行列式の基本性質

[性質 1] $|{}^tA| = |A|$（つまり, 行に関する性質は, 列についても成立する）

[性質 2] ★ 1つの行（列）を c 倍した行列式の値は,
もとの行列式の c 倍になる.

[性質 3]

[性質 4] ★ 2つの行（列）を入れ替えた行列式は,
元の行列式の (-1) 倍に等しい.

[性質 5]

[性質 6] ★ 1つの行（列）の c 倍を他の行（列）に加えた行列式の値は,
元の行列式の値に等しい.

[性質 7] $|AB| = |A|\,|B|$

【復習】行列の基本変形

「行列式の基本性質 2, 4, 6」は, 「行列の基本変形」と関連している.

⟶ 行列式の計算に, 行列の基本変形を活用することができる.

行列の基本変形

基本行列 M（(a) $A(i, j : c)$, (b) $P(i, j)$, (c) $M(i : c)$）を行列 A に左（右）からかけた行列 MA（AM）は, A の

(a) 第 j 行（第 i 列）の c 倍を第 i 行（第 j 列）に加えた行列
⟶ [性質 6] に対応

(b) 第 i 行（列）と第 j 行（列）を入れ換えた行列
⟶ [性質 4] に対応

(c) 第 i 行（列）を c 倍した行列
⟶ [性質 2] に対応

行列の基本変形と行列式

- [性質 7] を用いて理解することもできる. 基本行列の行列式はそれぞれ
  - $|A(i, j : c)| = 1$　例）$|A(1, 2 : c)| = \begin{vmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
  - $|P(i, j)| = -1$　例）$|P(1, 2)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$
  - $|M(i : c)| = c$　例）$|M(2 : c)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = c$

よって,

$$|A(i, j : c)A| = |A|, \quad |P(i, j)A| = -|A|, \quad |M(i : c)A| = c|A|.$$

行列の基本変形と行列式（計算方法）

方針

- 行列式の [性質 2, 4, 6] を用いて, 行列式を簡単な行列式に変形する.
- 例えば, 0 成分 が多い行列に変形する（[性質 6] が重要な役割を果たす）.
- 三角行列の行列式は, 対角成分の積に等しい.（p.135 例 5 を参照）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角行列　　　　下三角行列

- 一般の n 次正方行列の行列式も, 同様の方法で計算できる