東京電機大学 情報環境学部

数学科教育法 第４回
§1) 数学とはどのような学問か（３）

ユークリッド幾何から非ユークリッド幾何へ

担当：佐藤 弘康

1.6.1) ユークリッド幾何学の平行線問題

ユークリッド幾何学 :「原論」に由来する幾何学

ユークリッド「原論」5 つの公準

(1) 点と点を直線で結ぶ事ができる.

(2) 線分を延長して直線にできる.

(3) 一点を中心にして任意の半径の円を描く事ができる.

(4) 全ての直角は等しい.

(5) 直線が 2 直線に交わり，同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば，この 2 直線は限りなく延長されると，2 直角より小さい角のある側において交わる（平行線公準).

1.6.1) ユークリッド幾何学の平行線問題

平行線公準

直線が 2 直線に交わり，同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば，この 2 直線は限りなく延長されると，2 直角より小さい角のある側において交わる.

- この命題は他のほど自明ではない.
- もっと自明で簡潔な同値命題が存在するのでは？

  平行線公準 $\Longleftrightarrow$ 第 1 巻命題 29「平行線の錯角は等しい」
- プロクロス（紀元前 5 世紀，古代ギリシアの哲学者）

  「これは定理なのではないか？」(平行線問題)

1.6.1) ユークリッド幾何学の平行線問題

平行線問題

- プトレマイオス（1 世紀後半〜，ギリシアの数学者・天文学者）

  「平行線公準を証明した！」

  この証明は第 1 巻命題 29（つまり平行線公準）に依っている $\to$ <u>失敗</u>

- サッケーリ（17 世紀，イタリア）

  平行線公準 $\Longleftrightarrow$ 第 1 巻命題 32「三角形の内角の和は 2 直角」

  を示した．さらに

  - 鋭角仮定：「全ての三角形の内角の和は 2 直角よりも小さい」
  - 鈍角仮定：「全ての三角形の内角の和は 2 直角よりも大きい」

  が共に矛盾を導くことを示そうと思ったが <u>失敗</u>

- ランベルト（18 世紀，スイス）やルジャンドル（18 世紀，フランス）も…

1.6.2) 非ユークリッド幾何学

平行線問題の解決

平行線公準を他の命題に置き換えても幾何が展開できる！

- ロバチェフスキー（19 世紀，ロシア）
  「虚の幾何学」（鋭角仮定を含む幾何学）を構成
- ボーヤイ（19 世紀，ハンガリー）
  平行線公準を仮定した幾何学および平行線公準の否定を仮定した幾何学を論じ，どちらが現実に成立するかは論理的推論によって決定されないことを証明.
- ガウス（19 世紀，ドイツ）
  ロバチェフスキー，ボーヤイと同様の幾何学を構成．哲学的・宗教的論争を避けるため成果を発表することはなかった.

1.6.2) 非ユークリッド幾何学

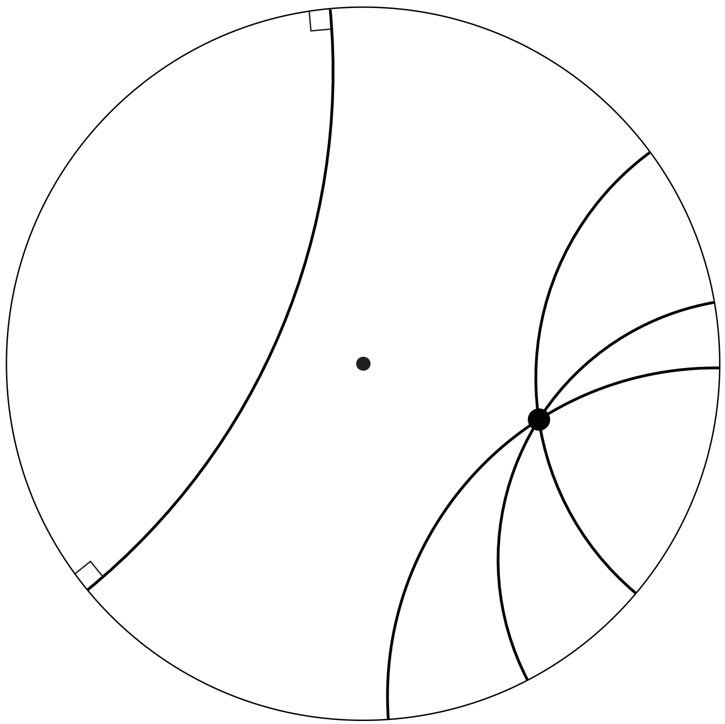
$\boxed{\text{ユークリッド幾何学}}$ ユークリッド「原論」に由来する幾何学

