数学クォータ科目「応用解析」第 3 回 / ベクトル解析（3）

# ベクトル場の発散と回転

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

# 前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

## 前回のキーワード

- スカラー場, ベクトル場, 等位面, 勾配, 方向微分係数

## 今回の授業で理解してほしいこと

- ベクトル場の発散
- ベクトルの外積
- ベクトル場の回転

# ベクトル場の発散

**定義**

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + A_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + A_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ に対し，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z)$$

で定まるスカラー場を $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の**発散**という.

# ベクトル場の発散

**定義**

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + A_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + A_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ に対し，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z)$$

で定まるスカラー場を $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の**発散**という．

注 ナブラ演算子 $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ を導入すると，次のような形式的な計算が可能である．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

よって，$\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の発散を $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ と書くこともある．

# ベクトル場の発散

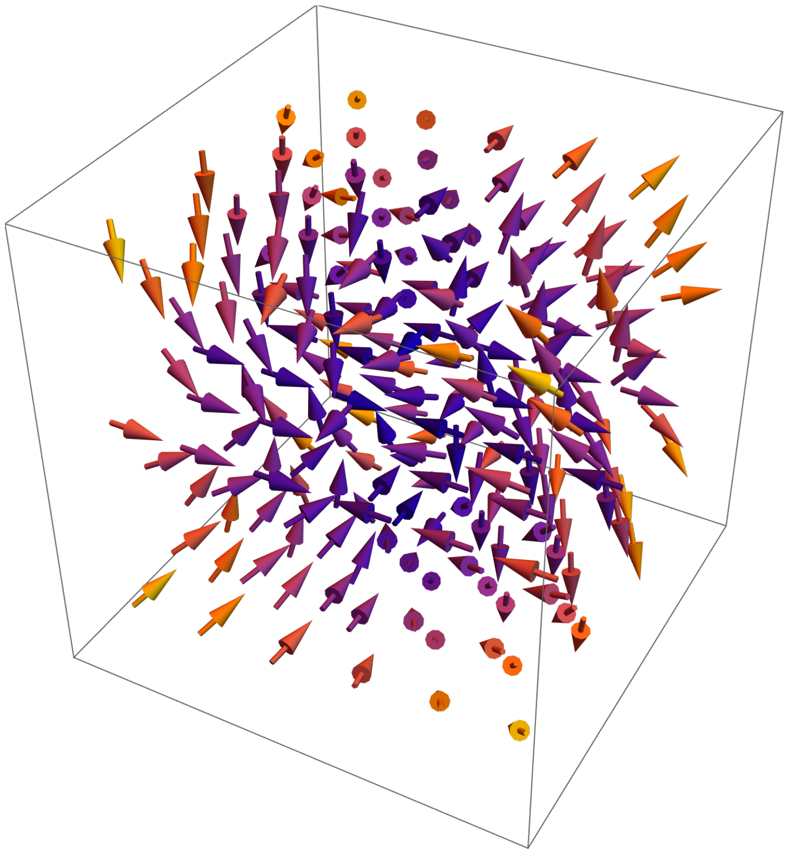
例） $\boldsymbol{A}(x, y, z) = xy\,\boldsymbol{i} + yz\,\boldsymbol{j} + xz\,\boldsymbol{k}$ の発散は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

