

数学クォータ科目「基礎数学 II」第 3 回

# 微分の計算 (2)

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

# これまでのまとめ (1)

関数  $y = f(x)$  がある.

- $x = a$  から  $x = b (= a + h)$  までの平均変化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

← 2点  $(a, f(a)), (b, f(b))$  を通る直線の傾き

- $x = a$  における微分係数

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

← 点  $(a, f(a))$  における接線の傾き

- 導関数  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

# これまでのまとめ (2)

- 微分の性質 関数  $f(x), g(x)$  と定数  $k$  に対し,

$$(1-1) \{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(1-2) \{k f(x)\}' = k f'(x)$$

- 基本的な関数の微分 (1)

$$(2-1) (k)' = 0 \text{ (すなわち, 定数関数の微分は消える)}$$

$$(2-2) (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ (}\alpha \text{ は実数)}$$

- 微分公式 (1)

$$(3-1) \text{ 合成関数の微分 (I) : } \{f(ax + b)\}' = a f'(ax + b)$$

$$(3-2) \text{ 積の微分公式 : } \{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(3-3) \text{ 商の微分公式 : } \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

# 今週のこと

---

- 微分公式 (2)

(3-1)' 合成関数の微分 (II) :  $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x)$

- 基本的な関数の微分 (3) 三角関数の微分

(2-3)  $(\sin x)' = \cos x$

(2-4)  $(\cos x)' = -\sin x$

(2-5)  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

# 合成関数とその微分

- 2つの関数  $y = f(t)$  と  $t = g(x)$  がある.
- このとき,  $x = a$  に対して  $t = g(a)$  が定まり, さらに, この  $t = g(a)$  の対し,  $y = f(g(a))$  が定まる.  $\rightarrow x = a$  の対して,  $y = f(g(a))$  が定まるため,  $y$  は  $x$  の関数 となる.
- このようにして定まる関数を, 「 $f$  と  $g$  の 合成関数 」といい,  $y = f \circ g(x)$  と書く.
- 合成関数  $y = f \circ g(x)$  の導関数は, それぞれの導関数の積となる ;

$$y' = f'(g(x)) g'(x) \quad \left( \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right)$$

- 複雑に見える関数も, いくつかの単純な関数の合成関数と見ることで, 微分計算が容易にできる.

# 合成関数の微分公式 $y' = f'(g(x)) g'(x)$ の証明

(証明)

$$\begin{aligned} y' = \{f \circ g(x)\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \circ g(x+h) - f \circ g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

ここで,  $g(x+h) - g(x) = H$  とおくと,  $h \rightarrow 0$  のとき,  $H \rightarrow 0$  である.  
よって,

$$y' = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + H) - f(g(x))}{H} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

# $x^{\frac{1}{n}}$ の微分 ( $n$ は自然数)

**問題** 「合成関数の微分の公式」を利用して、 $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$  を微分せよ。

(解)  $y = f(t) = t^n$  とおき、 $t = g(x)$  との合成関数

$$y = f \circ g(x) = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$

を考え、これを  $x$  で微分すると、

$$y' = (x)' = 1.$$

一方、合成関数の微分の公式より、

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = n \{g(x)\}^{n-1} \cdot g'(x) = n \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \cdot g'(x) = nx^{1-\frac{1}{n}} \cdot g'(x).$$

よって、

$$g'(x) = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

# $x^{\frac{m}{n}}$ の微分 ( $n$ は自然数, $m$ は整数)

**問題** 「合成関数の微分の公式」を利用して,  $g(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$  を微分せよ.

(解)  $y = f(t) = t^n$  とおき,  $t = g(x)$  との合成関数

$$y = f \circ g(x) = \left( \sqrt[n]{x^m} \right)^n = x^m$$

を考え, これを  $x$  で微分すると,

$$y' = (x)' = mx^{m-1}.$$

一方, 合成関数の微分の公式より,

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = n \{g(x)\}^{n-1} \cdot g'(x) = n \left( x^{\frac{m}{n}} \right)^{n-1} \cdot g'(x) = nx^{m-\frac{m}{n}} \cdot g'(x).$$

よって,

$$g'(x) = \frac{mx^{m-1}}{nx^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n} x^{m-1-(m-\frac{m}{n})} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$



