数学クォータ科目「基礎数学 II」第 6 回

定積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

これまでのまとめ（1）

- 関数 $y = f(x)$ がある．
  - $x = a$ における**微分係数**（ 平均変化率 の極限）
    （$y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の傾きの値）

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

  - **導関数** （関数 $f(x)$ の**微分**） $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- 微分の性質 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し，

(1-1) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(t)$

(1-2) $\{k\,f(x)\}' = k\,f'(x)$

これまでのまとめ（2）

- 基本的な関数の微分

(2-1) $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ (α は実数)

(2-2) $(k)' = 0$（すなわち，定数関数の微分は消える）

(2-3) $(\sin x)' = \cos x$

(2-4) $(\cos x)' = -\sin x$

(2-5) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(2-6) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

(2-7) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$　　特に，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(2-8) $(a^x)' = a^x \log a$　　特に，$(e^x)' = e^x$

これまでのまとめ（3）

- **微分公式**

(3-1) **合成関数の微分：** $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$

特に， $\dfrac{d}{dx}f(ax+b) = a\,f'(ax+b)$

(3-2) **積の微分公式：** $\{f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

(3-3) **商の微分公式：** $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

特に， $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$

(3-4) **対数微分法：** $f'(x) = f(x)\cdot(\log f(x))'$

これまでのまとめ（4）

- 関数 $y = f(x)$ がある．
  - $F'(x) = f(x)$ を満たす関数を $f(x)$ の原始関数という．
  - $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ を $f(x)$ の不定積分という．

- 不定積分の性質 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し，

(4-1) $\displaystyle\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

(4-2) $\displaystyle\int \{k\,f(x)\}\,dx = k\int f(x)\,dx$

- 積分の計算方法

(5-1) 置換積分法

(5-2) 部分積分法

今週のこと

- 定積分の定義（リーマン和）と計算方法（微分積分学の基本定理）
- 置換積分法 を利用した定積分の計算
- 部分積分法 を利用した定積分の計算
- 三角関数の加法定理（積和の公式）を利用した積分の計算

定積分

- $a \geq x \geq b$ で有界な関数 $f(x)$ に対して定まる量．
- リーマン和の極限として定義される（教科書 p.130 参照）．これを

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書く．

- 定積分の値は

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b := \boxed{F(b) - F(a)}$$

となる．ただし，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数（のひとつ）．

- なぜ，定積分が原始関数を利用して計算できるのか？

→ 微分積分学の基本定理 が成り立つから．

定積分の計算方法（微分積分学の基本定理）

定理

$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおく．このとき，$S'(x) = f(x)$ が成り立つ．

- よって，$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数なので，$S(x) = F(x) + C$ と書ける．
- $S(a) = 0$ である．つまり，$0 = S(a) = F(a) + C$ より，$C = -F(a)$ である．
- よって，

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(b) = F(b) + C = F(b) + (-F(a)) = [F(x)]_a^b.$$

定積分の性質

関数 $f(x), g(x)$ と定数 a, b, c, k に対し，以下が成り立つ．

(6-1) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(6-2) $\displaystyle\int_a^b \{k\,f(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(6-3) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(6-4) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(6-5) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$

置換積分法・部分積分法を利用した定積分の計算

$\boxed{\text{置換積分法}}$　定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ において，$x = g(t)$ と置き換えるとき，

$$a = g(\alpha), \qquad b = g(\beta)$$

であるとする．このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

$\boxed{\text{部分積分法}}$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

三角関数の性質を利用した積分計算

問１） $I = \int \sin x \cos x \, dx$

○ 置換積分を利用：$\sin x = t$ とおくと, $\dfrac{dt}{dx} = \cos x$ より, $\cos x \, dx = dt$.

よって,

$$I = \int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

○ 部分積分を利用

$$I = \int \sin x \, (\sin x)' \, dt = \sin^2 x - \int (\sin x)' \sin x \, dx$$

$$= \sin^2 x - \int \cos x \sin x \, dx = \sin^2 x - I.$$

$$2I = \sin^2 x \qquad \therefore I = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

三角関数の性質を利用した積分計算

問１）$I = \displaystyle\int \sin x \cos x \, dx$

○ 倍角の公式（加法定理）を利用：$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ より，

$$I = \frac{1}{2}\int 2\sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

注意）前ページの式と同じなのか？

$$-\frac{1}{4}\cos 2x + C = -\frac{1}{4}(1 - 2\sin^2 x) + C$$
$$= \frac{1}{2}\sin^2 x + \boxed{\left(-\frac{1}{4} + C\right)} = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

三角関数の性質を利用した積分計算

問２） $I = \int \sin 3x \cos x \, dx$

- 部分積分を利用して計算することもできるが，三角関数の加法定理から導かれる 積和の公式 を利用して計算することができる.
- 正弦関数の加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

より

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

- よって,

$$I = \int \frac{1}{2}\{\sin(3x + x) + \sin(3x - x)\}\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 2x)\,dx = \cdots$$