数学クォータ科目「基礎数学 II」第 6 回

定積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

これまでのまとめ（1）

- 関数 $y = f(x)$ がある．
  - $x = a$ における微分係数（ 平均変化率 の極限）
    （$y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の傾きの値）

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

  - 導関数 （関数 $f(x)$ の微分） $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

- 微分の性質 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し，

(1-1) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(t)$

(1-2) $\{k\, f(x)\}' = k\, f'(x)$

これまでのまとめ（2）

- **基本的な関数の微分**

(2-1) $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ (α は実数)

(2-2) $(k)' = 0$（すなわち，定数関数の微分は消える）

(2-3) $(\sin x)' = \cos x$

(2-4) $(\cos x)' = -\sin x$

(2-5) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(2-6) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

(2-7) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$　　特に，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(2-8) $(a^x)' = a^x \log a$　　特に，$(e^x)' = e^x$

これまでのまとめ（3）

- 微分公式

(3-1) 合成関数の微分：$\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$

特に，$\dfrac{d}{dx}f(ax+b) = a\,f'(ax+b)$

(3-2) 積の微分公式：$\{f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

(3-3) 商の微分公式：$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

特に，$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$

(3-4) 対数微分法：$f'(x) = f(x)\cdot(\log f(x))'$

これまでのまとめ（4）

- 関数 $y = f(x)$ がある．
  - $F'(x) = f(x)$ を満たす関数を $f(x)$ の原始関数という．
  - $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ を $f(x)$ の不定積分という．

- 不定積分の性質 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し，

(4-1) $\displaystyle\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

(4-2) $\displaystyle\int \{k\,f(x)\}\,dx = k\int f(x)\,dx$

- 積分の計算方法

(5-1) 置換積分法

(5-2) 部分積分法

今週のこと

- 定積分の定義（リーマン和）と計算方法（微分積分学の基本定理）

- 置換積分法 を利用した定積分の計算
- 部分積分法 を利用した定積分の計算
- 三角関数の加法定理（積和の公式）を利用した積分の計算

定積分

- $a \geq x \geq b$ で有界な関数 $f(x)$ に対して定まる量．
- リーマン和の極限として定義される（教科書 p.130 参照）．これを

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書く．

- 定積分の値は

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b := \boxed{F(b) - F(a)}$$

となる．ただし，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数（のひとつ）．

- なぜ，定積分が原始関数を利用して計算できるのか？

→ 微分積分学の基本定理 が成り立つから．

定積分の計算方法（微分積分学の基本定理）

定理

$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおく．このとき，$S'(x) = f(x)$ が成り立つ．

- よって，$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数なので，$S(x) = F(x) + C$ と書ける．
- $S(a) = 0$ である．つまり，$0 = S(a) = F(a) + C$ より，$C = -F(a)$ である．
- よって，

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(b) = F(b) + C = F(b) + (-F(a)) = [F(x)]_a^b.$$

定積分の性質

関数 $f(x), g(x)$ と定数 a, b, c, k に対し，以下が成り立つ．

(6-1) $\displaystyle \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(6-2) $\displaystyle \int_a^b \{k\,f(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(6-3) $\displaystyle \int_a^a f(x)\,dx = 0$

(6-4) $\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(6-5) $\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$

置換積分法・部分積分法を利用した定積分の計算

置換積分法　定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ において，$x = g(t)$ と置き換えるとき，

$$a = g(\alpha), \qquad b = g(\beta)$$

であるとする．このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

部分積分法

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \left[f(x)\,g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

三角関数の性質を利用した積分計算

問１） $I = \displaystyle\int \sin x \cos x \, dx$

- 置換積分を利用：$\sin x = t$ とおくと, $\dfrac{dt}{dx} = \cos x$ より, $\cos x \, dx = dt$.

  よって,

$$I = \int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

- 部分積分を利用

$$I = \int \sin x \, (\sin x)' \, dt = \sin^2 x - \int (\sin x)' \sin x \, dx$$

$$= \sin^2 x - \int \cos x \sin x \, dx = \sin^2 x - I.$$

$$2I = \sin^2 x \qquad \therefore I = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

三角関数の性質を利用した積分計算

問１）$I = \displaystyle\int \sin x \cos x\, dx$

○ 倍角の公式（加法定理）を利用：$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ より，

$$I = \frac{1}{2}\int 2\sin x\ \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

注意）前ページの式と同じなのか？

$$-\frac{1}{4}\cos 2x + C = -\frac{1}{4}(1 - 2\sin^2 x) + C$$
$$= \frac{1}{2}\sin^2 x + \left(-\frac{1}{4} + C\right) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

三角関数の性質を利用した積分計算

問２）$I = \displaystyle\int \sin 3x \cos x \, dx$

- 部分積分を利用して計算することもできるが，三角関数の加法定理から導かれる積和の公式を利用して計算することができる.
- 正弦関数の加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

より

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

- よって,

$$I = \int \frac{1}{2}\{\sin(3x + x) + \sin(3x - x)\}\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 2x)\ dx = \cdots$$