

## 線形代数 I 演習

— 第 18 回 行列式 —

担当：佐藤 弘康

問題 18.1. 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  の行列式を求めよ. また, 逆行列  $A^{-1}$  を計算し,  $|A^{-1}|$  を求めよ.

問題 18.2. 次の行列  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  に対し, 行列式  $|A|, |B|$  を求めよ, また,  $AB, BA$  を計算し,  $|AB|, |BA|$  を求めよ.

□ 行列式の性質 (注意: d-2)~d-4) は行に関しても成り立つ.)

$$\text{d-1) } \det \left( \begin{array}{c|c} a & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \begin{array}{c} A \end{array} \right) = \det \left( \begin{array}{c|c} a & 0 \cdots 0 \\ \hline * & A \end{array} \right) = a \cdot \det(A)$$

d-2) 列に関する線型性 (定理 3.10):

$$\begin{aligned} & \det \left( \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j + c\mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array} \right) \\ &= \det \left( \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array} \right) + c \cdot \det \left( \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array} \right) \end{aligned}$$

d-3) 任意の列の入れ換えに対して,  $(-1)$  倍される (定理 3.8):

$$\det \left( \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \right) = -\det \left( \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i \cdots \right)$$

d-4) 任意の列をスカラー倍して, 別の列に加えても行列式は変わらない:

$$\det \left( \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \right) = \det \left( \cdots \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \right)$$

d-5)  $|AB| = |A| \cdot |B|$  (定理 3.9)

d-6)  $|{}^t A| = |A|$  (定理 3.12)

例題.(教科書 p.83 例題 3.9.) 次の行列  $A$  の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 - \sqrt{2} & -4 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6 + 4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解. 方針: 行列式の性質 d-1), d-3), d-4) を使って行列を変形し, 行列のサイズを小さくしていく.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 - \sqrt{2} & -4 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6 + 4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(4 行目を適当にスカラー倍して 1, 2, 3 行目に加えて, 1 行目と 4 行目を入れ換える)

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 0 & -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(2 行目を  $(-5)$  倍して 3 行目に加える)

$$= - \begin{vmatrix} -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ -8 + 3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

(1 行目と 2 行目を交換し, 1 列目と 3 列目を入れ換える)

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -8 + 3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 + \sqrt{3} & 2 - 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -6 + 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -8 + 3\sqrt{2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -6 + 2\sqrt{2} \\ 3 & -8 + 3\sqrt{2} \end{vmatrix} \\ &= 2(-8 + 3\sqrt{2}) - 3(-6 + 2\sqrt{2}) = 2. \end{aligned}$$

問題 18.3. 次の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 (3) & \begin{pmatrix} 123 & 234 & 345 \\ 234 & 345 & 456 \\ 345 & 456 & 567 \end{pmatrix} & (4) & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} & (5) & \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{pmatrix} \\
 (6) & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 + \frac{1}{a} \\ 1 & 1 & 1 + \frac{1}{b} & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{c} & 1 & 1 \\ 1 + \frac{1}{d} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

例題. 次の行列の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$$

解.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

(2 列目を 1 列目に加える)

$$= \begin{vmatrix} a+b & -c & -b \\ a+b & a+b+c & -a \\ -b-a & -a & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 1 & a+b+c & -a \\ -1 & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

(1 行目を 2 行目から引き, 1 行目を 3 行目に加える)

$$= (a+b) \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 0 & a+b+2c & -a+b \\ 0 & -a-c & a+c \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -a-c & a+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c) \begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c) \{(a+b+2c) + (-a+b)\}$$

$$= 2(a+b)(b+c)(a+c).$$

問題 18.4. 次の行列の行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} m & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

問題 18.5. 本プリント p.18 の「行列式の性質:d-4)」を d-2) と d-3) を用いて証明せよ.

問題 18.6.  $A$  を正則行列とする. このとき,  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$  が成り立つことを証明せよ.

問題 18.7.  $A, B$  を  $n$  次正方行列とすると,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$$

を証明せよ.

問題 18.8.  ${}^t A = -A$  を満たす行列を交代行列と呼んだ (教科書 p.24). 奇数次の交代行列の行列式は 0 であることを証明せよ.

問題 18.9.  ${}^t A \cdot A = E_n$  を満たす行列を直交行列と呼ぶ. 直交行列の行列式は +1 か -1 のどちらかであることを証明せよ.

問題 18.10 (宿題). 次の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$