微積分 I 演習

－ 第 1 回 実数の集合 －

担当：佐藤 弘康

集合

集合とはいくつかのものをひとまとめにして考えた「ものの集まり」のこと．通常，集合はアルファベットの大文字で表す．

- $\mathbf{N}$：自然数 $(1, 2, 3, \ldots)$ 全体の集合.
- $\mathbf{Z}$：整数全体の集合.
- $\mathbf{Q}$：有理数全体の集合.
- $\mathbf{R}$：実数全体の集合.
- $\mathbf{C}$：複素数 ($a + \sqrt{-1}b$, a と b は実数) 全体の集合.
- $\emptyset$：空集合．元を全く含まない集合.

集合に関する用語・記号

一般に，元 $a, b, c, \ldots$ からなる集合を $\{a, b, c, \ldots\}$ と表す．また，条件 P を満たす元 x 全体の集合を $\{x \,|\, P\}$ と表す (例：$\{x \,|\, x \in \mathbf{Z}, x^2 \leq 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$).

- $a \in A$：a は A の元である（a は A に含まれる，属する）.
- $a \notin A$：a は A に含まれない.
- $A \subset B$：A のすべての元は B に含まれる ($\Longleftrightarrow$「$a \in A \Longrightarrow a \in B$」).

- $A \cup B = \{x \,|\, x \in A$ または $x \in B\}$：和集合
- $A \cap B = \{x \,|\, x \in A$ かつ $x \in B\}$：共通部分
- $A \backslash B = \{x \,|\, x \in A$ かつ $x \notin B\}$：差集合
- $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \,|\,$ 少なくともひとつの $n \in \mathbf{N}$ に対して $x \in A_n\}$
- $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \,|\,$ すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $x \in A_n\}$

区間

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x < b\}, & (a,\infty) &= \{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x\}, \\
[a,b] &= \{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leq x \leq b\}, & [a,\infty) &= \{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leq x\}, \\
(a,b] &= \{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x \leq b\}, & (-\infty,b) &= \{x \mid x \in \mathbf{R}, x < b\}, \\
[a,b) &= \{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leq x < b\}, & (-\infty,b] &= \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \leq b\}.
\end{aligned}
$$

問題 1.1. 有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ を $\{x \mid P\}$ の形で書いてみよ（もちろん $\{x \mid x \in \mathbf{Q}\}$ はダメ．整数 $\mathbf{Z}$ は使用してよい）．

問題 1.2. a, b を $a < b$ を満たす有理数とする．このとき，$a < c < b$ を満たす有理数 c が必ず存在することを説明せよ．

基本問題.

実数の集合 $A \subset \mathbf{R}$ が「上に有界」,「下に有界」とはどういうことを意味するか？

問題 1.3. 次の集合が有界かどうか調べよ．

(1) $\{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \mid x \in \mathbf{R}, x > 0\}$

(2) $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 > 2\}$

(3) $\left\{ \dfrac{n^2+n}{n+2} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$

問題 1.4. $A_n = \left(1, 1+\frac{1}{n}\right)$ とおくとき，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ はどのような集合か？