線形代数 I 演習

― 第 9 回 行列の階数 ―

担当：佐藤 弘康

例題 1. 次の行列 A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

解. 行列の階数を求めるには，その行列に行基本変形と列基本変形を行い，$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形すればよい.

$$A \xrightarrow[E_{21}(-1)E_{41}(-2)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & 7 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(4)E_{32}(-2)E_{12}(-2)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_3\left(\frac{1}{3}\right)E_{43}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{13}(-2)E_{23}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\times E_{14}\left(\frac{7}{3}\right)E_{24}\left(-\frac{8}{3}\right)E_{34}\left(-\frac{2}{3}\right)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって，$\operatorname{rank} A = 3$ である.

問題 9.1. 次の行列の階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

問題 9.2. 次の行列の階数を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{pmatrix}$

例題 2. 例題 1 の行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ．また，

$$n - \operatorname{rank} A = (\text{解の自由度}) \tag{9.1}$$

が成り立つことを確認せよ．ただし，n は行列 A の列の数で，この場合 $n = 4$.

解. 行基本変形により $\left(A \,\middle|\, \boldsymbol{b} \right)$ は

$$\left(A \,\middle|\, \boldsymbol{b} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と簡約階段行列に変形できる．したがって，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (k \in \mathbf{R})$$

であり，解の自由度は 1 である．これは $4 - \operatorname{rank} A$ に等しい．

問題 9.3. 問題 9.1 の各行列を A とおくとき，次のベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解と解の自由度を求めよ．また，(9.1) が成り立つことを確認せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

問題 9.4. n 次正方行列 A, B に対して，AB が正則ならば，A, B も共に正則であることを証明せよ．

問題 9.5. n 次正方行列 A, B に対し，$AB = O$ ならば $\mathrm{rank}\, A + \mathrm{rank}\, B \leq n$ であることを示せ．

問題 9.6. n 次正方行列 A, B に対し，

(1) $A + B = E_n$，$AB = O$ ならば，$\mathrm{rank}\, A + \mathrm{rank}\, B = n$ であることを示せ．

(2) $A + B = E_n$，$A^2 = A$ ならば，$\mathrm{rank}\, A + \mathrm{rank}\, B = n$ であることを示せ．

問題 9.7. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を $\mathbf{R}^3$ の線形独立なベクトルとする．このとき，

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3, \quad b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + b_3\boldsymbol{v}_3, \quad c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3$$

が線形独立であることと，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

が線形独立であることが同値であることを証明せよ．

問題 9.8. 二変数斉次連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = 0 \\ b_1x + b_2y = 0 \end{cases} \tag{9.2}$$

は，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおけば，平面ベクトルの内積を用いて

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0 \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = 0 \end{cases}$$

と表すことができる．このことに着目し,「方程式 (9.2) が非自明解を持つことと，ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ が線形従属であることは同値である」ことを幾何学的に説明せよ．

■ 第 7 回，第 8 回の解

問題 7.1 (1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$　(3) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\dfrac{1}{34}\begin{pmatrix} -10 & 6 & 5 \\ 5 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & -8 \end{pmatrix}$

問題 7.2 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 7.3 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,　$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} -1+2^{n+2}+2(-1)^{n+1} & -2+5\cdot 2^{n+1}-8(-1)^n & 2 \\ -2+2^{n+1} & -4+5\cdot 2^n & 4-2^{n+2} \\ -3+2^{n+2}+(-1)^{n+1} & -6+5\cdot 2^{n+1}-4(-1)^n & 6-2^{n+3}+3(-1)^n \end{pmatrix}$$

問題 8.1 (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$　(3) 解なし

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,　$(k, l \in \mathbf{R})$

(5) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$,　$(k, l \in \mathbf{R})$

問題 8.2 (1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 3 \\ 3 & 7 & -6 & a \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-8 \end{array}\right)$.

したがって，$a = 8$ のとき解が存在し，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & -1 & 2 & b \\ -3 & 2 & -3 & 5 & c \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right)$. したがって，

$a-2b+c = 0$ のとき解が存在し，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 10 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & a \\ 5 & -4 & 2 & b \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & \frac{2a-1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & \frac{a-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b-\frac{4}{3}a-\frac{1}{3} \end{array}\right)$. したがって，$b-\dfrac{4}{3}a-\dfrac{1}{3}=0$ のとき解が存在し，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a-1}{3} \\ \frac{a-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4) 斉次連立一次方程式は必ず解をもつ. (i) $a \neq 1$ かつ $a+b \neq 0$ ならば，自明な解しかもたない. (ii) $a \neq 1$ かつ $a+b=0$ ならば，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (iii) $a=1$ かつ $b \neq -1$ ならば，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (iv) $a=1$ かつ $b=-1$ ならば，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

問題 8.3 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(a\neq 1 \text{ ならば})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(a\neq -2 \text{ ならば})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって，(i) $a=1$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k, l \in \mathbf{R})$ で，解の自由度は 2，(ii) $a=-2$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbf{R})$ で，解の自由度は 1，(iii) $a \neq 1$ かつ $a \neq -2$ のとき，非自明解をもたない.

(2) (i) $a \neq b$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b-c}{b-a} \\ 0 & 1 & \frac{c-a}{b-a} \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{pmatrix}$$

であるから，$a=c$ または $c=b$ のとき，非自明解をもつ (解の自由度は 1).

(ii) $a=b$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

より，常に非自明解をもち，$a = c$ のとき解の自由度は 2 で，$a \neq c$ のとき解の自由度は 1 である．

問題 8.4 (1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ の解は $l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ の解は $l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$A\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x}$ の解は $l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$．したがって，例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$．

(2) 上の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に対して，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$．

■ 第 9 回の問題のヒント

問題 9.2 $a, b, \ldots$ で場合分け (問題 8.3 を参照).

問題 9.4 系 2.23 (教科書 p.48) を使う.

問題 9.5, 9.6 第 2 章の章末問題の問題 5(教科書 p.53) を使う.

問題 9.7, 9.8 n 次正方行列 A に対して

$$
\begin{aligned}
& A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ が非自明解を持つ} \\
\Longleftrightarrow & \text{行列 } A \text{ は正則ではない} \\
\Longleftrightarrow & \operatorname{rank} A < n \text{ (系 2.24, 教科書 p.49)} \\
\Longleftrightarrow & A \text{ の行ベクトル (列ベクトル) は線形従属 (命題 2.26, 教科書 p.49)}
\end{aligned}
$$

が成り立つことに注目せよ.