線形代数 I 演習

－ 第 16 回 固有多項式，固有値，固有ベクトル (1) －

担当：佐藤 弘康

問題 16.1. 次の多項式を成分にもつ行列の行列式を求め，因数分解せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (1+x)^2 \\ 1 & 1 & (1-x)^2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1+x \\ 2+x & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3+x & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4+x & 1 \end{pmatrix}$

例題． 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有多項式 $f_A(x)$ を求めよ．また，固有値も求めよ．

解. 行列 A の固有多項式とは

$$f_A(x) = \det(xE_n - A)$$

であるから，サラスの方法を用いて上を計算すると

$$\begin{aligned} f_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ 1 & x-4 & 2 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)^2(x-4) - 4 - 2 - 2(x-4) + 2(x-1) + 2(x-1) \\ &= (x-1)^2(x-4) + 2(x-1) \\ &= (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

となる．固有値とは $f_A(x) = 0$ の解の解のことだから，固有値は $1, 2, 3$ である．

□ **問題 8.4 の復習 (行列の対角化)．** 上の行列 A の各固有値 λ に対し，方程式

$$(\lambda E_3 - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{16.1}$$

を考えよう．(16.1) の解を $\boldsymbol{v}_\lambda$ とおくと，これらは $A\boldsymbol{v}_\lambda = \lambda\boldsymbol{v}_\lambda$ を満たす．$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$AP = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

が成り立ち，$P^{-1}AP$ は対角行列になる．

問題 16.2. 次の行列 A の固有多項式 $f_A(x)$ および固有値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

問題 16.3. A を n 次正方行列，P を n 次正則行列とするとき，$f_{P^{-1}AP}(x) = f_A(x)$ であることを示せ．

問題 16.4. 上三角行列 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ に対して，

$$f_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$$

であることを示せ．

問題 16.5. $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ O & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & A_{mm} \end{pmatrix}$ ならば，$f_A(x) = f_{A_{11}}(x) \dots f_{A_{mm}}(x)$ であることを示せ．ただし，A_{ii} は正方行列とする．

■ 第 9 回の解

問題 9.1 (1) 3　(2) 2　(3) 2　(4) 3　(5) 3

問題 9.2 (1) i) $a \neq 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1\left(\frac{1}{a}\right)E_3\left(\frac{1}{a}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ b & 0 & a \\ 1 & \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{13}E_{23}(-b)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{b^2}{a} & a \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[P_{23}E_{23}\left(\frac{b^2}{a}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & a+\frac{b^3}{a^2} \end{pmatrix}.$$

したがって，$a + \frac{b^3}{a^2} \neq 0$，つまり $a+b \neq 0$ のとき階数は 3 で，$a+b=0$ のとき階数は 2 である．

ii) $a = 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

だから，$b \neq 0$ のとき階数は 3 で，$b = 0$ のとき階数は 0 である．

(2) $\{a, b, c, d\}$ の中の異なる数の個数で場合分けする．i) すべてが異なるとき，階数は 4，ii) 異なる数が 3 つのとき (例えば $a = b$, $c \neq a$, $d \neq a$, $c \neq d$)，階数は 3，　iii) 異なる数が 2 つのとき (例えば,「$a = b = c$ かつ $a \neq d$」，または「$a = b$ かつ $c = d$ かつ $a \neq c$」)，階数は 2，　iv) すべて等しいとき，階数は 1 である．

問題 9.3 (1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，自由度 0　(2) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，自由度 1

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，自由度 2

(4) $\dfrac{1}{29}\begin{pmatrix} 19 \\ 20 \\ 0 \\ -22 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，自由度 1　(5) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，自由度 1

問題 9.4 系 2.23 より，$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A$ かつ $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ が成り立つ．一方，仮定より AB は正則だから $\operatorname{rank} AB = n$．したがって，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$ であり，A, B は共に正則である．

問題 9.5 仮定より，$\operatorname{rank} AB = 0$．したがって，第 2 章の章末問題 5 より，$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$ が成り立つ．

