問題 1.1. 次のベクトル $\vec{u},\vec{v}$ の (i) 長さ $|\vec{u}|, |\vec{v}|$, (ii) 内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ および (iii) $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角 θ の余弦 $(\cos\theta)$ の値を求めなさい.

(1) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に対し，$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = -2\vec{a} - \vec{b}$

問題 1.2. 次の空間ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ の外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を計算しなさい．また，内積 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$ および $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}$ を計算しなさい.

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

問題 1.3. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ に対し，次を計算しなさい.

(1) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ (2) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (3) $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

問題 1.4. 次の空間ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ に対し，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交し，長さが 1 のベクトルを求めなさい.

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

問題 1.5. 零ベクトルでないベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，次の問に答えなさい.[*1]

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ を 2 辺とする三角形の面積が $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ に等しいことを示しなさい.

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積が $|\vec{a}\times\vec{b}|$ に等しいことを示しなさい.

[*1] ヒント：$\triangle$OAB の面積は $\frac{1}{2}|\mathrm{OA}|\cdot|\mathrm{OB}|\sin\theta$ である（ただし $\theta = \angle\mathrm{AOB}$）. (1) はこれと内積の性質 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$, 三角関数の性質 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて示せ. (2) はベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を成分表示し，$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ を示せばよい.

$\boxed{\text{定義}}$ m 個の成分を持つベクトルを $\boldsymbol{m}$ 項数ベクトルとよぶ（平面ベクトルは 2 項数ベクトル，空間ベクトルは 3 項数ベクトル）．

1 次独立の同値条件

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$ を n 個の m 項数ベクトル

とする．また，ベクトル $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ を並べてできる (m, n) 行列を A とおく；

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

このとき，

$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$が <u>**1** 次独立</u>

$\Longleftrightarrow$ $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$

を満たす実数は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ のみ

$\Longleftrightarrow$ 連立方程式 $\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots + x_n a_{1n} = 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{2n} = 0 \\ \quad\vdots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \ldots + x_n a_{mn} = 0 \end{cases}$

の解は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ のみ（自明解しかを持たない）．

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = n$

（$m = n$ のとき）

$\Longleftrightarrow$ A は正則（つまり，A の逆行列 A^{-1} が存在する）

$\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

1 次従属の同値条件

$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ が <u>**1 次従属**</u>

$\iff$ $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ が 1 次独立でない

$\iff$ $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$

を満たす実数の組 $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ が存在する.

$$\iff \quad \text{連立方程式} \quad \begin{cases} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n} = 0 \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots + x_na_{2n} = 0 \\ \quad \vdots \\ x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \ldots + x_na_{mn} = 0 \end{cases}$$

の解は非自明解を持つ.

$\iff$ $\operatorname{rank} A < n$

（$m = n$ のとき）

$\iff$ A は正則行列ではない

$\iff$ $\det A = 0$

問題 1.6. 次のベクトルが 1 次従属か 1 次独立か調べなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

記号 m 項数ベクトルの全体を $\mathbf{R}^m$ と書く．

例 1.7. $\mathbf{R}^2$ は平面ベクトルの全体;

$$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \middle| \ a_1, a_2 \text{ は実数} \right\}$$

例 1.8. $\mathbf{R}^3$ は空間ベクトルの全体;

$$\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \middle| \ a_1, a_2, a_3 \text{ は実数} \right\}$$

定義 n 個の m 項数ベクトル $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ が次の 2 条件を満たすとき，これらを $\mathbf{R}^m$ の基底という．

- $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ は 1 次独立．
- 任意の m 項数ベクトル $\vec{v}$ は $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ の線形結合で表せる；
  $\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n$.

事実 1 次独立な m 個の m 項数ベクトル $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ は $\mathbf{R}^m$ の基底となる．

例 1.9. 任意の空間ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{R}^3$ の標準基底とよぶ（$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ が 1 次独立であることは明らかだろう）．

直線の媒介変数表示 (1)

2 点 $\vec{a},\vec{b}$ を通る直線上の点 $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a}) \qquad (t\ \text{は実数})$$

と表される．

問題 2.1. 2 点 $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を通る直線上の点を $\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えなさい．

(1) x と y を媒介変数 t を用いて表しなさい．

(2) (1) の 2 式から t を消去し，x と y の方程式を求めなさい．

直線の媒介変数表示 (2)

点 $\vec{a}$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v}$ の直線上の点 $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\vec{a}+t\,\vec{v} \qquad (t\ \text{は実数})$$

と表される．

問題 2.2. 点 $\vec{a}=\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である直線上の点を $\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えなさい．

(1) x と y を媒介変数 t を用いて表しなさい．

(2) (1) の 2 式から t を消去し，x と y の方程式を求めなさい．

解答は web サイトで公開する；
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/im3.html

直線の方程式

点 $\vec{a}$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v}$ の直線上の点 $\vec{p}$ とする．

- （平面 $\mathbf{R}^2$ の場合）
  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．このとき，x, y は以下の方程式を満たす；
  $$v_2(x - a_1) = v_1(y - a_2).$$

