数学クォータ科目「応用解析」第 7 回 / 複素関数論（2）

正則関数

佐藤 弘康　/ 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 複素数, 虚数単位, 実部と虚部, 純虚数, 複素共役
- 複素数平面, 複素数の絶対値と偏角, 極形式

今回の授業で理解してほしいこと

- 複素関数とその実部, 虚部
- 複素関数の微分
- 正則関数とコーシー・リーマンの方程式
- 正則関数の例（有理関数, 指数関数, 三角関数, 対数関数）

複素関数

- 複素数の値をとる２つの変数 z と w がある（複素変数）．
- z の値に対して, w の値が唯一つ定まるとき,「w は z の**複素関数**である」という.
- $z = x + yi$ とおけば, w は２つの独立変数（実変数）x, y の関数 $w = f(x, y)$ と考えられる.
- さらに，$f(x, y)$ は複素数なので, 実部と虚部に分けることができる.

$$\boxed{f(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y)}$$

- このように，複素関数 $w = f(z)$ は, ２つの２変数関数 $u(x, y), v(x, y)$ の組と考えることもできる.

複素関数の例

例１） $f(z) = z^2$

$$(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

より, $f(z)$ の実部は $u(x, y) = x^2 - y^2$, 虚部は $v(x, y) = 2xy$ である.

例２） $f(z) = \dfrac{1}{z}$

$$\frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

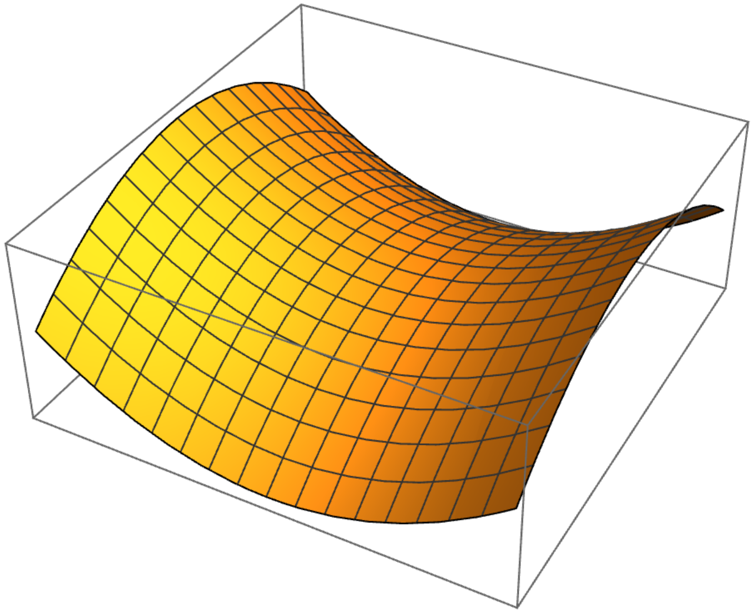
より, $f(z)$ の実部は $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, 虚部は $v(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ である.