(別解) $\operatorname{rank} A = r$ とすると，$P'AQ' = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ を満たす正則行列 P', Q' が存在する．$C' = \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix}$ とおくと，$P'AQ' + C' = E_n$．ここで，$C = P'^{-1}C'Q'^{-1}$，

$P = P'^{-1}Q'^{-1}$ とおくと，$A + C = P$ と書ける (ただし，P は正則行列)．仮定から，$PB = (A+C)B = AB + CB = CB$．この式の両辺の階数を考えると

$$\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} PB = \operatorname{rank} CB \leq \operatorname{rank} C = n - r, \tag{16.2}$$

したがって，$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$ を得る ((16.2) 式の最初の等号は系 2.21 を適用).

問題 9.6 仮定から，$AB = O$ を得るので，問題 9.6 より，$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$．さらに仮定 $A + B = E_n$ と第 2 章の章末問題 4(1) より，$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \geq n$．したがって，$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = n$ を得る．

問題 9.7

$$\boldsymbol{u}_1 = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{u}_2 = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + b_3\boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{u}_3 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \text{が線形独立} \\
\iff\ & x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3 = 0 \text{ を満たす } (x, y, z) \text{ は } (0,0,0) \text{ のみ} \\
\iff\ & \text{方程式} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \text{ は自明解しか持たない} \\
\iff\ & A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \text{ は正則} \\
\iff\ & \operatorname{rank} A = 3 \\
\iff\ & \text{行列 } A \text{ の線形独立な列ベクトルの最大個数は } 3 \\
\iff\ & \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ は線形独立}
\end{aligned}$$

問題 9.8 (9.2) 式の解とは「平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と直交するベクトル」と解釈することができる．平面において 2 つのベクトルが線形従属であることと，それらが平行であることは同値であるから，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属であるときに限り，この 2 つに直交する $\mathbf{0}$ でないベクトルが存在する．

■ 第 2 章の章末問題 5 の別解

> n 次正方行列 A, B に対し，以下の不等式が成り立つ．
>
> $$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \leq \operatorname{rank} AB \tag{16.3}$$

(16.3) は

$$(n - \operatorname{rank} A) + (n - \operatorname{rank} B) \geq (n - \operatorname{rank} AB) \tag{16.4}$$

と表すことができ，$(n - \operatorname{rank} A)$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度 (基本解の個数) に等しいことから

$$(A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ の基本解の数}) + (B\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ の基本解の数}) \geq (AB\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ の基本解の数}) \tag{16.5}$$

を示せばよい．

$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ を $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解とする．つまり，

i) $B\boldsymbol{x}_i = 0$. $(i = 1, \ldots, k)$

ii) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ は線形独立である．

iii) $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のすべての解は $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ の線形結合で表せる．

このとき，$\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1 \ldots, k)$ は $AB\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ も満たすので，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ は $AB\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解の一部と考えられる．そこで，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ 以外の $AB\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を $\boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{k+l}$ とおく．このとき，

(1) $B\boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, B\boldsymbol{x}_{k+l}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解

(2) $B\boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, B\boldsymbol{x}_{k+l}$ は線形独立

である．

まず，(1) は明らかであろう．(2) を示すために，

$$c_1 B\boldsymbol{x}_{k+1} + \ldots + c_l B\boldsymbol{x}_{k+l} = 0 \tag{16.6}$$

とおくと，これは

$$B(c_1\boldsymbol{x}_{k+1} + \ldots + c_l\boldsymbol{x}_{k+l}) = 0 \tag{16.7}$$

と書けるから，$c_1\boldsymbol{x}_{k+1} + \ldots + c_l\boldsymbol{x}_{k+l}$ は $B\boldsymbol{x} = 0$ の解である．したがって，このベクトルは $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ の線形結合で表すことができる;

$$c_1\boldsymbol{x}_{k+1} + \ldots + c_l\boldsymbol{x}_{k+l} = a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_k\boldsymbol{x}_k. \tag{16.8}$$

しかし，$\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{k+l}\}$ は線形独立だから，$a_1 = \ldots = a_k = 0$ かつ $c_1 = \ldots = c_l = 0$ を得る．これで (2) が証明できた．

