数学クォータ科目「数学」第 1 回 (3/4)

高次偏導関数

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】高次導関数

- 関数 $f(x)$ に対し, その導関数 $f'(x)$ をさらに微分した関数をそれぞれ
  - $f''(x) = \dfrac{d}{dx}f'(x) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}(x)$ ：第 2 次導関数
  - $f'''(x) = \dfrac{d}{dx}f''(x) = \dfrac{d^3 f}{dx^3}(x)$ ：第 3 次導関数

    $\vdots$
  - $f^{(n)}(x) = \dfrac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) = \dfrac{d^n f}{dx^n}(x)$ ：第 n 次導関数

  とよび，これらを 高次導関数 という.
- 記号の意味；

$$f^{(n)}(x) = \boxed{\left(\frac{d}{dx}\right)^n} f(x) = \frac{d^n}{(dx)^n} f(x) = \frac{d^n f}{(dx)^n}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

ここで, $\left(\frac{d}{dx}\right)^n$ は「x の関数として n 回微分する」という意味. この記号を形式的に分数とみている.

高次偏導関数

- 関数 $f(x,y)$ がある領域で偏微分可能ならば, 次の 2 つの関数が定義可能.
  - x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$
  - y に関する偏導関数 $f_y(x,y)$
- これらが偏微分可能ならば, さらにそれらを偏微分することができる.
  - $f_x(x,y)$ の $\begin{cases} x \text{ に関する偏導関数} \quad f_{xx}(x,y), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \ldots \\ y \text{ に関する偏導関数} \quad f_{xy}(x,y), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \ldots \end{cases}$
  - $f_y(x,y)$ の $\begin{cases} x \text{ に関する偏導関数} \quad f_{yx}(x,y), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \ldots \\ y \text{ に関する偏導関数} \quad f_{yy}(x,y), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \ldots \end{cases}$
- これらを $f(x,y)$ の第 2 次偏導関数という.
- 同様に, 第 n 次偏導関数が定義可能. これらを 高次偏導関数 という.

高次偏導関数を表す記号

例） $f_x(x,y)$ を y に関して偏微分した関数は？

- $f_\square$：偏微分する変数を右下に添える.

$$\boxed{f_x}_{\,y}(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial \square}$：偏微分の記号 $\dfrac{\partial}{\partial \square}$ を左からかける.

$$\frac{\partial}{\partial y}\boxed{f_x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\boxed{\frac{\partial}{\partial x}f}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \cdot \partial x} f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

注 変数の並ぶ順序が逆になっている.

高次偏導関数の計算例

例） $f(x, y) = x^3 - 3xy - 2y^2 + 2x$ の第 2 次偏導関数を求めなさい.

$\boxed{\text{解}}$ まず, 偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求める.

- $f_x(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3xy - 2y^2 + 2x) = 3x^2 - 3y + 2$
- $f_y(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3xy - 2y^2 + 2x) = -3x - 4y$

次に, 偏導関数をさらに偏微分し, 第 2 次偏導関数を求める.

- $f_{xx}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y + 2) = 6x$
- $f_{xy}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3y + 2) = -3$
- $f_{yx}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-3x - 4y) = -3$
- $f_{yy}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(-3x - 4y) = -4$

偏微分の順序交換可能性

定理

> $f_{xy}(x,y)$ と $f_{yx}(x,y)$ が連続関数ならば, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ が成り立つ.

関数 $f(x,y)$ が何度でも偏微分でき, その偏導関数が連続ならば,

- ２次偏導関数は, $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$ $(= f_{yx}(x,y))$, $f_{yy}(x,y)$ の 3 つである.
- ３次偏導関数は, $f_{xxx}(x,y)$, $f_{xxy}(x,y)$, $f_{xyy}(x,y)$, $f_{yyy}(x,y)$ の 4 つである.

  $\vdots$

- n 次偏導関数は, $(n+1)$ 個ある.