数学クォータ科目「応用解析」第 1 回 / ベクトル解析（1）

ベクトル関数の微分と積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

イントロダクション）「応用解析」について

この科目では次の３つのテーマについて学習する．

(1) ベクトル解析

(2) 複素関数論（または, 複素解析）

(3) 微分方程式

- 解析学 ≒ 微分積分学

  つまり，３つとも「微分積分学」と関連．

- 「微分積分学」の対象は 関数 . これまで扱っていた関数は, 実数値関数

  - １変数関数 $y = f(x)$ （「基礎数学 I」「II」または, 高校数学）

    変数 x の値を定めると, 変数 y の値がただひとつ決まる.

  - ２変数関数 $z = f(x, y)$ （「数学」）

    変数 x, y の値を定めると, 変数 z の値がただひとつ決まる.

イントロダクション）「応用解析」について

この科目では次の関数を扱う．

(1) ベクトル解析

- （１変数）**ベクトル関数**　：１変数関数の三つ組
- **スカラー場**　：３変数関数
- **ベクトル場**　：３変数関数の三つ組
- （２変数）**ベクトル関数**　：２変数関数の三つ組

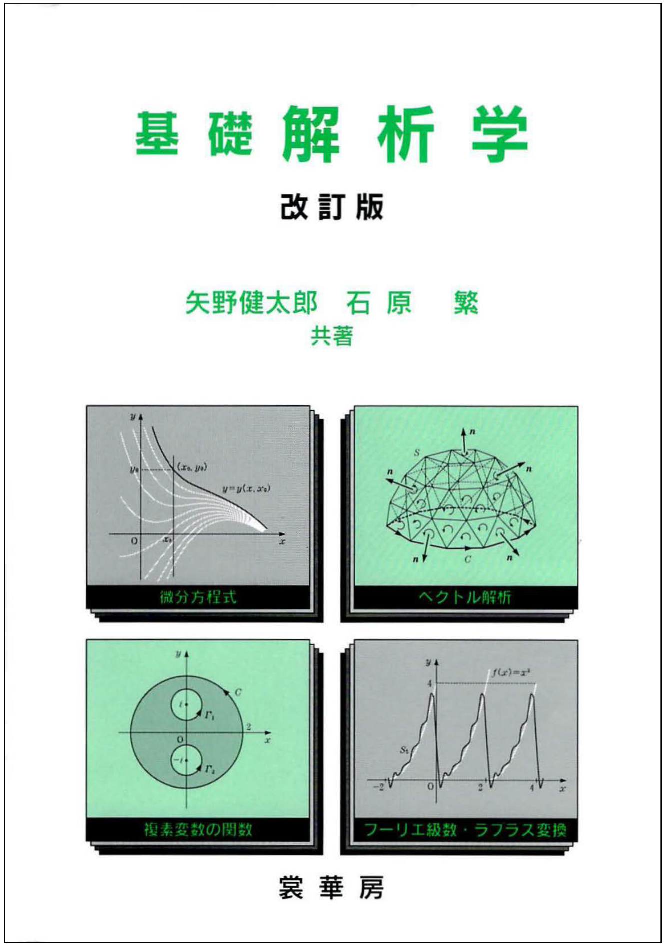
(2) 複素関数論

- **複素関数**（複素１変数複素数値関数）　：２変数関数の組
- 複素平面内の曲線（実１変数複素数値関数）：１変数関数の組

(3) 微分方程式

- １変数関数

「応用解析」の教科書・参考書



今回の授業で理解してほしいこと

- （１変数）ベクトル値関数 の
  - 概念とその幾何学的な解釈
  - 微分の計算と微分の幾何学的な解釈
  - 不定積分と定積分の計算

【復習１】（空間）ベクトルとは

- 有向線分　線分の両端点に「始点」と「終点」の情報を付与したモノ.
  - ２つの有向線分が平行移動により始点と終点が重なるならば, それらを同じモノとみなす. これを ベクトル とよぶ.

- ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対し, $\boldsymbol{A} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となるような点 $\mathrm{P}(l, m, n)$ がひとつ定まる.
  ※始点が原点 O になるように $\boldsymbol{A}$ を平行移動したときの終点が P.
- ベクトルの表し方
  - 成分表示：P の座標で $\boldsymbol{A}$ を表したもの. $\boldsymbol{A} = (l, m, n)$
  - 基本ベクトル表示：ベクトルの線形演算（和とスカラー倍）の性質から, $\boldsymbol{A} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$ と書ける.

- 上の対応により, 以後は点とベクトルを同一視して扱うことがある.

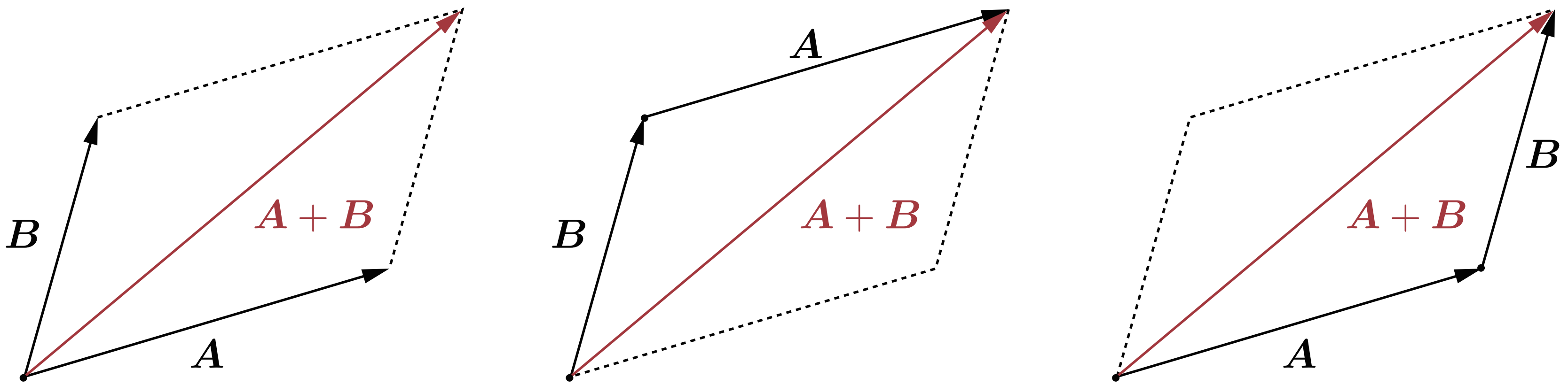
$$\mathrm{P}(l, m, n) \leftrightarrow \boldsymbol{A} = (l, m, n) \leftrightarrow \boldsymbol{A} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$$

【復習２】ベクトルの大きさ，線形演算

- ベクトル $\boldsymbol{A} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$ の**大きさ**； $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$

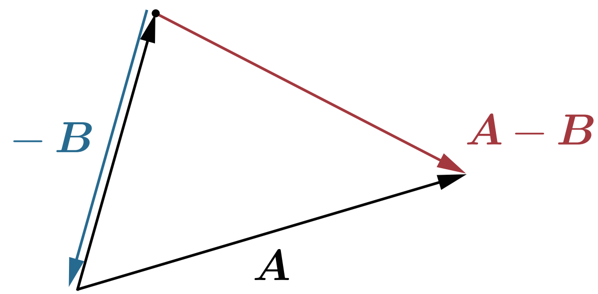
  ※線分としての長さのこと.

- **和 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$**



- **スカラー倍 $c\boldsymbol{A}$**

- **差 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$**



（１変数）ベクトル関数

定義

変数 t の値を決めると，その値に応じてベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ がただ一つ定まるとき, $\boldsymbol{A}(t)$ を独立変数 t の**ベクトル関数**という.

