

数学クォータ科目「数学」第3回 (2/2)

# 2 変数関数の極値

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

# 【復習】 1 変数関数の極値

定理 1. (教科書 p.68)

- (i) 「 $f(x)$  が  $x = a$  で極値をとる」 ならば,  $f'(a) = 0$  が成り立つ.
- (ii)  $f'(a) = 0$  かつ  $\begin{cases} f''(a) < 0 \\ f''(a) > 0 \end{cases}$  ならば,  $f(a)$  は  $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$  である.

## 極値を求める手順

- (1) 導関数  $f'(x)$  を求める.
- (2) 方程式  $f'(x) = 0$  の解を求める.
- (3) 第2次導関数  $f''(x)$  を求める.
- (4) (2) の解  $x = a$  に対して,  $f''(a)$  の符号を調べる.

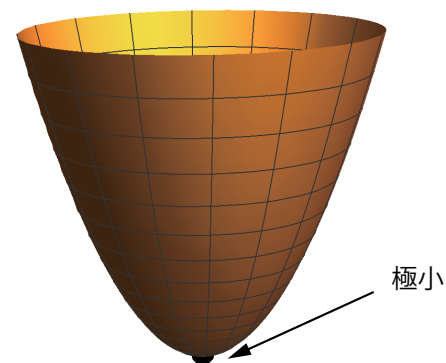
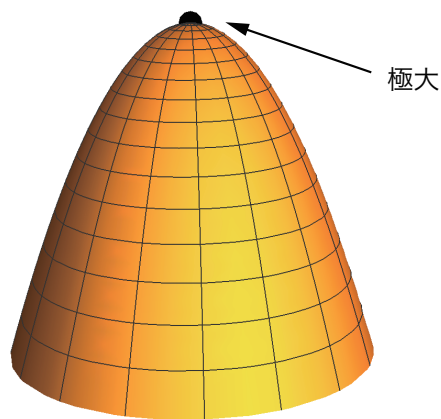
# 2変数関数の極値

定義（2変数関数の極値）

$f(a, b)$  が関数  $f(x, y)$  の  $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

$\iff$  十分小さい  $h, k$  に対し,  $\begin{cases} f(a, b) > f(a + h, b + k) \\ f(a, b) < f(a + h, b + k) \end{cases}$

※十分小さい  $\varepsilon$  に対し,  $0 \leq |h|, |k| < \varepsilon$  かつ  $h, k$  のいずれか一方は 0 でない.



## 2 変数関数の極値

事実

$f(a, b)$  が関数  $f(x, y)$  の  $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

$\iff$  任意の  $h, k$  に対し,  $F(t) = f(a + ht, b + kt)$  は  $t = 0$  で  $\begin{cases} \text{極大} \\ \text{極小} \end{cases}$

- 合成関数  $F(t) = f(a + ht, b + kt)$  の意味は,  
関数  $f(x, y)$  を  $xy$ -平面の直線  $(x, y) = (a + ht, b + kt)$  に制限すること.
- 直線  $(x, y) = (a + ht, b + kt) = (a, b) + t(h, k)$  は,  
点  $(a, b)$  を通り, ベクトル  $(h, k)$  に平行な直線である.

