Conformal Vector Fields on Complex Hyperbolic Space[1]

佐藤 弘康 日本工業大学 共通教育学群
Hemangi M. Shah Harish-Chandra Research Institute, India

2025 年 9 月 18 日
日本数学会 2025 年度秋季総合分科会

[1] arXiv:2506.09710, arXiv:2507.1813.

話の流れ

定義と主結果

定義

リーマン多様体 (M, g) 上のベクトル場 ξ が

$$\mathcal{L}_\xi g = 2\rho g,$$

を満たすとき，ξ を共形ベクトル場という。
また，関数 $\rho \in C^\infty(M)$ を ξ のポテンシャル関数という。

- 特に
  - **Killing**: $\rho \equiv 0 \quad (\Leftrightarrow \ \mathcal{L}_\xi g = 0)$.
  - **Homothetic**: $\rho \equiv \mathrm{const.}(\neq 0)$.

定理 1

ξ を複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ $(n \geq 2)$ 上の共形ベクトル場とする。
このとき，ξ は *Killing* ベクトル場となる。

定義と主結果

定義

リーマン多様体 (M, g) 上のベクトル場 ξ が

$$\mathcal{L}_\xi g = 2\rho g,$$

を満たすとき，ξ を共形ベクトル場という。
また，関数 $\rho \in C^\infty(M)$ を ξ のポテンシャル関数という。

- 特に
  - **Killing**: $\rho \equiv 0 \quad (\Leftrightarrow \ \mathcal{L}_\xi g = 0)$.
  - **Homothetic**: $\rho \equiv \text{const.}(\neq 0)$.

定理 1

ξ を *Damek-Ricci* 空間 S 上の共形ベクトル場とする。
このとき，ξ は *Killing* ベクトル場となる。

背景と動機１） 共形的剛性の問題

$$\mathrm{Conf}(M,[g]) \underset{\neq}{\supseteq} \mathrm{Isom}(M,g) \text{ または “=” ？}$$

Conjecture （Lichnerowicz, 1964)

If a compact Riemannian manifold has an essential conformal transformation group, then it must be conformally equivalent to $\mathbb{S}^n$ or $\mathbb{E}^n$.

- “essential” とは「等長変換群と本質的に異なる場合」
- 以下の場合で解決:
  - コンパクト多様体の場合 (Lelong-Ferrand, Obata, Ledger)
  - 完備 Einstein 多様体の場合 (Yano, Nagano)
  - 一般の場合 (Alekseevskii, Lelong-Ferrand)
- 共形ベクトル場の存在問題
  - 例）ソリトン方程式の研究で自然に現れる。
    Sharma–Deshmukh, “Conformal Vector Fields, Ricci Solitons and Related Topics” (2024).

背景と動機２） 調和多様体の幾何学

定義

リーマン多様体 (M, g) が 調和多様体であるとは，正規座標での体積密度関数が半径のみに依存する関数のなることをいう。

Conjecture （Lichnerowicz conjecture)

すべての調和多様体は，ユークリッド空間かランク 1 対称空間である。

- コンパクトの場合：予想は正しい。
- 非コンパクトの場合：Damek と Ricci により反例が発見される。
- Damek–Ricci 空間：
  - 一般化 Heisenberg 群の 1 次元拡大で得られる可解 Lie 群。
  - 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ も含まれる。
- これら以外の例が存在するのか？

背景と動機３） 我々の問題と手法

- 問題意識
  - 調和多様体上に非自明な共形ベクトル場は存在するか？
  - 既知の結果 (Tashiro 1965, Kanai 1983)
    完備 Einstein 多様体で non-homothetic な共形ベクトル場が存在するのは，球面 $\mathbb{S}^n$，ユークリッド空間 $\mathbb{E}^n$，ワープ積 $N \times_f \mathbb{R}$ の場合のみ。
    $\Rightarrow$ Damek–Ricci 空間上には非自明な共形ベクトル場は存在しない。
- 我々の手法
  - 複素双曲平面 $\mathbb{C}H^2$ を Damek–Ricci 空間として捉え，共形 Killing 方程式を PDE に落とし込み解析。
  - 結果を $\mathbb{C}H^n$ や一般の Damek–Ricci 空間に拡張。
- （補足）
  - 結果自体は既知だが，我々の方法は直接的かつ構成的。
  - 方程式を具体的に解くことで，別の視点や今後の展開への手がかりを与える。

