B4の福田から進捗状況の報告を行いたいと思います．

本日は論文の「A model chaotic」を講読しました．

この論文では低レイノルズ数における液膜流のモデルを考えます．そのモデルについて概要図がこちらです．

角度に傾いた平らな斜面の上に流れる非常に薄く，レイノルズ数の小さくて速度の遅い液膜流を考えます．ここでの薄いは，流れのスケール(方向の長さ)に対して十分に無視できる厚さであり，レイノルズ数はとしています．このとき慣性力を無視し，粘性力，重力，分子間力，表面張力が支配的になる状況です．この液膜流に関しての1次元発展方程式がこちらです．

式の読み上げ

この方程式をくらもと-シバシンスキー方程式と呼びます．火炎面などの挙動のダイナミックスを表現する式も似たような式が導出され，形が似ているものをまとめて，KS方程式と呼ぶことが多いです．今回は，液膜流におけるKS方程式の導出を行います．

まず流体の支配方程式のナビエストークス方程式の簡略化から行います．まずナビエストークス方程式はこのようになります．このときの(x,y,z,t)はそれぞれの位置と時間，(u,v,w)は(x,y,z)の速度を表しています．は液体の密度，(mu)は液体の粘性係数，Pは圧力，Fは外力を表しています．また，液膜の厚さ，重力をそれぞれ，h,gとします．これに加えて連続の式は，このようになります

　そして条件を考えていきます．まず，レイノルズ数が小さいことから，非定常項を0と近似できます．次に2次元流れから，z方向の速度，z方向の変化がすべて0となります．液膜が流れに対して薄いことから，y方向速度は0と近似できます．さらに非圧縮の連続の式から，も0と近似できます．外力Fについては，重力のみなので，,となります．最後に，圧力からy方向に依存する項である静水圧の項を取り出すと，となり，これをそれぞれの方向xyで微分すると，x方向微分は，となり，液膜の薄さhが微小であることから，0と近似でき，y方向微分は，となります．以上をまとめると，このような式になります．

この近似をストークス近似と言います．

次に上記の簡略化された式のある圧力について考えます．圧力は，さきほど述べた静水圧と分子間力，表面張力の3種類あります．まず静水圧はさきほど述べたようにこのように表される．分子間力などよりも静水圧が支配的のときは，として考慮する必要がある．

次に分子間力について，レナードジョーンズポテンシャルから近似解をフィッティングパラメータ(回帰分析による推定)を行います．圧力なので引力を正とすると，となる．ここでのA,Bはフィッティングパラメータで，nは3以上の整数である．

最後に表面張力について考える．表面張力による圧力は，定数項を除くと，表面張力と表面の曲率の積となるので，となる．ここで，は1よりも非常に小さいので，となります．

以上の3つの力をまとめると，となります．この値を圧力として，簡略化されたナビエストークス方程式のに代入していきます．

先にx方向速度uの関数と流量を導出する．簡略化されたナビエストークス方程式をy方向に2階積分することで速度uの関数ができます．2階積分なのでy=での境界条件が必要となります．まず固体壁に接触する部分について，相対速度は0となります．気相に接触する部分について，気体の粘性係数が液体の粘性係数よりかなり小さいことから液体のほうの速度勾配が0となります．(余談：自分はここが間違っていると思います．)

まとめるととなります．はに関する項は除いているのでに依存しない関数です．よって，定数の積分となり，u=====境界条件から==となります．よってuは，このような関数になります．Z方向1あたりのx方向流量を考えるには，uの関数をy方向に0からhで積分する必要があります．積分した結果がこちらです．

次に導出した流量をもとに液膜流の質量保存を考えます．ある時刻でのx方向の微小範囲で流出と流入の差分は，次の時刻における高さの増加量へと保存されてます．これを式に表したものがこちらです．この式に先ほど導出した流量の式を代入したものがこちらです．もし分子間力よりの静水圧の支配的であるとき，の方向偏微分を考慮した非線形方程式を考える必要があります．今回は考慮しない場合で考えています．

次に行うのは，hの標準化と長波近似です．液膜の厚さhをこのように変換します．このときのは液膜の中心で，はからの変化率を表しています．Fは非常に微少かつ長波近似よりx方向の変位に対して，緩やかな変位であるとし，Fの微分値も微少となる．ここでの長波近似とは，変化の周期よりも変化が微少であることを示しています．ここでFの2乗のオーダーをとります．ただし十分な傾きがあるとき，分子間力や表面張力の項は，重力の項に比べて，微少であるため，分子間力や表面張力のFの2乗のオーダーも無視して考えると，このようになります．

次にガリレイ変換を行います．上記の式では，非定常項と重力のFの1乗の項が他の項よりも大きく，2つの項が釣り合ています．そこで，重力による平均速度で移動する座標系に変換を行います．この変換をガリレイ変換といいます．新しい座標系x’,t’はこのようになります．この座標系における微分は，このようになります．これを代入したものがこのようになります．釣り合っていた項が一つとなりました．

最後に無次元化と整理を行います．無次元化したものをこのようにし，各定数項をそれぞれ，1になるように設定すると，最初の式であるKS方程式が導出されました．以上で証明を終了します．

そしてKS方程式のスペクトル法での数値計算の結果として，時空構造がこちらになります．このときの横軸がx方向の位置で，縦軸のtが時刻で，カラーマップが液膜の厚さであるhを示しています．

さらに，x=0のときの時間変化とt=750の波形のグラフがこのようになります．