

春期課題

新B4 福田真悟

2020.3.3

- 1 "Lorenz 方程式", "Rossler 方程式", "ホワイトガウスノイズ", "Logistic 写像", "順列エントロピー", "相互情報量", "複雑ネットワーク"について書籍やインターネットで調べる

- Lorenz 方程式

カオス的なふるまいを示す非線形微分方程式の1つで

$$\frac{dx}{dt} = -px + py \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (3)$$

で表現される [1]. 変数は (x, y, z, t) , 定数は (p, r, b) である. 初期値鋭敏性から初期値によって, それ以降の結果が大きく変化してしまう. そのため初期値の精度には無限大の精度が必要となり, 予測が事実上不可能となっている.

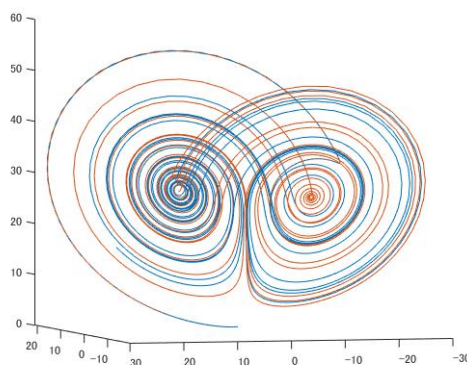


図1 Lorenz方程式の誤差の増幅

図 1は初期値の1つを0.1変化させたときの解の変化である.

- Rossler 方程式

カオス的なふるまいを示す非線形微分方程式の1つで

$$\frac{dx}{dt} = -y - z \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay \quad (5)$$

$$\frac{dz}{dt} = b + xz - cz \quad (6)$$

で表現される [2] . 変数は (x, y, z, t) , 定数は (a, b, c) である. Lorenz 方程式と違い, カオスの挙動を把握するために単純化された方程式であり, 実際の物理モデルがベースではない. Lorenz 方程式と同様に初期値鋭敏性から初期値によって, それ以降の結果が大きく変化してしまう. そのため初期値の精度には無限大の精度が必要となり, 予測が事実上不可能となっている.

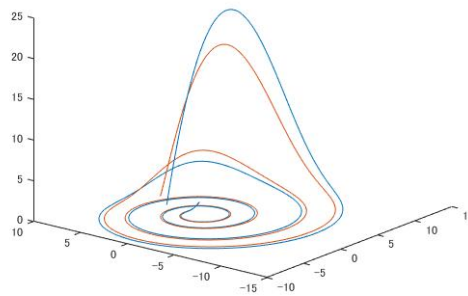


図2 Rossler方程式の誤差の増幅

図 2は初期値の1つを0.1変化させたときの解の変化である.

- ホワイトガウスノイズ

自然界などのランダム過程の効果をモデル化したもの. ホワイトは周波数帯域が均一であることを示している. 光の白色から由来している. ガウスは自然界のものはガウス分布に従うという仮定をもとにノイズもガウス分布となっていることを示している. 波形の周波数は均一にすべての周波数で, 波形の振幅はガウス分布に従う振幅となっていると仮定したノイズ. モデル化されたノイズのためホワイトガウスノイズサンプルの生成を行う関数が作られている [3] .

- Logistic 写像

Logistic方程式を離散化することで得られる漸化式である.

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (7)$$

で表現される [4] . 定数 a によって, 値の変化が大きく変わる. a が十分に小さいときは0に収束し, 値が大きくなるにつれて, 収束値が大きくなり, 周期的な振動を示し, 最終的にカオス的な挙動を示す. a ごときの x の値の変化を下記に示す.

