微積分 II 演習[1]

— (第 2 回の捕捉) 実数の性質，実数の連続性 —

担当：佐藤 弘康

未発表問題： 1.3(1)(3), 1.7, 2.1, 2.2〜2.14

問題 2.10. $\mathbf{F}$ を実数の公理群 I(教科書 I p.7 の青枠の 1)〜5)) を満たす集合とするとき，$a, b, c \in \mathbf{F}$ に対して以下の命題が成り立つことを証明せよ.

(1) $-(-a) = a$

(2) $(-1)a = -a$

(3) $(-a)b = a(-b) = -ab$

(4) $(-a)(-b) = ab$

(5) $ab = 0 \implies a = 0$ または $b = 0$

(6) $1/(-a) = -(1/a)$

(7) $1/(ab) = (1/b)(1/a)$

注意： 教科書 I p.8, 例題 1.1 の性質も確認せよ.

問題 2.11. $\mathbf{F}$ を実数の公理群 I(教科書 I p.7 の青枠の 1)〜5)) と公理群 II (教科書 I p.9 の青枠の 1)，2) 及び p.10 の青枠の 1)〜3)) を満たす集合とするとき，$a, b, c \in \mathbf{F}$ に対して以下の命題が成り立つことを証明せよ.

(1) $a \leq b,\ c \leq d \Longrightarrow a + c \leq b + d$

(2) $a \leq b,\ c < d \Longrightarrow a + c < b + d$

(3) $a > 0 \Longrightarrow (1/a) > 0$

(4) $a^2 (= aa) \geq 0$

(5) $a > b$ ならば，$a > c > b$ を満たす，$c \in \mathbf{F}$ が存在する.

[1] この授業に関する情報
`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~hiroyasu/2004/calculusIIex.html`

問題 2.12. 実数 $\mathbf{R}$ の定義として，実数の公理群 I，II に加え，実数の連続性として

a) 上に有界な単調増加数列は収束する

を採用するとき，

(Archimedes の原理) 任意の正の実数 a, b に対して，$na > b$ となるような $n \in \mathbf{N}$ が存在する

ことを証明せよ.

問題 2.13. 実数 $\mathbf{R}$ の定義として，実数の公理群 I，II に加え，実数の連続性として

c) 上に有界な実数の集合には上限が存在する

を採用するとき，

a) 上に有界な単調増加数列は収束する

ことを示せ.

問題 2.14. 実数 $\mathbf{R}$ の定義として，実数の公理群 I，II に加え，実数の連続性として

e) 有界な数列は収束する部分列を含む (Bolzano-Weierstrass)

を採用するとき，

d) Cauchy 列は収束する

ことを示せ.

ヒント：まず，e) の性質を使うために，Cauchy 列 $\{a_n\}$ が有界列であることを示す (Cauchy 列の定義から)．次に収束する部分列 $\{a_{n_i}\}$ をとり,「$\{a_n\}$ は Cauchy 列である」という条件と「$\{a_{n_i}\}$ は a に収束する」という条件から $\{a_n\}$ が a に収束することを導き出す.

□ 前回の復習と捕捉

◇ **問題 1.5(2)**　数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ が収束しても，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束するとは限らない．例えば，$\{a_n\}$ を各項が零でない発散する数列とし (例えば $a_n = n$)，$b_n = 1/a_n$ とおけば，$a_n \cdot b_n = 1$ となり，$a_n \cdot b_n$ は 1 に収束する．また，a_n，c_n がともに無限大に発散する数列で，c_n の方が無限大に発散する速さが速ければ，$a_n \cdot (1/c_n)$ は 0 に収束する (教科書 I p.20, 例題 1.3 参照).

◇ **問題 1.6 の解**　数列 $\{a_n\}$ は a に収束するから，勝手な $\varepsilon > 0$ に対して,「$n \geq n_\varepsilon$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$」を満たす $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ が存在する．そこで，例題 5.2 と同様に

$$\begin{aligned}&\frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{1+2+\ldots+n}\\ =&\frac{a_1 + \ldots + (n_\varepsilon - 1)a_{n_\varepsilon - 1}}{1+2+\ldots+n} + \frac{n_\varepsilon a + \ldots + na}{1+2+\ldots+n} + \frac{n_\varepsilon(a_{n_\varepsilon} - a) + \ldots + n(a_n - a)}{1+2+\ldots+n}\end{aligned}$$