$\mathbb{C}H^2$ 上の共形 Killing 方程式

- $\mathrm{Lie}(\mathbb{C}H^2) = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathbb{R}A$ に分解できる。
- 正規直交基（左不変ベクトル場）： $\{V, J_Z V, Z, A\}$
- 指数写像により，自然な座標 $(x, y, z, a) \in \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}H^2$ が導入される。
- 一般のベクトル場：

$$\xi = f_1 V + f_2 J_Z V + f_3 Z + f_4 A,$$

ただし $f_i = f_i(x, y, z, a)$ は滑らかな関数。

- 共形 Killing 方程式

$$\mathcal{L}_\xi g = 2\rho g$$

は，ξ の係数 f_1, f_2, f_3, f_4 とポテンシャル関数 ρ を未知関数とする 10 個の PDE 系に帰着する。

$\mathbb{C}H^2$ の座標表示による共形 Killing 方程式

$$
\mathcal{L}_\xi g = 2\rho g \iff
\begin{cases}
2e^{a/2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) - f_4 = 2\rho, & (1) \\
e^{a/2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + e^{a/2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) = 0, & (2) \\
2e^{a/2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) - f_4 = 2\rho, & (3) \\
e^{a}\frac{\partial f_1}{\partial z} + e^{a/2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial f_3}{\partial z}\right) + f_2 = 0, & (4) \\
e^{a}\frac{\partial f_2}{\partial z} + e^{a/2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial f_3}{\partial z}\right) - f_1 = 0, & (5) \\
2e^{a}\frac{\partial f_3}{\partial z} - 2f_4 = 2\rho, & (6) \\
\frac{\partial f_1}{\partial a} + e^{a/2}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial f_4}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}f_1 = 0, & (7) \\
\frac{\partial f_2}{\partial a} + e^{a/2}\left(\frac{\partial f_4}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial f_4}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}f_2 = 0, & (8) \\
\frac{\partial f_3}{\partial a} + e^{a}\frac{\partial f_4}{\partial z} + f_3 = 0, & (9) \\
2\frac{\partial f_4}{\partial a} = 2\rho. & (10)
\end{cases}
$$

$\mathbb{C}H^2$ の座標表示による共形 Killing 方程式

$$
\Longrightarrow
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x} - \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\right) = e^{-a}\dfrac{\partial}{\partial a}\left(e^{a/2} f_4\right), & (1) \\
\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \dfrac{x}{2}\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\right) + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\right) = 0, & (2) \\
\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{x}{2}\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\right) = e^{-a}\dfrac{\partial}{\partial a}\left(e^{a/2} f_4\right), & (3) \\
e^{a}\dfrac{\partial f_1}{\partial z} + e^{a/2}\left(\dfrac{\partial f_3}{\partial x} - \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial f_3}{\partial z}\right) + f_2 = 0, & (4) \\
e^{a}\dfrac{\partial f_2}{\partial z} + e^{a/2}\left(\dfrac{\partial f_3}{\partial y} + \dfrac{x}{2}\dfrac{\partial f_3}{\partial z}\right) - f_1 = 0, & (5) \\
\dfrac{\partial}{\partial z}\left(e^{a} f_3\right) = e^{-a}\dfrac{\partial}{\partial a}\left(e^{a} f_4\right), & (6) \quad \xRightarrow[F_i = w f_i]{w = e^{a}} \quad \dfrac{\partial F_3}{\partial z} = \dfrac{\partial F_4}{\partial w} \\
e^{a}\left(\dfrac{\partial f_4}{\partial x} - \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial f_4}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial a}\left(e^{a/2} f_1\right) = 0, & (7) \\
e^{a}\left(\dfrac{\partial f_4}{\partial y} + \dfrac{x}{2}\dfrac{\partial f_4}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial a}\left(e^{a/2} f_2\right) = 0, & (8) \\
e^{-a}\dfrac{\partial}{\partial a}\left(e^{a} f_3\right) = -\dfrac{\partial}{\partial z}\left(e^{a} f_4\right). & (9) \quad \xRightarrow[F_i = w f_i]{w = e^{a}} \quad \dfrac{\partial F_3}{\partial w} = -\dfrac{\partial F_4}{\partial z}
\end{cases}
$$

