数学クォータ科目「基礎数学 II」第 4 回

微分の計算（3）

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

これまでのまとめ（1）

関数 $y = f(x)$ がある．

- $x = a$ から $x = b\ (= a + h)$ までの平均変化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$\leftarrow$ 2点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の傾き

- $x = a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

$\leftarrow$ 点 $(a, f(a))$ における接線の傾き

- 導関数 $\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$

これまでのまとめ（２）

- **微分の性質** 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し，

(1-1) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(t)$

(1-2) $\{k\, f(x)\}' = k\, f'(x)$

- **基本的な関数の微分**

(2-1) $(k)' = 0$（すなわち，定数関数の微分は消える）

(2-2) $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ (α は実数)

(2-3) $(\sin x)' = \cos x$

(2-4) $(\cos x)' = -\sin x$

(2-5) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(2-6) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

これまでのまとめ（３）

- 微分公式

(3-1) 合成関数の微分：$\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$

特に，$\dfrac{d}{dx}f(ax+b) = a\,f'(ax+b)$

(3-2) 積の微分公式：$\{f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

(3-3) 商の微分公式：$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

特に，$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$

今週のこと

- 基本的な関数の微分（４） 指数関数と対数関数の微分

(2-7) $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x \log a}$ 特に，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(2-8) $(e^x)' = e^x$

ここで，

- e $(= 2.71\ldots)$ は自然対数の底（または，ネイピア数）とよばれる定数．
- $\log x$ とは，e を底とする対数関数（$\log x = \log_e x$）．

- 微分公式（３）

(3-4) 対数微分法：$f'(x) = f(x) \cdot (\log f(x))'$

対数関数の微分

問１） $f(x) = \log_a x$ を微分しなさい．

（解）

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1 + \boxed{\frac{h}{x}}\right)}{\boxed{\frac{h}{x}}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{H\to 0} \frac{\log_a(1+H)}{H} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{H\to 0} \log_a \boxed{(1+H)^{\frac{1}{H}}} \cdot \frac{1}{x}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{H\to 0} (1+H)^{\frac{1}{H}} = e$ である．

$$= \boxed{\frac{\log_a e}{x}}$$

※ 特に，$a = e$ のとき，$(\log_e x)' = \dfrac{\log_e e}{x} = \dfrac{1}{x}$ である．

指数関数 e^x の微分

問２） $f(x) = e^x$ を微分しなさい．

（解）

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \boxed{\frac{e^h-1}{h}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1 \cdots\cdots (*)$ である．

$$= \boxed{e^x}$$

$(*)$ の証明：$H = e^h - 1$（つまり，$h = \log(H+1)$）とおく．h が 0 に十分近いとき，H も 0 に十分近い．よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{H\to 0}\frac{H}{\log(H+1)} = \lim_{H\to 0}\frac{1}{\frac{\log(H+1)}{H}} = \lim_{H\to 0}\frac{1}{\log\boxed{(H+1)^{\frac{1}{H}}}} = \frac{1}{\log e} = 1.$$

対数微分法

- $\underline{f(x)\text{ の微分}}$の求めるために，$\underline{\log f(x)\text{ の微分}}$を計算する方法．
- $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ と，合成関数の微分公式 より，

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \text{つまり} \quad f'(x) = f(x) \cdot (\log f(x))'$$

- $\log f(x)$ を計算することの効用

(1) 積や商が，和や差に分解される．

例）$\log(f(x) \cdot g(x)) = \log f(x) + \log g(x)$

例）$\log\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \log f(x) - \log g(x)$

(2) 累乗の指数が，対数の定数倍となる．

例）$\log(f(x)^{\alpha}) = \alpha \cdot \log f(x)$

対数微分法の計算例

問３）$f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{(x^2-3x+1)^3}$ を微分しなさい．

（解）$\log f(x) = 2\log(2x-1) - 3\log(x^2-3x+1)$ である．

対数微分法の計算例

問４） $f(x) = a^x$ を微分しなさい（ただし，$a > 0$）．

（解）$\log f(x) = \log a^x = x \log a$ である．この式の両辺を微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log a.$$

よって，

$$f'(x) = f(x) \log a = \boxed{a^x \log a}$$