- （空面 $\mathbf{R}^3$ の場合）
  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．$v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, v_3 \neq 0$ のとき，x, y, z は以下の方程式を満たす；
  $$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

問題 2.3. 空間内の 2 点 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を通る直線上の点を $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．

(1) x, y, z を媒介変数 t を用いて表しなさい．
(2) (1) の 3 つの各式を $t = \cdots$ の形に変形しなさい．

問題 2.4. 空間内の 2 点 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を通る直線上の点を $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．このとき，x, y, z を媒介変数 t を用いて表しなさい．

平面の媒介変数表示 (1)

3 点 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を通る平面上の点 $\vec{p}$ は

$$\vec{p} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a}) \qquad (s, t \text{ は実数})$$

と表される．ただし，3 点 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一直線上にはないものとする．

問題 2.5. 3 点 $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を通る平面上の点を $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．x, y, z を媒介変数 s, t を用いて表しなさい．

平面の媒介変数表示 (2)

点 $\vec{a}$ を通り，ベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ で生成される平面上の点 $\vec{p}$ は

$$\vec{p} = \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v} \qquad (s, t \text{ は実数})$$

と表される．ただし，$\vec{u}, \vec{v}$ は 1 次独立とする．

問題 2.6. 点 $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を通り，ベクトル $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ で生成される平面上の点を $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．x, y, z を媒介変数 t を用いて表しなさい．

問題 2.5, 2.6 の解は問題 2.8 の 3 式．また，問題 2.7 (2) と問題 2.8 (3) は同じ方程式となる．（解答は省略する）

平面の方程式 (1)

点 $\vec{a}$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n}$ の平面上の点 $\vec{p}$ とするとき，

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$$

が成り立つ．

問題 2.7. $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ とする．次の問に答えなさい．

(1) $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ とおく．ベクトル $\vec{n}$ を成分表示しなさい．

(2) $\vec{a}$ を通り，$\vec{n}$ を法線ベクトルする平面上の点を $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とする．このとき，x,y,z が満たす方程式を求めなさい．

平面の方程式 (2)

実数 a,b,c,d に対し，方程式

$$ax+by+cz=d$$

を満たす点 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ の集合は $\mathbf{R}^3$ 内の平面となる．

問題 2.8. 次の 3 式

$$x=-1+3s+t, \tag{2.1}$$
$$y=-2s+2t, \tag{2.2}$$
$$z=2-s-3t \tag{2.3}$$

について，以下の問に答えなさい．

(1) (2.1) 式と (2.2) 式から t を消去し，s を x,y を用いて表しなさい．

(2) (2.1) 式と (2.2) 式から s を消去し，t を x,y を用いて表しなさい．

(3) (1)(2) で求めた s,t の式を (2.3) に代入し，x,y,z の関係式を求めなさい．

球面のベクトル方程式

与えられたベクトル $\vec{c}$ と正の数 r に対し，

$$|\vec{p}-\vec{c}|=r \tag{2.1}$$

を満たす点 $\vec{p}$ の全体を $\vec{\boldsymbol{c}}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{r}$ の球面という．球面とは点 $\vec{c}$ からの距離が一定値 r である点の集合である．

問題 2.9. $\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ として，(2.1) を x,y の方程式で表しなさい[*1]．

問題 2.10. $\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ として，(2.1) を x,y,z の方程式で表しなさい．

球面の媒介変数表示

ここでは原点 O を中心とし，半径 r の球面を考える．

- 平面 $\mathbf{R}^2$ 内の球面（円周）の媒介変数表示は

$$\begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

  で与えられる．ただし，$0 \leq t \leq 2\pi$.

- 空間 $\mathbf{R}^3$ 内の球面の媒介変数表示は

$$\begin{pmatrix} r\cos t\ \cos s \\ r\sin t\ \cos s \\ r\sin s \end{pmatrix}.$$

  で与えられる．ただし，$0 \leq t \leq 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq s \leq \dfrac{\pi}{2}$.

問題 2.11. $x=r\cos t\ \cos s$, $y=r\sin t\ \cos s$, $z=r\sin s$ が方程式

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

を満たすことを示しなさい．

[*1] $\mathbf{R}^2$ 内の球面は円周に他ならない．

例題 3.1. 方程式 $y = x + 1$ で表される $\mathbf{R}^2$ 内の直線を l とする．線形変換 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ による l の像がどのような図形か答えなさい．

解. l の定義式において $x = t$ とすると $y = t + 1$ であるから，l 上の点は媒介変数 t を用いて $\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$ と表すことができる（直線 l の媒介変数表示）．この点を A で線形変換すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に移る．これは点 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を通り，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線を表す（これを l' とおく）．ここで，l' の方程式を求めてみよう．l' 上の点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ t-1 \end{pmatrix},$$

つまり $x = 3t + 2$, $y = t - 1$ と書ける．この 2 式から t を消去すると $x - 3y = 5$ を得る．

以上のことから，<u>**直線 $\boldsymbol{y = x + 1}$ は線形変換 $\boldsymbol{A}$ により直線 $\boldsymbol{x - 3y = 5}$ に移る**</u>．

