情報数学 III 第 5 回小テスト 解答

$\boxed{1}$

(1) $\Phi_A(t) = \det(tE_3 - A) = \det\begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{t^3 - 3t - 2}}.$

(2) $\Phi_A(t) = t^3 + 3t - 2 = (t+1)^2(t-2)$ より，固有値は $\underline{\mathbf{-1,\ 2}}$.

(3) （固有値 -1）

$$(-1)E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって，固有値 -1 に関する固有ベクトルは，$\underline{c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ （ただし，$c_1, c_2 \neq 0$）

(固有値 2)

$$2E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって，固有値 2 に関する固有ベクトルは，$\underline{c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ （ただし，$c \neq 0$）

$\boxed{2}$ $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 5x + y + 6$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $\det(A) = \dfrac{3}{4} \neq 0$. したがって，2 次曲線 $\varphi(x,y) = 0$ は <u>有心 **2** 次曲線</u> である．

(2) $\varphi(\bar{x} + \lambda, \bar{y} + \mu) = \bar{x}^2 + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 + (2\lambda + \mu + 5)\bar{x} + (\lambda + 2\mu + 1)\bar{y} + \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 5\lambda + \mu + 6$.
したがって，<u>$\bar{x}$ の係数は $\boldsymbol{2\lambda + \mu + 5}$，$\bar{y}$ の係数は $\boldsymbol{\lambda + 2\mu + 1}$</u>.

(3) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2\lambda + \mu + 5 = 0 \\ \lambda + 2\mu + 1 = 0 \end{cases}$ の解を求めればよい．$\underline{\boldsymbol{\lambda = -3,\ \mu = 1}}$.

(4) $\underline{\mathbf{-1}}$

(5) 行列 A の固有多項式は $t^2 - 2t + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(2t-1)(2t-3)$. したがって，固有値は $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. 固有ベクトルはそれぞれ，$c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 各固有ベクトルを長さが 1 になるように正規化し，それらを並べたベクトルを P とすればよい．たとえば，$\underline{P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

(6) (5) の直交行列 P に対し，$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ と座標変換すると，$\varphi(x,y) = 0$ は最終的に $\dfrac{\tilde{x}^2}{2} + \dfrac{3\tilde{y}^2}{2} = 1$ と変換される．これは <u>楕円</u> である．