線形代数 II 演習

ー 第 6 回 余因子展開 ー

担当：佐藤 弘康

例題. 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

解. 行列式の性質を用いてなるべく 0 を多く含む行（または列）をつくるように行列を変形していき，その行（または列）に関して行列式を展開する.

(第 1 列を (-1) 倍して第 2 列，第 3 列にそれぞれ加える)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 12 & 1 & 2 & 5 \\ 11 & 5 & 4 & 6 \\ 10 & -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 1 & 5 \\ 11 & 5 & 2 & 6 \\ 10 & -1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

(第 3 列を (-1) 倍して第 2 列に加える)

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 12 & 0 & 1 & 5 \\ 11 & 3 & 2 & 6 \\ 10 & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

(第 3 列に関して展開)

$$= -2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 5 \\ 10 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

(第 2 列を (-1) 倍して第 1 列に, (-4) 倍して第 3 列にそれぞれ加える)

$$= -6 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

(第 1 行に関して展開)

$$= 6 \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} = 6(121 - 11) = 660.$$

問題 6.1. 次の行列の行列式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 4 & -7 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

問題 6.2. 次の $(n+1)$ 次正方行列の行列式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{pmatrix}$$

問題 6.3. n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} x^2+1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & x^2+1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & x^2+1 \end{pmatrix}$$

の行列式を $D_n(x)$ とおくとき，余因子展開を使って，

$$D_n(x) = (x^2+1)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}(x)$$

が成り立つことを示し，それを用いて $D_n(x)$ を求めよ．