問題 3.2. 線形変換 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えなさい．

(1) 点 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と点 $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ の A による像 $A\vec{a}$, $A\vec{b}$ を求めなさい．

(2) 2 点 $\vec{a}$, $\vec{b}$ を通る直線を l とし，l の A による像を l' とする．l' がどのような図形か答えなさい．l' が直線の場合は，直線の（x, y に関する）方程式を求めなさい．

(3) 2 点 $A\vec{a}$, $A\vec{b}$ を通る直線の方程式を求めなさい．

問題 3.3. 2 点 $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を通る直線を l とおく．線形変換 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ による l の像がどのような図形になるか答えなさい．

拡大と縮小

- $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  (1) $k > 1$ のとき，x 軸方向の拡大
  (2) $0 < k < 1$ のとき，x 軸方向の縮小
  (3) $k < 0$ のとき，x 軸方向に "裏返して" 拡大，縮小
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
  (1) $k > 1$ のとき，y 軸方向の拡大
  (2) $0 < k < 1$ のとき，y 軸方向の縮小
  (3) $k < 0$ のとき，y 軸方向に "裏返して" 拡大，縮小

せん断

行列 $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ によって定まる線形変換をせん断という（$k \in \mathbf{R}$）．

問題 3.4. *Mathematica* 実習で使ったノートブック `im3-ex3.2.nb` の 3.1) を利用し，せん断とはどのような変換か調べなさい．

$\mathbf{R}^2$ の原点を中心とする回転

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

問題 3.5. 三角関数の定義と性質を用いて，以下のことを確かめなさい．

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を原点を中心に θ だけ回転すると $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ となる．

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を原点を中心に θ だけ回転すると $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ となる．

問題 3.6. *Mathematica* 実習で使ったノートブック `im3-ex3.2.nb` の 3.2) を利用し，R_θ が回転変換となることを確かめなさい．

線形変換 R_θ が回転を表すことの説明

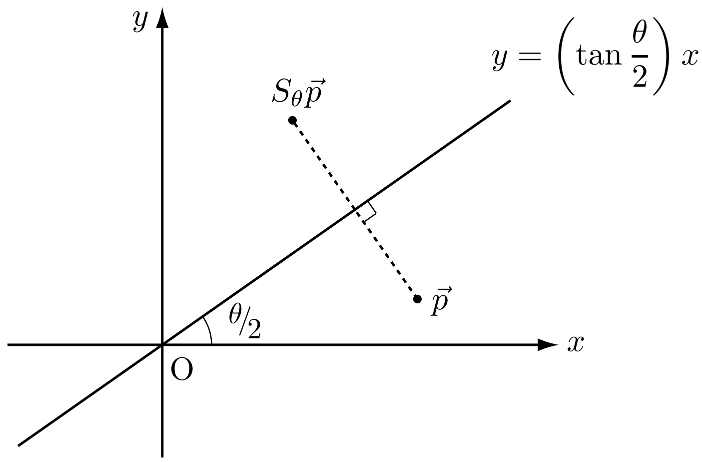
どんな平面ベクトル $\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ も基本ベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を用いて $\vec{p} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ と表すことができる．ここで

$$R_\theta \vec{p} = R_\theta(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) = R_\theta(a\vec{e}_1) + R_\theta(b\vec{e}_2) = aR_\theta\vec{e}_1 + bR_\theta\vec{e}_2$$

となるが，$aR_\theta\vec{e}_1$，$bR_\theta\vec{e}_2$ はそれぞれ $a\vec{e}_1$，$b\vec{e}_2$ を θ だけ回転させたベクトルだから（問題 3.4 より），その和 $(aR_\theta\vec{e}_1 + bR_\theta\vec{e}_2)$ も $(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2)$ を θ だけ回転させたベクトルである．したがって，R_θ は θ-回転を表す行列である．

直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right) x$ に関する鏡映変換

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$



問題 **3.7.** 鏡映変換[1] S_θ とはどのような変換か？ その定義を述べなさい

[1] 「反射」ともいう．*Mathematica* 実習で使ったノートブック `im3-ex3.2.nb` の 3.3) を参照．

$\mathbf{R}^3$ の拡大・縮小

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad (k \in \mathbf{R})$$

$\mathbf{R}^3$ の回転変換

(1) z 軸を回転軸とする θ-回転；

$$R_{z(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) x 軸を回転軸とする θ-回転；

$$R_{x(\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(3) y 軸を回転軸とする θ-回転；

$$R_{y(\theta)} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

(4) 原点を通り，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の直線を回転軸とする θ-回転；

$$R_{(a,b,c;\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ca + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ca - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix}$$

ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

問題 **3.8.** 次の問に答えなさい.

(1) $R_{(a,b,c;\theta)}$ の式に $a = 1,\ b = 0,\ c = 0$ を代入すると $R_{x(\theta)}$ に等しくなることを確かめなさい.

