$\boxed{1}$ $x\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}4\\3\\k\end{pmatrix}=\vec{0}$

を満たす x, y, z の組が $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 以外に

存在すればよい。つまり連立方程式

$$\begin{cases}2x+3y+4z=0\\x+2y+3z=0\\x+y+kz=0\end{cases} \quad \cdots\cdots (*)$$

が非自明解を持つためのkの条件を求めればよい。

$(*)$ が非自明解をもつ

$\iff$ $(*)$ の係数行列 $\begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&3\\1&1&k\end{pmatrix}$ の

階数 (rank) が2以下

$$\iff \det\begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&3\\1&1&k\end{pmatrix}=0$$

ここで $\det\begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&3\\1&1&k\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0&-1&-2\\1&2&3\\0&-1&k-3\end{pmatrix}$

$$=\det\begin{pmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\\0&0&k-1\end{pmatrix}=k-1$$

したがって求める条件は $\underline{k=1}$

$\boxed{2}$ π_1 と π_2 の交線

$\Longleftrightarrow$ π_1 と π_2 の方程式を同時に満たす点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の集合

$\Longleftrightarrow$ 連立方程式 $\begin{cases} 2x+3y-6z=-4 \\ x+2y-5z=-1 \end{cases}$ …(#)

の解の全体

(#) の拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$\therefore$ (#) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x \quad +3z=-5 \\ \quad y-4z=2 \end{cases}$

$z=t$ (tは実数) とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ …(#)の解

したがって 解の集合は直線を表し、その方向ベクトルは

$\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$ である

(注意：このベクトルの実数倍であればよい)

(2の別解) π_1とπ_2の交線の方向ベクトルは、
π_1, π_2の両方の法線ベクトルと直交する。
(なぜか、考えよ。)

π_1の法線ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

π_2の法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\therefore$ lの方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{//}$

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと

$A\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+2b = -2 & \cdots ① \\ c+2d = 2 & \cdots ② \end{cases}$

$A\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} -3a+b \\ -3c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -3a+b = 1 & \cdots ③ \\ -3c+d = 0 & \cdots ④ \end{cases}$

連立方程式 ①③ より $a = -\frac{4}{7}$, $b = -\frac{5}{7}$

〃 ②④ より $c = \frac{2}{7}$, $d = \frac{6}{7}$

$\therefore\ A = \begin{pmatrix} -4/7 & -5/7 \\ 2/7 & 6/7 \end{pmatrix}$ //

この問題からわかること.

平面の線形変換を与える行列は.
異なる2点の像の情報から一意に
定まる

問題

空間 $\mathbb{R}^3$ の線形変換については
いくつの点の像の情報があれば
行列が決定されるか?

(8 の別解) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を並べてできる行列を P とおく．つまり

$$P = (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで $$AP = A(\vec{a}\ \vec{b}) = (A\vec{a}\ A\vec{b})$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって $$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$P^{-1} = \frac{1}{1+6}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$
//

$\boxed{4}$ $\Phi_A(t) = \det(tE_3 - A) = \det\begin{pmatrix} t-6 & -6 & 8 \\ 10 & t+7 & -14 \\ 2 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$

$$= \det\begin{pmatrix} t-6 & -6 & 8 \\ 0 & t+7 & 1-5t \\ 2 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \times \det\begin{pmatrix} 2(t-6) & -12 & 16 \\ 0 & t+7 & 1-5t \\ 2 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \times \det\begin{pmatrix} 0 & -12 & 16-(t-3)(t-6) \\ 0 & t+7 & 1-5t \\ 2 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (-1)^{1+3} \times \det\begin{pmatrix} -12 & -(t^2-9t+2) \\ t+7 & 1-5t \end{pmatrix}$$

$$= -12(1-5t) + (t+7)(t^2-9t+2)$$
$$= t^3 - 2t^2 - t + 2$$
$$= (t+1)(t-1)(t-2)$$

したがって A の固有値は $\underline{-1,\ 1,\ 2}$ //

(i) 固有値 -1 について

$$-E_3 - A = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 8 \\ 10 & 6 & -14 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって固有値 -1 に対応する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ //

(ii) 固有値 1 について

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 8 \\ 10 & 8 & -14 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって固有値 $+1$ に対応する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ //

(iii) 固有値 2 について

$$2E_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 8 \\ 10 & 9 & -14 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって固有値 $+2$ に対応する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ //

(ただし c は任意の実数、$c \neq 0$)