線形代数 I 演習

― 第 13 回 行列式の性質 (2) ―

担当：佐藤 弘康

□ 行列式の性質

d-1) $\det \left(\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \\ * & & A & \\ & & & \end{array} \right) = a \cdot \det(A)$

d-2) 列に関する線型性 (定理 3.36)；

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j + c\boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\ =&\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d-3) 任意の列の入れ換えに対して，(-1) 倍される (系 3.41(1))；

$$\det \begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots \end{pmatrix}$$

d-4) 任意の列をスカラー倍して，別の列に加えても行列式は変わらない (系 3.41(2). この性質は d-2) と d-3) から直ちに導かれる．)；

$$\det \begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix}$$

d-5) $|AB| = |A| \cdot |B|$

d-6) $|{}^tA| = |A|$

注意. d-2)〜d-4) は行に関しても成り立つ.

例題.(教科書 例題 3.44.) 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-\sqrt{2} & -4+5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6+4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解. 方針：行列式の性質 d-1), d-3), d-4) を使って行列を変形し，行列のサイズを小さくしていく.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2-\sqrt{2} & -4+5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6+4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(4 行目を適当にスカラー倍して $1, 2, 3$ 行目に加えて, 1 行目と 4 行目を入れ換える)

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \\ 0 & -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ \hline 0 & -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \end{array}\right|$$

$$= -\begin{vmatrix} -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \end{vmatrix}$$

(2 行目を (-5) 倍して 3 行目に加える)

$$= -\begin{vmatrix} -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ -8+3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

(1 行目と 2 行目を交換し, 1 列目と 3 列目を入れ換える)

$$= \begin{vmatrix} 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -8+3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\left|\begin{array}{c|cc} -1 & -2+\sqrt{3} & 2-2\sqrt{2} \\ \hline 0 & 2 & -6+2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -8+3\sqrt{2} \end{array}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -6+2\sqrt{2} \\ 3 & -8+3\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= 2(-8+3\sqrt{2}) - 3(-6+2\sqrt{2}) = 2.$$

問題 13.1. 次の行列の行列式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 123 & 234 & 345 \\ 234 & 345 & 456 \\ 345 & 456 & 567 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+\frac{1}{a} \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{b} & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{c} & 1 & 1 \\ 1+\frac{1}{d} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

例題. 次の行列の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$$

解.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

(2 列目を 1 列目に加える)

$$= \begin{vmatrix} a+b & -c & -b \\ a+b & a+b+c & -a \\ -b-a & -a & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b)\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 1 & a+b+c & -a \\ -1 & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

(1 行目を 2 行目から引き, 1 行目を 3 行目に加える)

$$= (a+b)\left|\begin{array}{c|cc} 1 & -c & -b \\ \hline 0 & a+b+2c & -a+b \\ 0 & -a-c & a+c \end{array}\right| = (a+b)\begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -a-c & a+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c)\begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c)\left\{(a+b+2c)+(-a+b)\right\}$$

$$= 2(a+b)(b+c)(a+c).$$

問題 13.2. 次の行列の行列式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} m & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$

問題 13.3. A を正則行列とする．このとき，$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ が成り立つことを証明せよ.

問題 13.4. A, B を n 次正方行列とするとき,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$$

を証明せよ.

問題 13.5. ${}^tA = -A$ を満たす行列を**交代行列**と呼んだ (教科書 p.22)．奇数次の交代行列の行列式は 0 であることを証明せよ.

問題 13.6. ${}^tA \cdot A = E_n$ を満たす行列を**直交行列**と呼んだ (演習第 6 回のプリント参照)．直交行列の行列式は $+1$ か -1 のどちらかであることを証明せよ.

問題 13.7 (宿題). 次の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$