研究会第一回

B4 福田真悟

2020.4.28

1　進捗状況

論文購読「A model of chaotic evolution of an ultrathin liquid film flowing down an inclined plane」

2　低レイノルズ数における液膜流

まずモデルの概要図を下記に示す.

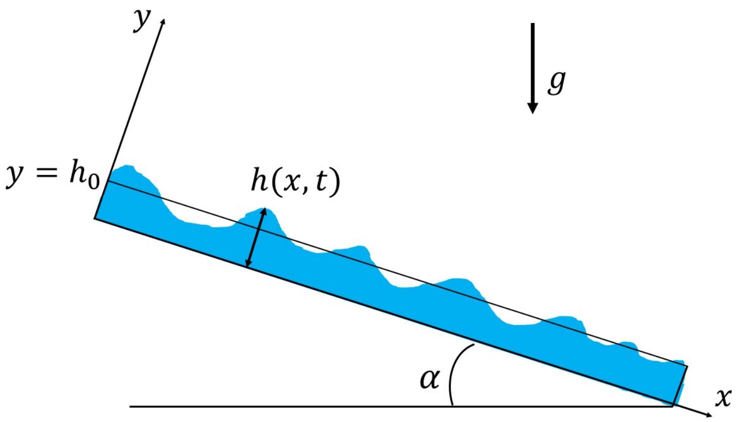

図1 斜面に沿った液膜流の概要図

図1に示す角度αに傾いた平らな斜面の上に流れる非常に薄く，レイノルズ数の小さい速度が遅い液膜流について考える．ここでの薄いは，流れのスケール(x方向の長さ)に対して十分に無視できる厚さであり，レイノルズ数は$\mathrm{Re} \ll 1$とする．このとき慣性力を無視し，粘性力，重力，分子間力，表面張力が支配的になる．この液膜流に関しての1次元発展方程式を下記に示す.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial \tilde{x}^4} = 0 \tag{1}$$

この方程式をKuramoto-Sivashinsky方程式と呼ぶ．この式(1)の導出を下記にまとめる.

2.1 Navier-Stokes方程式の簡略化

まずNavier-Stokes方程式を下記に示す.

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F_x\\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+F_y\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+F_z
\end{aligned} \tag{2}$$

このときの(x,y,z,t)はそれぞれの位置と時間を表し，(u,v,w)は(x,y,z)それぞれの方向の速度を表している．ρは液体の密度，μは粘性係数，Pは圧力，(F_x,F_y,F_z)はそれぞれの方向にかかる外力を表している．また，液膜の厚さをh，重力加速度をgとする．これに加え，非圧縮流体の連続の式は，

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3}$$

となる.

条件として，$\mathrm{Re}\ll 1$と低レイノルズ数となっているので慣性力は無視できる．よって，$\frac{\partial u}{\partial t}=0,\frac{\partial v}{\partial t}=0$となる．二次元流れとなるので$w=0,\frac{\partial}{\partial z}=0,\frac{\partial^2}{\partial z^2}=0$となる．膜は液膜流の長さに比べて十分に薄いため，$u\gg v$となる．よって，$u$に比べて$v$の影響は小さいので$v\simeq 0$とする．非圧縮の連続の式から$\frac{\partial u}{\partial x}=0$となる．外力は重力のみより，$F_x=mg\sin\alpha,F_y=-mg\cos\alpha$となる．圧力$P$から$y$方向に依存する$P_y=P_0+\rho g(h-y)\cos\alpha$を取り除くと，$\frac{\partial P_y}{\partial x}=\rho g\frac{\partial h}{\partial x}\cos\alpha\simeq 0,\frac{\partial P_y}{\partial y}=\rho g\cos\alpha$となる．以上の条件から，Navier-Stokes方程式は下記のように簡略化できる.

$$\begin{aligned}
\mu\frac{\partial u^2}{\partial y^2}&=\frac{\partial P}{\partial x}-\rho g\sin\alpha\\
\frac{\partial P}{\partial y}&=0
\end{aligned} \tag{4}$$

このときの近似をストークス近似という.