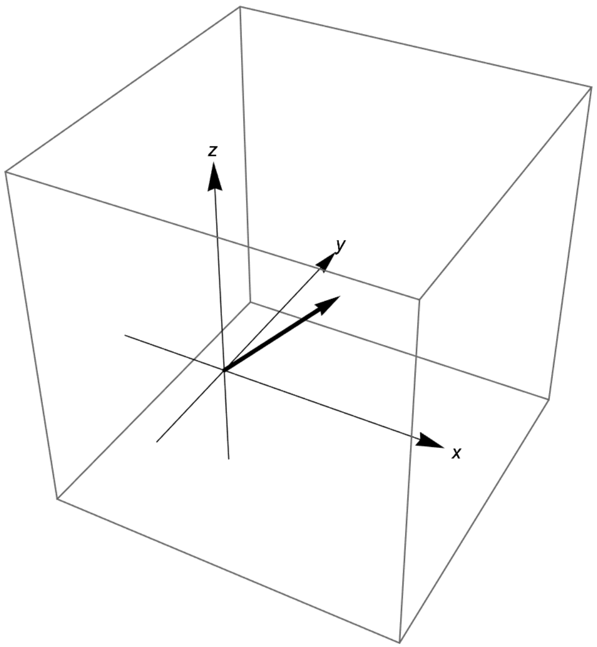
- $\boldsymbol{A}(t)$ はベクトルなので, 基本ベクトル表示が得られる；

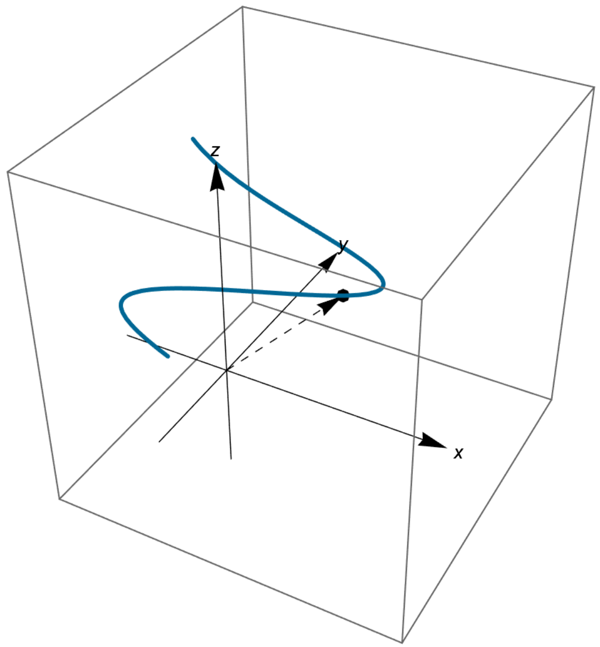
$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

- つまり, ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ を考えることは,
３つの１変数関数の組 $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ を考えることと同じである.
- $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ のことをベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の**成分**とよぶ.

（１変数）ベクトル関数

例１） $\boldsymbol{A}(t) = \sin 3t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{t+1}\boldsymbol{k}$





- ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の始点を定点 O に固定すれば, $\boldsymbol{A}(t)$ の終点 P は一般に 1 つの曲線を描く. この曲線を $\boldsymbol{A}(t)$ の ホドグラフ という.

