

線形代数 I 演習

- 第 7 回 転置行列, 特殊な行列 -

担当: 佐藤 弘康

基本問題 以下のことを確認せよ (定義を述べよ) .

- (1) 行列 A の転置行列 tA とはどのような行列か .
- (2) 対称行列, 交代行列 (歪対称行列) とはどのような行列か .
- (3) 対角行列, スカラー行列とはどのような行列か .
- (4) 上三角行列, 下三角行列とはどのような行列か .

問題 7.1. 次の行列を対称行列と交代行列の和で表せ .

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

問題 7.2. 任意の正方行列 A に対して, ${}^tA \cdot A$ は対称行列になることを証明せよ .

問題 7.3. $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ が上三角行列ならば, $A + B$ および AB も上三角行列であることを示せ .

問題 7.4. $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ を対称行列とすると, 次の 2 つの条件が同値であることを証明せよ .

- (i) AB が対称行列である .
- (ii) A と B は可換 . つまり $AB = BA$ が成り立つ .

定義. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して, その対角成分の和を行列 A のトレースといい, $\text{Tr } A$ で表す (トレースの性質については教科書 p.33 問題 11 参照) .

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

問題 7.5. $A \in M(n, \mathbf{R})$ に対し, 次の 2 つの条件が同値であることを証明せよ .

- (i) 任意の交代行列 $B \in M(n, \mathbf{R})$ に対して, $\text{Tr}(AB) = 0$.
- (ii) A は対称行列 .