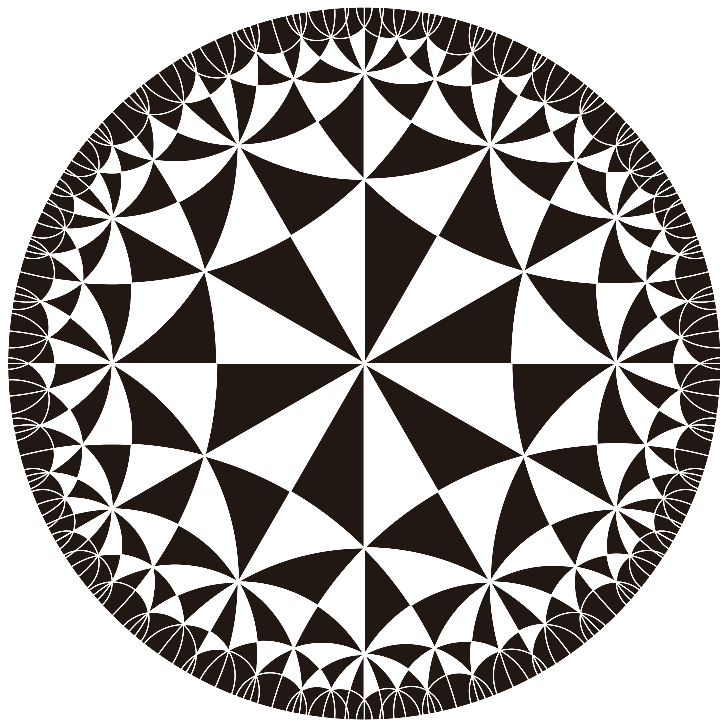
- 平面の幾何.
- 三角形の内角の和は 2 直角に等しい.
- 直線 ℓ と点 $P \notin \ell$ に対し, P を通り ℓ に平行な直線はただ 1 つ存在する.

1.6.2) 非ユークリッド幾何学

双曲幾何学　ロバチェフスキー，ボーヤイの幾何学

- ポアンカレの円板モデル；「直線」＝境界の円と直交する円の一部.
- 三角形の内角の和は 2 直角より小さい.
- 直線 ℓ と点 $P \notin \ell$ に対し，P を通り ℓ に平行な直線は無限に存在する.