（１変数）ベクトル関数

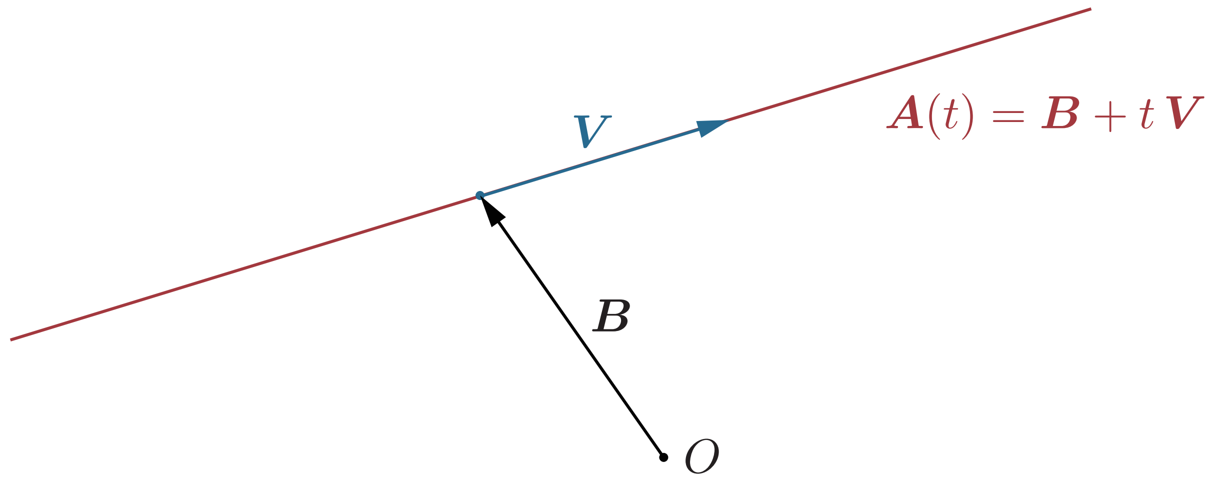
例２）成分が独立変数 t の１次関数のベクトル関数；

$$\boldsymbol{A}(t) = (b_1 + v_1 t)\,\boldsymbol{i} + (b_2 + v_2 t)\,\boldsymbol{j} + (b_3 + v_3 t)\,\boldsymbol{k}$$

- これは

$$\boldsymbol{A}(t) = (b_1\,\boldsymbol{i} + b_2\,\boldsymbol{j} + b_3\,\boldsymbol{k}) + t\,(v_1\,\boldsymbol{i} + v_2\,\boldsymbol{j} + v_3\,\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{B} + t\,\boldsymbol{V}$$

  と書ける. ただし, $\boldsymbol{B} = b_1\,\boldsymbol{i} + b_2\,\boldsymbol{j} + b_3\,\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{V} = v_1\,\boldsymbol{i} + v_2\,\boldsymbol{j} + v_3\,\boldsymbol{k}$.
- このベクトル関数のホドグラフは, 直線である.



（１変数）ベクトル関数の微分（導関数）

定義

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$ に対し,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+h) - \boldsymbol{A}(t)}{h}$$

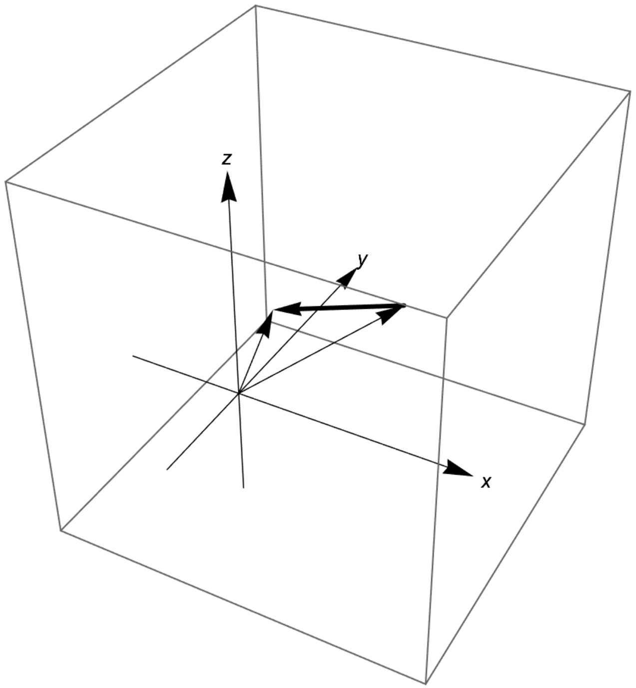
を $\boldsymbol{A}(t)$ の微分または導関数とよび, $\boldsymbol{A}'(t)$ や $\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}(t)$ と表す.