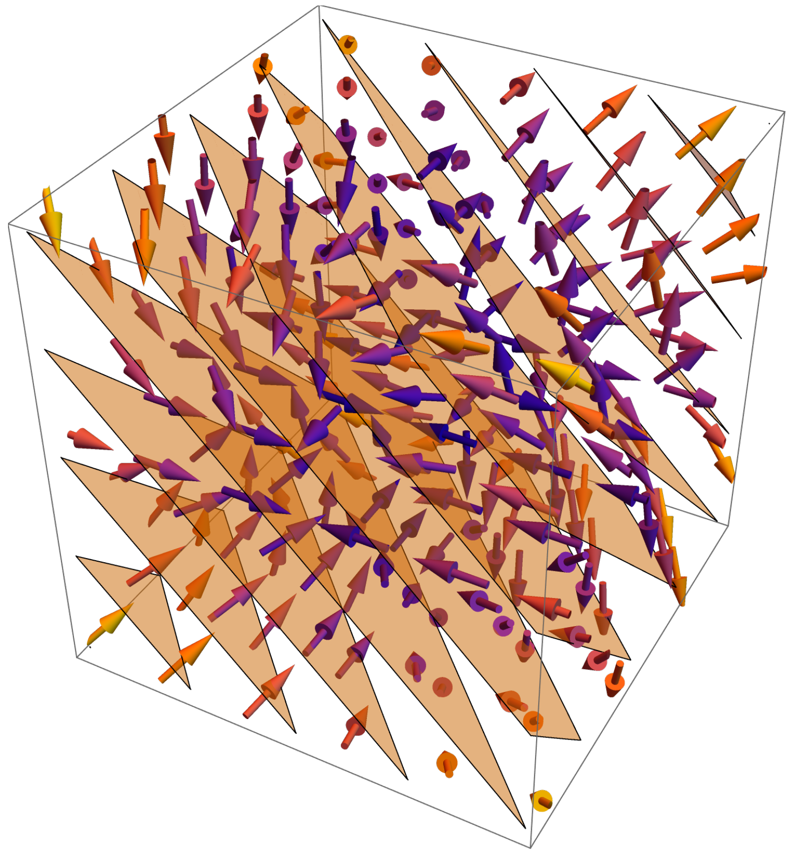
# ベクトル場の発散

例）$\boldsymbol{A}(x, y, z) = xy\,\boldsymbol{i} + yz\,\boldsymbol{j} + xz\,\boldsymbol{k}$ の発散は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$



ベクトル場 $\boldsymbol{A}$



スカラー場 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ の等位面

# ベクトル場の発散の意味：例）流体の運動（1）

流体　液体や気体のように, 少し力を加えることで容易に変形する物質のこと.

# ベクトル場の発散の意味：例）流体の運動（１）

$\boxed{\text{流体}}$ 液体や気体のように, 少し力を加えることで容易に変形する物質のこと.

(1) ベクトル場を流体の速度ベクトルとみる; $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}$

# ベクトル場の発散の意味：例）流体の運動（１）

流体　液体や気体のように, 少し力を加えることで容易に変形する物質のこと.

(1) ベクトル場を流体の速度ベクトルとみる; $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}$

- 点 P のまわりの十分小さい領域を $D$ とし, 時刻 $t$ 経ったのちの $D$ が変形した領域を $D_t$ とする.

# ベクトル場の発散の意味：例）流体の運動（１）

**流体** 液体や気体のように, 少し力を加えることで容易に変形する物質のこと.

(1) ベクトル場を流体の速度ベクトルとみる; $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}$

- 点 P のまわりの十分小さい領域を $D$ とし, 時刻 $t$ 経ったのちの $D$ が変形した領域を $D_t$ とする.
- このとき, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{V(D_t)}{V(D)}\right)\bigg|_{t=0} \fallingdotseq \operatorname{div}\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$

# ベクトル場の発散の意味：例）流体の運動（１）

$\boxed{\text{流体}}$ 液体や気体のように, 少し力を加えることで容易に変形する物質のこと.

(1) ベクトル場を流体の速度ベクトルとみる; $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}$

- 点 P のまわりの十分小さい領域を $D$ とし, 時刻 $t$ 経ったのちの $D$ が変形した領域を $D_t$ とする.
- このとき, $\displaystyle \frac{d}{dt}\left(\frac{V(D_t)}{V(D)}\right)\bigg|_{t=0} \fallingdotseq \operatorname{div}\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$
- つまり, $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ は流体内の領域の体積の相対変化率を表している.
- 体積の変化がない, つまり $\displaystyle \frac{d}{dt}V(D_t) = 0$ であるとき, 流体は非圧縮性をもつという.
- 流体が非圧縮性をもつ $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$

# ベクトル場の発散の意味：例）流体の運動（２）

流体　液体や気体のように, 少し力を加えることで容易に変形する物質のこと.

(1) ベクトル場を流体の速度ベクトルとみる; $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}$

(2) ベクトル場を流体の速度ベクトルと物質の密度の積とみる; $\boldsymbol{A} = \rho\,\boldsymbol{v}$

# ベクトル場の発散の意味：例）流体の運動（２）

$\boxed{\text{流体}}$ 液体や気体のように, 少し力を加えることで容易に変形する物質のこと.

(1) ベクトル場を流体の速度ベクトルとみる; $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}$

(2) ベクトル場を流体の速度ベクトルと物質の密度の積とみる; $\boldsymbol{A} = \rho\, \boldsymbol{v}$

- すると, $\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ の大きさは, 点 P を通り, $\boldsymbol{v}$ に垂直な単位面積を通じて単位時間に流れる流体の質量を表す.