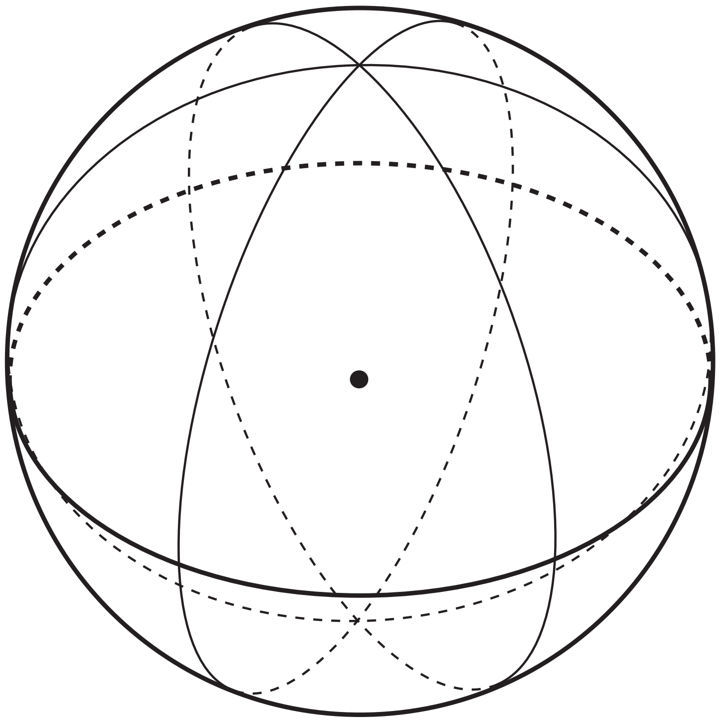




1.6.2) 非ユークリッド幾何学

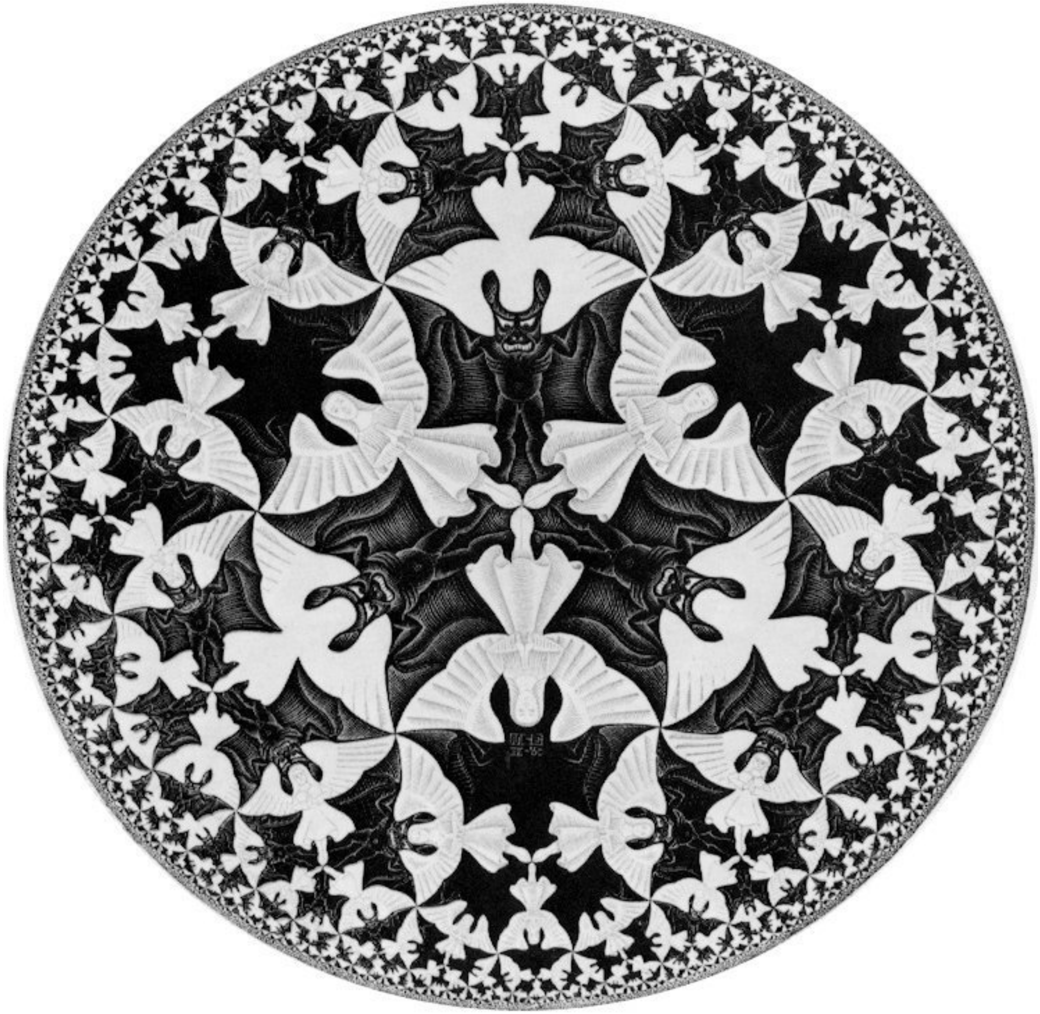
球面幾何学

- 「直線」＝ 2 点を結ぶ最短線（測地線）＝大円の一部
- 三角形の内角の和は 2 直角より大きい.
- どんな直線も必ず 2 点で交わる（平行線は存在しない）.