(2) (1) を参考にして，$R_{(0,1,0;\theta)} = R_{y(\theta)}$，$R_{(0,0,1;\theta)} = R_{z(\theta)}$ を示しなさい.

$\mathbf{R}^3$ のせん断

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbf{R})$$

問題 3.9. 平面 $\mathbf{R}^2$ のせん断（問題 3.4 および `im3-ex3.2.nb` の 3.1)）を参考にして，空間 $\mathbf{R}^3$ のせん断がどのような変換なのか考えなさい．

$\mathbf{R}^3$ 内の平面 $ax + by + cz = 0$ に関する鏡映変換

$$S_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$$

ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

問題 3.10. 鏡映変換を表す行列 $S_{(a,b,c)}$ について以下の問に答えなさい．

(1) $S_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となることを確かめなさい．

(2) (1) を参考にして，$S_{(1,0,0)}$，$S_{(0,1,0)}$ を書きなさい．

問題 3.11. 鏡映変換 $S_{(a,b,c)}$（ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$）について，以下の問に答えなさい．

(1) $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおき，$S_{(a,b,c)}\vec{p}$ を成分表示しなさい．

(2) ベクトル $(\vec{p} - S_{(a,b,c)}\vec{p})$ が $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 平行であることを確かめなさい．

(3) 点 $\vec{p}$ と点 $S_{(a,b,c)}\vec{p}$ の中点 $\dfrac{1}{2}\left(\vec{p} + S_{(a,b,c)}\vec{p}\right)$ が平面 $ax + by + cz = 0$ 上の点であることを確かめなさい．

準備（復習事項）

固有値・固有ベクトルの計算には「連立方程式の解法」に関するいくつかの事実を使います．線形代数の教科書等を参考にして，以下のことを復習しておいてください．

- 「連立 1 次方程式は行列とベクトルを用いて

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{4.1}$$

  と表すことができる．つまり、連立方程式の解を求めることは，(4.1) 式のベクトル $\vec{x}$ を求めることと解釈できる」．この事実を理解した上で，行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\vec{\boldsymbol{b}}$ がどのようなものか説明しなさい．

- 斉次連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ [*1]の自明解，非自明解とはどのような解か説明しなさい．

- 斉次連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ に対し，非自明解が存在するための条件[*2]を答えなさい．

[*1] すべての式の定数項が 0 である連立方程式

[*2] 行列 A に関する条件

固有値と固有ベクトル

n 次正方行列 A に対し，

$$A\vec{v} = k\vec{v}$$

を満たす数 k を $\boldsymbol{A}$ の固有値，$\vec{v}\,(\neq \vec{0})$ を固有値 $\boldsymbol{k}$ に関する $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルとよぶ.

- 固有ベクトルは連立方程式 $(kE_n - A)\vec{x} = \vec{0}$ の $\vec{0}$ でない解 (非自明解) である.
- 固有値は $\det(kE_n - A) = 0$ を満たす数である.

固有値，固有ベクトルの求め方

(1) $\Phi_A(t) = \det(tE_n - A)$ を計算する（これを固有多項式という）.

(2) $\Phi_A(t) = 0$ の解 $t = k$ を求める（この解 k が A の固有値 である）.

(3) (2) で求めた各 k に対し，連立方程式 $(kE_n - A)\vec{x} = \vec{0}$ の非自明解 $\vec{x} = \vec{v}$ を求める（この解 $\vec{v}$ が A の固有値 k に関する固有ベクトル である）.

問題 4.1. 行列の $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えなさい.

(1) 固有多項式 $\Phi_A(t) = \det(t\,E_2 - A)$ を求めなさい.

(2) 2 次方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解 k を求めなさい.

(3) 各 k に対し，連立方程式 $(kE_2 - A)\vec{x} = \vec{0}$ の解 $\vec{v}_k$ を求めなさい.

(4) 各 k に対し，$A\vec{v}_k = k\vec{v}_k$ が成り立つことを確かめなさい.

問題 4.2. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

問題 5.1. 次の方程式とベクトル $\vec{v}$ に対し，方程式が表す図形（方程式を満たす点の集合）を $\vec{v}$ 方向に平行移動したときの図形の方程式を求めなさい．

(1) $2x^2 + y^2 + 4x - 2y - 2 = 0,\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $3x^2 - 2y^2 + 4x - 2y - 3 = 0,\ \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

問題 5.2. 次の方程式が表す図形を平行移動して方程式をできるだけ簡単な形にしたい．

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = d$$

という形にするためにはどの方向 $\vec{v}$ に平行移動すればよいか答えなさい[*1]．また，$\vec{v}$ 方向に平行移動した後の図形の方程式を求めなさい．

(1) $x^2 - y^2 + 3z^2 + 4x - y + 2z = 0$

(2) $-x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 2y + z - 3 = 0$

問題 5.3. 平面 $2x - y + 3z = 3$ を $\vec{v}$ 方向に平行移動したら同じ平面に移った．このベクトル $\vec{v}$ をひとつ挙げなさい．

[*1] 問題 5.1 を参考にせよ（ヒント：平方完成）．

□ 復習（行列の転置）

問題 5.4. 次の行列 A, B に対して，(i) ${}^tA$，(ii) ${}^tB$，(iii) AB，(iv) ${}^t(AB)$，(v) ${}^tB\,{}^tA$ を計算しなさい[*1].

