1 曲線 $C_1 : \boldsymbol{r}_1(t) = t\,\boldsymbol{i} + t^2\,\boldsymbol{j}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に対し，次の問に答えなさい．

配点：各【4 点】

(1) スカラー場 $\varphi_1(x, y, z) = xy + yz + zx$ の曲線 C_1 に沿った線積分

$$\int_{C_1} \varphi_1\, dt$$

を求めなさい．

$\varphi(\boldsymbol{r}_1(t)) = t \times t^2 = t^3$ より

$$\int_{C_1} \varphi\, dt = \int_0^1 t^3\, dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{4}}.$$

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}_1(x, y, z) = y\,\boldsymbol{i} - z\,\boldsymbol{j} + x\,\boldsymbol{k}$ の曲線 C_1 に沿った線積分

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1$$

を求めなさい．

$\boldsymbol{r}_1'(t) = \boldsymbol{i} + 2t\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = t^2\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{k}$ より，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{r}_1'(t) = t^2.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \boldsymbol{A}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1 &= \int_0^1 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{r}_1'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 t^2\, dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

2 点 $(1, 2, 3)$ を始点とし，$(3, 2, 1)$ を終点とする線分を C_2 とする．このとき，次の問に答えなさい．

配点：各【4 点】

(1) C_2 のパラメータ表示をひとつ答えなさい．

点 P を始点とし，点 Q を終点とする線分上の点は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と表される．よって，C_2 のパラメータ表示 $\boldsymbol{r}_2(t)$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_2(t) &= \boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k} + t\,(2\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{k}) \\ &= (2t + 1)\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + (3 - 2t)\,\boldsymbol{k}, \quad 0 \leqq t \leqq 1\end{aligned}$$

となる（曲線のパラメータ表示は一意的に決まるものではないことに注意）．

(2) スカラー場 $\varphi_2(x, y, z) = xyz$ の C_2 に沿った線素に関する線積分

$$\int_{C_2} \varphi_2\, ds$$

を求めなさい．

(1) で求めたパラメータ表示を用いて求める．$\boldsymbol{r}_2'(t) = 2\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{k}$ より，

$$|\boldsymbol{r}_2'(t)| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

である．

$$\varphi(\boldsymbol{r}_2) = (2t + 1) \times 2 \times (3 - 2t) = 2(3 + 4t - 4t^2)$$

より，

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \varphi_2\, ds &= \int_0^1 \varphi_2(\boldsymbol{r}_2(t))\, |\boldsymbol{r}_2'(t)|\, dt \\ &= \int_0^1 2(3 + 4t - 4t^2) \times 2\sqrt{2}\, dt \quad \text{【2 点】} \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^1 (3 + 4t - 4t^2)\, dt \\ &= 4\sqrt{2} \left[3t + 2t^2 - \frac{4}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= 4\sqrt{2} \left(3 + 2 - \frac{4}{3}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\frac{11}{3} = \boldsymbol{\frac{44\sqrt{2}}{3}}.\end{aligned}$$

3 次の空欄に当てはまる最も適切なものを

(ア) スカラー　**(イ)** スカラー場　**(ウ)** 0

(エ) ベクトル　**(オ)** ベクトル場　**(カ)** $\boldsymbol{0}$（零ベクトル）

(キ) 一般には定義不可能

の中から選びなさい．ただし，ここで「ベクトル場」というとき，3 次元空間内の曲線に沿ったベクトル場や曲面上のベクトル場を指す場合もある（スカラー場についても同様）．

配点：各【1 点】

- ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ の微分 $\boldsymbol{r}'(t)$ は $\boxed{\text{(オ)}}$ であり，定積分 $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt$ は $\boxed{\text{(エ)}}$ である．
- ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ は $\boxed{\text{(ア)}}$ である．
- スカラー場の発散の面積分は $\boxed{\text{(キ)}}$ である．
- スカラー場 φ の勾配の回転 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi)$ の線積分は $\boxed{\text{(ウ)}}$ であり，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転の発散 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\varphi)$ の面積分は $\boxed{\text{(ウ)}}$ である．

4 次の各問に答えなさい.

配点：各【5 点】

(1) 3 点 $(4,0,0),(1,1,1),(0,0,2)$ を頂点とする三角形の周とその内部を S_1 とすると, S_1 は空間内の平面の一部である. この平面の方程式を求めなさい.

平面の方程式は, x,y,z の 1 次式である. S_1 の方程式を

$$ax+by+cz=d$$

とおくと, 仮定より, a,b,c,d は, 連立方程式

$$4a=d,\quad a+b+c=d,\quad 2c=d$$

の解である.
これを解くと, $a=\frac{d}{4}, b=\frac{d}{4}, c=\frac{d}{2}$ となり, S_1 の方程式は

$$\frac{d}{4}x+\frac{d}{4}y+\frac{d}{2}z=d$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x+y+2z=4}$$

となる.

(2) 方程式

$$2x+y+z=2,\quad x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$$

で定まる平面を S_2 とする. この方程式を

$$z=f(x,y)$$

と変形して, S_2 をグラフ曲面と考えるとき, 関数 $f(x,y)$ の定義域 D_2 は, 不等式

$$\boxed{}\leqq x\leqq\boxed{},\quad \boxed{}\leqq y\leqq\boxed{}$$

を満たす点 (x,y) の全体である.
空欄に当てはまる数, または式を答えなさい.