1.6.2) 非ユークリッド幾何学

双曲幾何学が芸術に応用された例：



M. C. エッシャー「円の極限 IV」（1960 年）

1.7) 多次元空間の幾何へ

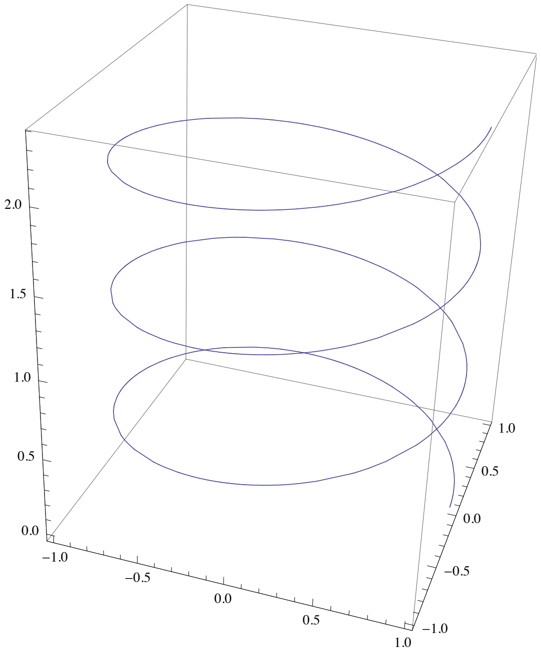
「三角形の内角の和」に関する性質は「空間の曲率」の概念に置き換わる

- 三角形の内角の和が 2 直角 →曲率が 0
- 三角形の内角の和が 2 直角より大きい→曲率が正
- 三角形の内角の和が 2 直角より小さい→曲率が負

1.7.1) 解析幾何（平面の幾何）から微分幾何へ

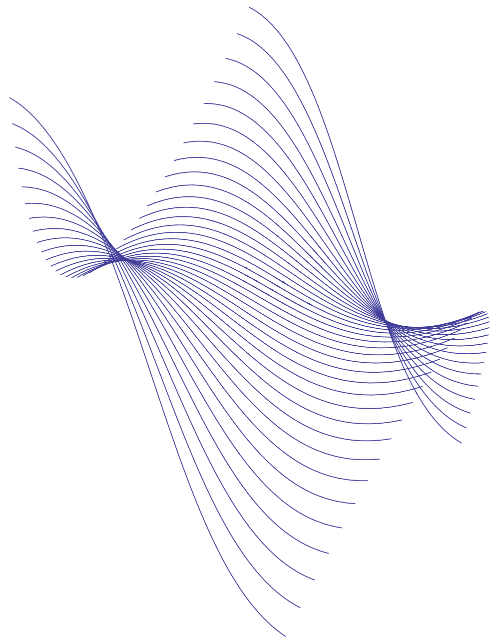
1 次元の物体は曲線

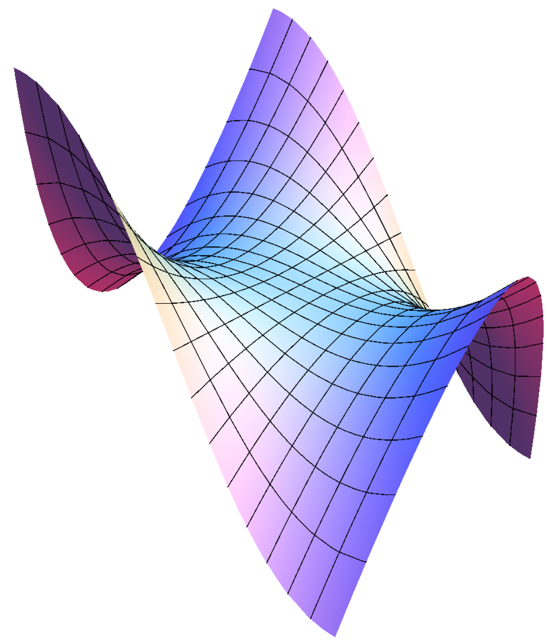
曲線は運動する点の軌跡



2 次元の物体は曲面

曲面は曲線を連続的に変形しながら動かした軌跡



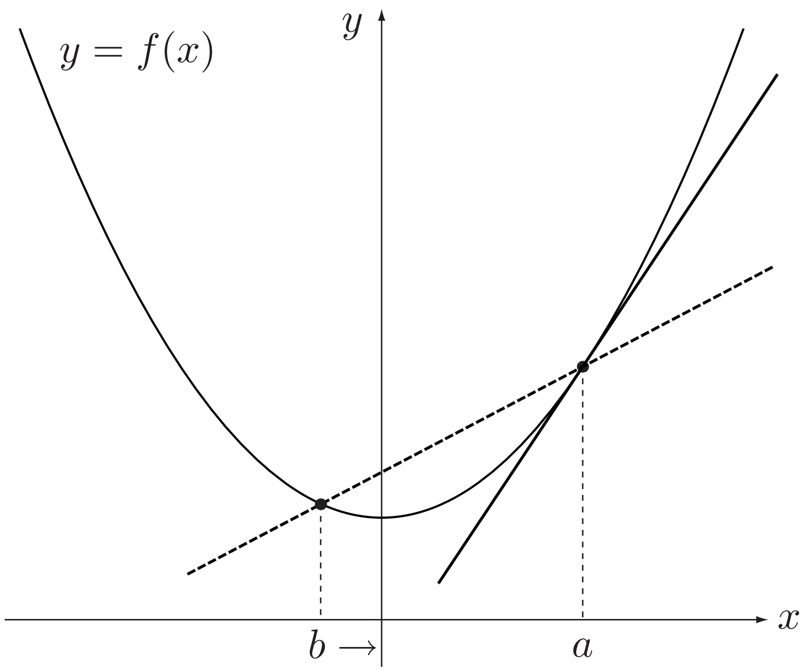


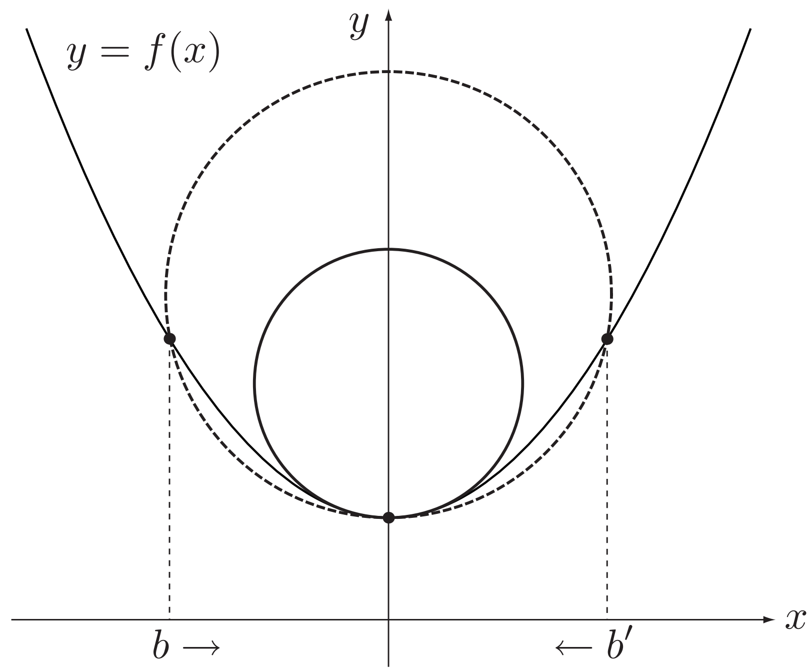
陽関数表示	：$y = f(x)$	$z = f(x, y)$
陰関数表示	：$F(x, y) = c$	$F(x, y, z) = c$
パラメータ表示	：$p(s) = (x(s), y(s))$	$p(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$

1.7.2) 曲率の概念

平面曲線の曲率（定義）

$\boxed{\text{接線}}$ 2 点を通る直線の極限　　$\boxed{\text{接触円}}$ 3 点を通る円の極限





- 「曲率半径」：接触円の半径 r
- 「曲率」：接触円の半径 r の逆数 $\dfrac{1}{r}$

1.7.2) 曲率の概念

平面曲線の曲率（公式）

平面内の曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における曲率円（接触円）の

- 中心は $\left(a - \dfrac{\left\{1 + (f'(a))^2\right\} f'(a)}{f''(a)},\ f(a) + \dfrac{1 + (f'(a))^2}{f''(a)}\right)$
- 半径は $\dfrac{\left\{1 + (f'(a))^2\right\}^{3/2}}{|f''(a)|}$

となる.