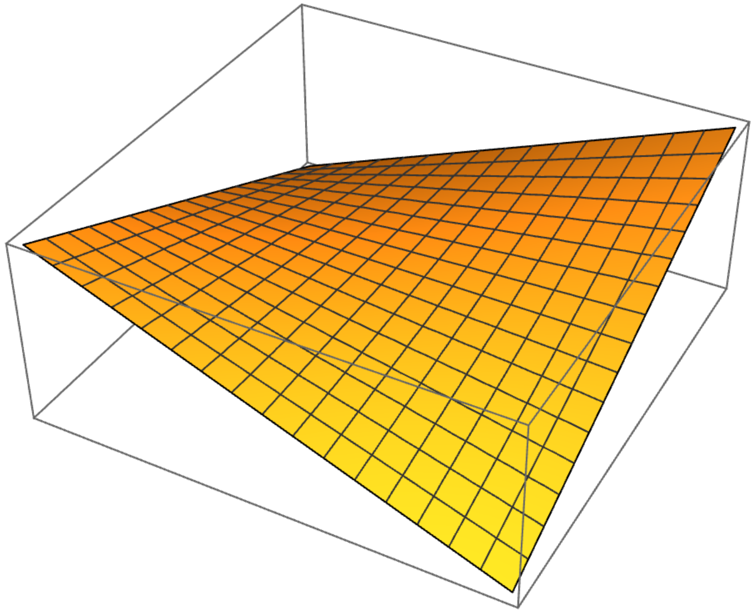
複素関数の可視化

- 実数値関数のときのような関数のグラフを描くことはできない.

(1) 実部と虚部をそれぞれ ２変数関数のグラフ曲面 として可視化する.

例１） $f(z) = z^2$：$u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$



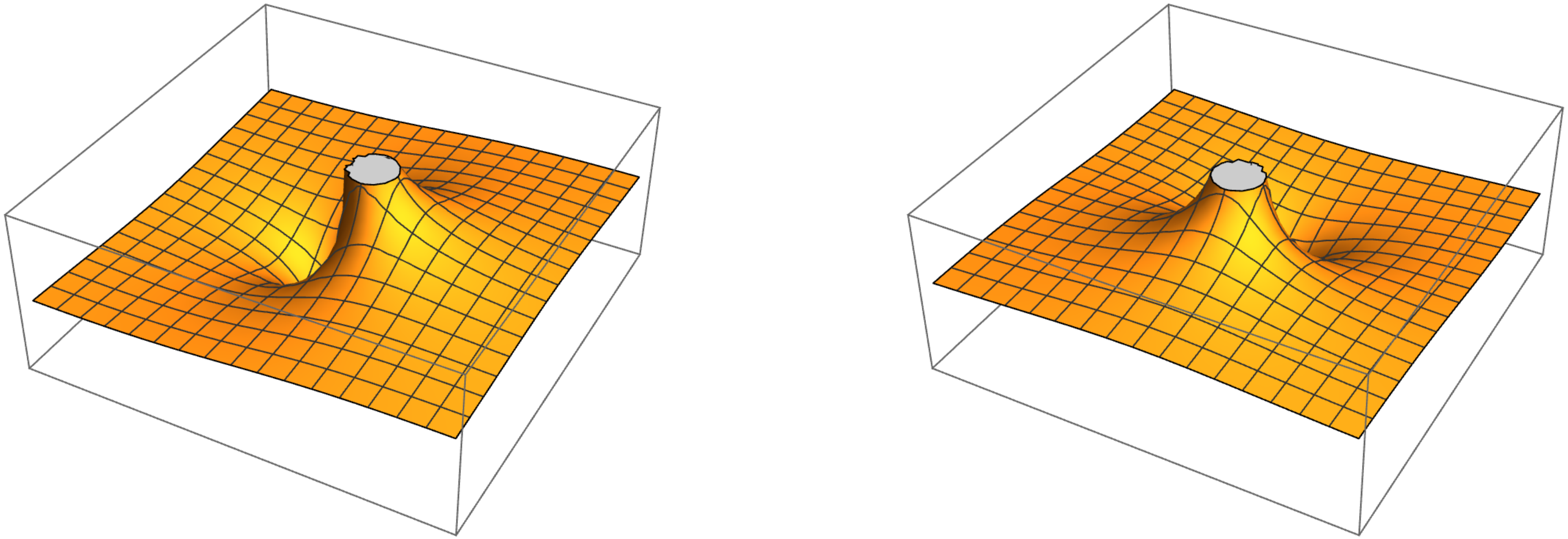


複素関数の可視化

- 実数値関数のときのような関数のグラフを描くことはできない.

(1) 実部と虚部をそれぞれ ２変数関数のグラフ曲面 として可視化する.

