情報数学 III 第 6 回小テスト解答

2010.12.10（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$　2 次式 $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と表すことができる．2 次の項の係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は 3 と -1 であるから，適当な直交行列 P を用いて

$$3X^2 - Y^2 = 1$$

と変換できる．

(1) 固有ベクトルを長さが 1 になるように正規化し，それらを並べて直交行列 P をつくればよい．固有値 3 の固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，固有値 -1 の固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$．したがって，たとえば，$P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$．[*1]

(2) 上に挙げた行列 P に対して，$a = 3, b = -1$．[*2]

(3) 双曲線

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/im3.html

[*1] 一意的には決まらない．

[*2] 直交行列 P の選び方によっては $a = -1, b = 3$ となることもある．

情報数学 III 第 6 回小テスト解答　　2010.12.10（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平面 $x+2y-3z=4$ の法線ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ とし，$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおくと平面の方程式は

$$ {}^t\vec{x}\,\vec{n}=4 \qquad (\vec{x}\cdot\vec{n}=4) \tag{\#}$$

と書ける．$\vec{x}=P\vec{X}+\vec{v}$ と座標変換すると (#) は ${}^t\vec{X}\left({}^tP\,\vec{n}\right)+{}^t\vec{v}\,\vec{n}=4$ となる．したがって，これが方程式 $cZ=0$ となるためには

$$ {}^tP\,\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}, \quad \text{かつ} \quad {}^t\vec{v}\,\vec{n}=4 $$

となるように P と $\vec{v}$ を定めればよい．

(1) $P=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ とおくと P に関する条件は

$$ \vec{p}_1\cdot\vec{n}=0,\ \vec{p}_2\cdot\vec{n}=0,\ \vec{p}_3\cdot\vec{n}=c $$

と同値である．直交行列 P の列ベクトル $\vec{p}_i$ 達 $(i=1,2,3)$ は互いに直交するので，$\vec{p}_3$ と $\vec{n}$ は平行でなければならない．したがって，たとえば，

$$ p_3=\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}. $$

(2) P の各列ベクトルは互いに直交してなければならないので，たとえば，

$$ \vec{p}_1=\vec{p}_2\times\vec{p}_3=\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}.^{*3} $$

(3) $\vec{v}$ に関する条件は「$\vec{v}$ と $\vec{n}$ の内積の値が 4」であることと同値．したがって, $v_2=-\dfrac{3}{2}$

---

*3 直交行列 P の選び方は一意的ではない．(1)(2) の解はこれらの (-1) 倍でもよい．