線形代数 I 演習

－ 第 6 回 行列の基本変形 －

担当：佐藤 弘康

未発表問題： 4.3, 4.4, 5.1(3), 5.2〜5.7

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 基本行列 $P_{ij}, E_{ij}(c), E_i(c)$ の定義を確認せよ．また，それぞれの逆行列を求めよ.

(2) 階段行列とはどのような行列か説明せよ.

(3) 簡約階段行列とはどのような行列か説明せよ.

例題　行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を行基本変形により，簡約階段行列の形に変形せよ.

解.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}
&\xrightarrow[P_{12}\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[E_{21}(-2)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[E_{31}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}
\xrightarrow[P_{23}\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[E_{12}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow[E_{32}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[E_{3}(1/4)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}
\xrightarrow[E_{23}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

問題 6.1. 次の行列を行基本変形により簡約階段行列の形に変形せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5)**(レポート問題)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

問題 6.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，AC, CA, ABC を計算せよ．また，その結果を用いて B^n (n は自然数) を求めよ．

問題 6.3. $A = \begin{pmatrix} 0 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 0 \end{pmatrix}$ に対して，$(E_2 + A)^{-1}(E_2 - A)$ を求めよ．

問題 6.4. $A \in M(n, \mathbf{R})$ を n 次交代行列し，$(E_n + A)$ が正則であると仮定する．このとき，

(1) $(E_n - A)$ も正則であることを証明せよ．

(2) $B = (E_n + A)^{-1}(E_n - A)$ に対して，${}^tB = B^{-1}$ を証明せよ．

定義. n 次正方行列 $A \in M(n, \mathbf{R})$ が，$A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = E_n$ を満たすとき，A を**直交行列**という．

問題 6.5. $A \in M(n, \mathbf{R})$ を直交行列とする．このとき，$(E_n + A)$ が正則行列ならば，$(E_n + A)^{-1}(E_n - A)$ は交代行列であることを示せ．

■ 第 3 回，第 4 回 (4.1, 4.2) の解と捕捉

問題 3.1 (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$ であるから線形従属．　(2) 線形独立．

問題 3.2 (1)

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

とおく．このとき，$c_1, \ldots, c_n$ は

$$\left\{ \begin{aligned} c_1 + c_2 + \ldots + c_n &= 0 \\ c_2 + \ldots + c_n &= 0 \\ &\vdots \\ c_n &= 0 \end{aligned} \right.$$

を満たす．しかし，これは $(c_1, \ldots, c_n) = (0, \ldots, 0)$ の場合だけであるから，線形独立である．

(2) $n \geq 3$ のとき，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} n(k-1)+1 \\ n(k-1)+2 \\ n(k-1)+3 \\ \vdots \\ kn \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} n(n-1)+1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n^2 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = 2n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = 2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)$．つまり，$\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 0$ が成り立つ．したがって，

$$c_1 = 1,\ c_2 = -2,\ c_3 = 1,\ c_4 = \ldots = c_n = 0 \tag{6.1}$$

は

$$c_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_n \boldsymbol{x}_n = 0 \tag{6.2}$$

を満たすので，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は線形従属である．$n = 1, 2$ のときは線形従属である (問題 1.1(2) 参照)．

問題 6. (6.2) を満たす $c_1, \ldots, c_n$ の例で，(6.1) 以外のものを挙げよ．

問題 3.3

$$0 = c_1(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) + c_2(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}) + c_3(-\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c})$$
$$= (c_1+2c_2-c_3)\boldsymbol{a} + (2c_1+4c_2)\boldsymbol{b} + (3c_2-2c_3)\boldsymbol{c}$$

とおく．$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は線形独立なので，$c_1+2c_2-c_3=0,\ 2c_1+4c_2=0,\ 3c_2-2c_3=0$ が成り立つ．しかし，この方程式を満たす (c_1,c_2,c_3) は $(0,0,0)$ だけなので (これは連立方程式を解けばわかる)，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}, -\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$ は線形独立であることがわかる．

問題 3.4 $(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}) - 2(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{c}) + (3\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{c}) = 0$ となるので，どんなベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に対しても，$\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}, 2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{c}, 3\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{c}$ は線形従属である．

問題 3.5 $a=3$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 32 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$．$a=-2$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$．$a=1$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$．(ただし，$k$ は 0 でない実数)

問題 3.6 $I^2=J^2=K^2=-E_2, IJ=-JI=K, JK=-KJ=I, KI=-IK=J.$

問題 3.7 (1) $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ とおくと

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1+x_3 & 3x_2+x_4 \\ -6x_1-2x_3 & -6x_2-2x_4 \end{pmatrix}$$
$$YA = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1-6x_2 & 3x_1-2x_2 \\ 3x_3-6x_4 & x_3-2x_4 \end{pmatrix}$$

であるから，$AX=YA=0$ ならば，$x_3=-3x_1, x_4=-3x_2, y_1=2y_2, y_3=2y_4$．したがって，$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -3x_1 & -3x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2y_2 & y_2 \\ 2y_4 & y_4 \end{pmatrix}\quad (x_1,x_2,y_2,y_4 \in \mathbf{R})$.

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}.$$

したがって，$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が可換ならば，$d=a, c=-b$．したがって，そのような行列は $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\quad (a,b\in\mathbf{R})$.