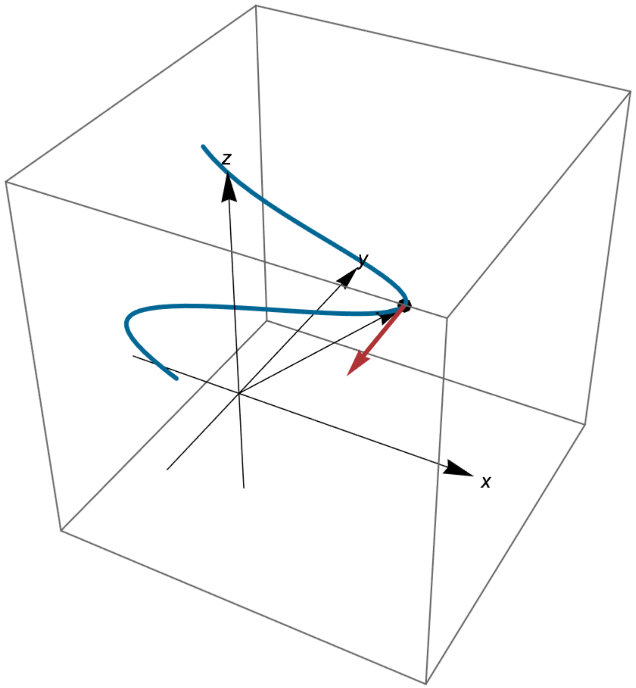
計算方法 各成分を微分すればよい.

$$\frac{\boldsymbol{A}(t+h) - \boldsymbol{A}(t)}{h} = \frac{A_x(t+h) - A_x(t)}{h}\,\boldsymbol{i} + \frac{A_y(t+h) - A_y(t)}{h}\,\boldsymbol{j} + \frac{A_z(t+h) - A_z(t)}{h}\,\boldsymbol{k}$$

$$\xrightarrow{h\to 0} A_x'(t)\,\boldsymbol{i} + A_y'(t)\,\boldsymbol{j} + A_z'(t)\,\boldsymbol{k}$$

（１変数）ベクトル関数の微分の幾何学的な解釈





- $\boldsymbol{A}'(t)$ はベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ のホドグラフに接するベクトルである.

（１変数）ベクトル関数の積分

$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$ をベクトル関数とする．

- $\boldsymbol{D}(t)$ の導関数が $\boldsymbol{A}(t)$ であるとき，$\boldsymbol{D}(t)$ を $\boldsymbol{A}(t)$ の不定積分といい，次のような記号で表す；

$$\boldsymbol{D}(t) = \int \boldsymbol{A}(t)\,dt$$

- 実際の計算は $\displaystyle \int \boldsymbol{A}(t)\,dt = \int A_x(t)\,dt\,\boldsymbol{i} + \int A_y(t)\,dt\,\boldsymbol{j} + \int A_z(t)\,dt\,\boldsymbol{k}$
- $\boldsymbol{A}(t)$ の定義域内の区間 $a \leq t \leq b$ に対して，１変数関数の場合と同様にしてリーマン和の極限として，定積分 $\displaystyle \int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt$ が定義できる．
- 実際の計算は $\displaystyle \int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt = \int_a^b A_x(t)\,dt\,\boldsymbol{i} + \int_a^b A_y(t)\,dt\,\boldsymbol{j} + \int_a^b A_z(t)\,dt\,\boldsymbol{k}$

まとめと復習（と予習）

- ベクトル関数とは何ですか？
  - ベクトル関数のホドグラフとは何ですか？
  - ベクトル関数の微分（導関数）はどのように計算しますか？
  - ベクトル関数の微分（導関数）はどのようなベクトルですか？
  - ベクトル関数の不定積分はどのように計算しますか？
  - ベクトル関数の定積分はどのように計算しますか？

教科書 p.73〜77

問題集 187, 188, 189

予 習 ベクトルの内積「基礎数学 I」, 合成関数の微分「数学」