## 2 変数関数の極値（幾何学的な解釈）

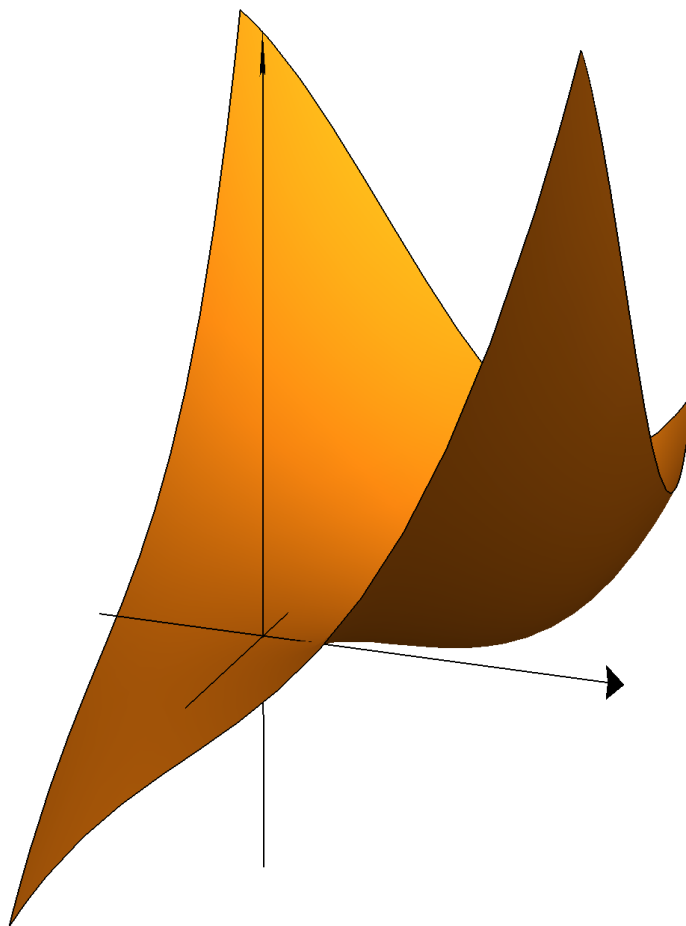
事実の幾何学的な解釈

$f(a, b)$  が関数  $f(x, y)$  の  $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

$\iff$  点  $(a, b)$  を通り,  $xy$ -平面に垂直な平面 で, 曲面  $y = f(x, y)$  を切った切り口の曲線は, 常に 点  $(a, b)$  で  $\begin{cases} \text{極大} \\ \text{極小} \end{cases}$

## 2変数関数の極値（幾何学的な解釈）

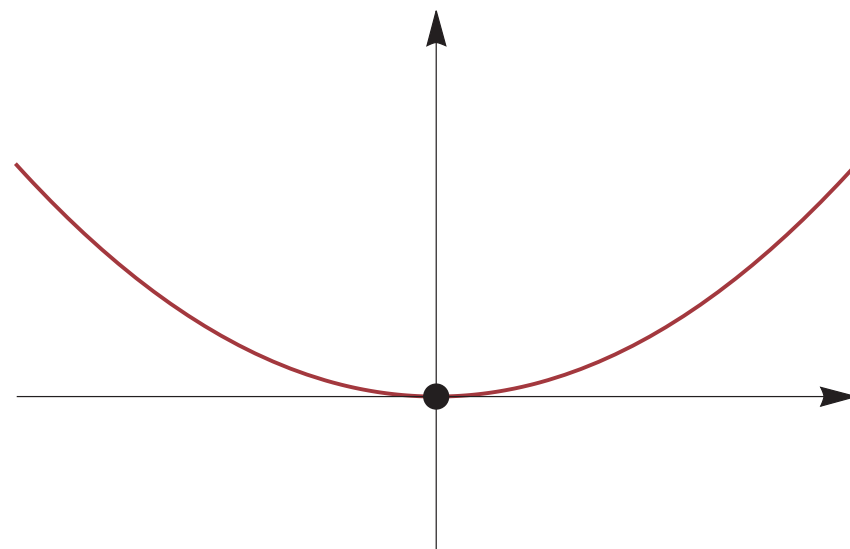
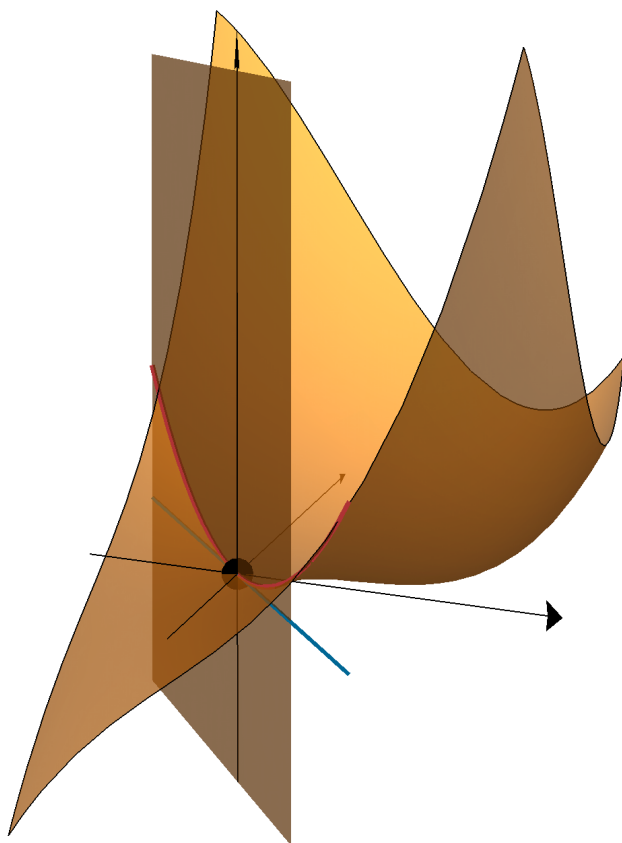
例)  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$  (教科書 p.73 例 3. (1))