ρ の消滅（$\mathbb{C}H^2$）

- $F_3 + iF_4$ は (z, w)-正則。したがって F_3, F_4 は調和関数であり，局所的に調和多項式展開が可能。
- 残りの PDE への代入・係数比較により，F_3, F_4 は z, w に関する高々 2 次の多項式となる。
- 特に

$$F_4 = w\left(C_1^{[1]}(x,y) + 2z\, C_1^{[2]}(x,y)\right), \quad \text{つまり} \quad f_4 = C_1^{[1]} + 2z\, C_1^{[2]}$$

すなわち f_4 は変数 a に依らない関数である。

- （10）式より，局所的に $\rho \equiv 0$ が得られる。
- 解析性（正則関数の同一性定理）により大域に延長され，最終的に

$$\rho \equiv 0 \ \text{ on } \ \mathbb{C}H^2 \ \text{ つまり 共形ベクトル場は Killing}$$

一般の Damek–Ricci 空間への一般化

- 任意の Damek–Ricci 空間 S の Lie 代数 $\mathfrak{s}$ は，$\{V, J_Z V, Z, A\}$ からなる $\mathbb{C}H^2$ の Lie 部分代数を含む。
  （補足：S は $\mathbb{C}H^2$ を全測地的部分多様体として含む）
- 共形 Killing 方程式において，この 4×4 ブロックに着目すると，$\mathbb{C}H^2$ の場合とほぼ同じ 10 個の方程式が現れる。
  - 未知関数の変数が増える。
  - x, y に関する微分作用がやや複雑化。
- よって，$\mathbb{C}H^2$ の場合と同様の議論により

$$\rho \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{共形ベクトル場は Killing}$$

が S 全体に対して成り立つ。

今後の問題

Q1 全測地的部分多様体 $N(\subset M)$ に非自明な共形ベクトル場が存在しないならば，M 上でも同様に存在しないだろうか？

反例） $M = N \times_f \mathbb{R}$ （ただし f は $f(0) = 1$ を満たす非定数正関数）のとき，$\xi = f(t)\frac{\partial}{\partial t}$ は M 上の非自明な共形ベクトル場となる。

Q2 M 上に非自明な共形ベクトル場が存在しないならば，その全測地的部分多様体上にも同様に存在しないだろうか？

反例） $\mathbb{C}H^n$ は $\mathbb{R}H^k$ を全測地的に含むが，$\mathbb{R}H^k$ には多くの非自明な共形ベクトル場が存在する。

問題

どのような幾何学的条件のもとで，無限小共形剛性が，全体空間 M とその全測地的部分多様体 N との間で伝播するのか？

References I

- Axler, S., Bourdon, P. and Ramey, W., Harmonic Function Theory, Grad. Texts in Math. **137**, Springer, 2001.
- Berndt, J., Tricerri, F. and Vanhecke, L., Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces, Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- Damek, E. and Ricci, F., *A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 139-142.
- Kanai, M., *On a differential equation characterizing a Riemannian structure of a manifold*, Tokyo J. Math. **6** (1983), 143-151.
- Satoh, H. and Shah, H. M., *Conformal vector fields on complex hyperbolic space*, arXiv:2506.09710.
- Satoh, H. and Shah, H. M., *Conformal vector fields on Damek-Ricci space*, arXiv:2507.18137.
- Tashiro, Y., *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 251-275.