以上のことから，$B\boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, B\boldsymbol{x}_{k+l}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解の一部となることがわかった．したがって，($A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度) $\geq l$ となり，(16.3) が証明された．

■ 第 10 回の解と捕捉

復習問題 1　「逆行列が存在する $\Longleftrightarrow$ 階数が 3」を用いる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & k+2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{23}E_{23}\left(\frac{k+2}{2}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k-2}{2} \end{pmatrix}$$

でるから，階数が 3 になるための条件は $k \neq 2$ である．

(別解) 「逆行列が存在する $\Longleftrightarrow$ 行列式は 0 でない」を用いる．3 行目について余因子展開すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & k \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) + (k+2) = k-2.$$

したがって，解は $k - 2 \neq 0$ である．

復習問題 2 (10.12) のベクトルが線形従属とは

$$x(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+y(2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})+z(3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})=0 \tag{16.9}$$

を満たす $(0,0,0)$ でない実数の組 (x,y,z) が存在することである．(16.9) 式は

$$(x+2y)\boldsymbol{a}+(2x+ky+3z)\boldsymbol{b}+(-x-2z)\boldsymbol{c}=0$$

と表すことができ，ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が線形独立であることから，x,y,z は

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+ky+3z=0 \\ -x-2z=0 \end{cases} \tag{16.10}$$

を満たす．したがって，連立一次方程式 (16.10) が非自明解を持つための k の条件，つまり行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & k & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ が正則でないときの条件を求めればよい．．この行列の行列式を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & k & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ k & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = -6-2(k-4)=-2(k-1)$$

であるから，求める条件は $k=1$ である．

問題． 任意のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に対し，3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\quad 2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\quad 3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$$

は線形従属であることを証明せよ．

問題 10.1 (1) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\dfrac{7}{7}=1,\quad y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\dfrac{7}{7}=1$

(1) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}=\dfrac{-11}{-11}=1,\quad y=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}=\dfrac{-11}{-11}=1$

問題 10.2 (1) 直線 $y=2x+1$ 上の点を媒介変数 t を用いて $(t,2t+1)$ とおくと，この点は行列 A から定まる変換 φ_A により，

$$(t,2t+1)\mapsto(5t+1,-10t-2)$$
$$\left(\varphi_A\text{は行列のかけ算作用}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5t+1 \\ -10t-2 \end{pmatrix}\right)$$

に移る．$X = 5t+1, Y = -10t-2$ とおいて，t を消去すると $Y = -2X$ であるから，$(5t+1, -10t-2)$ は直線 $y = -2x$ 上の点である．したがって，φ_A により直線 $y = 2x+1$ は直線 $y = -2x$ に移る．

(2) (1) 同様に，直線 $y = -3x-2$ 上の点を媒介変数 t を用いて $(t, -3t-2)$ とおき，φ で移すと

$$(t, -3t-2) \mapsto (-2, 4)$$

となる．上は任意の $t \in \mathbf{R}$ で成り立つから，直線 $y = -3x-2$ 上の点は φ_A により，1 点 $(-2, 4)$ に移る (直線が点につぶれる).

問題． 問題 10.2 の行列 A から定まる一次変換 φ_A に対し，傾きが -3 以外の直線はすべて $y = -2x$ に移り，傾きが -3 の直線はすべて 1 点につぶれることを証明せよ．

問題 10.3 第 2 回の問題 2.5 より，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を 2 辺にもつ三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}$$

に等しい．したがって，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を 2 辺に持つ平行四辺形の面積は

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2} \\
=&\sqrt{({a_1}^2 + {a_2}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2} \\
=&\sqrt{({a_1}^2{b_1}^2 + {a_2}^2{b_1}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 + {a_2}^2{b_2}^2) - ({a_1}^2{b_1}^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + {a_2}^2{b_2}^2)} \\
=&\sqrt{{a_2}^2{b_1}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 - 2a_1a_2b_1b_2} \\
=&\sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} \\
=&|a_1b_2 - a_2b_1| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$