と 3 つに分解し，右辺の第 i 項を $A_n^{(i)}$($i = 1, 2, 3$) とおくと，$A_n^{(1)}$ の分子は n に依らないから 0 に収束することがわかる．すなわち，上の $\varepsilon > 0$ に対して，n'_ε が定まり，$|A_n^(2)| < \varepsilon$ $(n \geq n'_\varepsilon)$ が成り立つ．また，

$$A_n^{(2)} = \frac{n_\varepsilon + \ldots + n}{1+2+\ldots+n} \cdot a = \frac{(n+n_\varepsilon)(n - n_\varepsilon + 1)}{n(n+1)} \cdot a = \left(1 + \frac{n_\varepsilon(n_{1-\varepsilon})}{n(n+1)}\right) \cdot a$$

より，$A_n^{(2)}$ は a に収束することがわかる．すなわち，上の $\varepsilon > 0$ に対して，n''_ε が定まり，$|A_n^{(2)} - a| < \varepsilon$ $(n \geq n''_\varepsilon)$ が成り立つ．さらに

$$|A_n^{(3)}| \leq \frac{n_\varepsilon|a_{n_\varepsilon} - a| + \ldots + n|a_n - a|}{1+2+\ldots+n} < \frac{n_\varepsilon + \ldots + n}{1+2+\ldots+n} \cdot \varepsilon < \varepsilon$$

だから，$N = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ とおくと，任意の $n \geq N$ に対して

$$\left|\frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{1+2+\ldots+n} - a\right| < |A_n^{(1)}| + |A_n^{(2)} - a| + |A_n^{(3)}| < 3\varepsilon$$

が成り立つ．これで問題の主張が証明された.

問題 1.6 及び 例題 5.2(教科書 I p.141) の主張は次の定理の特別な場合である．

定理 1.　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ があり，b_n は単調増加で $+\infty$ に発散するとする．このとき，数列 $\left\{\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\right\}$ が α に収束するならば，数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ も α に収束する．

Proof. 仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある n_ε が存在し，

$$\left| \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} - \alpha \right| < \varepsilon, \qquad (\forall n \geq n_\varepsilon) \tag{2.4}$$

が成り立つ．(2.4) の絶対値をはずして，各辺に $(b_n - b_{n-1})$ (> 0) をかけると

$$(\alpha - \varepsilon)(b_n - b_{n-1}) < a_n - a_{n-1} < (\alpha + \varepsilon)(b_n - b_{n-1})$$

を得る．この不等式は任意の $n \geq n_\varepsilon$ で成り立つ．すなわち，

$$\begin{array}{rcl} (\alpha - \varepsilon)(b_n - b_{n-1}) < & a_n - a_{n-1} & < (\alpha + \varepsilon)(b_n - b_{n-1}) \\ (\alpha - \varepsilon)(b_{n-1} - b_{n-2}) < & a_{n-1} - a_{n-2} & < (\alpha + \varepsilon)(b_{n-1} - b_{n-2}) \\ & \vdots & \\ (\alpha - \varepsilon)(b_{n_\varepsilon} - b_{n_\varepsilon-1}) < & a_{n_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon-1} & < (\alpha + \varepsilon)(b_{n_\varepsilon} - b_{n_\varepsilon-1}). \end{array} \tag{2.5}$$

(2.5) のすべての式の各辺をそれぞれ足していくと

$$(\alpha - \varepsilon)(b_n - b_{n_\varepsilon-1}) < a_n - a_{n_\varepsilon-1} < (\alpha + \varepsilon)(b_n - b_{n_\varepsilon-1}),$$

すなわち，

$$\frac{a_{n_\varepsilon-1} - (\alpha - \varepsilon)b_{n_\varepsilon-1}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} - \alpha < \frac{a_{n_\varepsilon-1} - (\alpha + \varepsilon)b_{n_\varepsilon-1}}{b_n}. \tag{2.6}$$

ここで，(2.6) の両側の項の分子は n に依らず，分母は正無限大に発散するから，この項は 0 に収束することがわかる．すなわち，ε に対し，ある $n'_\varepsilon \in \mathbf{N}$ が存在し，

$$\left| \frac{a_{n_\varepsilon-1} - (\alpha \pm \varepsilon)b_{n_\varepsilon-1}}{b_n} \right| < \varepsilon, \qquad (\forall n \geq n'_\varepsilon) \tag{2.7}$$

が成り立つ．$N = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$ とおけば，(2.6), (2.7) より，

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \alpha \right| < 2\varepsilon, \qquad (\forall n \geq N)$$

が成り立つ． □

注意. 上の証明では α を有限の値として扱ったが，定理の主張は α が $\pm\infty$ でも正しい．

問題. 定理 1 において，α が $\pm\infty$ の場合も主張が正しいことを証明せよ．

♦ **訂正**　第 2 回に配布したプリントの問題 2.5 のヒントの「$m \geq n \geq N$」を「$m, n \geq N$」に直してください (本質的な間違いではないが，$\geq$ は必要ない)．