## 2変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例)  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$  (教科書 p.73 例 3. (1))

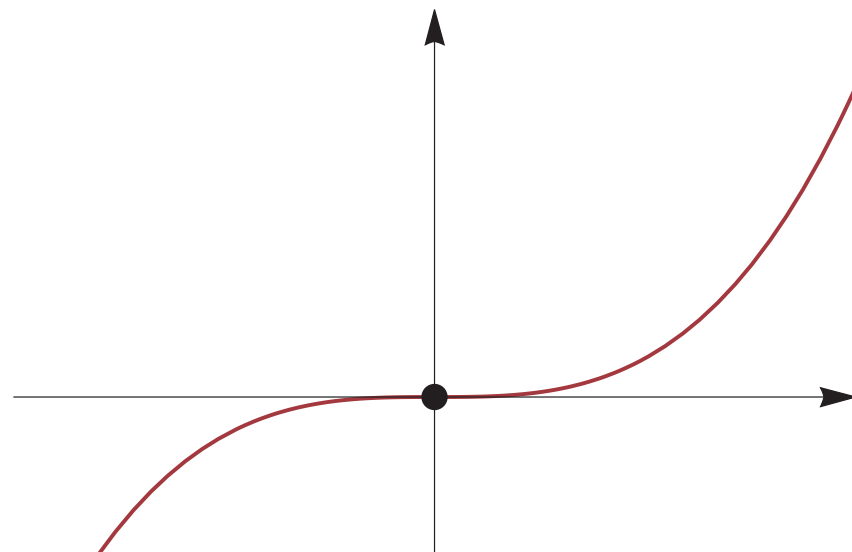
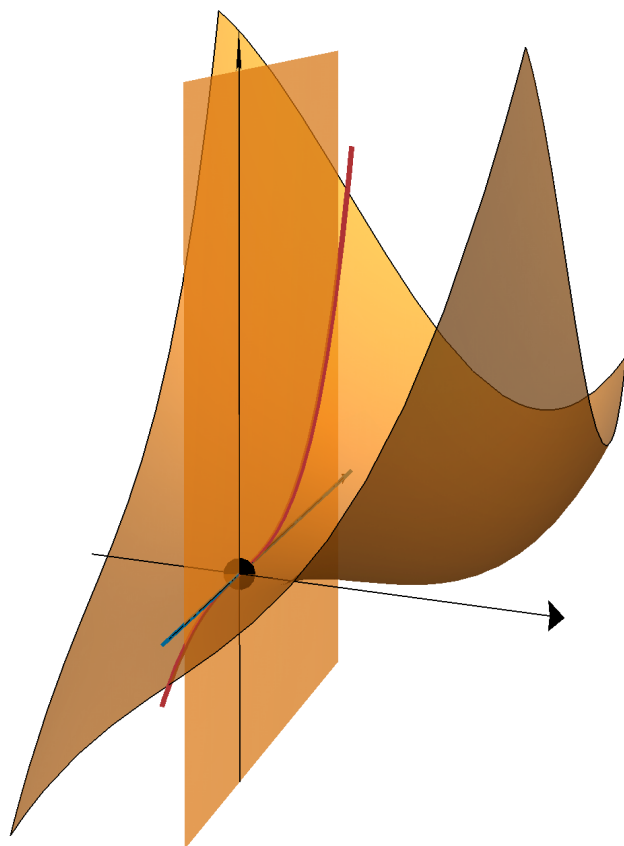
○ 点  $(0, 0)$



## 2変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例)  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$  (教科書 p.73 例 3. (1))

