微積分 II 演習

－ 重積分の計算 －

担当：佐藤 弘康

□ 重積分　$f(x,y)$ を $\mathbf{R}^2$ の領域 D で定義された連続関数とする.

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \left(\begin{array}{l} (x,y)\in D \text{ の範囲で曲面 } z=f(x,y) \text{ と } xy \text{ 平面で} \\ \text{囲まれる部分の体積} \\ \text{Volume under graph of } f \text{ above region } D \end{array}\right).$
- 重積分の厳密な定義は教科書 p.176–178 を見よ.
- 重積分の基本的な性質（教科書 p.179 **定理 5.4**）を確認せよ.
- 特に D が有界閉領域のとき, $\displaystyle\iint_D dxdy = (D$ の面積 Area of $D)$.

□ 積分領域が長方形領域 $D=[a,b]\times[c,d]$ の場合 **(Double Integrals for Rectangles)**

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \Bigg(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}\Bigg)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

x を定数とみなして y で積分する.
Regarding x as a constant and integrate $f(x,y)$ from $y=c$ to $y=d$.

$\boxed{\text{問題演習}}$ 問題 **4.1**（演習書 p.149）を解け. (2) については $\int_0^2\left(\int_1^3 f(x,y)dx\right)dy$ および $\int_1^3\left(\int_0^2 f(x,y)dy\right)dx$ を計算し，積分の順序を変えても積分値が変わらないことを確かめよ.

□ D が一般の領域の場合：演習書 p.151「重積分の計算手順」を参照せよ.

Double Integrals for Non-rectangles

1. Express the region D in the form $\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$.
2. Then we have $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$

考え方：M を 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ 内の立体とする. この立体内の点 (x,y,z) の x の動く範囲を $a\le x\le b$ とし，$x=k$ 平面で M を切ったときの切り口の面積を $S(k)$ とする. このとき M の体積 V は $V=\int_a^b S(x)\,dx$ となる.

$\boxed{\text{問題演習}}$ 問題 **4.2, 4.3**（演習書 p.152, p.155）を解け.
（教科書 問 5.1, 5.2 (p.191)，問 5.3 (p.194)，演習問題 5 (p.211–) 1, 2, 3）