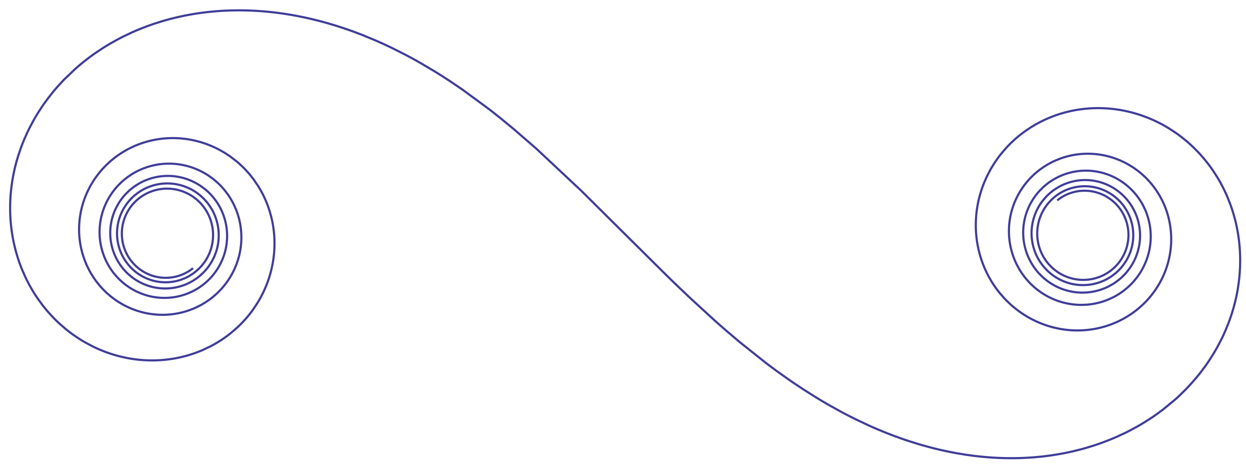
1.7.2) 曲率の概念

平面曲線の曲率：曲線を一定速度で走る車の軌跡とみると

「曲率半径」＝ハンドルの回転角

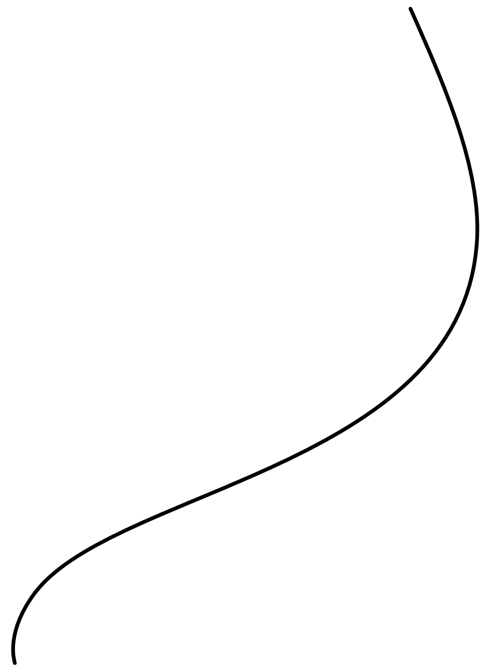
$\boxed{\text{クロソイド曲線}}$

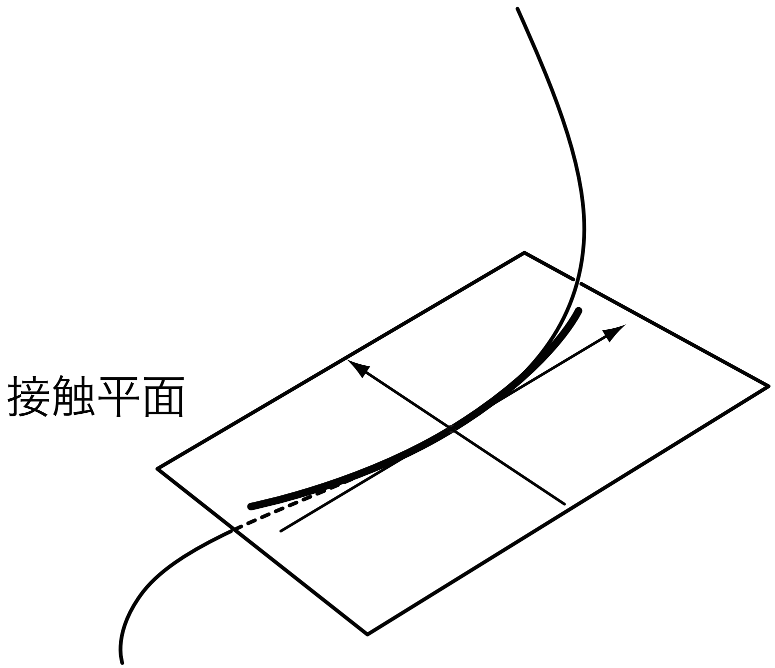
- 速度一定で，ハンドルを一定の角速度で回したときに車が描く軌跡.
- 道路は直線，円弧，クロソイド曲線を複合させて設計（クロソイド工法）



1.7.3) 空間内の曲線

空間内の曲線においては曲率と捩率が定義できる.