○ 点  $(0, 0)$

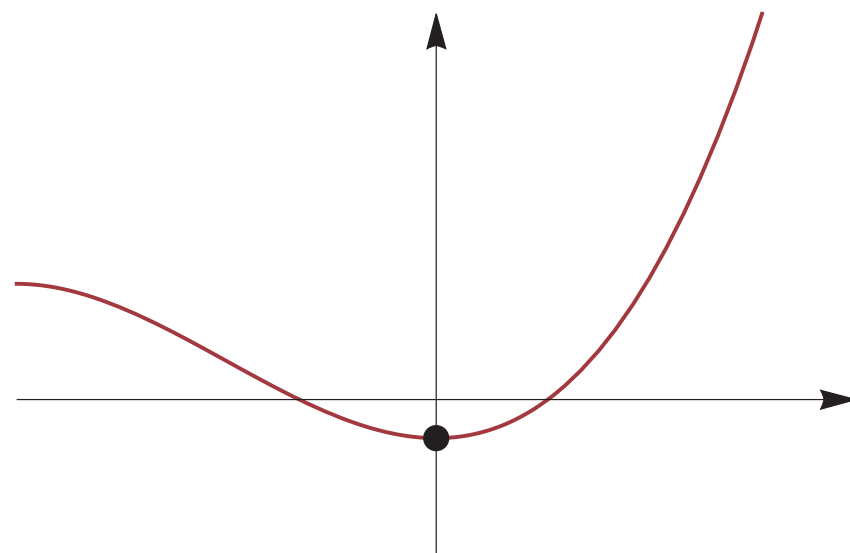
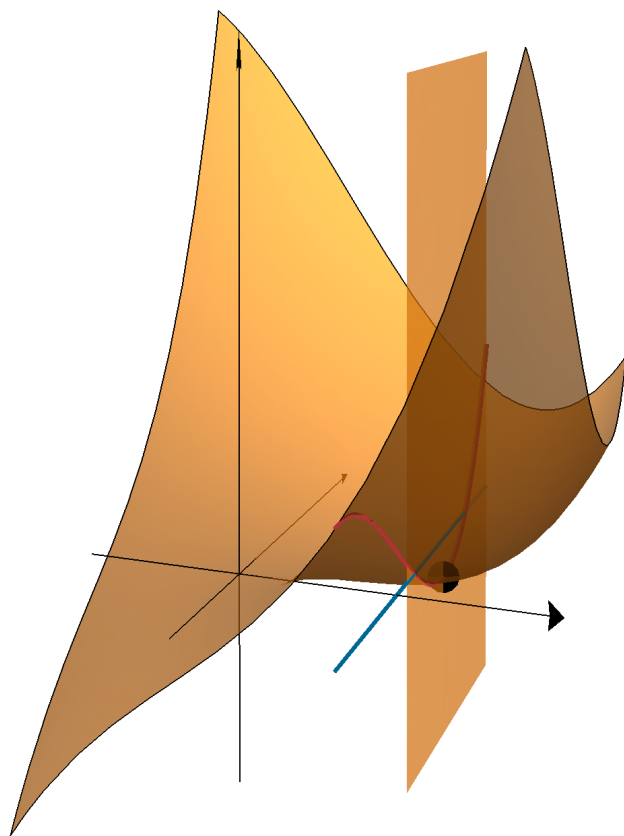




## 2変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例)  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$  (教科書 p.73 例 3. (1))