# ベクトル場の発散の意味：例）流体の運動（２）

$\boxed{\text{流体}}$ 液体や気体のように, 少し力を加えることで容易に変形する物質のこと.

(1) ベクトル場を流体の速度ベクトルとみる; $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}$

(2) ベクトル場を流体の速度ベクトルと物質の密度の積とみる; $\boldsymbol{A} = \rho\,\boldsymbol{v}$

- すると, $\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ の大きさは, 点 P を通り, $\boldsymbol{v}$ に垂直な単位面積を通じて単位時間に流れる流体の質量を表す.
- このとき, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ は, 点 P のまわりの単位体積から単位時間に流出する流体の全質量を表している.

# ベクトル場の発散の意味：例）流体の運動（２）

流体　液体や気体のように, 少し力を加えることで容易に変形する物質のこと.

(1) ベクトル場を流体の速度ベクトルとみる; $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}$

(2) ベクトル場を流体の速度ベクトルと物質の密度の積とみる; $\boldsymbol{A} = \rho\,\boldsymbol{v}$

- すると, $\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ の大きさは, 点 P を通り, $\boldsymbol{v}$ に垂直な単位面積を通じて単位時間に流れる流体の質量を表す.
- このとき, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ は, 点 P のまわりの単位体積から単位時間に流出する流体の全質量を表している.
- $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} \begin{cases} > 0 & \text{流出量} \\ < 0 & \text{流入量} \\ = 0 & \text{湧き出しなしまたは管状であるという.} \end{cases}$

# スカラー場のラプラシアン

**定理**

スカラー場 $\varphi$ について, 次の式が成り立つ.

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

# スカラー場のラプラシアン

**定理**

スカラー場 $\varphi$ について, 次の式が成り立つ.

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

- 上の式の右辺は, $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi$ と書くことができる.

# スカラー場のラプラシアン

**定理**

スカラー場 $\varphi$ について, 次の式が成り立つ.

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

- 上の式の右辺は, $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi$ と書くことができる.
- この 2 次の微分演算子を $\Delta$ と書き表し, ラプラシアン（またはラプラス作用素）とよぶ.
- ラプラシアンを $\nabla^2$ と書くこともある.

# スカラー場のラプラシアン

**定理**

スカラー場 $\varphi$ について, 次の式が成り立つ.

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

- 上の式の右辺は, $\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}\varphi$ と書くことができる.
- この 2 次の微分演算子を $\boxed{\Delta}$ と書き表し, ラプラシアン（またはラプラス作用素）とよぶ.
- ラプラシアンを $\boxed{\nabla^2}$ と書くこともある.
- $\boxed{\Delta\varphi = 0}$ を満たすスカラー場を調和関数とよぶ.

# ベクトルの外積

**定義**

2 つの空間ベクトル $\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j} + B_z\,\boldsymbol{k}$ の

**外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$** を以下の式で定める.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_z)\boldsymbol{k} \\
&= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

# ベクトルの外積

例題） $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めなさい.

# ベクトルの外積

例題） $\boldsymbol{A} = 2\,\boldsymbol{i} - 3\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めなさい.

（解）

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

# ベクトルの外積

例題） $\boldsymbol{A} = 2\,\boldsymbol{i} - 3\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めなさい.

（解）

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \{(-3) \times (-1) - 1 \times 3\}\,\boldsymbol{i} + \{1 \times 1 - 2 \times (-1)\}\,\boldsymbol{j} + \{2 \times 3 - 1 \times (-3)\}\,\boldsymbol{k}$$

# ベクトルの外積

例題）$\boldsymbol{A} = 2\,\boldsymbol{i} - 3\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めなさい.

（解）

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \{(-3) \times (-1) - 1 \times 3\}\,\boldsymbol{i} + \{1 \times 1 - 2 \times (-1)\}\,\boldsymbol{j} + \{2 \times 3 - 1 \times (-3)\}\,\boldsymbol{k}$$

$$= 3\,\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}$$

# ベクトルの外積の演算法則

(1) 交代的である；

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

(2) 和に関して分配法則が成り立つ；

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

(3) スカラー倍に関して結合法則が成り立つ；

$$(c\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\times(c\boldsymbol{B}) = c(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

# ベクトルの外積の演算法則

(1) 交代的である；

$\boxed{\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}$, $\boxed{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}}$

(2) 和に関して分配法則が成り立つ；

$$\boxed{\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}}$$

(3) スカラー倍に関して結合法則が成り立つ；

$$\boxed{(c\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \times (c\boldsymbol{B}) = c(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})}$$

(4) <u>結合法則は成り立たない</u>.