例２） $f(z) = \dfrac{1}{z}$：$u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

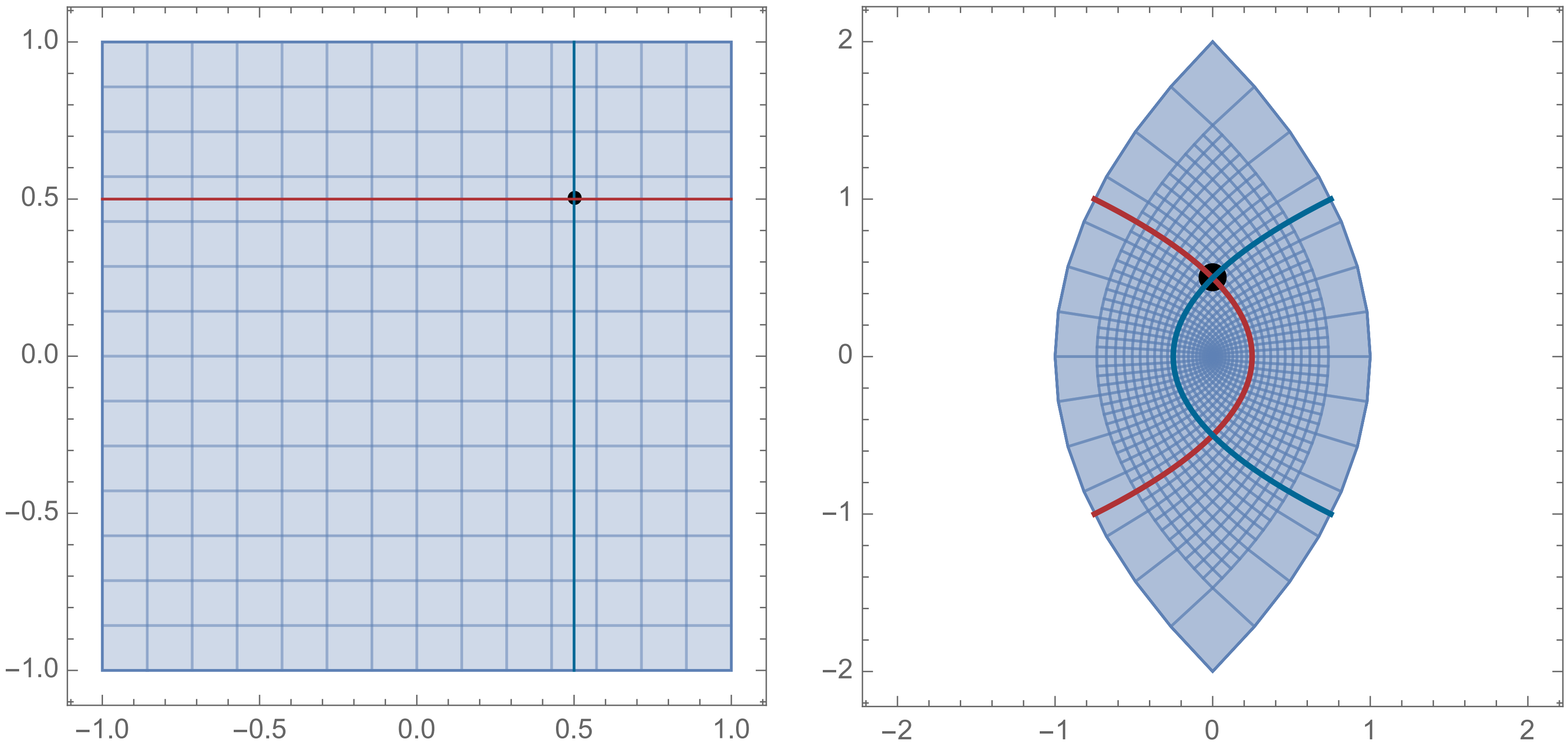


複素関数の可視化

- 実数値関数のときのような関数のグラフを描くことはできない.

(2) z-平面内の 曲線の像 を w-平面に描く.

