線形代数 II 演習

－ 第 8 回 固有多項式，固有値 －

担当：佐藤 弘康

例題． 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ．また，固有値も求めよ．

解．行列 A の固有多項式とは

$$\Phi_A(x) = \det(xE_n - A)$$

で定義される n 次多項式のことである．サラスの方法を用いて $\Phi_A(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \Phi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ 1 & x-4 & 2 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)^2(x-4) - 4 - 2 - 2(x-4) + 2(x-1) + 2(x-1) \\ &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6. \end{aligned}$$

また，A の固有値とは $\Phi_A(x) = 0$ の解のことである．$\Phi_A(x)$ は

$$\Phi_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

と因数分解できるので，固有値は $1, 2, 3$ である．

問題 8.1. 次の行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ および固有値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

問題 8.2. A を n 次正方行列，P を n 次正則行列とするとき，$\Phi_{P^{-1}AP}(x) = \Phi_A(x)$ であることを示せ．

問題 8.3. 正則行列の固有値は 0 でないことを示せ．

問題 8.4. 次のことを証明せよ．

(1) λ が A の固有値ならば，λ は ${}^tA$ の固有値でもある．

(2) 正則行列 A に対して，λ が A の固有値ならば，$\dfrac{1}{\lambda}$ は A^{-1} の固有値である．

問題 8.5. 例題の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 行列 A の各固有値 $\lambda = 1, 2, 3$ に対して，方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の自明でない解 $\boldsymbol{v}_\lambda$ を一つ求めよ．

(2) (1) で求めたベクトル $\boldsymbol{v}_\lambda$ を並べてできる 3 次正方行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP$ を計算せよ．