線形代数 II 演習

－ 第 9 回 ハミルトン・ケーリーの定理 －

担当：佐藤 弘康

例題. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $2A^4 - 6A^3 - 4A^2 + 22A - 13E_3$ を計算せよ.

(3) A^{-1} を A の多項式として表せ（ただし，多項式の最大次数は 2 とする）.

解. (1) 定義より

$$\begin{aligned} \Phi_A(x) = |xE_3 - A| &= \begin{vmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{vmatrix} \\ &= x^3 - 5x^2 + 8x - 4. \end{aligned}$$

(2) ハミルトン・ケーリーの定理より，$\Phi_A(A) = A^3 - 5A^2 + 8A - 4E_3 = O$ が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned} & 2A^4 - 6A^3 - 4A^2 + 22A - 13E_3 \\ =& (A^3 - 5A^2 + 8A - 4E_3)(2A + 4E_3) - 2A + 3E_3 \\ =& -2A + 3E_3 \end{aligned}$$

であるから,

$$2A^4 - 5A^3 + 7A - 3E_3 = -2\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & 12 \\ 2 & -5 & -4 \\ -6 & 12 & 11 \end{pmatrix}.$$

(3) ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$E_3 = \frac{1}{4}\left(A^3 - 5A^2 + 8A\right) = \frac{1}{4}\left(A^2 - 5A + 8E_3\right) \cdot A$$

であるから，$A^{-1} = \dfrac{1}{4}\left(A^2 - 5A + 8E_3\right)$.

問題 9.1. 次の行列 A に対し，$\Phi_A(A)$ を実際に計算し，ハミルトン・ケーリーの定理が成り立つことを確認せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ：問題 8.1(1)

(2) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ ：問題 8.1(2), 例題

問題 9.2. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して，$A^5 - 2A^4 - 4A^3 + 2A^2 - 2A - 3E_3$ を求めよ．

問題 9.3. 次の行列 A の逆行列を A の多項式で表せ（ただし多項式の最大次数は 2 以下とする）．また，その多項式を実際に計算し，問題 7.1 の計算結果と比べよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ：問題 7.1(1)

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ：問題 7.1(3)