問 1. 次の行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

問 2. n 次の置換 σ にたいし，n 次正方行列 A_σ を $A_\sigma \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{\sigma(i)}$ を満たす行列と定義する．ただし，$\boldsymbol{e}_i$ は i-成分が 1 でその他の成分が 0 のベクトルとする．

次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対応する置換行列 A_σ を P_{ij} の積で表せ．ただし，P_{ij} とは単位行列にたいし i 行目と j 行目を入れ替える基本変形を施した行列である．

問 3. クラメールの公式を使って，次の連立方程式を解け．ただし，a, b, c はすべて異なる実数とする．

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = 2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 4 \end{cases}$$

問 4. 次の命題のうち，正しいものには証明を与え，正しくないものには反例を与えよ．(命題の行列 A, B はすべて正方行列とする)．

(1) AB が正則ならば，A も B も正則である．

(2) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

(3) 正則行列 A にたいし，$\widetilde{A^{-1}} = (\widetilde{A})^{-1}$ （ただし，$\widetilde{A}$ は A の余因子行列）．