つまり, 一般に $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ である. 特に,

$$\boxed{(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{A}}$$

# ベクトルの外積の幾何的な特徴づけ

ベクトルの外積は以下の３つの幾何的な性質により特徴づけられる.

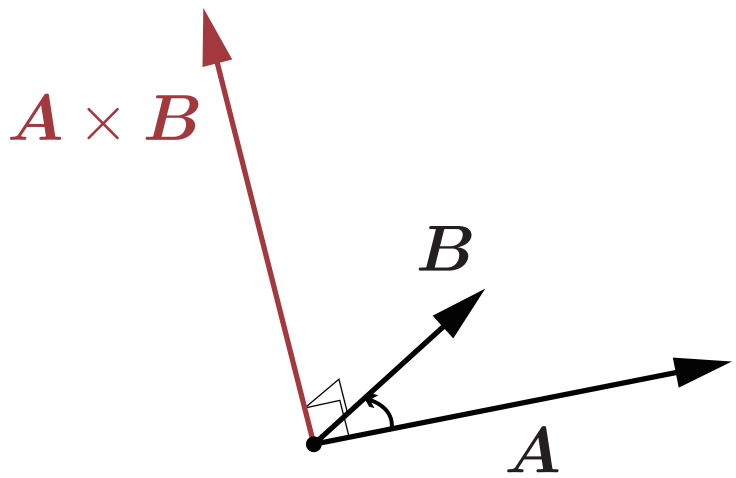
(1) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の両方に直交 する.

つまり, $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{B} = 0$ が成り立つ.

(2) $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = \sqrt{|\boldsymbol{A}|^2 \, |\boldsymbol{B}|^2 - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^2}$ が成り立つ.

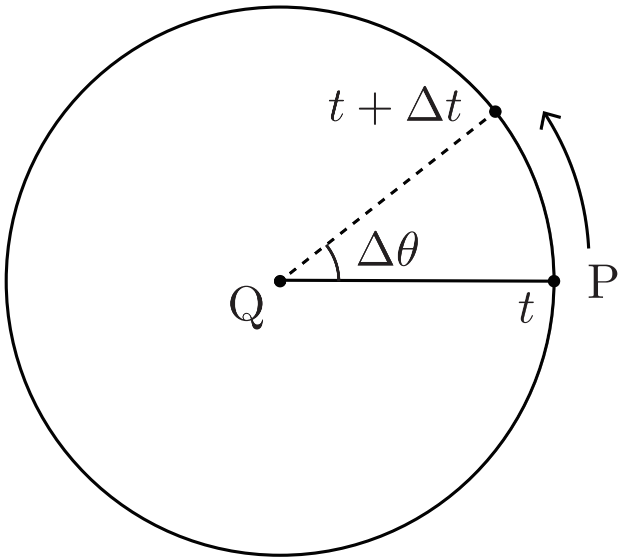
特に, 右辺は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 に等しい.

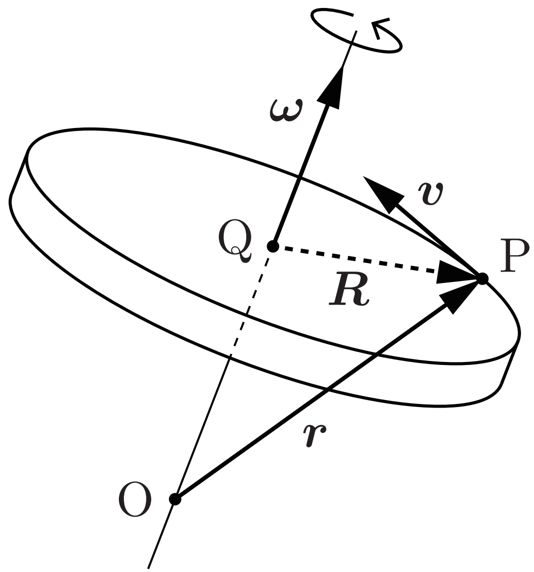
(3) ３つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は右手系 である.