例１）$f(z) = z^2$

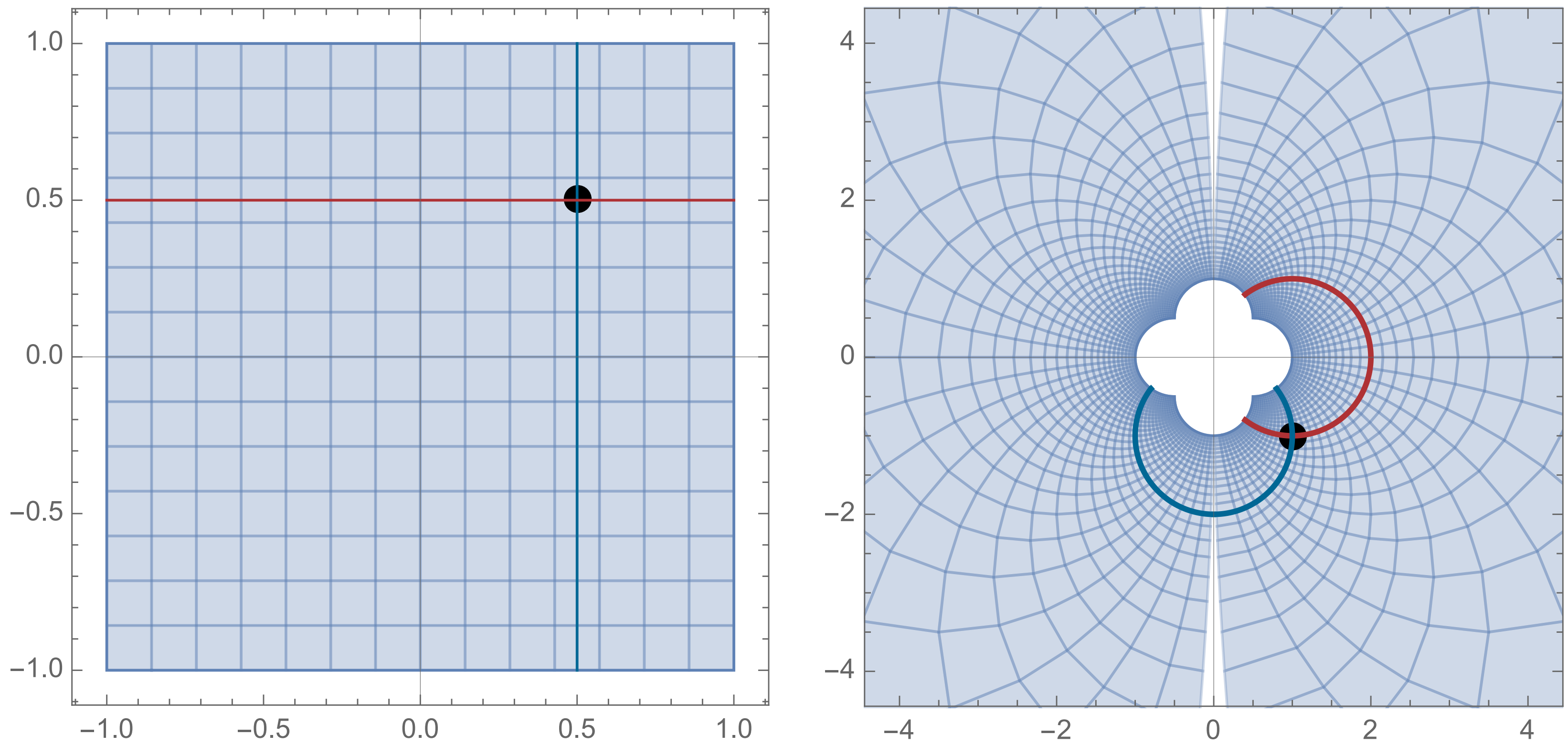


複素関数の可視化

- 実数値関数のときのような関数のグラフを描くことはできない.

