微積分演習 (2 学期)

－ 第 4 回 Taylor 展開の応用，「円周率の計算」についての補足 －

担当：佐藤 弘康

演習問題 1.17 の公式

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

は 1706 年にイギリスのマチン (John Machin) という人によって発見され，円周率の近似値を計算するのに使われました．この他にも類似の公式がいくつか知られています：

- ガウス (1863 年)

$$\frac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\frac{1}{18} + 8\tan^{-1}\frac{1}{57} - 5\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

- 高野喜久雄 (1982 年)

$$\frac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\frac{1}{49} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 5\tan^{-1}\frac{1}{239} + 12\tan^{-1}\frac{1}{110443}$$

これらの公式の証明は，(1) tan の倍角の公式及び加法定理を用いる方法と，(2) 複素数の性質を使って示す方法があります．2 つ目の方法の例として次の問題を挙げておきます．

問題． $(2+\sqrt{-1})(3+\sqrt{-1}) = 5(1+\sqrt{-1})$ を確かめ，そのことを使って

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

を示せ．

参考文献

[1] 大浦拓哉，円周率の公式と計算法[*1].

[*1] http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/pi04.pdf