

行列の転置

- 行列 A の行と列を入れ替えた行列を「 A の転置行列」といい、 $'A$ と書く。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{転置}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $'A$ の第 j 行は、 A の第 i 列。
- $'A$ の第 i 列は、 A の第 j 行。
- A が $m \times n$ 型ならば、 $'A$ は $n \times m$ 型。
- $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し、 $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 'a b$ 。
- 「 $'A = A$ 」を満たす行列 A を対称行列という。
- 「 $'A = -A$ 」を満たす行列 A を交代行列という。

クォータ科目「数学」第10回(担当:佐藤 弘康) 1/5

逆行列 (1)

- 正方行列 A に対し、

$$AB = BA = E$$

を満たす行列 B を、「 A の逆行列」といい、 $B = A^{-1}$ と書く。

- 【2次正方行列の場合】 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、 $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくと、

$$E = AA^{-1} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & az+bw \\ cx+dy & cz+dw \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=0 \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} az+bw=0 \\ cz+dw=1 \end{cases}$$

2つの連立方程式を解くことにより、 $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を得る。

クォータ科目「数学」第10回(担当:佐藤 弘康) 2/5

逆行列 (2) – 正則行列 –

- A が正方行列ならば、必ず逆行列 A^{-1} が存在するだろうか？
 - 零行列の逆行列が存在しないことは明らか。
 - $A \neq O, B \neq O$ かつ $AB = O$ を満たす行列 A, B は逆行列を持たない。
 $\therefore A^{-1}$ が存在すると仮定し、 $AB = O$ の両辺に左から A^{-1} をかけると、 $B = O$ となり、 $B \neq O$ の矛盾する(背理法)。
- 正方行列 A の逆行列が存在するとき、 A を正則行列とよぶ。

事実

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ が正則であるための必要十分条件は、} ad-bc \neq 0 \text{ である。}$$

クォータ科目「数学」第10回(担当:佐藤 弘康) 3/5

逆行列 (3) 応用例：連立方程式の解法

- (前回) 連立方程式は $Ax = b$ と表すことができる。
ただし、 A は係数行列、 b は定数項ベクトル。

事実

A が正方行列、かつ正則(つまり、 A^{-1} が存在)のとき、 $Ax = b$ の解は $x = A^{-1}b$ によって与えられる。

$\therefore Ax = b$ の両辺に左から A^{-1} をかけることにより、

$$x = Ex = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

を得る。

クォータ科目「数学」第10回(担当:佐藤 弘康) 4/5

特別な行列 (2)

- 基本行列：3種類の特別な正方行列
 - (1) $A(i, j : c)$: (i, j) 成分が c で、他は単位行列と同じ。
 - (2) $P(i, j)$: (i, j) 成分と (j, i) 成分は 1 、 (i, i) 成分と (j, j) 成分は 0 、他は単位行列と同じ。
 - (3) $M(i : c)$: (i, i) 成分が c で、他は単位行列と同じ。

— 行列の基本変形 —

基本行列 M を行列 A に左(右)からかけた行列 MA (AM) は、 A の

- (1) 第 j 行(第 i 列)の c 倍を第 i 行(第 j 列)に加えた行列
- (2) 第 i 行(列)と第 j 行(列)を入れ換えた行列
- (3) 第 i 行(列)を c 倍した行列

クォータ科目「数学」第10回(担当:佐藤 弘康) 5/5