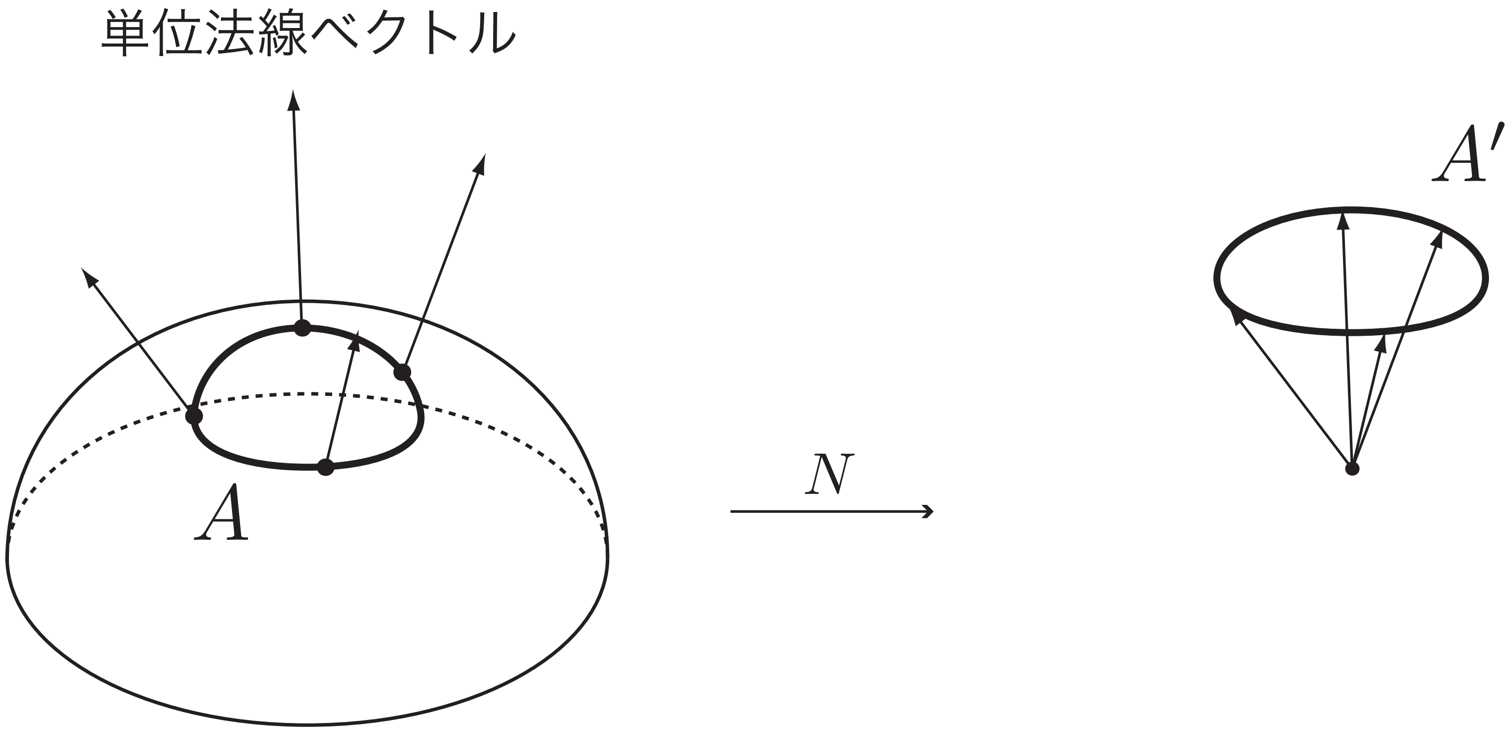


- 「捩率」＝接触平面から離れる度合い
- 捩率が零 $\Longleftrightarrow$ ある平面内に曲線

1.7.4) 空間内の曲面

空間内の曲面にも曲率の概念が定義可能

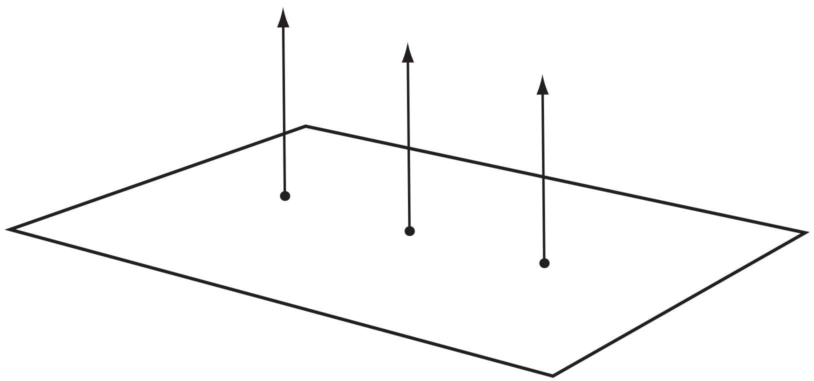
ガウス曲率　「曲面と球面の対応する無限小領域の（符号付き）面積の比」

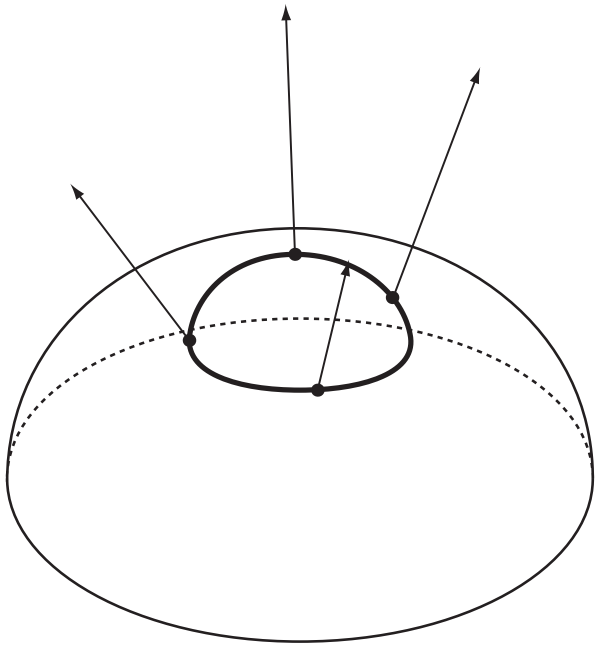


曲面の点 p におけるガウス曲率：$\varepsilon \lim_{A \to p} \dfrac{(A' \text{ の面積})}{(A \text{ の面積})}$　（ただし，$\varepsilon = \pm 1$）

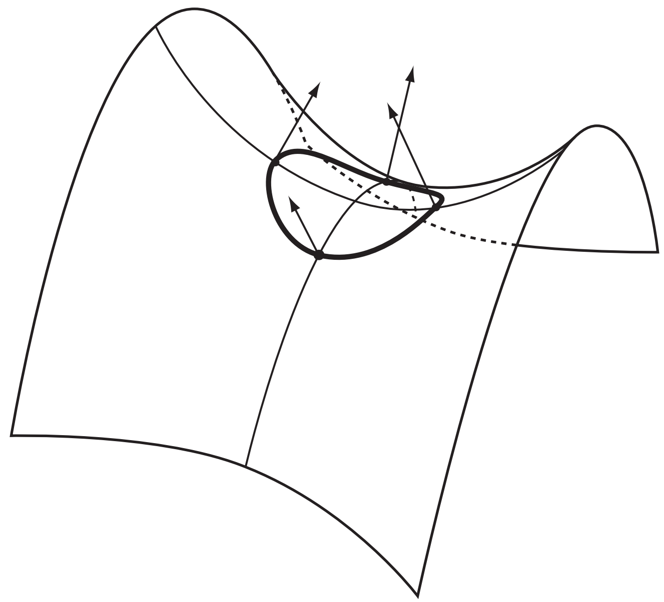
1.7.4) 空間内の曲面

ガウス曲率が零





ガウス曲率が正



ガウス曲率が負

1.8) 多次元空間の幾何学（リーマン幾何学）

多次元空間の幾何学

- グラスマン，シュレーリフ，ジョルダンなど

  $\mathbb{R}^n$ 内の直線，平面，曲面の幾何学

- リーマン（19 世紀，ドイツ）
  - 「n 重に広がった多様体」；多様体の概念（局所的に座標が入る）
