問題 **4.5.** $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y}) = 3\bar{x}^2 - 12\bar{x}\bar{y} - 6\bar{y}^2 + 18$

(1) $\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$

(2) $\bar{A}_0 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

(3) $\det(\bar{A}) = -54$, $\det(\bar{A}_0) = -972$.

(4) $\bar{A}$ の固有値は -9 と 6.

-9 に対する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. 6 に対する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(5) 例えば，$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

(6) (5) の $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ に対して，$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

(7) $-9\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 + 18 = 0$，つまり，$\dfrac{\tilde{x}^2}{2} - \dfrac{\tilde{y}^2}{3} = 1$ となり，これは双曲線である.

問題 **4.6.** $\bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 - 5 = 0$ は座標軸の変換により，$\dfrac{3}{2}\tilde{x}^2 + \dfrac{1}{2}\tilde{y}^2 = 5$ となる．これは楕円である.

問題 **4.7.** $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 5x - 10y + 5 = 0$

(1) 直交行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換すると，上の方程式は $-5\bar{x} + 25\bar{y}^2 - 10\bar{y} + 5 = 0$ となる.

(2) (1) の方程式を $\bar{y}$ について平方完成すると，$-5\bar{x} + 25(\bar{y} - \frac{1}{5})^2 + 4 = 0$．したがって，$\bar{x} - \frac{4}{5} = \tilde{x}$, $\bar{y} - \frac{1}{5} = \tilde{y}$ と座標を平行移動すると，$-5\tilde{x} + 25\tilde{y}^2 = 0$ となる.

(3) $\tilde{x} = 5\tilde{y}^2$ であるから，これは放物線である.