

順列エントロピーの説明

2020 年 3 月 1 日

1 順列エントロピー

順列エントロピーとは, C.Bandt and B. Pompe [1]によって考案された, 時系列の乱雑さを定量評価する指標であり, 時系列の値そのものではなく, 値の間の大小関係のみに注目し, 時系列の特徴量を計算する手法である.

時系列 $x(t)$ を, D 次元の遅れ時間座標系 $\mathbf{X}_j = \{x_j, x_{j+\tau}, \dots, x_{j+(D-1)\tau}\}$ に埋め込む. ただし, $j = 1, 2, \dots, L - (D-1)\tau$ とし, L は時系列の長さ, D は埋め込み次元, τ は遅れ時間とする.

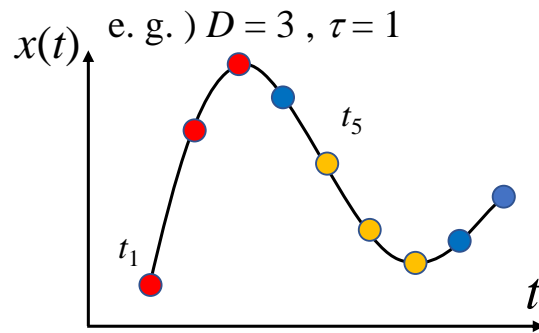


図1 時系列 $x(t)$

次元 D 個分の点に着目し, それらの値の大小関係を比較する. ランクオーダーパターンは, $D!$ 個のいずれかのランクオーダーパターンに分類される.

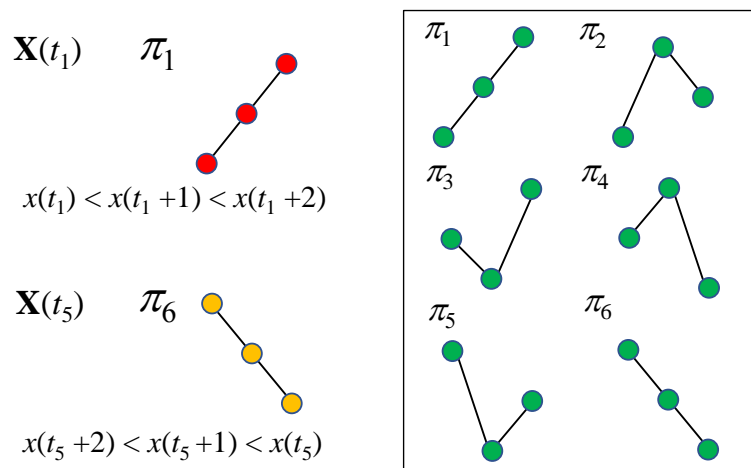


図2 ランクオーダーパターン

あるランクオーダーパターン π_i の相対度数 $p(\pi_i)$ は、以下のように示される。

$$p(\pi_i) = \frac{\sum_{j=1}^N \chi_i(X_j)}{L - (D - 1)\tau} \quad (1)$$

$\chi_i(X_j)$ は指示関数であり、以下のように示される。

$$\chi_i(X_j) = \begin{cases} 1, & \text{if } \pi_j = \pi_i \\ 0, & \text{if } \pi_j \neq \pi_i \end{cases} \quad (2)$$

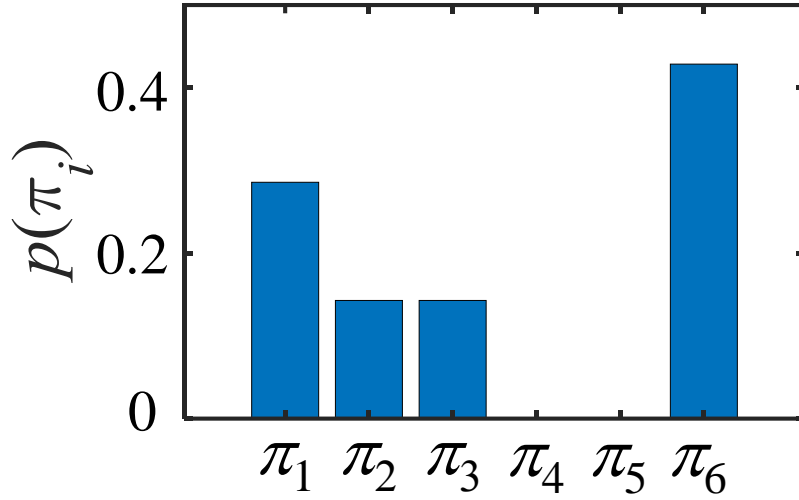


図3 ランクオーダーパターンの相対度数

上で算出したランクオーダーパターン π_i の相対度数 $p(\pi_i)$ を情報エントロピーであるShannonエントロピーの式に代入することで、順列エントロピー H_p は定義される。また、順列エントロピー H_p が最大となるときは、すべてのランクオーダーパターンの相対度数が等確率で現れるときなので、 $H_{p,\max} = \log_2 D!$ となる。

$$H_p = \frac{-\sum_{i=1}^{D!} p(\pi_i) \log_2 p(\pi_i)}{\log_2 D!} \quad (3)$$

H_p が0に近いと時系列の周期性が高いことを示し、1に近ければ時系列の乱雑さが高いことを示す。

参考文献

- [1] C. Bandt and B. Pompe, "Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series", *Physical Review Letters* **88**, 174102 (2002)