# ベクトルの外積と回転運動

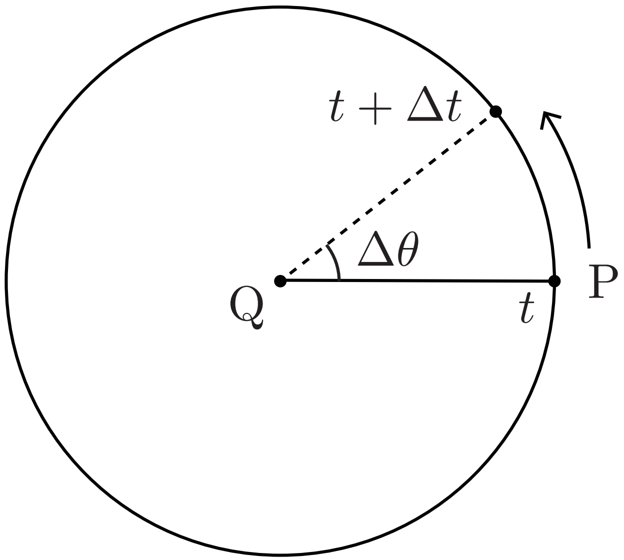
点 Q のまわりで質点 P が回転運動をしている.

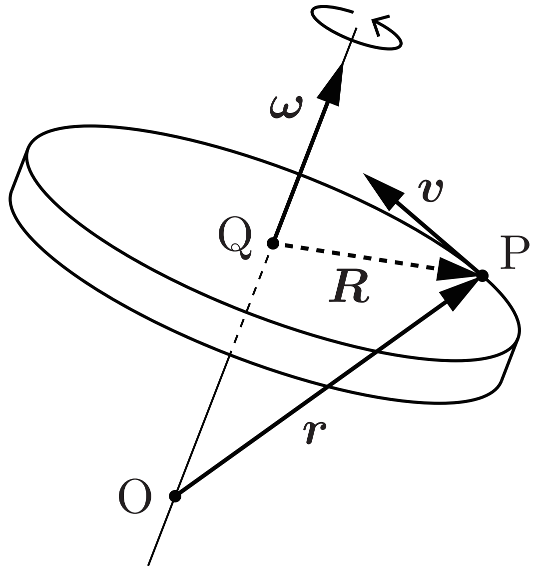


# ベクトルの外積と回転運動

点 Q のまわりで質点 P が回転運動をしている.



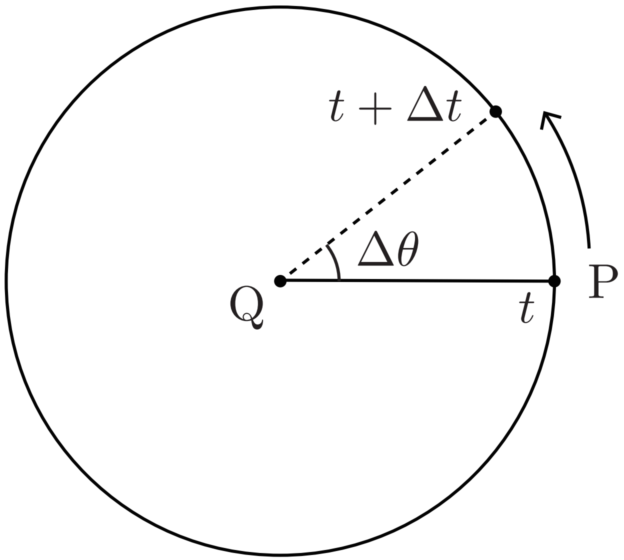



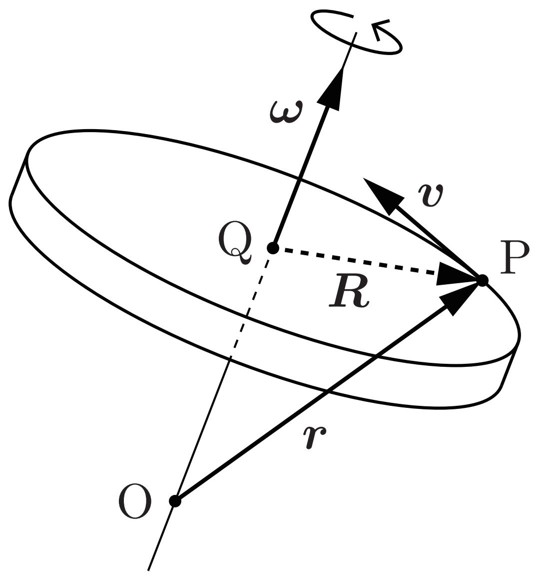

- **角速度 $\omega$**

  動径 QP が単位時間あたりに回転する角度のこと; $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$

# ベクトルの外積と回転運動

点 Q のまわりで質点 P が回転運動をしている.



