順列エントロピーの説明

2019 年 2 月 28 日

1　順列エントロピー

順列エントロピーとは，C.Bandt and B. Pompe [1] によって考案された，時系列の乱雑さを定量評価する指標であり，時系列の値そのものではなく，値の間の大小関係のみに注目し，時系列の特徴量を計算する手法である．

時系列 $x(t)$ を，D 次元の遅れ時間座標系 $\mathbf{X}_j = \left\{x_j, x_{j+\tau}, ..., x_{j+(D-1)\tau}\right\}$ に埋め込む．ただし，$j = 1, 2, ..., L-(D-1)\tau$ とし，L は時系列の長さ，D は埋め込み次元，τ は遅れ時間とする．

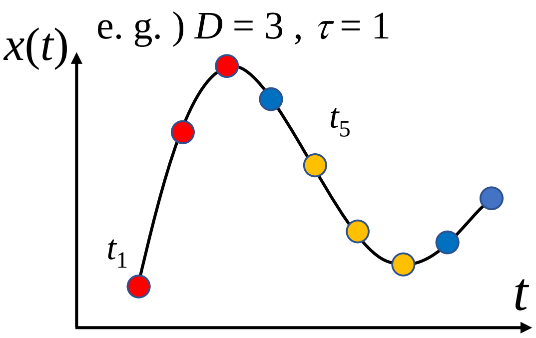

図 1 時系列 $x(t)$

次元 D 個分の点に着目し，それらの値の大小関係を比較する．ランクオーダーパターンは，$D!$ 個のいずれかのランクオーダーパターンに分類される．

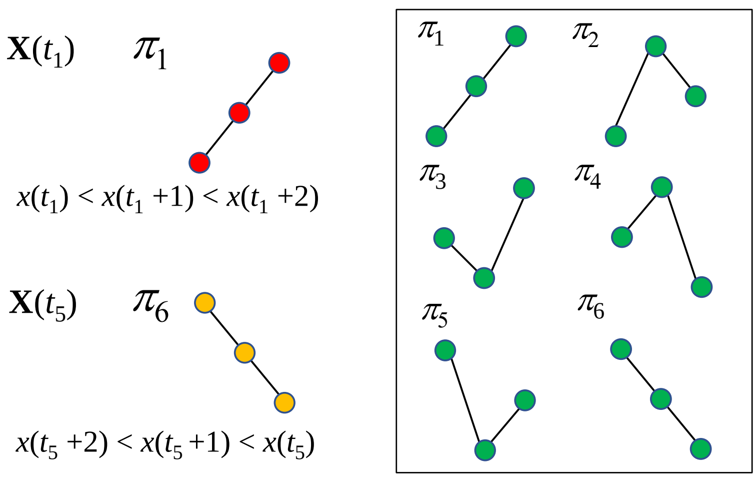

図 2 ランクオーダーパターン

あるランクオーダーパターン π_i の相対度数 $p(\pi_i)$ は，以下のように示される．

$$p(\pi_i) = \frac{\sum_{j=1}^{N} \chi_i(X_j)}{L - (D-1)\tau} \tag{1}$$

$\chi_i(X_j)$ は指示関数であり，以下のように示される．

$$\chi_i(X_j) = \begin{cases} 1, \text{if } \pi_\mathrm{j} = \pi_\mathrm{i} \\ 0, \text{if } \pi_\mathrm{j} \neq \pi_\mathrm{i} \end{cases} \tag{2}$$

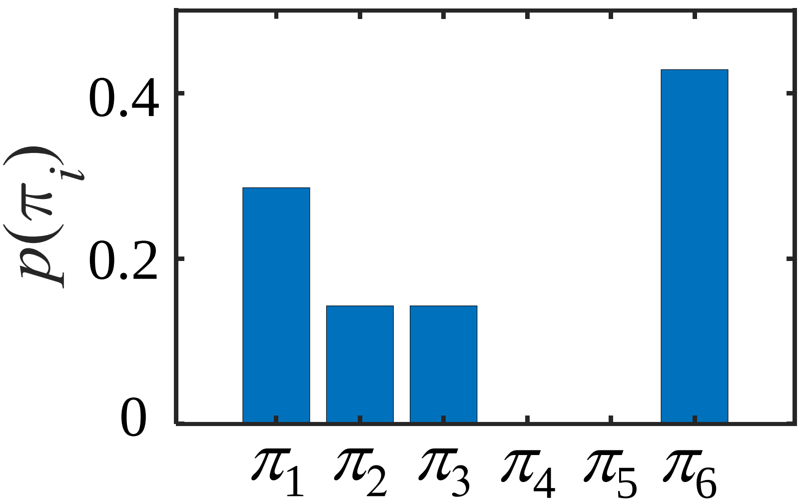

図 3 ランクオーダーパターンの相対度数

上で算出したランクオーダーパターン π_i の相対度数 $p(\pi_i)$ を情報エントロピーである Shannon エントロピーの式に代入することで，順列エントロピー H_p は定義される．また，順列エントロピー H_p が最大となるときは，すべてのランクオーダーパターンの相対度数が等確率で現れるときなので，$H_{p,\max} = \log_2 D!$ となる．

$$H_p = \frac{-\sum_{i=1}^{D!} p(\pi_i) \log_2 p(\pi_i)}{\log_2 D!} \tag{3}$$

H_p が 0 に近いと時系列の周期性が高いことを示し，1 に近ければ時系列の乱雑さが高いことを示す．

参考文献

[1] C. Bandt and B.Pompe, ”Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series”, *Physical Review Letters* **88**, 174102 (2002)