(2) z-平面内の 曲線の像 を w-平面に描く.

例２）$f(z) = \dfrac{1}{z}$



複素関数の微分

- 関数 $w = f(z)$ とその定義域内の点 $z = a$ に対し,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \boxed{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(a + \Delta z) - f(a)}{\Delta z}}$$

  が存在するとき, この極限値を「点 $z = a$ における $w = f(z)$ の微分係数」といい, $f'(a)$ と表す.

- 関数 $w = f(z)$ が領域 D 内の点で微分可能であるとき,
  「$w = f(z)$ は D で正則である」といい, $w = f(z)$ を正則関数という.
- $w = f(z)$ が D で正則ならば, D 内の点 $z = a$ に対し, 微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数が定まる.
  これを $f(z)$ の導関数といい, $\boxed{f'(z)}$ または $\boxed{\dfrac{df}{dz}}$ と表す.

複素関数の微分

例１） $f(z) = z^2$ の導関数を求めなさい.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

例２） $f(z) = \dfrac{1}{z}$ の導関数を求めなさい.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{1}{z+\Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \cdot \frac{z - (z+\Delta z)}{(z+\Delta z)z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \cdot \frac{-\Delta z}{(z+\Delta z)z} = -\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{(z+\Delta z)z} = -\frac{1}{(z+0)z} = -\frac{1}{z^2}.$$

複素関数の微分

定理

関数 $f(z)$, $g(z)$ が領域 D で正則ならば,

- $f \pm g$, fg も領域 D で正則で $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(fg)' = f' g + f g'$ が成り立つ.
- D 内の $g(z) \neq 0$ を満たす領域で $\dfrac{f}{g}$ は正則で $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' g - f g'}{g^2}$ が成り立つ.

定理

$$(z^n)' = n z^{n-1} \qquad （n \text{ は自然数}）$$

複素関数の微分

例３） $f(z) = \overline{z}$ は正則ではないことを確かめなさい.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z+\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{a+bi \to 0} \frac{a-bi}{a+bi}$$

$a + bi \to 0$ とする近づけ方は無数に考えられる. 例えば,

- ○ $a \to 0$ としてから, $b \to 0$ とすると

$$\lim_{b \to 0}\left(\lim_{a \to 0} \frac{a-bi}{a+bi}\right) = \lim_{b \to 0} \frac{-bi}{bi} = \lim_{b \to 0}(-1) = \boxed{-1}.$$

- ○ $b \to 0$ としてから, $a \to 0$ とすると

$$\lim_{a \to 0}\left(\lim_{b \to 0} \frac{a-bi}{a+bi}\right) = \lim_{a \to 0} \frac{a}{a} = \lim_{b \to 0} 1 = \boxed{1}.$$

よって, $f(z)$ は正則ではない.

正則性の判定：コーシー・リーマンの方程式

定理

関数 $f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + v(x,y)\,i$ が正則である ための必要十分条件は

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}}, \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

このとき, 導関数は

$$f'(z) = f'(x+yi) = \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\,i} = \boxed{\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\,i}.$$

正則性の判定：コーシー・リーマンの方程式

関数 $f(z)$ の実部と虚部をそれぞれ $u(x,y), v(x,y)$ とする.

例１） $f(z)=z^2=x^2-y^2+2xy\,i$ より, $u(x,y)=x^2-y^2, v(x,y)=2xy$.

- $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y, \dfrac{\partial v}{\partial x}=2y, \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x$
- よって $f(z)$ は正則で, $f'(z)=2x+2y\,i$ $(=2(x+yi)=2z)$ である.

例２） $f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}\,i$ より, $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}, v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

- $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
- よって $f(z)$ は正則で, $f'(z)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,i$ $\left(=-\dfrac{1}{z^2}\right)$ である.

例３） $f(z)=\bar{z}=x-y\,i$ より, $u(x,y)=x, v(x,y)=-y$.