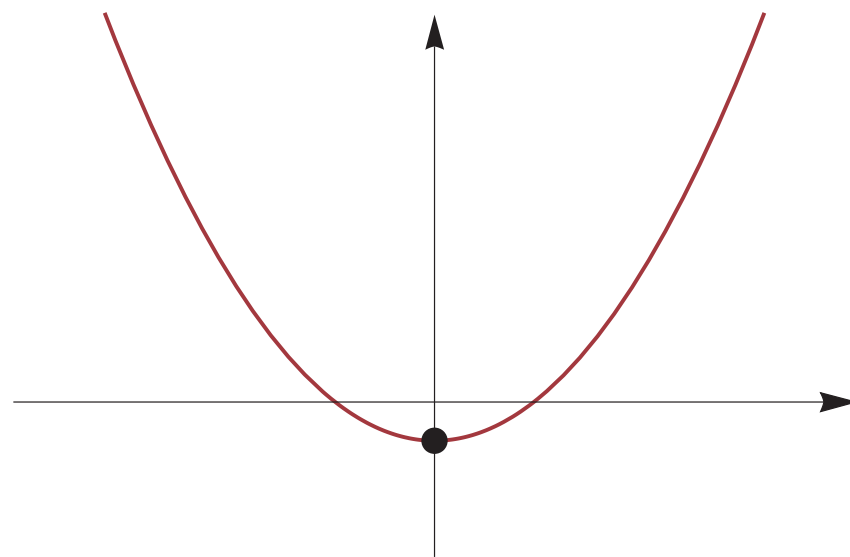
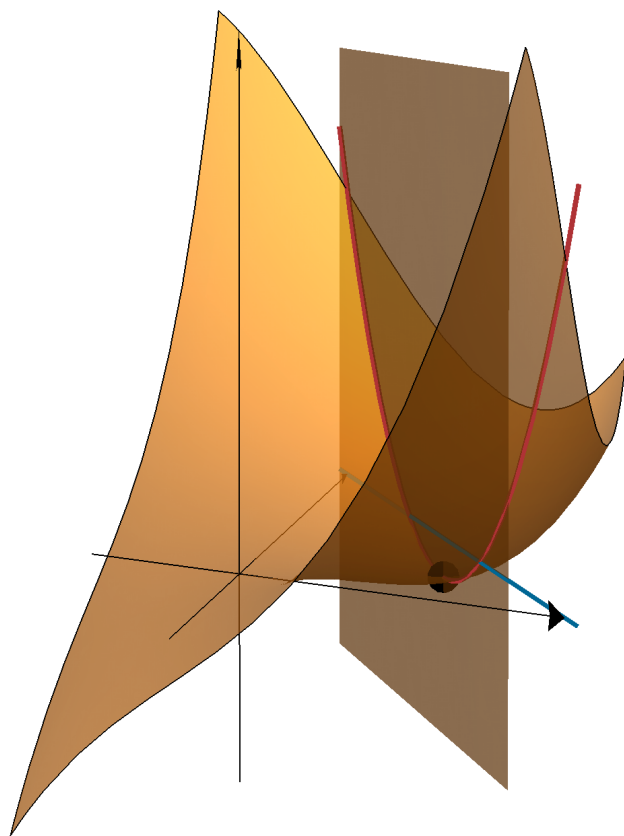
○ 点 (1, 1)



## 2変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例)  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$  (教科書 p.73 例 3. (1))

○ 点 (1, 1)



## 2変数関数の極値を求める（考え方）

事実

$f(a, b)$  が関数  $f(x, y)$  の  $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

$\iff$  任意の  $h, k$  に対し,  $F(t) = f(a + ht, b + kt)$  は  $t = 0$  で  $\begin{cases} \text{極大} \\ \text{極小} \end{cases}$

に

定理 1. (教科書 p.68)

- (i) 「 $f(x)$  が  $x = a$  で極値をとる」ならば,  $f'(a) = 0$  が成り立つ.
- (ii)  $f'(a) = 0$  かつ  $\begin{cases} f''(a) < 0 \\ f''(a) > 0 \end{cases}$  ならば,  $f(a)$  は  $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$  である.

を適用する.

## 2 変数関数の極値を求める（考え方）

定理 1. を【事実】に適用

(I) 「 $f(x, y)$  が  $(x, y) = (a, b)$  で極値をとる」,  
つまり, 任意の  $h, k$  に対し,  $F(t)$  が  $t = 0$  で極値をとるならば,  
任意の  $h, k$  に対し  $F'(0) = 0$  が成り立つ.

(II) 任意の  $h, k$  に対し  $F'(0) = 0$  かつ  $\begin{cases} F''(0) < 0 \\ F''(0) > 0 \end{cases}$  ならば,

$f(a, b)$  は  $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$  である.

問 条件：任意の  $h, k$  に対し, 「 $F'(0) = 0$ 」 「 $F''(0) < 0$ 」 「 $F''(0) > 0$ 」 は,  
 $f(x, y)$  を用いて, それぞれどのように記述されるか？

## 2変数関数の極値を求める (I)

(I)

「 $f(x, y)$  が  $(x, y) = (a, b)$  で極値をとる」 ,  
つまり, 任意の  $h, k$  に対し,  $F(t) = f(a + ht, b + kt)$  が  $t = 0$  で極値をとるならば,  
任意の  $h, k$  に対し  $F'(0) = 0$  が成り立つ.