  - リーマン計量：空間の各点に対して正定値対称行列を対応させる関数（写像）.
    - ∗ ベクトルの長さ・角度，曲線の長さ，面積などが計算可能.
    - ∗ 最短線である「測地線」や曲率も定義可能.

1.8) 多次元空間の幾何学（リーマン幾何学）

リーマン幾何学の応用例：アインシュタインの相対性理論

- この世界を「空間 3 次元」と「時間 1 次元」の 4 次元空間（多様体）と考える（ミンコウスキーによる 4 次元時空の幾何学）.
- アインシュタインは 4 次元時空に曲がった（擬）リーマン計量を定義.
- 重力を「空間の曲率」として解釈.
- アインシュタイン方程式；$R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij} = 8\pi T_{ij}$

  大きい質量の物体（右辺）は時空の重力（左辺）を歪ませる.

- 重力レンズ効果（重力により光が曲げられる）の観測により，一般相対性理論が正しいことが証明された.

参考文献

- 「ユークリッド幾何から現代幾何へ」 小林昭七 著（日本評論社）
- 「19 世紀の数学 II 幾何学・解析関数論」 小林昭七 監訳（朝倉書店）
- 「岩波数学辞典 第４版」 日本数学会 編集（岩波書店）
- Wikipedia ：非ユークリッド幾何学，他