この平面は 3 点 $(1,0,0),(0,2,0),(0,0,2)$ を頂点とする三角形の周とその内部である.
よって, $z=2-2x-y$ の定義域は, xy 平面の原点, $(1,0)$, $(0,2)$ を頂点とする三角形の周とその内部である. この領域を不等式で表すと,

$$0\leqq x\leqq 1,\quad 0\leqq y\leqq 2-2x$$

または,

$$0\leqq x\leqq 1-\frac{y}{2},\quad 0\leqq y\leqq 2$$

となる.

(3) xy 平面内の領域 $D_3: 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq \frac{1}{3}-\frac{x}{3}$ で定義されたベクトル関数

$$\boldsymbol{r}_3(x,y)=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+(1-x-3y)\,\boldsymbol{k}$$

をパラメータ表示とする曲面を S_3 とする. このとき, スカラー場 $\varphi(x,y,z)=2x+3y+z$ の面積分

$$\int_{S_3}\varphi\,dS_3$$

を求めなさい.

$\frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial x}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k},\ \frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial y}=\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ より,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial y}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-1\\0&1&-3\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+3\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

よって, $dS=\sqrt{1^2+3^2+1^2}\,dxdy=\sqrt{11}\,dxdy$.【2 点】
また, $\varphi(\boldsymbol{r}_3)=2x+3y+(1-x-3y)=1+x$ より,

$$\begin{aligned}\int_{S_3}\varphi\,dS&=\iint_{D_3}(1+x)\sqrt{11}\,dxdy\\&=\sqrt{11}\int_0^1\int_0^{\frac{1-x}{3}}(1+x)\,dy\,dx\quad【1 点】\\&=\sqrt{11}\int_0^1(1+x)\,[y]_{y=0}^{y=\frac{1-x}{3}}\\&=\sqrt{11}\int_0^1(1+x)\,\frac{1-x}{3}\,dx=\frac{\sqrt{11}}{3}\int_0^1(1-x^2)\,dx\\&=\frac{\sqrt{11}}{3}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{\sqrt{11}}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{11}}{9}}.\end{aligned}$$

(4) (1)(2)(3) の各平面 S_i の周をそれぞれ C_i とする. このとき, ベクトル場

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=(2y+z)\,\boldsymbol{i}+(z-x)\,\boldsymbol{j}+(2x+3z)\,\boldsymbol{k}$$

を C_i $(i=1,2,3)$ のいずれかで線積分すると, その値は 0 になる. ストークスの定理

$$\int_C\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_S\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

を活用して, どの C_i に沿った線積分が 0 になるか考察しなさい.

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\2y+z&z-x&2x+3z\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

より, $\boldsymbol{A}$ の回転は定ベクトル場である.【2 点】
一方, 各平面の単位法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n}_1=c_1(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}),\ \boldsymbol{n}_2=c_2(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),\ \boldsymbol{n}_3=c_3(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

であり, rot$\boldsymbol{A}$ との内積が 0 となるベクトルは**ない**ため, ストークスの定理から直ちに $\int_{C_i}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}_i$ の値が 0 になることは**わからない**.

注意

- $\boxed{1}$〜$\boxed{3}$ の配点を合計すると 22 点になるが, 上限を 20 点とする.
- $\boxed{2}$ (2) は部分点あり（解答を参照）.
- $\boxed{3}$ について
  - ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ を時刻 t のときの動点の位置と解釈すると, その微分 $\boldsymbol{r}'(t)$ は, $\boldsymbol{r}(t)$ における速度ベクトルであり, これは曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ に沿った**ベクトル場**である. また, 定積分 $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt$ は, 各成分を定積分した**ベクトル**である.
  - スカラー場, ベクトル場の線積分, 面積分は, すべて**スカラー**である.
  - スカラー場の発散は, **一般に定義できない**.
  - スカラー場 φ の勾配の回転 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi)$ は一般に 0 で, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転の発散 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\varphi)$ は一般に零ベクトルである. よって, それらの線積分も面積分もともに $\boldsymbol{0}$ である.
- $\boxed{4}$ (3) は部分点あり（解答を参照）.
- $\boxed{4}$ (4) について
  ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転は定ベクトル場である. 曲面 $ax+by+cz=d$ の法線方向は $a\,\boldsymbol{i}+b\,\boldsymbol{j}+c\,\boldsymbol{k}$ であり, ベクトル場の面積分は, 単位法線ベクトルの内積を面素に関する 2 重積分なので, この場合の被積分関数が定数になることがすぐわかる. 問題の意図としては, 以上の事実に気づき, (i) $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ を求め, (ii) 各平面の法線ベクトル（と平行なベクトル）と $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ の内積を計算して, その値について考察することだったが, $\boldsymbol{A}$ の定義にミスがあり, どの平面の法線ベクトルとも直交しない. ということで, (i) について【2 点】, (ii) に関連する何らかの考察をしていた場合に【3 点】加点する.