線形代数 I 演習

－ 第 16 回 2 次正方行列の行列式，平面の一次変換 －

担当：佐藤 弘康

定義. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，スカラー

$$\det(A) = ad - bc$$

を行列 A の行列式と呼ぶ．

□ クラメールの公式　連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

の解は

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

で与えられる．ただし，$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ とする．

問題 16.1. 次の連立方程式を，2 つの方法（行基本変形と，クラメールの公式）を用いて解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$

□一次変換　2 次正方行列 A に対し，平面 $\mathbf{R}^2$ の点（ベクトル）を $\mathbf{R}^2$ の点に移す写像 $\varphi_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $\varphi_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定義することができる ($\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$). この写像 φ_A を行列 A から定まる一次変換（または線形変換）と呼ぶ（教科書 p.60 を参照）.

問題 **16.2.** 次の 2 次正方行列に対して，それが定める一次変換がどのような写像か説明せよ（平面内の点をどのように移すか調べよ）.

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　　(2) $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $E_1(k) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,　$E_2(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$　（ただし，$k \neq 0$）

(4) 宿題： $E_{12}(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,　$E_{21}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$　（ただし，$k \neq 0$）

例題. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{R}^2$ の一次変換

$$(x, y) \xrightarrow{\varphi_A} (x - y, x)$$

を定める．方程式 $y = 2x - 1$ が定める直線は，φ_A によりどのような直線に移るか調べよ.

解. 直線 $y = 2x - 1$ 上の点は媒介変数 $t \in \mathbf{R}$ を用いて，$(t, 2t - 1)$ と表すことができる（直線の媒介変数表示）．したがって，この直線上の点は変換 φ_A により，

$$(t, 2t - 1) \xrightarrow{\varphi_A} (-t + 1, t)$$

に移る．$x = -t + 1$, $y = t$ とおいて，t を消去すると $y = -x + 1$ を得る．つまり φ_A により，直線 $y = 2x - 1$ は直線 $y = -x + 1$ に移ることがわかる.

問題 **16.3.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ が定める一次変換 φ_A により，次の方程式が定める直線がどのようなものに移るか調べよ.

(1) $y = 2x + 1$　　(2) $y = -3x - 2$

問題 16.4. A $= (a_1, a_2)$, B $= (b_1, b_2)$ を $\mathbf{R}^2$ 上の原点 O 以外の点とする．線分 OA と OB を 2 辺にもつ平行四辺形の面積は，行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \tag{16.1}$$

の行列式の絶対値に等しいことを示せ．ただし，ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ は線形独立であるとする．

■ 行列式の符号について

2 次正方行列 A は平面の一次変換 φ_A を定め，平面内の図形を φ_A で移すと，その面積は $|\det(A)|$ 倍される．一次変換とは，原点を中心とした回転作用や，ある方向へ平面全体を伸ばしたり，縮めたりする作用を何回か施す変換である．$\det(A) \neq 0$ のとき，変換 φ_A を施すことにより，平面内の図形は伸びたり縮んだりするものの，おおざっぱな形は変わらない．ただし，行列式が負の行列の場合は，その作用により図形は裏返ってしまう (下図参照)．また，行列式が 0 の場合，平面内の図形は直線か 1 点に縮んでしまう（問題 16.3）．

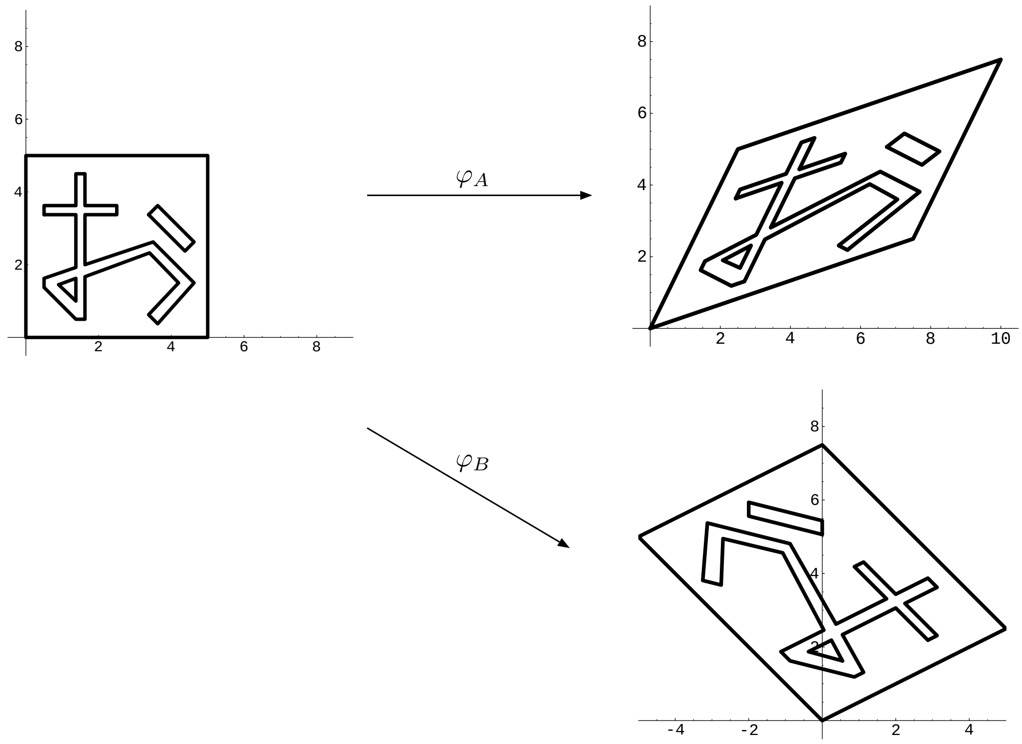

図: 一次変換による像． $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$