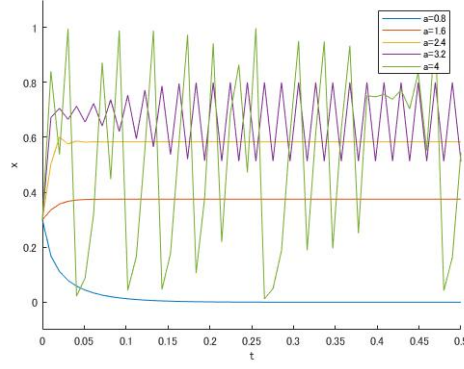


図3 a の変化によるLogistic写像の値の変化

- 順列エントロピー

時系列の乱雑さを定量評価する指標であり，時系列の値ではなく， 大小を比較する手法である．長さが L の時系列に対して遅れ時間 τ の間隔があるデータ D 個を D 次元の遅れ時間座標 $\mathbf{X}_j = \{x_j, x_{j+\tau}, \dots, x_{j+(D-1)\tau}\}$ とし，この座標を考える．ただし， $j = 1, 2, \dots, L - (D - 1)\tau$ とする．この D 次元の座標のそれぞれの値の大小をパターン化すると $D!$ 個のランクオーダーパターンに分類される．あるランクオーダーパターン π_i の相対度数 $p(\pi_i)$ は，

$$p(\pi_i) = \frac{\sum_{j=1}^N \chi_i(X_j)}{L - (D - 1)\tau} \quad (8)$$

$\chi_i(X_j)$ は指示関数であり，

$$\chi_i(X_j) = \begin{cases} 1 & (\pi_j = \pi_i) \\ 0 & (\pi_j \neq \pi_i) \end{cases} \quad (9)$$

となる．そしてこの相対度数の情報エントロピー(Shannonエントロピー)で計算したものが順列エントロピーである．さらに定量的に様々な時系列を比較するために正規化を行ったものを順列エントロピーと定義する．その式を下記に示す．

$$H_p = \frac{-\sum_{i=1}^{D!} p(\pi_i) \log_2 p(\pi_i)}{\log_2 D!} \quad (10)$$

- 相互情報量

2つの情報源 X, Y からそれぞれから情報 x, y を得られる確率を $P_X(x), P_Y(y)$ とし，同時に得られる確率を $P_{X,Y}(x, y)$ とすると

- 複雑ネットワーク

私は

2 相互情報量とLorenz 方程式に関するMATLAB ファイル(mutual.m) を実行し，図を出力する

出力された結果を下記に示す.

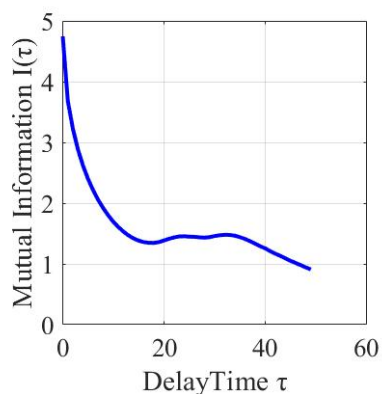


図4 課題2の出力結果

3 ホワイトガウスノイズと順列エントロピーに関するMATLABファイル(B4kadai_2020.m)を実行し，図を出力し考察を加える.

まず出力された結果を下記に示す.

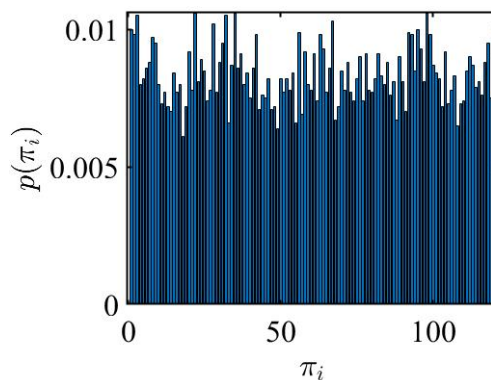


図5 課題3の出力結果

参考文献

- [1] ローレンツ方程式, http://www.isc.meiji.ac.jp/~random/lecture/2015-comp2/Lorentz_equ.html
- [2] カオス・フラクタル 講義ノート #8, <https://ocw.hokudai.ac.jp/wp-content/uploads/2016/01/ChaosFractal-2011-Note-08.pdf>
- [3] ホワイトガウスノイズサンプルの生成-MATLAB wgn, <https://jp.mathworks.com/help/comm/ref/wgn.html>

- [4] ロジスティック写像の時系列 - 工学院大学, <https://brain.cc.kogakuin.ac.jp/~kanamaru/Chaos/Logits/>
- [5] 情報量とエントロピー - 導出と性質, https://whyitssso.net/math/statistics/information_entropy.html