

線形代数 I 演習

－ (6) 行列の基本変形 －

担当: 佐藤 弘康

基本問題. 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

- (1) 基本行列 $P_{ij}, E_{ij}(c), E_i(c)$ の定義を確認せよ.
- (2) 行列 A に基本行列を左からかけることにより, A はどのように変化 (変形) するか.
- (3) 基本行列 $P_{ij}, E_{ij}(c), E_i(c)$ の逆行列を求めよ.
- (4) 階段行列とはどのような行列か説明せよ.
- (5) 簡約階段行列とはどのような行列か説明せよ.

例題 6.1. 行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を行基本変形により, 簡約階段行列の形に変形せよ.

解.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{P_{12} \times} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2) \times} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{E_{31}(-3) \times} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{23} \times} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{E_{12}(1) \times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-3) \times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{E_3(1/4) \times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(1) \times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題 6.1. 次の行列を行基本変形により簡約階段行列の形に変形せよ.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 (4) \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad (5) \text{ 宿題 : } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

例題 6.2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ を基本行列の積で表せ.

解. 行基本変形により, 行列 A は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-3) \times} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1) \times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{2}) \times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. これから

$$E_2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot E_{12}(1) \cdot E_{21}(-3) \cdot A = E_2 \tag{6.1}$$

が成り立つことがわかる. したがって,

$$\begin{aligned}
 A &= E_{21}(-3)^{-1} \cdot E_{12}(1)^{-1} \cdot E_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \\
 &= E_{21}(3) \cdot E_{12}(-1) \cdot E_2(-2) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

また, (??) 式より, $A^{-1} = E_2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot E_{12}(1) \cdot E_{21}(-3)$ となることがわかる.

問題 6.2. 次の行列を基本行列の積で表せ.

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$