- $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1, \dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$. $\dfrac{\partial u}{\partial x}\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}$ より, $f(z)$ は 正則ではない.

基本的な正則関数（1）有理関数

- z の多項式 $g(z), h(z)$ に対し, $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ と表される関数のこと：

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m}$$

- $h(z) = 0$ となる点 z を除いた領域で正則となる.

例）複素数 a, b, c, d に対して定まる複素関数 $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ のことを一次分数変換という.

- $ad - bc = 0$ のときは定値関数となるため, $ad - bc \neq 0$ を仮定する.
- 一次分数変換は, 拡大・縮小, 回転 $z \mapsto az$, 平行移動 $z \mapsto z + b$, 反転 $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ を合成したものである.

基本的な正則関数（２）指数関数 e^z

- e^x のマクローリン展開を利用して複素変数の指数関数を定義する：

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

- 特に, 実数 y に対して

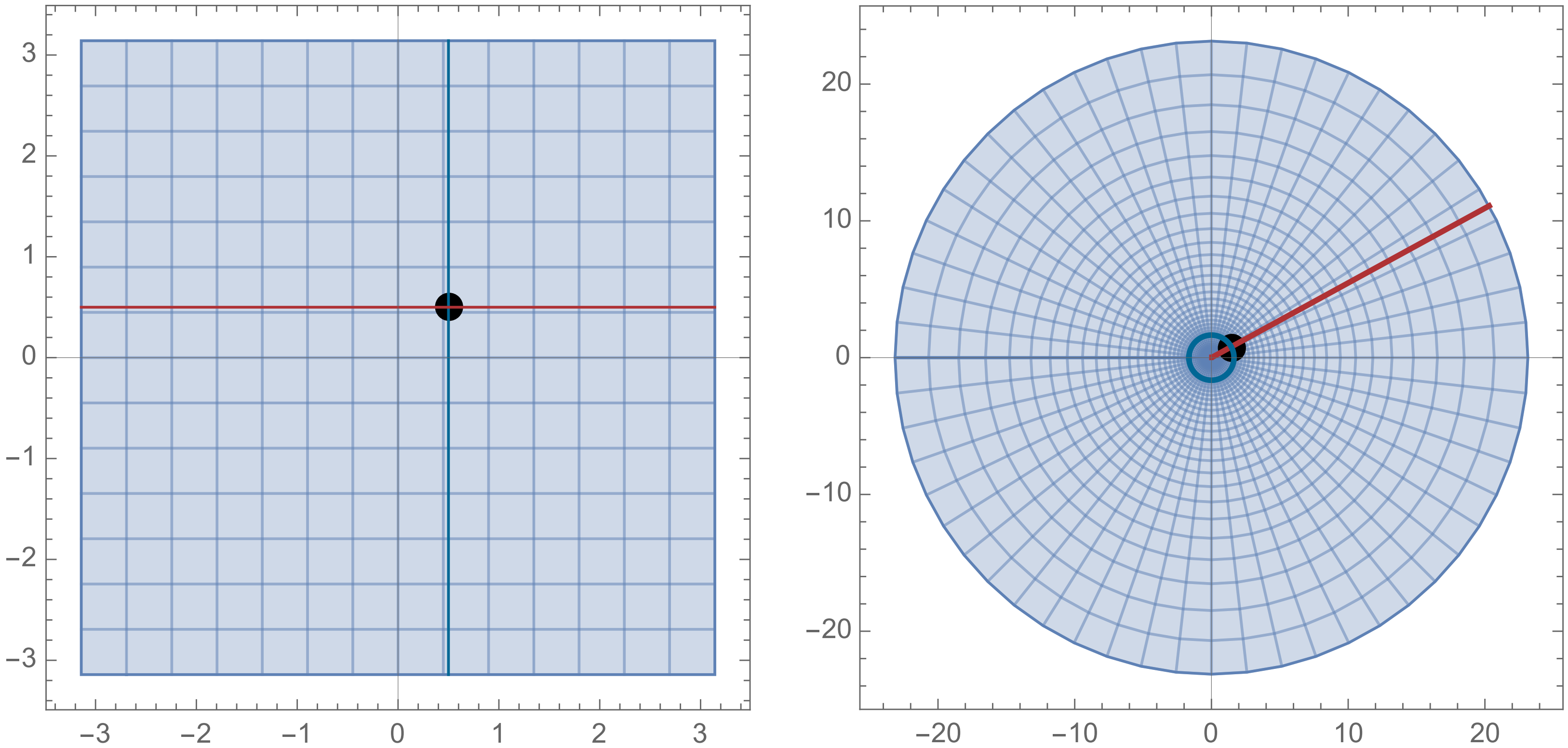
$$\begin{aligned}
e^{yi} =& 1 + yi - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3!}i + \cdots + (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}i + \cdots \\
=& 1 - \frac{y^2}{2} + \cdots + (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + \cdots + \left(y - \frac{y^3}{3!} + (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots \right) i \\
=& \cos y + i \ \sin y
\end{aligned}$$