2.2 圧力について

圧力は，静水圧，分子間力，表面張力の3つ存在する．まず静水圧は，上記のP_yで表された値で下記に示す.

$$P_y=P_0+\rho g(h-y)\cos\alpha \tag{5}$$

この値に関しては既に考慮されているので除いて考える．分子間力より静水圧のほうが支配的であるときは，$\frac{\partial P_y}{\partial x}=\rho g\frac{\partial h}{\partial x}\cos\alpha$として考慮する必要がある.

次に分子間力について考える．レナード–ジョーンズポテンシャルから近似解をフィッティングパラメータ(回帰分析による推定)を行う．圧力なので引力を正とすると，

$$P_m=\frac{A}{h^3}-\frac{B}{h^n} \tag{6}$$

となる．ここでのA,Bはフィッティングパラメータである．nは$n>3$の整数である．$h(x,t)$は，座標x，時刻tにおける液膜厚さである.

最後に表面張力について考える．　表面張力による圧力は，定数項を除くと，表面張力γと表面の曲率の積となるので，

$$P_c = -\gamma \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \tag{7}$$

ここで液膜hは十分薄く，1より小さいので$\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1$より，式(7)は，

$$P_c = -\gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{8}$$

以上の3つの力をまとめると，式(6)と式(8)との和を考え，

$$P = \frac{A}{h^3} - \frac{B}{h^n} - \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{9}$$

となる．この値を圧力として考える．

2.3　x方向速度uの関数と流量の導出

式(4)から速度の導出する．まず境界条件について，固体壁に接触する液体の相対速度は0となる．また，気体層と接触する流体に関しては，気体の粘性が液体の粘性より小さいことから近似的に速度勾配が0となる．以上をまとめると境界条件は，

$$\begin{aligned} y = 0 \ &\rightarrow \ u = 0 \\ y = h(x,t) \ &\rightarrow \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

となる．この境界条件をもとに式(4)の両辺を積分を行うと，

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \sin\alpha \right) \left(\frac{y}{\mu} + C_1 \right) \tag{11}$$

$$u = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \sin\alpha \right) \left(\frac{y^2}{2\mu} + C_1 y + C_2 \right) \tag{12}$$

境界条件から，

$$C_1 = -\frac{h}{\mu}, C_2 = 0 \tag{13}$$

となる．よって，式(12)は，

$$u = \frac{1}{2} \left(\rho g \sin\alpha - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \left(\frac{2hy}{\mu} - \frac{y^2}{2\mu} \right) \tag{14}$$

となる．z方向1cmあたりのx方向の流量は，uのy方向積分で表される．流量qを下記に示す．

$$q = \int_0^{h(x,t)} u \ dy = \left(\rho g \sin\alpha - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{h^3}{3\mu} \tag{15}$$

よって流量が得られた．

2.4　液膜流の質量保存

質量保存則について，ある時刻でのx方向の微小範囲で流出と流入の差分は，次の時刻における高さの増加量へと保存されている．これを式に表したものを下記に示す．

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \tag{16}$$

この式のqに式(15)を代入したものを下記に示す．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}h^2\frac{\partial h}{\partial x}\\&+\left[\left(\frac{3A}{h^4}-\frac{nB}{h^{n+1}}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+\gamma\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]\frac{h^2}{\mu}\frac{\partial h}{\partial x}\\&+\left[\gamma\frac{\partial^4 h}{\partial x^4}-\left(\frac{12A}{h^5}-\frac{n(n+1)B}{h^{n+2}}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{3A}{h^4}-\frac{nB}{h^{n+1}}\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right]\frac{h^3}{3\mu}=0\end{aligned} \tag{17}$$

分子間力より静水圧のほうが支配的であるときは，$\frac{\partial P_y}{\partial x}=\rho g\frac{\partial h}{\partial x}\cos\alpha$として考慮した式(17)の非線形方程式を考える必要がある．