# 三角関数の導関数（1） $\sin x$ の微分

問1)  $f(x) = \sin x$  を微分しなさい。

(解)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

※  $\sin A - \sin B = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$  を利用する。

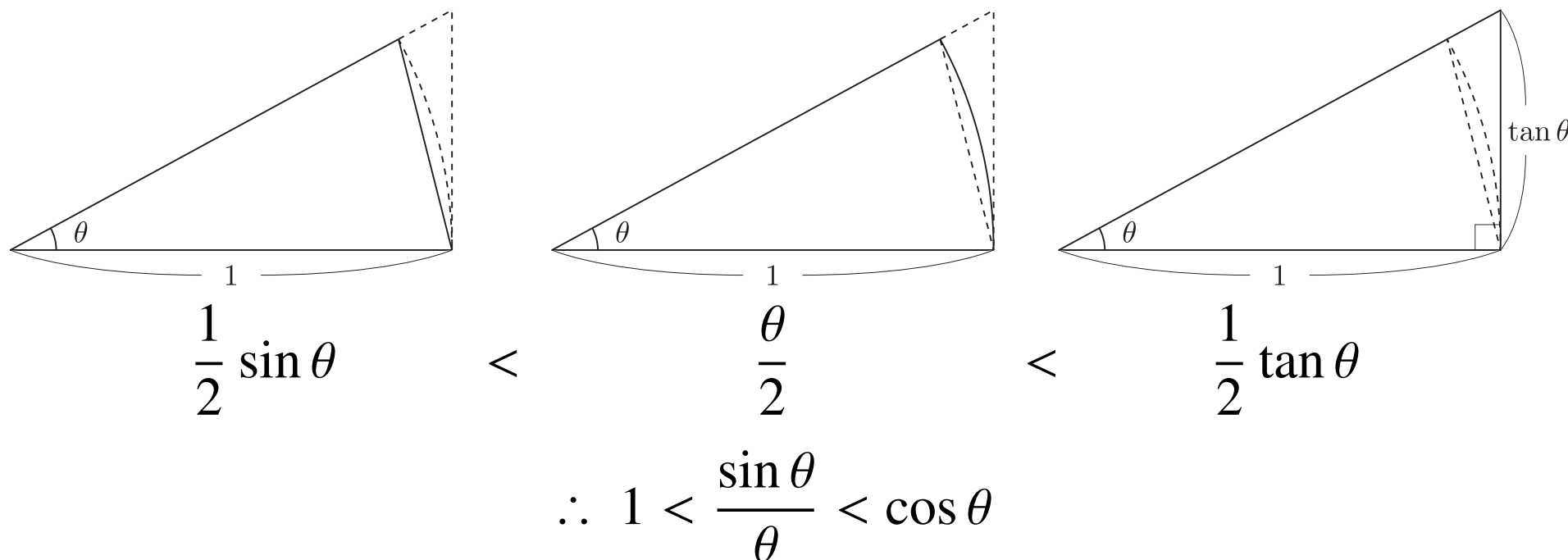
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\sin H \cdot \cos(x+H)}{H} = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\sin H}{H} \cdot \cos(x+H)$$

$$= 1 \cdot \cos(x+0) = \cos x$$

# 極限 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ の証明

- $\theta > 0$  のとき，下図の三角形と扇型の面積の対象関係より



$$1 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

- $\theta < 0$  のとき， $\frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{-\sin \theta}{-\theta} = \frac{\sin(-\theta)}{-\theta}$  より， $-\theta > 0$  の対し，上の議論を適用する．

# 三角関数の導関数（２） $\cos x$ の微分

問２） $f(x) = \cos x$ を微分しなさい。

（解） $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ より，**合成関数の微分公式**を利用する。

$g(t) = \sin t$ とおくと， $f(x) = g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ である．よって，

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) \\ &= -\left\{\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin x\right\} = -\{0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x\} \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

# 三角関数の導関数（3） $\tan x$ の微分

問3)  $f(x) = \tan x$  を微分しなさい。

(解)  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  より、**商の微分公式**を利用する。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

# 三角関数の導関数（４） その他の三角関数

---

- $\cot x := \frac{1}{\tan x}$
- $\sec x := \frac{1}{\cos x}$
- $\csc x := \frac{1}{\sin x}$  （または,  $\operatorname{cosec} x$ ）

問４）上の３つの関数を微分しなさい．