線形代数 I 演習

－ 第 4 回 複素数と複素平面，n 項数ベクトル －

担当：佐藤 弘康

□ 複素数と複素平面

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 「複素平面」とは?

(2) 「複素数の絶対値，偏角」とは？

(3) 「共役複素数」とは?

例題　1 の 3 乗根を求めよ.

解. 1 の 3 乗根とは，つまり，$z^3 = 1$ を満たす z のことである．ここで，

$$0 = z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$$

であるから，1 の 3 乗根は $1, \dfrac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$ であることがわかる.

問題 4.1. 次の複素数を求めよ．また，その数を複素平面上に図示せよ.

(1) -1 の 4 乗根　　(2) -1 の 6 乗根

問題 4.2. 次の複素数を $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ $(= re^{\sqrt{-1}\theta})$ の形[1]で表せ．ただし，r は正の実数とする.

(1) $\sqrt{-1}$　　(2) -5　　(3) $\sqrt{3} + 3\sqrt{-1}$

問題 4.3. $z = a + \sqrt{-1}b$ (a, b は実数) に対して，

(1) $\dfrac{z}{1+z^2}$ が実数になる条件を求めよ．ただし，$b \neq 0$ とする.

(2) z^4 が実数になる条件を求めよ．ただし，$a^2 \neq b^2$ とする.

[1] $z = re^{\sqrt{-1}\theta}$ を複素数 z の**極表示**という.

問題 4.4. 次のことを証明せよ.

(1) $z \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{R}$ に対して，$\arg(az) = \arg(z)$.

(2) $z \in \mathbf{C}$ に対して，$\arg \overline{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$.

(3) $z, w \in \mathbf{C}$ に対して，$\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w \pmod{2\pi}$.

問題 4.5. $z, w \in \mathbf{C}$ に対して，$\overline{z}w + z\overline{w} = 0$ と $\arg z - \arg w = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ は同値であることを証明せよ.

問題 4.6. $(2+\sqrt{-1})(3+\sqrt{-1}) = 5(1+\sqrt{-1})$ を確かめ，そのことを使って

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \tag{4.1}$$

を示せ (ただし，$\tan^{-1}$ は $y = \tan x$ の逆関数).

■ **余談**　(4.1) のように円周率 π を $\tan^{-1}$ で表す式を**アークタンジェント公式**と言って，円周率の数値計算に用いられるのだそうです．いくつか知られている公式を下に列挙します.

(1) $\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ (マチン, 1706 年)

(2) $\dfrac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\dfrac{1}{18} + 8\tan^{-1}\dfrac{1}{57} - 5\tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ (ガウス, 1863 年)

(3) $\dfrac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\dfrac{1}{49} + 32\tan^{-1}\dfrac{1}{57} - 5\tan^{-1}\dfrac{1}{239} + 12\tan^{-1}\dfrac{1}{110443}$ (高野喜久雄, 1982 年)

参考文献

大浦拓哉, **円周率の公式と計算法** (`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/pi04.pdf`).

□ n 項数ベクトル

問題 4.7. 次のベクトルは線形従属か，線形独立か調べよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

問題 4.8. 次の n 個の n 項数ベクトルは線形従属か，線形独立か調べよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$(2)\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}n+1\\n+2\\n+3\\\vdots\\2n\end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix}n(k-1)+1\\n(k-1)+2\\n(k-1)+3\\\vdots\\kn\end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix}n(n-1)+1\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\n^2\end{pmatrix}$$

問題 4.9. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\ 2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c},\ -\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$ も線形独立であることを示せ．

問題 4.10. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n$ をどのようにとっても，$\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c},\ 2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{c},\ 3\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{c}$ は線形従属であることを示せ．