線形代数 I 演習

― 第 15 回 余因子行列，クラーメルの公式 ―

担当：佐藤 弘康

例題. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の行列式と余因子行列を求めよ.

解. 3 行目について $|A|$ を余因子展開すると

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -8 + 14 = 6.$$

次に，余因子行列を求める．各小行列 A_{ij} の行列式は

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \qquad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

となるので，余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -8 & 2 & -8 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

また，定理 3.51(教科書 p.84) より，逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

である (第 7 回「逆行列の計算」の例題を参照せよ).

問題 15.1. 次の行列の行列式と余因子行列を求め，$A \cdot \widetilde{A} = |A|E_3$ が成り立つことを確認せよ．さらに，正則なら逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (5)**(レポート問題)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

問題 15.2. 正方行列 A, B に対して，次のことを証明せよ．

(1) $|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$

(2) $\widetilde{AB} = \widetilde{B} \cdot \widetilde{A}$

(3) $\widetilde{{}^t A} = {}^t\left(\widetilde{A}\right)$

(4) $\widetilde{A^{-1}} = \left(\widetilde{A}\right)^{-1}$ (ただし，A は正則行列とする)

(5) $\widetilde{\left(\widetilde{A}\right)} = |A|^{n-2}A$

問題 15.3. クラーメルの公式を用いて，次の連立方程式を解け．ただし，(4) において a, b, c, d, e はすべて異なるものとする．

(1) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 12 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + z = 11 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + y - 3z - 4w = -6 \\ 2x + y + 5z + w = -6 \\ 2x + 2y + 2z - 3w = -10 \\ 3x + 6y - 2z + w = 4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ ax + by + cz + dw = e \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2w = e^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3w = e^3 \end{cases}$