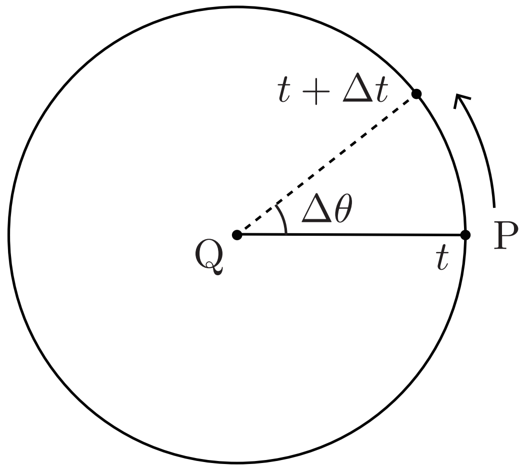



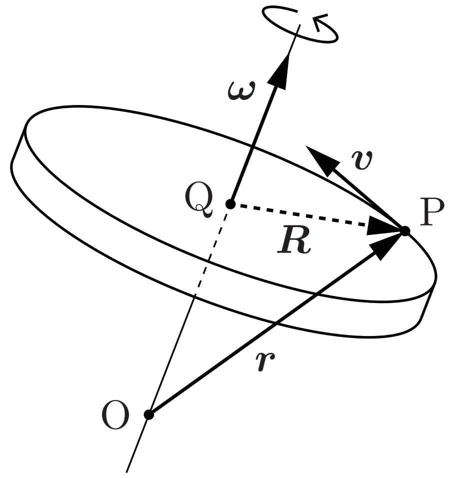

- 角速度 $\omega$

  動径 QP が単位時間あたりに回転する角度のこと; $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$

- 角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ 質点の速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とし, $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{\mathrm{QP}}$, $R = |\boldsymbol{R}|$ とする. このとき, $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{1}{R^2}\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}$ を角速度ベクトルという.

# ベクトルの外積と回転運動




- 回転運動は**角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の外積**により得られる. $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと,

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega}\times\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\boldsymbol{R}\right)=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}$$

$$=\left(\frac{1}{R^2}\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}\right)\times\boldsymbol{R}=\frac{1}{R^2}\left\{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}\right\}=\boldsymbol{v}$$

- 角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の大きさは 角速度 $\omega$ に等しい.

$$|\boldsymbol{\omega}|=\frac{1}{R^2}|\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}|=\frac{1}{R^2}\sqrt{|\boldsymbol{R}|^2\,|\boldsymbol{v}|^2-(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2}=\frac{|\boldsymbol{v}|}{R}=\omega$$

# ベクトル場の回転

**定義**

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\,\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + A_z(x,y,z)\,\boldsymbol{k}$ に対し,

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(x,y,z) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

で定まるベクトル場を $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の**回転**という.

# ベクトル場の回転

**定義**

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + A_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + A_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ に対し,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(x, y, z) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

で定まるベクトル場を $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の**回転**という.

注 ベクトル場の回転の定義式は形式的に

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

と書けることから, $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の回転を $\nabla \times \boldsymbol{A}$ と書くこともある.

# ベクトル場の回転

例） $\boldsymbol{A}(x, y, z) = xyz\,\boldsymbol{i} - y^2z^3\,\boldsymbol{j} + 2x^2y\,\boldsymbol{k}$ の回転は

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & -y^2z^3 & 2x^2y \end{vmatrix}$$

# ベクトル場の回転

例）$\boldsymbol{A}(x,y,z) = xyz\,\boldsymbol{i} - y^2z^3\,\boldsymbol{j} + 2x^2y\,\boldsymbol{k}$ の回転は

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & -y^2z^3 & 2x^2y \end{vmatrix}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(-y^2z^3)\right\}\boldsymbol{i} + \left\{\frac{\partial}{\partial z}(xyz) - \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y)\right\}\boldsymbol{j}$$
$$+ \left\{\frac{\partial}{\partial x}(-y^2z^3) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz)\right\}\boldsymbol{k}$$