2.5　hの標準化と長波近似

液膜の厚さhについて，h_0を中心に標準化したものを下記に示す．

$$h=h_0(1+F) \tag{18}$$

このときのFはh_0からの変化率を表している．このときのFは非常に微小で，長波近似より，x方向の変位に対して緩やかな変位と仮定すると，Fの微分値も微小となる．F^2のオーダーを取ったものを下記に示す．ただし，十分な傾きαがあるとき，分子間力や表面張力の項は重力の項に比べて微小であるため，分子間力や表面張力のF^2も無視して考える．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}h_0^2\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{2\rho g\sin\alpha}{\mu}h_0^2F\frac{\partial F}{\partial x}\\&+\gamma\frac{h_0^3}{3\mu}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+\left(\frac{3A}{h_0^4}-\frac{nB}{h_0^{n+1}}\right)\frac{h_0^3}{3\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0\end{aligned} \tag{19}$$

2.6　ガリレイ変換

式(19)は，$\frac{\partial F}{\partial t}$の非定常の項と$\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}h_0^2\frac{\partial F}{\partial x}$の重力による項が他の項に比べて大きく，2つの項が釣り合っている．そこで座標系を重力による平均速度で移動する座標系に変換する．この変換をガリレイ変換という．ガリレイ変換した座標系(x',t')を下記に示す．

$$\begin{aligned}x'&=x-\frac{\rho g h_0^2\sin\alpha}{\mu}t\\t'&=t\end{aligned} \tag{20}$$

この座標系における微分を下記に示す.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x'} \\ \frac{\partial^n F}{\partial x^n} &= \frac{\partial^n F}{\partial x'^n} \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} \\ &= -\frac{\rho g h_0^2 \sin\alpha}{\mu}\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial t'}\end{aligned} \tag{21}$$

式(19)に式(21)を代入したものを下記に示す.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial t'} + \frac{2\rho g \sin\alpha}{\mu} h_0^2 F \frac{\partial F}{\partial x'} \\ &+ \gamma\frac{h_0^3}{3\mu}\frac{\partial^4 F}{\partial x'^4} + \left(\frac{3A}{h_0^4} - \frac{nB}{h_0^{n+1}}\right)\frac{h_0^3}{3\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = 0\end{aligned} \tag{22}$$

2.7 無次元化された方程式

F, x', t'をそれぞれ代表値F_0, L_0, t_0で無次元化したもの下記に示す.

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{F}{F_0} \\ \tilde{x} &= \frac{x'}{L_0} \\ \tau &= \frac{t}{t_0}\end{aligned} \tag{23}$$

これを式(22)に代入し，各定数を下記に示すように設定する.

$$\begin{aligned}\frac{2\rho g h_0^2 \sin\alpha}{\mu}\frac{t_0 F_0}{L_0} &= 1 \\ \gamma\frac{h_0^3}{3\mu}\frac{t_0}{L_0^4} &= 1 \\ \left(\frac{3A}{h_0^4} - \frac{nB}{h_0^{n+1}}\right)\frac{h_0^3}{3\mu}\frac{t_0}{L_0^2} &= 1\end{aligned} \tag{24}$$

以上の条件を満たすとき式(22)は,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \phi\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial \tilde{x}^4} = 0 \tag{25}$$

となる．よって式(1)が導出された．このKS方程式の時空構造を下記に示す.

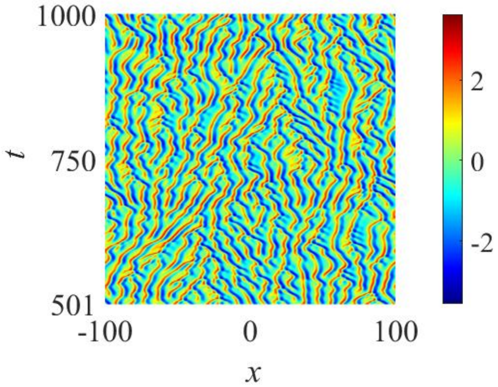

図2 KS方程式の結果

3　今後の予定

noisy?

参考文献

[1] Boris Faybishenko, Alexander J. Babchin, Alexander L. Frenkel, David Halpern, Gregory I. Sivashinsky,"A model of chaotic evolution of an ultrath", Colloids and Surfaces A,Physicochemical and Engineering Aspects, 192 (2001) 377∼385