線形代数 II 演習（試験問題の解答）

$\boxed{\text{問 1.}}$ (1) $|A+B| = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -30$. $|A-B| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$. したがって，$|A+B|\cdot|A-B| = -120$. 一方，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=6\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 6\cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=30\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 30\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 30\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=30\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 120\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 120\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -120.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} A+B & O \\ O & A-B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & O \\ -E_2 & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & O \\ E_2 & E_2 \end{pmatrix}.$$

両辺の行列式をとると，行列式の性質より

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= |A+B|\cdot|A-B|, \\ (\text{右辺}) &= \begin{vmatrix} E_2 & O \\ -E_2 & E_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} E_2 & O \\ E_2 & E_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問 2.}}$ $A_\sigma(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2, A_\sigma(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_5, A_\sigma(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1, A_\sigma(\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_4, A_\sigma(\boldsymbol{e}_5) = \boldsymbol{e}_3$. したがって，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1,2,5,3) = (1,2)\,(2,5)\,(5,3)$.

（別解） 行基本変形により，$P_{35}P_{25}P_{12}A_\sigma = E_5$. したがって，$A_\sigma = P_{12}P_{25}P_{35}$ と書ける．$P_{ij} = A_{(i,j)}$ であるから，$P_{12}P_{25}P_{35} = A_{(1,2)}A_{(2,5)}A_{(3,5)} = A_{(1,2)\,(2,5)\,(5,3)}$. したがって，$\sigma = (1,2)\,(2,5)\,(5,3)$ を得る．

（別解についての注意）結論のところで「$A_\sigma A_\tau = A_{\sigma\circ\tau}$」および「$A_\sigma = A_\tau$ ならば $\sigma = \tau$」という事実を使った．これは，置換全体の集合と置換行列全体のなす集合が $\sigma \mapsto A_\sigma$ によって 1 対 1 に対応し，さらにこの対応が積の構造を保つことによる．このように，実際には深い議論が必要である（キーワード：群，同型写像）．

問 3.

$$D(a,b,c) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

したがって，

$$x = \frac{D(2,1,2)}{D(3,1,2)} = 0,\ y = \frac{D(3,2,2)}{D(3,1,2)} = 0,\ z = \frac{D(3,1,2)}{D(3,1,2)} = 1.$$

問 4.

(1) 正しい．AB は正則であるから，$\det(AB) \neq 0$ である．一般的に $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$ が成り立つので，$\det(AB) \neq 0$ は「$\det(A) \neq 0$ かつ $\det(B) \neq 0$」を意味する．つまり，A も B も正則である．

(2) 正しくない．$\det(-A) = \det(A(-E_n)) = \det(A)\cdot\det(-E_n)$．$\det(-E_n)$ は n が奇数か偶数かによって $-1, 1$ の値をとる．

(3) 正しい．

$$\begin{aligned} 0 \text{ は } A \text{ の固有値} &\iff A \text{ の固有多項式 } \Phi_A(x) \text{ は } \Phi_A(0) = 0 \text{ を満たす} \\ &\iff \Phi_A(0) = \det(-A) = 0 \\ &\iff \det(A) = 0, \text{つまり } A \text{ は正則ではない.} \end{aligned}$$

(4) 正しい．

A の成分がすべて整数のとき，$\det(A)$ も整数となる（なぜなら，行列式は行列の成分の積和であるから）．

今,「A^{-1} の成分がすべて整数」であったとしよう．このとき，$\det(A^{-1})$ も同様に整数となる．しかし，$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ であるから，これを満たす整数は ± 1 だけである．

逆に，$\det(A) = \pm 1$ としよう．余因子行列の性質から，$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widetilde{A} = \pm\widetilde{A}$．余因子行列の各成分は A の小行列の行列式なので，これも A の成分の積和であり，整数である．