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

問題 5.5. 次の問に答えなさい.

(1) 次のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対し，ベクトルの長さ $|\vec{a}|^2, |\vec{b}|^2, |\vec{c}|^2$，および内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}, \vec{b}\cdot\vec{c}, \vec{a}\cdot\vec{c}$ を計算しなさい.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) 次の行列 A に対し[*2]，行列の積 ${}^tA\,A$ を求めなさい.

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) (1) で計算した値と，(2) で求めた行列の成分を比較し，

$$ {}^tA\,A = \begin{pmatrix} |\vec{a}|^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & |\vec{b}|^2 & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} & |\vec{c}|^2 \end{pmatrix} $$

が成り立っていることを確かめなさい.

[*1] 一般に ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つ.

[*2] (2) の行列 A は (1) のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を並べてできる行列である.

□ 直交行列

問題 5.6. 次の行列 A に対し，$\underline{{}^tA\,A = A\,{}^tA = E_3 \text{ が成り立つこと}}$ を計算して確かめなさい．また $\underline{A \text{ の行列式}}$ を求めなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ [*3]

問題 5.7. （鏡映変換を与える行列について）[*4] 行列

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} {}^{*5}$$

が定める線形変換について，以下の問に答えなさい．

(1) S_θ が直交行列であることを確かめなさい．

(2) $\vec{p} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に対し，線形変換 S_θ による像 $S_\theta\vec{p}$ を X, Y, θ を用いて表しなさい．

(3) $\vec{p}$ と $S_\theta\vec{p}$ の中点 $\vec{m}$ を X, Y, θ を用いて表しなさい．

(4) $\vec{m}$ は直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ 上の点であることを示しなさい．

(5) ベクトル

$$\vec{p} - S_\theta\vec{p}$$

は直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \tan\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ と直交することを示しなさい．[*6]．

[*3] y 軸を回転軸とする θ-回転．

[*4] 発展問題．ぜひチャレンジしてください．

[*5] 回転変換を与える行列 $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ との成分の符号の違いに注意せよ．

[*6] (4)(5) の結果から，S_θ は直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称変換を与える．

行列の対角化

- n 次正方行列 A が対角化可能とは，
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & k_n \end{pmatrix}$$
となるような正則行列 P が存在するときをいう．
- 上式右辺の対角行列の対角成分 $k_1, \ldots, k_n$ は A の固有値である．
- 行列 P は A の固有ベクトルを並べた行列である；
$P = (\vec{v}_1 \ \cdots \ \vec{v}_n)$ とおくと，$A\vec{v}_i = k_i\vec{v}_i$ $(i = 1, 2)$.
- 任意の 対称行列は対角化可能 である．特に，行列 P として 直交行列 を選ぶことができる（つまり，対称行列 A に対して，${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P が必ず存在する）．

問題 6.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$ に対して次の問に答えなさい．

(1) A の固有値 k_1, k_2 を求めなさい．

(2) A の各固有値 k_i に関する固有ベクトル $\vec{v}_i$ を求めなさい（$i = 1, 2$）．

(3) $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ が直交することを確かめなさい．

(4) $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ を長さが 1 になるように正規化しなさい．

(5) (4) で求めた 2 つのベクトルを並べてできる行列 P が直交行列になることを確かめなさい．

(6) (5) で構成した行列 P に対し，${}^tPAP$ が対角行列となることを確かめなさい．さらに対角行列の対角成分が A の固有値となること確かめなさい．

問題 6.2. 問題 6.1 を参考にして，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化しなさい[*1]．

[*1] ${}^tPAP$ が対角行列となるような 直交行列 P と その対角行列 を求めること

2 次式の行列表示

2 次式 $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ は，行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + c = 0 \tag{6.1}$$

と表すことができる．つまり，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおくことにより

$${}^t\vec{x}A\vec{x} + {}^t\vec{x}\,\vec{b} + c = 0 \tag{6.2}$$

と書ける（(6.2) の左辺は行列の積であることに注意せよ）．また，内積を用いると

$$\vec{x}\cdot(A\vec{x}) + \vec{x}\cdot\vec{b} + c = 0 \tag{6.3}$$

と書ける．

問題 6.3. 方程式

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - y + 1 = 0 \tag{6.4}$$

が表す図形がどのような形か知りたい．以下の問いに答えなさい．

(1) (6.4) 式を (6.1) のように行列を用いて表しなさい．

(2) 直交行列 $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対し，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換する．(6.4) 式を $\bar{x}\bar{y}$ 座標で表しなさい．

