$\boxed{\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ の考え方}}$

今，すべての自然数 $1, 2, 3, \ldots$ により番号付けられた実数の集合 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ が与えられているとする．和集合 $A_1 \cup A_2$ の定義は

$$A_1 \cup A_2 = \{x \,|\, x \in A_1 \text{ または } x \in A_2\}$$

であった．$B = A_1 \cup A_2$ とおくと $B \cup A_3$ も同様に考えることができ，

$$\begin{aligned} B \cup A_3 &= \{x \,|\, \underset{\sim\sim\sim}{x \in B} \text{ または } x \in A_3\} \\ &= \{x \,|\, \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(x \in A_1 \text{ または } x \in A_2)} \text{ または } x \in A_3\} \\ &= \{x \,|\, x \in A_1 \text{ または } x \in A_2 \text{ または } x \in A_3\} \end{aligned}$$

と書ける．ここで，$B \cup A_3$ を $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ と書こう．つまり

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{3} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ &= \{x \,|\, x \text{ は } A_1,\ A_2,\ A_3 \text{ のいずれかに含まれる }\} \\ &= \{x \,|\, x \in A_i \text{ を満たす } i \text{ が存在する } (i \text{ は } 1, 2, 3 \text{ のいずれか})\}. \end{aligned}$$

同様に，$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{4} A_i (= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$，$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{5} A_i$，$\ldots$ 等も考えることができる．この考えを一般の n に対して拡張すると

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\ &= \{x \,|\, x \in A_i \text{ を満たす } i \,(i = 1, 2, \ldots, n) \text{ が少なくとも一つ存在する }\} \end{aligned}$$

となる．さらに集合の個数を無限個に拡張したのが $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ である；

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \,|\, x \in A_i \text{ を満たす } i (i \in \mathbf{N}) \text{ が少なくとも一つ存在する }\}.$$