問題 3.8 (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$．したがって，$A^2=0$ ならば，

$$a^2=d^2=-bc,\quad b(a+d)=c(a+d)=0$$

が成立する．(i) $b\neq 0$ ならば，$d=-a,\ c=-\dfrac{a^2}{b}$．(ii) $b=0$ ならば，$a=d=0$．以上のことから，$A^2=0$ となる行列は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix},\ (a,b,c\in\mathbf{R},\ ただし\ b\neq 0).$$

(2) (1) と同様，$A^2 = E_2$ ならば，

$$a^2 = d^2 = 1 - bc,\ b(a+d) = c(a+d) = 0 \tag{6.3}$$

が成立する．(i) $b \neq 0$ ならば，$d = -a$，$c = \dfrac{1-a^2}{b}$．(ii) $b = 0$ ならば，$a^2 = d^2 = 1$．さらに，$a = d = \pm 1$ ならば $c = 0$，$a = -d = \pm 1$ ならば c は任意の数でよい．以上のことから，$A^2 = E_2$ となる行列は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & \mp 1 \end{pmatrix},\ (a, b, c \in \mathbf{R},\ \text{ただし}\ b \neq 0).$$

(3) $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおく．任意の B に対し $AB = BA$ が成り立つことと，任意の $x, y, z, w \in \mathbf{R}$ に対して

$$bz = cy, \tag{6.4}$$

$$ay + bw = bx + dy,\ cx + dz = az + cw \tag{6.5}$$

が成り立つことは同値である．(6.4) より，$b = c = 0$．これを (6.5) に代入すると $ay = dy, dz = az$．したがって，$a = d$．つまり，任意の 2 次正方行列と可換な行列はスカラー行列に限る．

問題 3.9 (1) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

問題 4.1 すべての正方行列は対称行列と交代行列の和に一意的に表すことができる．特に，行列 A に対して，その対称部分は $\dfrac{A + {}^tA}{2}$，その交代部分は $\dfrac{A - {}^tA}{2}$ である．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 4 & 1 & 5 \\ -\frac{5}{2} & 5 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ -\frac{3}{2} & -3 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

> **問題 7.** 任意の行列 A に対し，$\dfrac{A + {}^tA}{2}$，$\dfrac{A - {}^tA}{2}$ はそれぞれ対称行列，交代行列になることを証明せよ．

問題 4.2 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ とおく．A, B は上三角行列であるから，その成分は

$$i > j \implies a_{ij} = 0,\ b_{ij} = 0 \tag{6.6}$$

を満たす．$A + B$ の (i, j) 成分は $a_{ij} + b_{ij}$ であるから，$i > j$ ならば $a_{ij} + b_{ij} = 0$．したがって，$A + B$ も上三角行列である．また，AB の (i, j) 成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

であるから，$i > j$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = (a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{ij}b_{jj}) + (a_{i\ j+1}b_{j+1\ j} + \ldots + a_{ni}b_{nj}) \tag{6.7}$$

と 2 つの部分に分けることができる．すると (6.6) より，(6.7) の右辺の前半部分は A の成分が 0 で，後半部分は B の成分が 0 である．したがって，AB も上三角行列である．

■ レポート問題の解

問題 3. $w_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ $(x_i, y_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2)$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}\overline{(w_1w_2)} &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + \sqrt{-1}(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - \sqrt{-1}(x_1y_2 + x_2y_1),\\ \overline{w_1}\cdot\overline{w_2} &= (x_1 - \sqrt{-1}y_1)(x_2 - \sqrt{-1}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - \sqrt{-1}(x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

より，cc-1) が成り立つ．また，

$$\overline{\left(\frac{w_1}{w_2}\right)} = \overline{\left(\frac{w_1\overline{w_2}}{|w_2|^2}\right)} = \frac{1}{|w_2|^2}\overline{(w_1\overline{w_2})} = \frac{1}{|w_2|^2}\overline{w_1}\cdot\overline{(\overline{w_2})},$$
$$\frac{(\overline{w_1})}{(\overline{w_2})} = \frac{\overline{w_1}\cdot w_2}{|w_2|^2}$$

であるから，cc-3) が成立すれば，cc-2) も成立することがわかる．

$$\overline{\overline{\left(x + \sqrt{-1}y\right)}} = \overline{x - \sqrt{-1}y} = \overline{x + \sqrt{-1}(-y)} = x - \sqrt{-1}(-y) = x + \sqrt{-1}y$$

より，cc-3) が成立し，上の議論から，cc-2) も成立することがわかる．

問題 5. $z = x + \sqrt{-1}y, w = u + \sqrt{-1}v$ $(x, y, u, v \in \mathbf{R})$ とおくと

$$\overline{z}w + z\overline{w} = (x - \sqrt{-1}y)(u + \sqrt{-1}v) + (x + \sqrt{-1}y)(u - \sqrt{-1}v) = 2(xu + yv)$$

となる．つまり，複素数 z, w を複素数平面においてベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とみなせば，$\overline{z}w + z\overline{w} = 2(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$ である．したがって，

$$\overline{z}w + z\overline{w} = 0 \Longleftrightarrow (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{z} \text{ と } \boldsymbol{w} \text{ が直交} \Longleftrightarrow \arg z - \arg w = \frac{\pi}{2}.$$