線形代数 II 演習[*1]

– 第 1 回 1 学期の復習（行列の基本変形），2 次正方行列の行列式 –

担当：佐藤 弘康[*2]

問題 1.1. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

問題 1.2. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

■ **行列式** 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，スカラー

$$\det(A) = ad - bc$$

を行列 A の行列式と呼ぶ．

■ **クラメールの公式** 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

の解は

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

で与えられる．ただし，$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ とする．

[*1] http://www.math.tsukuba.ac.jp/~hiroyasu/2007/l2-ex.html

[*2] 研究室：自然系学系 D 棟 801 (029-853-4267), E-mail: hiroyasu@math.tsukuba.ac.jp

問題 1.3. 次の連立方程式を，2 つの方法（行基本変形とクラメールの公式）を用いて解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$

■ 一次変換　2 次正方行列 A に対し，平面 $\mathbf{R}^2$ の点（ベクトル）を $\mathbf{R}^2$ の点に移す写像 $\varphi_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $\varphi_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定義することができる $(\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2)$．この写像 φ_A を行列 A から定まる一次変換（または線形変換）と呼ぶ（教科書 p.60 を参照）．

問題 1.4. 次の 2 次正方行列に対して，それが定める一次変換がどのような写像か説明せよ（平面内の点をどのように移すか調べよ）．

(1) $E_1(k) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

問題 1.5. $\mathrm{A} = (a_1, a_2)$, $\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ を $\mathbf{R}^2$ 上の原点 O 以外の点とする．線分 OA と OB を 2 辺にもつ平行四辺形の面積は，行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

の行列式の絶対値に等しいことを示せ．ただし，ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ は線形独立であるとする．

■ 行列式の符号について

2 次正方行列 A は平面の一次変換 φ_A を定め，平面内の図形を φ_A で移すと，その面積は $|\det(A)|$ 倍される．一次変換とは，原点を中心とした回転作用や，ある方向へ平面全体を伸ばしたり，縮めたりする作用を何回か施す変換である．$\det(A) \neq 0$ のとき，変換 φ_A を施すことにより，平面内の図形は伸びたり縮んだりするものの，だいたいの形は変わらない．ただし，行列式が負の行列の場合は，その作用により図形は裏返ってしまう (下図参照)．また，行列式が 0 の場合，平面内の図形は直線か 1 点に縮んでしまう．

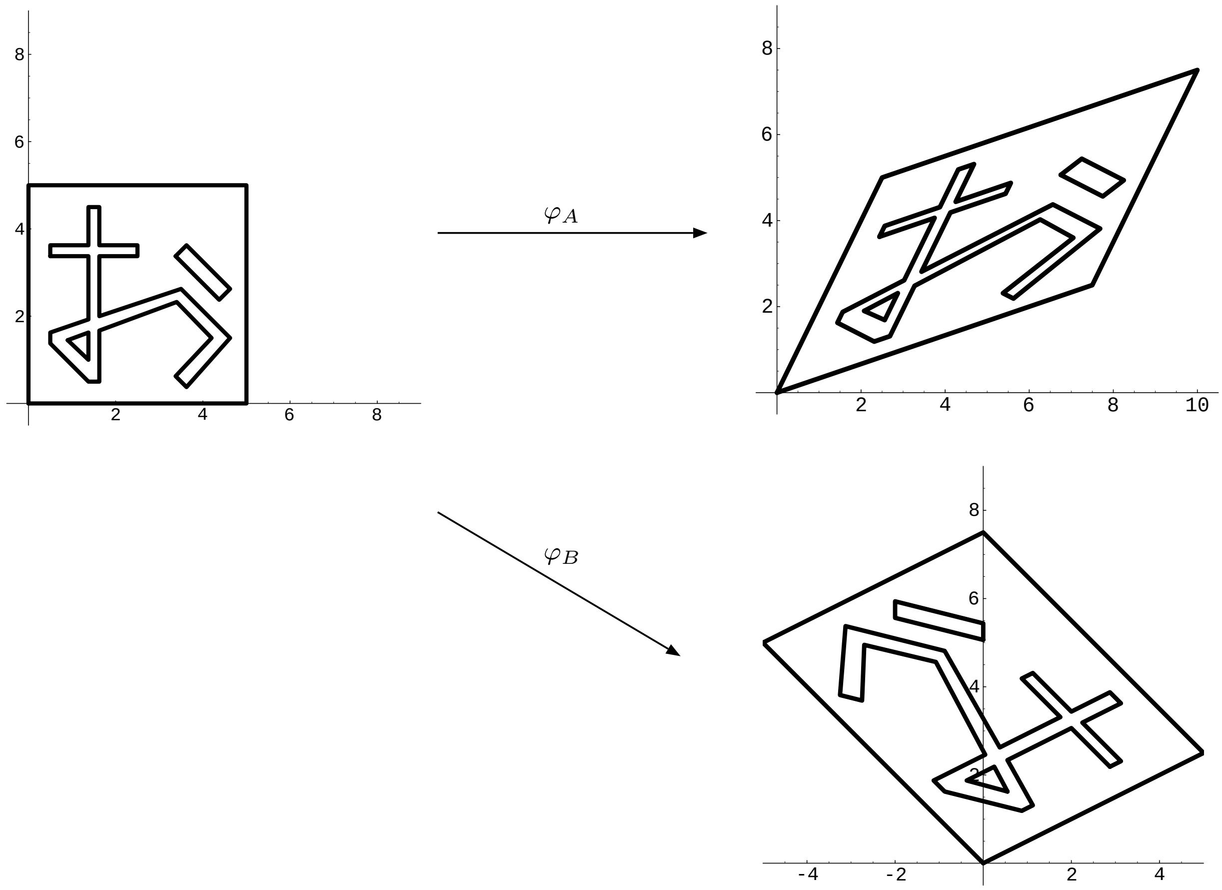

図: 一次変換による像．　$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$