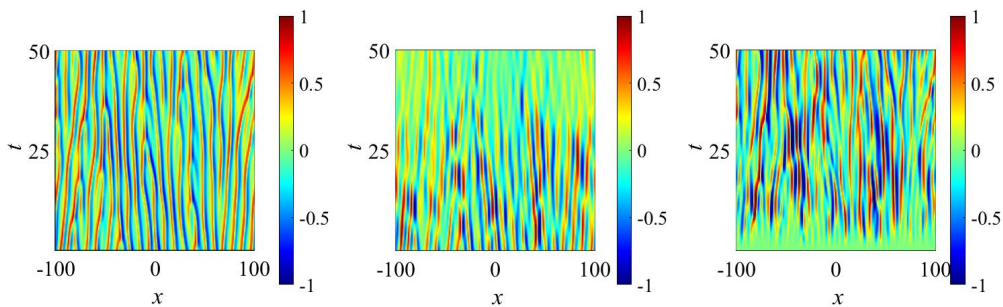


図1 実際のKS方程式の時空構造(左図)，RCで予測した時空構造(中央図)，2つの絶対誤差の時空構造(右図)

この結果から時系列の50点( $t = 0 \sim 5$ )程度までは予測ができていることがわかる。また、RCの予測結果は時間が経過するにつれて減衰してしまっていることがわかる。次に各位置における局所的な予測がうまくいっているのか確認するために、 $L$ の25刻みでの時間変化での元の時系列データとRCでの予測結果を示す。

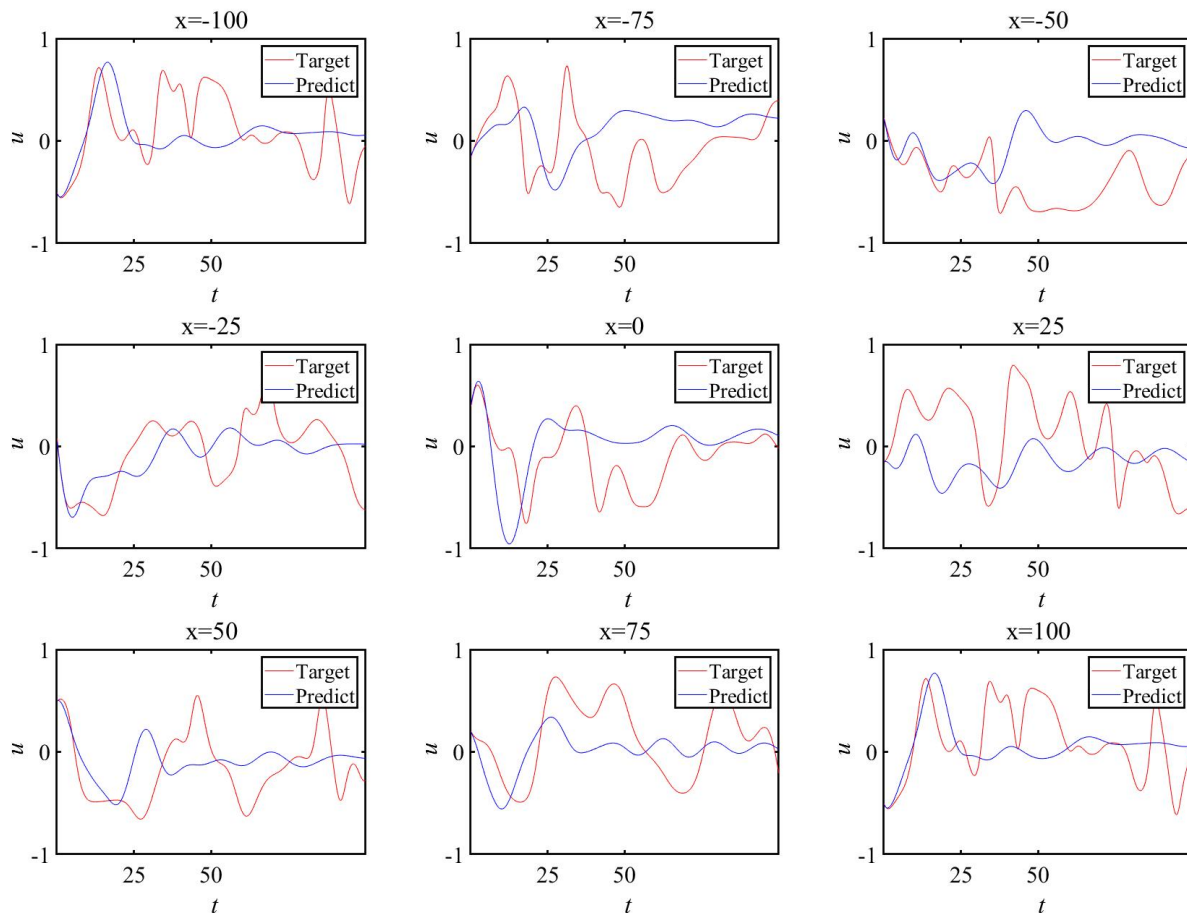


図2  $x$ の25刻みごとの元の時系列と予測結果

この結果からうまく予測できている位置とうまく予測できていない位置があることがわかる。予測がうまくいっている位置では、 $t = 0 \sim 20$ の200点程度までは予測できていることがわかる。

以上の結果から今後の課題として、より予測がうまくいくように学習数や中間層を大きくし予測の精度を上げる、 $W_{in}$ ,  $W_{out}$ の分布や値の範囲を変える、入力値の刻み幅、時間を変える、減衰してしまうことから $W_{out}$ の行列の固有値が1より小さいことが考えられるので正方行列以外で固有値を求める方法を考え、実行する、入力値を最適な時間遅れさせた複数の値にするなどを行う必要がある。

## 4 今後の予定

火炎のKS方程式の導出

or

スペクトル法

RCの改善

## 参考文献

- [1] Erico L. Rempel, Abraham C.-L. Chian, Elbert E. N. Macau, and Reinaldo R. Rosa, "Analysis of chaotic saddles in high-dimensional dynamical systems: The Kuramoto-Sivashinsky equation", Chaos 14, 545 (2004).
- [2] Aly-Khan Kassam, and Lloyd N. Trefethen, "FOURTH-ORDER TIME-STEPPING FOR STIFF PDEs", SIAM J. SCI. COMPUT. Vol. 26, No. 4, pp.1214~1233(2005).