線形代数 I 演習

― 第 7 回 逆行列の計算 ―

担当：佐藤 弘康

例題. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ.

解. n 次正則行列 A の逆行列 A^{-1} を求めるには $n \times 2n$ 行列 $\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix}$ を行基本変形により $\begin{pmatrix} E_n & P \end{pmatrix}$ の形に変形すればよい．このとき P が求める A^{-1} である (詳しくは教科書 p.38).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-4)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{13}(1)E_{23}(-7)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_2\left(-\frac{1}{6}\right)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{12}(-1)E_{32}(-2)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[P_{23}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{array}\right).$$

したがって,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

問題 7.1. 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(4)**(レポート問題)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

問題 7.2. 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} -abc & bc & -c & 1 \\ ab & -b & 1 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 7.3. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 26 & -20 \\ 2 & 6 & -4 \\ 6 & 18 & -13 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して，PAP^{-1} を計算せよ．また，A^n (n は自然数) を求めよ.

■ 第 4 回 (問題 4.3, 4.4)，第 5 回の解と捕捉

問題 4.3 (ii)$\Longrightarrow$ (i) A を対称行列とする $({}^tA = A)$．このとき任意の交代行列 B に対して

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}\left({}^t(AB)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tB\,{}^tA\right) = \mathrm{Tr}\left(-BA\right) = -\mathrm{Tr}(BA) = -\mathrm{Tr}(AB).$$

したがって，$\mathrm{Tr}(AB) = 0$ となる．

(i)$\Longrightarrow$ (ii) A の (i,j) 成分を a_{ij} とおく．交代行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

に対して，

$$AB = \begin{pmatrix} a_{12} & -a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{22} & -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

今，$\mathrm{Tr}(AB) = 0$ だから，$a_{12} - a_{21} = 0$．その他の i, j $(i \neq j)$ に対しても $a_{ij} = a_{ji}$ となることが同様に証明できる．

問題 4.4 (解 1)

$$\text{「対角成分がすべて 0 の } n \text{ 次上三角行列 } N \text{ に対して, } N^n = O\text{」} \tag{7.1}$$

を n に関する帰納法で証明する．

$n = 1$ のとき，(7.1) は明らか．

$n = k$ に対して (7.1) が成り立つと仮定する．N を $(k+1)$ 次正方行列で対角成分が 0 の上三角行列とし，以下のようにブロック分割する；

$$N = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} N' & \boldsymbol{x} \\ O & 0 \end{pmatrix}.$$

ただし，N' は対角成分が 0 の k 次上三角行列で，$\boldsymbol{x}$ は $(k,1)$ 行列 (k 項数ベクトル) である．ここで N の $(k+1)$ 乗を計算すると，

$$N^{k+1} = \begin{pmatrix} N' & \boldsymbol{x} \\ O & 0 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} N'^{k+1} & N'^{k}\boldsymbol{x} \\ O & 0 \end{pmatrix}$$

となる．帰納法の仮定より，$N'^{k+1} = N' \cdot N'^{k} = N' \cdot O = O$，$N'^{k}\boldsymbol{x} = O \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$．これで，$N^{k+1} = O$ が示され，任意の自然数 n に対して (7.1) が証明された．

(解 2) $A = (a_{ij})$ を対角成分が 0 の上三角行列とすると a_{ij} は

$$i \geq j \Longrightarrow a_{ij} = 0 \tag{7.2}$$

を満たす．

例えば，A を (7.2) を満たす 3 次の行列とすると，A^2 の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{kj}$ だから，$A^3 = A^2 \cdot A$ の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{kl}\right)a_{lj} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ik}a_{kl}a_{lj}$ である．(7.2) より，A^3 の成分で 0 にならない項は $\displaystyle\sum_{i<k<l<j} a_{ik}a_{kl}a_{lj}$ だが，任意の i,j $(1 \le i,j \le 3)$ に対して $i<k<l<j$ を満たす k,l は存在しない．したがって，A^3 の成分はすべて 0 になる．