問題 6.4. 方程式

$$x^2 + 6xy + y^2 - x - y = 0 \tag{6.5}$$

が表す図形がどのような形か知りたい．以下の問いに答えなさい．

(1) (6.5) 式を (6.1) のように行列を用いて表しなさい．

(2) 直交行列 $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換する．(6.5) 式を $\bar{x}\bar{y}$ 座標で表しなさい．

(3) さらに $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}$ と座標変換する．(2) で求めた $\bar{x}, \bar{y}$ の方程式を $\tilde{x}\tilde{y}$ 座標で表しなさい．

2 次曲面の分類

2 次式は適当な座標変換により次の 5 つの型に変換できる．

(1) $ax^2 + by^2 = 1$ $(a, b > 0)$：楕円
(2) $ax^2 - by^2 = 1$ $(a, b > 0)$：双曲線
(3) $y = ax^2$ $(a \neq 0)$：放物線
(4) $ax^2 + by^2 = 0$ $(a, b > 0)$：点
(5) $ax^2 - by^2 = 0$ $(a, b > 0)$：直線

問題 6.5. 問題 6.3 および問題 6.4 の 2 次式が表す 2 次曲線がどのような図形か答えなさい．

問題 6.6. 2 次曲線

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2\sqrt{3}x + 2y + 1 = 0$$

がどのような図形か答えなさい．

円錐曲線

空間 $\mathbf{R}^3$ 内の円錐を適当な平面で切った切り口は 2 次曲線のいずれかである．このことから，2 次曲線は円錐曲線ともよばれる．

問題 6.7. 点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐

$$x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0 \tag{6.6}$$

をある平面で切り，その切り口の形を調べたい．次のように座標変換するとき，(i) (6.6) を $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ で表しなさい．さらに，(ii) $\bar{z} = 0$ を代入し，$\bar{x}, \bar{y}$ の方程式を導きだし，(iii) その方程式が表す図形が何か答えなさい．

(1) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

2 次曲面

変数が 3 つの 2 次式

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \quad (6.1)$$

が与える空間 $\mathbf{R}^3$ 内の図形を **2** 次曲面とよぶ.

2 次曲面の分類（step1）

2 次式 (6.1) は行列，ベクトルを用いて

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + c = 0 \quad (6.2)$$

と表すことができる．係数行列 A の対角化（直交変換）と適当な平行移動により，以下の 3 つの型に分類できる.

(1) A の固有値はすべて非零のとき，

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 + \gamma = 0 \quad (6.3)$$

(2) A の固有値 0 に対応する固有ベクトルが 1 つしかないとき，

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \beta_3 z + \gamma = 0 \quad (6.4)$$

(3) A の固有値 0 に対応する固有ベクトルで線形独立なベクトルが 2 つあるとき，

$$\alpha_1 x^2 + \beta_2 y + \gamma = 0 \quad (6.5)$$

2 次曲面の分類（step2）：(1) の場合

(6.3) において

- $\gamma \neq 0$ のとき，$\alpha'_1 x^2 + \alpha'_2 y^2 + \alpha'_3 z^2 = 1$． $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ の符号が
  (1-1-1) すべて正のとき，楕円面.
  (1-1-2) 負のものが 1 つのとき，一葉双曲面.
  (1-1-3) 負のものが 2 つのとき，二葉双曲面.
- $\gamma = 0$ のとき，$\alpha'_1 x^2 + \alpha'_2 y^2 + \alpha'_3 z^2 = 0$． $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ の符号が
  (1-2-1) すべて同じとき，原点.
  (1-2-2) 異符号のものを含むとき，楕円錐.

2 次曲面の分類（step3）：(2) の場合

(6.4) において

- $\beta_3 \neq 0$ のとき，$\alpha'_1 x^2 + \alpha'_2 y^2 + z = 0$． α'_1, α'_2 の符号が
  (2-1-1) すべて正のとき，楕円放物面.
  (2-1-2) 正と負のとき，双曲放物面.
- $\beta_3 = 0$ のとき，
  - $\gamma \neq 0$ のとき，$\alpha'_1 x^2 + \alpha'_2 y^2 = 1$． α'_1, α'_2 の符号が
    (2-2-1) すべて正のとき，楕円柱面.
    (2-2-2) 正と負のとき，双曲線柱面.
  - $\gamma = 0$ のとき，$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 = 0$． α_1, α_2 の符号が
    (2-2-1) すべて同じとき，直線.
    (2-2-2) 異符号のものを含むとき，交差する 2 つの平面.

2 次曲面の分類（step4）：(3) の場合

(6.5) において

- $\beta_2 \neq 0$ のとき，$\alpha'_1 x^2 + y = 0$.
  (3-1-1) 放物線柱面.
- $\beta_2 = 0$ のとき，$\alpha_1 x^2 + \gamma = 0$.
  (3-2-1) $\gamma \neq 0$ のとき，平行する 2 つの平面.
  (3-2-2) $\gamma = 0$ のとき，1 つの平面.