- 指数法則より, $e^{x+yi} = e^x \, e^{yi} = e^x(\cos y + i \ \sin y)$

基本的な正則関数（２）指数関数 e^z

定義

$$e^z = e^x(\cos y + i\ \sin y)$$



基本的な正則関数（2）指数関数 e^z

定義

$$e^z = e^x(\cos y + i\ \sin y)$$

- 実部は $u(x,y) = e^x \cos y$, 虚部は $v(x,y) = e^x \sin y$.
- $\mathbb{C}$ 全体で正則関数で, 導関数は $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$.
- 絶対値は $|e^z| = e^x$, 偏角は $\arg(e^z) = y$.
- 周期が $2\pi i$ の周期関数である：$e^{z+2n\pi i} = e^z$.

基本的な正則関数（３）三角関数 $\sin z$, $\cos z$

- マクローリン展開を利用して複素変数の正弦関数, 余弦関数を定義する：

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} + \cdots.$$

- 指数関数のマクローリン展開より

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + zi - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3!}i + \cdots + (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} + (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}i + \cdots, \\ e^{-iz} &= 1 - zi - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!}i + \cdots + (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} - (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}i + \cdots. \end{aligned}$$

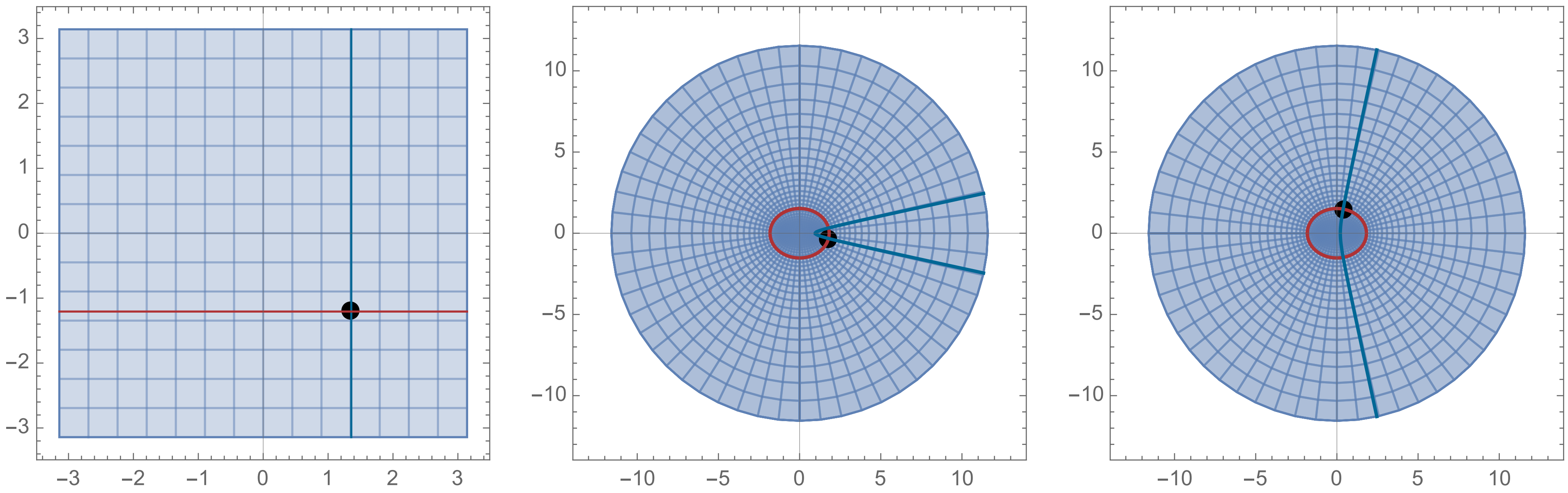
- 以上のことから,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