# ベクトル場の回転

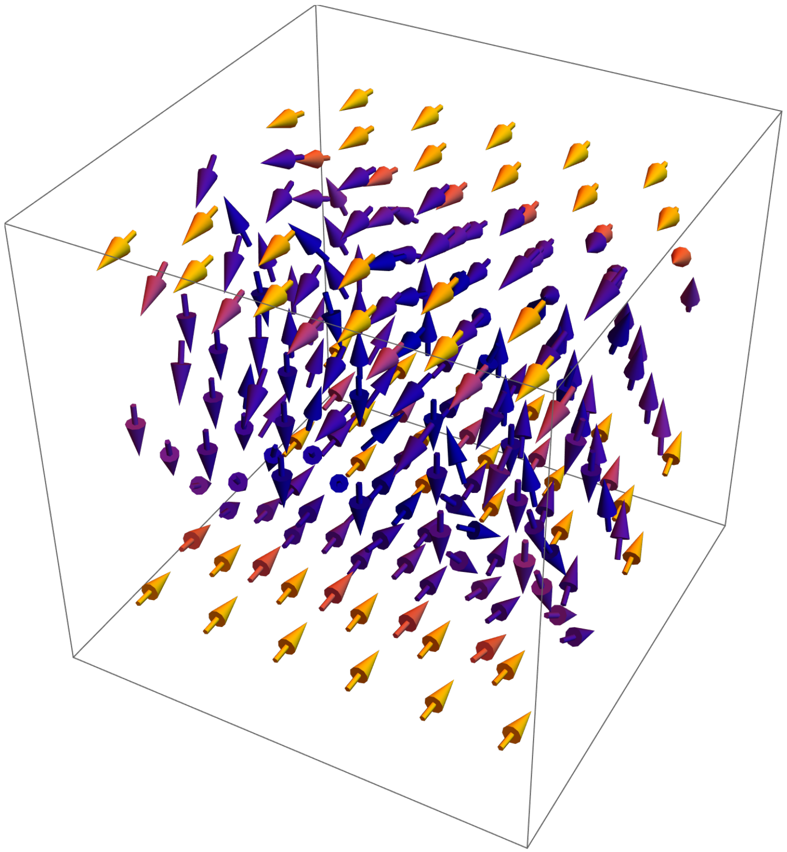
例）$\boldsymbol{A}(x,y,z) = xyz\,\boldsymbol{i} - y^2z^3\,\boldsymbol{j} + 2x^2y\,\boldsymbol{k}$ の回転は

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & -y^2z^3 & 2x^2y \end{vmatrix} \\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(-y^2z^3)\right\}\boldsymbol{i} + \left\{\frac{\partial}{\partial z}(xyz) - \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y)\right\}\boldsymbol{j} \\
&\quad + \left\{\frac{\partial}{\partial x}(-y^2z^3) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz)\right\}\boldsymbol{k} \\
&= (2x^2 + 3y^2z^2)\,\boldsymbol{i} - 3xy\,\boldsymbol{j} - xz\,\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

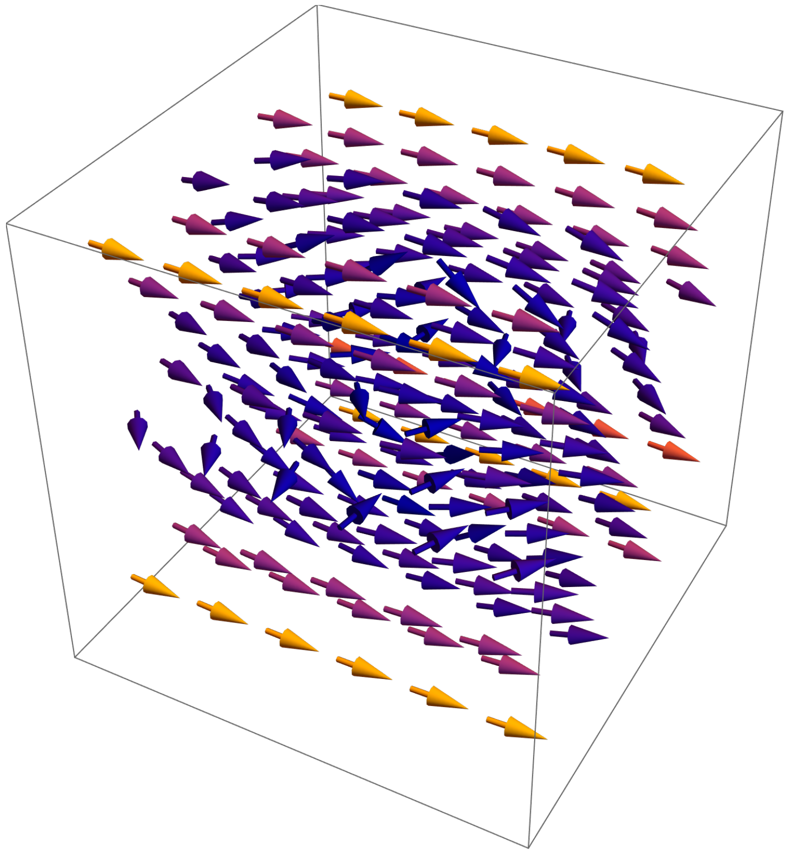
# ベクトル場の回転

例） $\boldsymbol{A}(x, y, z) = xyz\,\boldsymbol{i} - y^2z^3\,\boldsymbol{j} + 2x^2y\,\boldsymbol{k}$ の回転は

