平成 26 年度 春 秋 学期末試験問題・解答

試験実施日　平成 27 年 1 月 29 日 2 時限

出題者記入欄

試験科目名 微分積分学 III	出題者名 佐藤 弘康
試験時間 60 分	平常授業日 木 曜日 2 時限

持ち込みについて　可　不可

可、不可のいずれかに○印をつけ
持ち込み可のものを○で囲んでください

教科書 ・ 参考書 ・ ノート (手書きのみ ・ コピーも可) ・ 電卓 ・ 辞書
その他 (　　　)

本紙以外に必要とする用紙　解答用紙 0 枚　計算用紙 0 枚

通信欄

受験者記入欄

学科	学年	クラス	学籍番号	氏名

採点者記入欄

採点欄	評価

1 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - x^3}{x^2 + 2y^2}$ の極限値が存在すればその値を求め，存在しないならばその理由を述べよ．

平面上の点の座標を $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極表示すると，$(x, y) \to (0, 0)$ は $r \to 0$ である．すると，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - x^3}{x^2 + 2y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos\theta\,\sin\theta - r\cos^2\theta}{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta\,\sin\theta}{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta} \quad【3 点】$$

となり，この値は θ に依存するので，$r \to 0$ のときの極限値は 存在しない ことがわかる.【2 点】

2 関数 $f(x, y) = y^2 e^{xy}$ に対し，次を求めよ．

(1) 全微分 df

$df = y^3 e^{xy}\, dx + (2 + xy) y e^{xy}\, dy$【3+3 点】

(2) $f_{xx}(x, y)$

$f_{xx}(x, y) = y^4 e^{xy}$【3 点】

(3) $f_{yy}(x, y)$

$f_{yy}(x, y) = (x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}$【3 点】

(4) $f_{xy}(x, y)$

$f_{xy}(x, y) = (3 + xy)y^2 e^{xy}$【3 点】

(5) 領域 $D : 0 \leqq x \leqq 2y,\ 0 \leqq y \leqq 1$ における 2 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$

$$\begin{aligned}\iint_D y^2 e^{xy}\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2y} y^2 e^{xy}\, dx\right) dy \quad【4 点】\\ &= \int_0^1 \left[y e^{xy}\right]_0^{2y} dy \\ &= \int_0^1 (y e^{2y^2} - y)\, dy \quad【4 点】\\ &= \left[\frac{1}{4}e^{2y^2} - \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} \quad【4 点】\end{aligned}$$

3 $x^2+2xy-y^2=-8$ の陰関数を $f(x)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$F(x,y)=x^2+2xy-y^2+8$ とおくと，$f(x)$ は $F(x,y)=0$ の陰関数である．したがって，

$$f(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{2x+2y}{2x-2y}=\underline{-\frac{x+y}{x-y}}.\quad【5点】$$

(2) $f(x)$ の極値を求めよ．

$x=a$ で $f(x)$ が極値 $b=f(a)$ をとるとする．つまり，$F(a,b)=0$ より，

$$a^2+2ab-b^2=-8.$$

さらに，$f'(a)=0$ であるから，(1) の結果より $a+b=0$．$b=-a$ を上式に代入することにより，$-2a^2=-8$．つまり，$a=\pm2$ であり，このとき $b=\mp2$ である．　【5点】
次にこれらが極値を与えているか判定する．

$$f''(a)=-\frac{F_{xx}}{F_y}=-\frac{2}{2a-2b}=-\frac{1}{a-b}\qquad【5点】$$

であるから，$f''(2)=-\frac{1}{4}<0$，$f''(-2)=\frac{1}{4}>0$ である．以上のことから，$f(x)$ は，$\underline{x=2\text{ のとき極大値 }-2}$ をとり，$\underline{x=-2\text{ のとき極小値 }2}$ をとる．　【5点】

4 2変数関数 $f(x,y)=x^4+y^2+2x^2-4xy+1$ の極値を求めよ．

連立方程式

$$f_x=4x^3+4x-4y=4(x^3+x-y)=0\quad【2点】$$
$$f_y=2y-4x=0\quad【2点】$$

の解を求める．第2式より $y=2x$ を第1式に代入すると，

$$0=4(x^3-x)=4x(x-1)(x+1)$$

となり，$x=0,\ \pm1$，$y=0,\ \pm2$ を得る．　【2点】
したがって，$f(x,y)$ は原点，$(1,2),(-1,-2)$ で極値をとる可能性がある．

$$f_{xx}=4(3x^2+1)>0\quad【2点】$$
$$f_{xy}=-4\quad【2点】$$
$$f_{yy}=2\quad【2点】$$

したがって，$f(x,y)$ のヘッシアンは

$$\begin{vmatrix}4(3x^2+1) & -4\\ -4 & 2\end{vmatrix}=8(3x^2-1).$$

この値は

$(0,0)$	のとき	-1	(<0)	【2点】
$(\pm1,\pm2)$	のとき	16	(>0)	【2点】

であるから，$\underline{(\pm1,\pm2)\text{ でのみ極値をとる}}$．いずれの場合も，$f_{xx}(\pm1,\pm2)=14>0$ であるから，$\underline{極小}$ であり【2点】，極小値は

$$f(\pm1,\pm2)=1+4+2-8+1=\underline{\mathbf{0}}$$

である．　【2点】

5 不等式 $0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2-x,\ 0 \leqq z \leqq 2-x-y$ で表される空間の領域の体積を求めよ．

$$V = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (2-x-y)\, dy \right) dx \quad 【4\text{点}】$$
$$= \int_0^2 \left[(2-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{2-x} dx$$
$$= \int_0^2 \left\{ (2-x)^2 - \frac{1}{2}(2-x)^2 \right\} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 (2-x)^2\, dx \quad 【4\text{点}】$$
$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3}(2-x)^3 \right]_0^2$$
$$= \frac{2^3}{6}$$
$$= \frac{4}{3} \quad 【4\text{点}】$$

6 D を不等式 $x^2 \leqq y \leqq \dfrac{x}{2}$ を満たす領域とする．このとき，

$$\iint_D xy\, dxdy$$

を求めよ．

放物線 $y = x^2$ と 直線 $y = \frac{x}{2}$ の交点は原点 $(0,0)$ と点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ である．　【4 点】
よって，領域 D は 2 つの不等式 $0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ x^2 \leqq y \leqq \frac{x}{2}$ として表すことができる．
したがって，

$$\iint_D xy\, dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x^2}^{\frac{x}{2}} xy\, dy \right) dx \quad 【4\text{点}】$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\frac{x}{2}} dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(\frac{x^2}{2^3} - \frac{x^4}{2} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2^3} \int_0^{\frac{1}{2}} (x^3 - 4x^5)\, dx \quad 【4\text{点}】$$
$$= \frac{1}{2^3} \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^6 \right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2^3} \left(\frac{1}{2^6} - \frac{1}{3 \cdot 2^5} \right)$$
$$= \frac{1}{2^8} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$
$$= \frac{1}{2^8} \cdot \frac{1}{6}$$
$$= \underline{\frac{1}{1536}} \quad 【4\text{点}】$$