線形代数 I 演習

— 第 2 回 平面ベクトルの幾何学的意味，内積 —

担当：佐藤 弘康

基本問題 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 「平面の点 A の位置ベクトル」とは?

(2) ベクトルの和，スカラー倍はどのような幾何学的意味があるか？

(3) 「平面ベクトルの内積」とは?

問題 2.1. 次のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対し，ベクトルの長さ $\|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{v}\|$ および内積 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を計算し，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角を求めよ.

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$ (4) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

問題 2.2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を平面ベクトルとする．もし，$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ ならば，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ は直交することを示せ.

問題 2.3. A, B を平面内の点とし，それぞれの点の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とする (ただし，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形従属でないとする)．このとき，三角形 OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}$$

に等しいことを示せ.

問題 2.4. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を平面ベクトルとするとき，

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = 2\left(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2\right) \tag{2.1}$$

が成り立つことを示せ.