解析 I 演習 (2 学期：ベクトル解析)

― 第 1 回 ベクトルの演算・ベクトルの内積 ―

担当：佐藤 弘康[1]

◇ **ベクトル空間** $\mathbf{R}^3$　$\mathbf{R}$ 上の 3 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の元を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ とアルファベット小文字の太字で表す．$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ のとき，a_1 を x 成分，a_2 を y 成分，a_3 を z 成分と呼ぶ.

$\mathbf{R}^3$ 内の点もベクトルと見ることができるが，点であることを強調するときは $\mathrm{A} = (a_1, a_2, a_3)$ のようにアルファベット大文字で表す。

$\mathrm{A} = (a_1, a_2, a_3)$、$\mathrm{B} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し、始点が A で終点が B のベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く．すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$．成分が同じであれば，始点が異なっていても同じベクトルと見なす.

◇ **ベクトルの大きさ**　ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ に対し，

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

を $\boldsymbol{a}$ **の大きさ**または**ノルム**という.

◇ **内積**　ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_c)$ に対し、

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\in \mathbf{R}) \tag{1.1}$$

によって内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ を定める．これを $\mathbf{R}^3$ の**標準的内積**と呼ぶ．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta \tag{1.2}$$

が成り立つ．(1.2) の右辺は $\boldsymbol{a}$ の大きさ $\|\boldsymbol{a}\|$ と $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ に正射影したベクトルの大きさ $\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$ の積と考えることができる．したがって，直交する 2 つのベクトルの内積は 0 である．また，標準内積を用いるとベクトルのノルムは

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$$

と表される.

[1]研究室：自然系学系 D 棟 801，E-mail：hiroyasu@math.tsukuba.ac.jp

問題 1.1. $\boldsymbol{a} = (4,4,2), \boldsymbol{b} = (-3,-1,2), \boldsymbol{c} = (2,1,1)$ のとき、$2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$ に平行な長さ 1 のベクトルを求めよ.

問題 1.2. $\boldsymbol{a} = (-4,-7,4), \boldsymbol{b} = (1,-2,5)$ とする．このとき，$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ への正射影および $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影を求めよ.

問題 1.3. 未知数 t を含むベクトルの組が次のように与えられてる．これをそれぞれ 1 次従属にする t を求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} = (2,1,2), \boldsymbol{b} = (3,-1,6), \boldsymbol{c} = (t+2, 2t+3, 2t+8)$.

(2) $\boldsymbol{a} = (1+t, -t, 1), \boldsymbol{b} = (2,-1,1+t), \boldsymbol{c} = (t,-1,-1)$.

問題 1.4. 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し，

$$\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} + k\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} + k\boldsymbol{a}$$

が一次従属となるような $k \in \mathbf{R}$ を求めよ.

問題 1.5. $\mathrm{A} = (a_1, a_2, a_3), \mathrm{B} = (b_1, b_2, b_3), \mathrm{C} = (c_1, c_2, c_3), \mathrm{D} = (d_1, d_2, d_3)$, のとき，この 4 点が同一平面上にあるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

であることを証明せよ.

問題 1.6. A, B を原点 O 以外の点とするとき，ベクトル

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\|}$$

は角 AOB を二等分することを示せ.

問題 1.7. $\mathrm{A} = (a_1, a_2, a_3), \mathrm{B} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を 2 辺にもつ平行四辺形の面積を求めよ.

問題 1.8. 4 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ に対し

$$\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|^2 \geq \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\|^2$$

が成り立つことを示せ.