同様に A を (7.2) を満たす n 次正方行列とすると，A^n の (i,j) 成分は

$$\sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}}^{n} a_{ik_1}a_{k_1k_2}\ldots a_{k_{n-1}j}$$

と書ける．しかし，(7.2) より 0 にならない項は

$$\sum_{i<k_1<k_2<\ldots<k_{n-1}<j} a_{ik_1}a_{k_1k_2}\ldots a_{k_{n-1}j}$$

となるが，任意の i,j に対して $1 \le i < k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-1} < j \le n$ を満たす $(n-1)$ 個の自然数 $k_1,\ldots,k_{n-1}$ は存在しない．したがって，(7.2) を満たす行列 A の n 乗は常に 0 である．

問題 5.1 (1) $a \ne -2, 3$ のときに限り正則で，逆行列は $\dfrac{1}{a^2-a-6}\begin{pmatrix} a-1 & -2 \\ -3 & a \end{pmatrix}$.

(2) 逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　(3) 逆行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

問題 5.2 $I^2 = J^2 = K^2 = -E_2, IJ = -JI = K, JK = -KJ = I, KI = -IK = J.$

問題 5.3

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と A をブロック分割すると

$$2A^3 - 3A^2 = 2\begin{pmatrix} B^3 & O \\ O & C^3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} B^2 & O \\ O & C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2B^3-3B^2 & O \\ O & 2C^3-3C^2 \end{pmatrix}.$$

ここで，問題 3.9 の結果を使うと

$$2B^3 - 3B^2 = 2\begin{pmatrix} 2^3 & 3\cdot 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2^2 & 2\cdot 2^1 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$2C^3 - 3C^2 = 2\begin{pmatrix} 3^3 & 3\cdot 3^2 & 3\cdot 3 \\ 0 & 3^3 & 3\cdot 3^2 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3^2 & 2\cdot 3^1 & 1 \\ 0 & 3^2 & 2\cdot 3^1 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 36 & 15 \\ 0 & 27 & 36 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$2A^3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 36 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 37 \end{pmatrix}.$$

問題 5.4 A が正則行列であると仮定する．$AX = O$ $(X \neq O)$ の両辺に左から A^{-1} をかけると，(左辺) $= A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = X$．一方，(右辺) $= A^{-1} \cdot O = O$．よって $X = O$ となり仮定に反する．したがって，A は正則である．

問題 5.5 $A^k = 0$ を満たす冪零行列 A が正則であると仮定する (すなわち，A^{-1} が存在する)．このとき $A^k = O$ の両辺に $(A^{-1})^k$ をかけると右辺は零行列だが，左辺は

$$A^k(A^{-1})^k = A^{k-1}(AA^{-1})(A^{-1})^{k-1} = A^{k-1}(A^{-1})^{k-1} = \ldots = E_n.$$

よって $E_n = O$ となり矛盾する．したがって，冪零行列は決して正則ではない．

問題 5.6 $AB = BA$ の両辺の転置行列をとれば，${}^tB{}^tA = {}^t(AB) = {}^tBA = {}^tA{}^tB$．したがって，${}^tA$ と ${}^tB$ は可換である．また，A が正則ならば，$AB = BA$ の両辺に両側から A^{-1} をかければ，$BA^{-1} = A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}B$．$A, B$ もともに正則ならば，$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ (教科書 p.25, 命題 1.22 を参照)．したがって，A^{-1} と B，A^{-1} と B^{-1} も共に可換である．

問題 5.7

$$\begin{aligned} &(E_n - BA)\left\{E_n + B(E_n - AB)^{-1}A\right\} \\ =&E_n - BA + (E_n - BA)B(E_n - AB)^{-1}A \\ =&E_n - BA + (B - BAB)(E_n - AB)^{-1}A \\ =&E_n - BA + B(E_n - AB)(E_n - AB)^{-1}A \\ =&E_n - BA + BE_nA \\ =&E_n. \end{aligned} \tag{7.3}$$

問題 8. (7.3) と同様にして

$$\left\{E_n + B(E_n - AB)^{-1}A\right\}(E_n - BA) = E_n$$

を確かめよ．