線形代数 II 演習

－ クラメールの公式，固有多項式・固有値 －

担当：佐藤 弘康

例題 13.1. 次の連立方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{cases} \tag{13.1}$$

解. 連立方程式 (13.1) を行列を用いて書き直すと

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．クラメールの公式より，

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}.$$

各行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -26, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 26, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -52,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -26$$

であるから，(13.1) の解は $x = 1, y = -1, z = 2$.

問題 13.1. クラメールの公式を用いて，次の連立方程式を解け．ただし，(4) において a, b, c, d, e はすべて異なるものとする．

(1) $\begin{cases} 3x + y + z = 6 \\ 2x - 3y - 6z = 7 \\ 7x + 5y + 9z = -2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 12 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + z = 11 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + y - 3z - 4w = -6 \\ 2x + y + 5z + w = -6 \\ 2x + 2y + 2z - 3w = -10 \\ 3x + 6y - 2z + w = 4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ ax + by + cz + dw = e \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2w = e^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3w = e^3 \end{cases}$

例題 13.2. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ．また，固有値も求めよ．

解. n 次正方行列 A の固有多項式

$$\Phi_A(x) = \det(xE_n - A)$$

で定義される n 次多項式のことである．サラスの方法を用いて $\Phi_A(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \Phi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ 1 & x-4 & 2 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)^2(x-4) - 4 - 2 - 2(x-4) + 2(x-1) + 2(x-1) \\ &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6. \end{aligned}$$

また，A の固有値とは $\Phi_A(x) = 0$ の解のことである．$\Phi_A(x)$ は

$$\Phi_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

と因数分解できるので，固有値は $1, 2, 3$ である．

問題 13.2. 次の行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ および固有値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{-1} \\ 2-\sqrt{-1} & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

問題 13.3. A を n 次正方行列，P を n 次正則行列とするとき，$\Phi_{P^{-1}AP}(x) = \Phi_A(x)$ であることを示せ．

問題 13.4. 正則行列の固有値は 0 でないことを示せ．

問題 13.5. 次のことを証明せよ．

(1) λ が A の固有値ならば，λ は ${}^tA$ の固有値でもある．
(2) 正則行列 A に対して，λ が A の固有値ならば，$\dfrac{1}{\lambda}$ は A^{-1} の固有値である．
(3) 実正方行列 A に対して，$\lambda \in \mathbf{C}$ が A の固有値ならば，その複素共役 $\overline{\lambda}$ も A の固有値である．
(4) 複素正方行列 $A = (a_{ij})$ にたいし，行列 $\overline{A}$ を A の各成分の複素共役をとった行列，すなわち $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ と定義する．このとき，λ が A の固有値ならば，$\overline{\lambda}$ は $\overline{A}$ の固有値である．

問題 13.6. 例題 13.2 の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 行列 A の各固有値 $\lambda = 1, 2, 3$ に対して，方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の自明でない解 $\boldsymbol{v}_\lambda$ を一つ求めよ（$\boldsymbol{v}_\lambda$ を固有値 λ に対する固有ベクトルとよぶ)．
(2) (1) で求めたベクトル $\boldsymbol{v}_\lambda$ を並べてできる 3 次正方行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP$ を計算せよ．