「ベクトル解析」小テスト No.7

2019 年 6 月 20 日（木）

学籍番号	学科	氏名
1		

$\boxed{\text{問}}$ 空間内の 2 つの曲線 $C_1 : \boldsymbol{r}_1(t) = \dfrac{t}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{i} + \dfrac{t}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{j} + \dfrac{t}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{k},\ 0 \leqq t \leqq \sqrt{3}$, $C_2 : \boldsymbol{r}_2(t) = t^2\,\boldsymbol{i} + t^2\,\boldsymbol{j} + t^2\,\boldsymbol{k},\ 0 \leqq t \leqq 1$, およびスカラー場 $\varphi(x, y, z) = x + 2yz$ について, 次の問に答えなさい.

(1) 曲線 $C : \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k},\ a \leqq t \leqq b$ の長さ $\ell(C)$ は

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$$

で与えられる. C_1 と C_2 の長さを求めなさい.

(2) C_1 のパラメータを $0 \leqq t \leqq s$ の範囲に変えた曲線を C_3 とする. $\ell(C_3) = s$ であることを示しなさい.

(3) $\varphi(x, y, z)$ に曲線 C_1 の成分を代入すると, $\varphi(\boldsymbol{r}_1(t)) = \dfrac{t}{\sqrt{3}} + \dfrac{2t^2}{3}$ となり, パラメータ t の関数となる. これを C_1 のパラメータの範囲 $0 \leqq t \leqq \sqrt{3}$ で定積分しなさい.

(4) (3) と同様にして, C_2 と φ から定まる定積分を計算しなさい.

（担当：佐藤 弘康）