直交座標系と同次座標系

直交座標 同次座標

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} t\,x_1 \\ t\,x_2 \\ t\,x_3 \\ t \end{bmatrix} \right)$$

線形変換・平行移動の同次座標表示

空間内の点 $\vec{x}, \vec{y}$ の同時座標表示をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

とする．このとき，

- 3 次正方行列 A に対し，

$$\vec{y} = A\vec{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:c} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{bmatrix}$$

- 空間ベクトル $\vec{v}$ に対し，

$$\vec{y} = \vec{x} + \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:c} & E_3 & & \vec{v} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{bmatrix}$$

問題 7.1. 次の各式の 等号が成り立つか確かめなさい． 等号が成り立たない場合は 右辺を正しく書き直しなさい．ただし，A を 3 次正則行列，$\vec{v}$ を空間ベクトル（3×1 行列）とする．

$$(1)\quad \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right)$$

$$(2)\quad \left(\begin{array}{c|c} E_3 & \vec{v} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & -\vec{v} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right)$$

$$(3)\quad \left(\begin{array}{c|c} E_3 & \vec{v} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & \vec{v} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right)$$

$$(4)\quad \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_3 & \vec{v} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & \vec{v} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right)$$

$$(5)\quad \left(\begin{array}{c|c} A & \vec{v} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -\vec{v} \\ \hline \begin{matrix}0&0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right)$$

透視投影の同次座標表示

視点を S，投影面を平面 $z=0$ とする透視投影を φ_S とする．S の同次座標表示を $S=\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\sigma_0\end{bmatrix}$ とし，点 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_0\end{bmatrix}$ の φ による像を $B=\varphi(A)=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_0\end{bmatrix}$ とする．
このとき，同次座標系において透視投影は行列の積で表すことができる；

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-\sigma_3 & 0 & \sigma_1 & 0\\0 & -\sigma_3 & \sigma_2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & \sigma_0 & -\sigma_3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_0\end{bmatrix} \tag{7.1}$$

平行投影の同次座標表示

投影面を平面 $z=0$ とするベクトル $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ 方向への平行投影を $\varphi_{\vec{v}}$ とし，点 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_0\end{bmatrix}$ の $\varphi_{\vec{v}}$ による像を $B=\varphi_{\vec{v}}(A)=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_0\end{bmatrix}$ とする．このとき，同次座標系において平行投影は行列の積で表すことができる；

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-v_3 & 0 & v_1 & 0\\0 & -v_3 & v_2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -v_3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_0\end{bmatrix} \tag{7.2}$$

問題 7.2. 透視投影の同次座標表示を導く過程[*1]を参考にして，平行投影の同時座標表示 (7.2) を導きなさい．

[*1] 授業ノートを参考にしなさい．

例題 7.3. $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ を空間 $\mathbf{R}^3$ 内の点とする．S を視点とし，投影面を平面 $z = 0$ とする透視投影を φ_S とする．以下の問に答えなさい．

(1) 点 S, A を同次座標で表しなさい．

(2) 同次座標系において透視投影 φ_S を表す 4 次正方行列を書きなさい．

(3) 透視投影 φ_S による点 A の像 B を求め，同次座標で表しなさい．

(4) B を直交座標に書き直しなさい．

解. (1) 例えば $S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ など．[*2]．

(2) (1) で定めた S の同次座標に対して，$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(3) $$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}}$$

(4) 同次座標から直交座標に直すには，第 4 の座標で他の座標の値を割れば良い．したがって，$B = \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$ [*3].

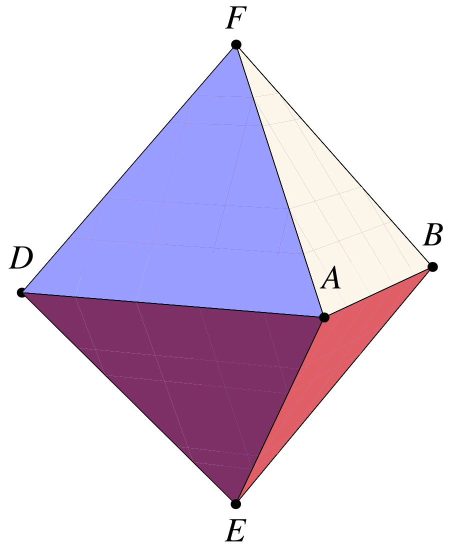
[*2] 同次座標系による表し方は一意的ではない．A についても S と同様に第 4 の座標を 1 としてよいが，ここではすべての座標の値が整数となるようにした（整数の方が計算が簡単になるのため）．

[*3] (1) から (3) までの解は同次座標の決め方に依るが，投影像の直交座標表示は一意的に決まる．

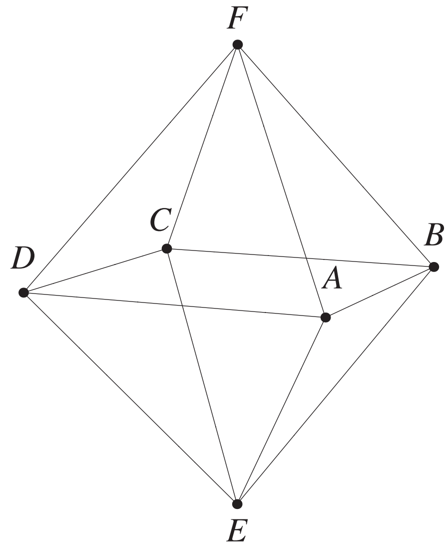
問題 7.4. 視点が $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$，投影面が平面 $z = 0$ の透視投影を φ_S とする．6 個の点

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

を頂点とする 8 面体（下図参照）を φ_S で移した像（図形）のワイヤーフレームを xy-平面に書きなさい.