- 合成関数の微分の公式より,

$$F'(t) = f_x(a + ht, b + kt) h + f_y(a + ht, b + kt) k$$

$$\iff \text{任意の } h, k \text{ に対し, } f_x(a, b) h + f_y(a, b) k = 0$$

$$\iff f_x(a, b) = 0, \text{ かつ } f_y(a, b) = 0$$

## 2変数関数の極値を求める (II)

(II)

任意の  $h, k$  に対し  $F'(0) = 0$  かつ  $\begin{cases} F''(0) < 0 \\ F''(0) > 0 \end{cases}$  ならば,  $f(a, b)$  は  $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

- 合成関数の微分の公式より,

$$F''(t) = f_{xx}(a + ht, b + kt) h^2 + 2f_{xy}(a + ht, b + kt) hk + f_{yy}(a + ht, b + kt) k^2$$

- よって,

$$F''(0) = f_{xx}(a, b) h^2 + 2f_{xy}(a, b) hk + f_{yy}(a, b) k^2 \quad (\leftarrow \text{平方完成する})$$

$$= f_{xx}(a, b) \left\{ \left( h + \frac{f_{xy}(a, b)}{f_{xx}(a, b)} \cdot k \right)^2 - \frac{\{f_{xy}(a, b)\}^2 - f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b)}{\{f_{xx}(a, b)\}^2} \cdot k^2 \right\}$$

## 2 変数関数の極値を求める (II)

- $D(x, y) = \{f_{xy}(x, y)\}^2 - f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y)$  とおくと,

$$\begin{aligned} F''(0) &= f_{xx}(a, b) \left\{ \left( h + \frac{f_{xy}(a, b)}{f_{xx}(a, b)} \cdot k \right)^2 - \frac{\{f_{xy}(a, b)\}^2 - f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b)}{\{f_{xx}(a, b)\}^2} \cdot k^2 \right\} \\ &= f_{xx}(a, b) \left\{ (h \text{ と } k \text{ の式})^2 - D(a, b) \cdot (k \text{ の式})^2 \right\} \end{aligned}$$

- 条件 (II) 「任意の  $h, k$  に対し,  $F''(0)$  が定符号 ならば,  $f(a, b)$  は極値」
  - $\square \iff D(a, b) < 0$
  - さらに, このときの  $F''(0)$  の符号は,  $f_{xx}(a, b)$  の符号と一致.
- ※  $D(a, b) > 0$  のときは,  $h, k$  を適当にとることにより,  $F''(0)$  の値を正にも負にもできる.

## 2 変数関数の極値の判定

定理 2. (教科書 p.71,72)

[I] 「 $f(x, y)$  が点  $(a, b)$  で極値をとる」ならば,

$f_x(a, b) = 0$  かつ  $f_y(a, b) = 0$  が成り立つ.

[II]  $D(x, y) = \{f_{xy}(x, y)\}^2 - f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y)$  とおく.

$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  かつ

○  $D(a, b) < 0$  のとき,

$\begin{cases} f_{xx}(a, b) < 0 \\ f_{xx}(a, b) > 0 \end{cases}$  ならば,  $f(a, b)$  は  $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$  である.

○  $D(a, b) > 0$  のとき,  $f(a, b)$  は極値ではない.



## 2 変数関数の極値の求め方

関数  $f(x, y)$  の極値を求めるには

- (1) 偏導関数  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  を求める.
- (2) 連立方程式  $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$  の解  $(x, y) = (a, b)$  を求める.
- (3) 第 2 次偏導関数  $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yy}(x, y)$  を求める.
- (4)  $D(x, y) = \{f_{xy}(x, y)\}^2 - f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y)$  を求める.
- (5) (2) の解  $(x, y) = (a, b)$  に対して,  $D(a, b)$  および  $f_{xx}(a, b)$  の符号を調べる.
  - $D(a, b) < 0$  かつ  $\begin{cases} f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) \text{ は極大値} \\ f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) \text{ は極小値} \end{cases}$
  - $D(a, b) > 0 \implies f(a, b)$  は極値ではない.