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = (2x^2 + 3y^2z^2)\,\boldsymbol{i} - 3xy\,\boldsymbol{j} - xz\,\boldsymbol{k}$$



ベクトル場 $\boldsymbol{A}$



ベクトル場 $\nabla \times \boldsymbol{A}$

# ベクトル場の回転の意味

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の各成分を $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ の近傍でテイラー展開する.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} A_x(\boldsymbol{x}) \\ A_y(\boldsymbol{x}) \\ A_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

# ベクトル場の回転の意味

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の各成分を $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ の近傍でテイラー展開する.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} A_x(\boldsymbol{x}) \\ A_y(\boldsymbol{x}) \\ A_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_x(\boldsymbol{x}_0) \\ A_y(\boldsymbol{x}_0) \\ A_z(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial A_x}{\partial y}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial A_x}{\partial z}(\boldsymbol{x_0}) \\ \frac{\partial A_y}{\partial x}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial A_y}{\partial y}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial A_y}{\partial z}(\boldsymbol{x_0}) \\ \frac{\partial A_z}{\partial x}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial A_z}{\partial y}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial A_z}{\partial z}(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} + \cdots$$

# ベクトル場の回転の意味

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の各成分を $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ の近傍でテイラー展開する.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} A_x(\boldsymbol{x}) \\ A_y(\boldsymbol{x}) \\ A_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_x(\boldsymbol{x}_0) \\ A_y(\boldsymbol{x}_0) \\ A_z(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}+\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_x}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_x}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial A_y}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_y}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_y}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial A_z}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_z}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_z}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}+\cdots$$

$$=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0)+\boxed{[\text{対称部分}]}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boxed{[\text{交代部分}]}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\cdots$$

# ベクトル場の回転の意味

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の各成分を $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ の近傍でテイラー展開する.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} A_x(\boldsymbol{x}) \\ A_y(\boldsymbol{x}) \\ A_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_x(\boldsymbol{x}_0) \\ A_y(\boldsymbol{x}_0) \\ A_z(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_x}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_x}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial A_y}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_y}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_y}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial A_z}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_z}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_z}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}+\cdots$$

$$=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0)+[\text{対称部分}]\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+[\text{交代部分}]\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\cdots$$

$$=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0)+[\text{対称部分}]\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0)\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\cdots$$

# ベクトル場の回転の意味

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の各成分を $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ の近傍でテイラー展開する.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} A_x(\boldsymbol{x}) \\ A_y(\boldsymbol{x}) \\ A_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_x(\boldsymbol{x}_0) \\ A_y(\boldsymbol{x}_0) \\ A_z(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_x}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_x}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial A_y}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_y}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_y}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial A_z}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_z}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial A_z}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}+\cdots$$

$$=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0)+\text{[対称部分]}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\text{[交代部分]}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\cdots$$

$$=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0)+\text{[対称部分]}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0)\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\cdot$$

$$=\text{(平行移動)}+\text{(拡大・縮小)}+\text{(回転)}+\cdots$$

# ベクトル場の回転の性質

**定理**

(1) 任意のスカラー場 $\varphi$ に対して,

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = \nabla \times (\nabla\varphi) = \mathbf{0}$$

が成り立つ.

(2) 任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し,

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

が成り立つ.

# スカラー場の勾配, ベクトル場の発散と回転

ナブラ演算子 $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ を用いて表すと

- スカラー場 $\varphi$ の勾配：$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi$
- ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散：$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A}$
- ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転：$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A}$

- スカラー場 $\varphi$ のラプラシアン：$\Delta\varphi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi$
- $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = \nabla\times(\nabla\varphi) = \boldsymbol{0}$
- $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$

# まとめと復習

- ベクトル場の発散の定義は？
  - ラプラシアンとはどのような作用素ですか？
- ベクトルの外積の定義は？
- ベクトル場の回転の定義は？
  - $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad}$ はどのような作用素ですか？
  - $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot}$ はどのような作用素ですか？

教科書 **p.85〜88**

問題集 **195, 196, 197, 198**

予 習 １変数ベクトル関数のホドグラフ 「応用解析」第１回