サーフェイス モデル



ワイヤーフレーム モデル

一般の平面への透視投影（直交座標）

視点が $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$，投影面が $\pi : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ の透視投影を $\Phi_S : \mathbf{R}^3 \to \pi$ とする．このとき，点 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ の像 $\Phi_S(A)$ は

$$\Phi_S(A) = \begin{pmatrix} \frac{\delta(a_1-s_1)+\beta(s_1a_2-s_2a_1)+\gamma(s_1a_3-s_3a_1)}{\alpha(a_1-s_1)+\beta(a_2-s_2)+\gamma(a_3-s_3)} \\ \frac{\delta(a_2-s_2)+\alpha(s_2a_1-s_1a_2)+\gamma(s_2a_3-s_3a_2)}{\alpha(a_1-s_1)+\beta(a_2-s_2)+\gamma(a_3-s_3)} \\ \frac{\delta(a_3-s_3)+\alpha(s_3a_1-s_1a_3)+\beta(s_3a_2-s_2a_3)}{\alpha(a_1-s_1)+\beta(a_2-s_2)+\gamma(a_3-s_3)} \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

で与えられる．

問題 7.5. 投影面が平面 $z = 0$ の場合，投影像は直交座標でどのようにを表されたか確認しなさい（授業ノートを参照しなさい）．さらに，(7.1) 式と比較しなさい（$\alpha = 1, \beta = \gamma = \delta = 0$ のとき，式が一致することを確かめなさい）．

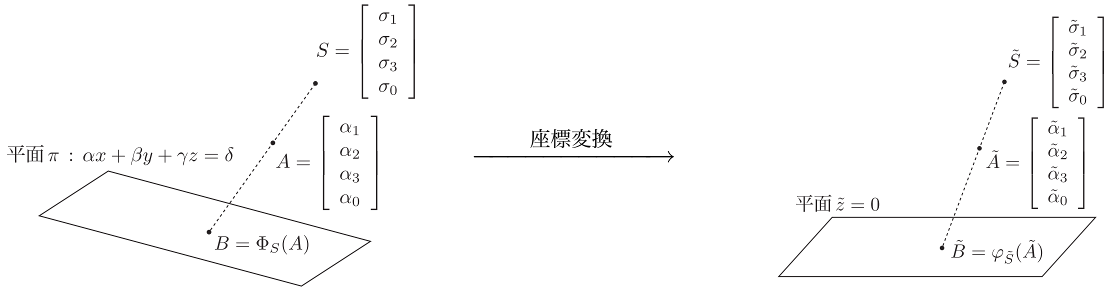
一般の平面への透視投影（同時座標：考え方）

(1) $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ が $\tilde{z} = 0$ となるように座標変換する；

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \vec{v} \iff \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & P & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ \tilde{X}_0 \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

(2) $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標で平面 $\tilde{z} = 0$ へ透視投影する．

(3) (1) の座標変換の逆変換により xyz-座標に戻す．



一般の平面への透視投影（同時座標：手順）

(1) 視点 S を $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標で表す；$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_0\end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & P & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{bmatrix}\tilde{\sigma}_1\\ \tilde{\sigma}_2\\ \tilde{\sigma}_3\\ \tilde{\sigma}_0\end{bmatrix}$．つまり，

$$\begin{bmatrix}\tilde{\sigma}_1\\ \tilde{\sigma}_2\\ \tilde{\sigma}_3\\ \tilde{\sigma}_0\end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & {}^tP & & -{}^tP\vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_0\end{bmatrix}.$$

(2) 点 A も同様に $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標で表す.

(3) $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標における平面 $z=0$ への透視投影を表す 4 次正方行列をつくる；

$$\varphi_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_3 & 0 & \tilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_3 & \tilde{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_0 & -\tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix}.$$

(4) $\tilde{B} = \varphi_{\tilde{S}}(\tilde{A})$ を求める.

(5) $\tilde{B}$ を逆変換で xyz-座標に戻す.

xyz-座標における点 A の同次座標表示を $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_0\end{bmatrix}$ とすると，(2)〜(4) の手順は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & P & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_3 & 0 & \tilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_3 & \tilde{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_0 & -\tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} & {}^tP & & -{}^tP\vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_0\end{bmatrix}$$

を計算していることに他ならない.

問題 7.6. 視点が $S = \begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$，投影面が方程式 $3x+2y+2z=-1$ で与えられる平面の透視投影を Φ_S とする．問題 7.4 の 6 個の点 A,B,C,D,E,F を Φ_S で移した像の座標を求めなさい.