基本的な正則関数（３）三角関数 $\sin z$, $\cos z$

定義

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$



基本的な正則関数（３）三角関数 $\sin z, \cos z$

定義

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

- 実部と虚部は以下のようになる：

$$\sin(x + yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$
$$\cos(x + yi) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

- $\mathbb{C}$ 全体で正則関数で, 導関数は $\boxed{\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z}$, $\boxed{\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z}$.
- 周期が 2π の周期関数である：$\sin(z + 2n\pi) = \sin z$, $\cos(z + 2n\pi) = \cos z$.
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ や加法定理も成り立つ.

基本的な正則関数（４）対数関数 $\log z$, $\mathrm{Log} z$

- （復習）対数関数 $y = \log x$ は指数関数 $y = e^x$ の逆関数として定めた．
  つまり, $y = \log x \iff x = e^y$.
- 複素関数版の対数関数も同様に定義する：$w = \log z \iff z = e^w$.
- 指数関数の周期性 $e^w = e^{w+2n\pi i}$ より, z に対して を満たす w は唯一に決まらない（無限多価関数）．
- $\log z$ の実部と虚部を調べる. $\log z = u(x,y) + i\,v(x,y)$ とし, z を極形式 $z = r\,e^{i\theta}$ で表すと,

$$\log z = u + i\,v \iff \log\left(r\,e^{i\theta}\right) = u + iv \iff r\,e^{i\theta} = e^{u+v\,i} = e^u\,e^{iv}$$

$$\iff r = e^u,\ e^{i\theta} = e^{iv} \iff u = \log r,\ v = \theta + 2n\pi$$

- よって，$\log z = \log|z| + i\arg(z)$ と表すことができる．

基本的な正則関数（4）対数関数 $\log z$, $\mathrm{Log} z$

定義

$\log z$ の値のうち, 虚部が $(-\pi, \pi]$ に含まれるものを主値といい, $\mathrm{Log} z$ と表す：

$$\mathrm{Log} z = \log|z| + i\ \arg(z) \qquad (-\pi < \arg(z) \leq \pi)$$

- 整数 n を固定し, $\log z$ の値の内で虚部が $(-\pi + 2n\pi, \pi + 2n\pi]$ を満たすものに制限すると, これも関数となる. これを $\log z$ のひとつの分枝という.
- $\log z$ は原点 0 を除く領域で正則であり, 導関数は $(\mathrm{Log} z)' = (\log z)' = \dfrac{1}{z}$.
- $e^{\log z} = z$, $\log e^z = z + 2n\pi i$.

まとめと復習（と予習）

- 正則関数とは何ですか？
- コーシー・リーマンの方程式とは何ですか？
- 有理関数, 指数関数, 三角関数, 対数関数 の定義は？また, それらの導関数は？

教科書 p.133〜150

問題集 218 〜 227

予 習 ベクトル関数の積分, スカラー場の線積分 「応用解析」