線形代数 I 演習

－ 第 12 回 逆行列の計算 －

担当：佐藤 弘康

例題. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

解. n 次正則行列 A が行基本変形により単位行列 E_n に変形できたとしよう．つまり，

$$M_1 M_2 \cdots M_k A = E_n \tag{12.1}$$

となるような適当な基本行列 $M_1, \ldots, M_k$ が存在するとする．各 M_i に対し，その行列 M_i^{-1} が存在するので，(12.1) の両辺に左から，M_1^{-1} から M_k^{-1} を順番にかけることにより $A = M_k^{-1} M_{k-1}^{-1} \cdots M_1^{-1}$ を得る．つまり，$A^{-1} = M_1 M_2 \cdots M_k$ が成り立つ.

そこで，$n \times 2n$ 行列 $\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix}$ に (12.1) と同じ行基本変形を施すと

$$\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[M_1 M_2 \cdots M_k \times]{} \begin{pmatrix} M_1 M_2 \cdots M_k A & M_1 M_2 \cdots M_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & A^{-1} \end{pmatrix}$$

となる.

以上のことから，$\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix}$ を行基本変形により $\begin{pmatrix} E_n & P \end{pmatrix}$ の形に変形したとき，P が A の逆行列 A^{-1} である（教科書 p.41）.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-4)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{13}(1)E_{23}(-7)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2\left(-\frac{1}{6}\right)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{12}(-1)E_{32}(-2)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[P_{23}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{array}\right).$$

したがって，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

問題 12.1. 次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(4) 宿題： $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

問題 12.2. 次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} -abc & bc & -c & 1 \\ ab & -b & 1 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 12.3. 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が正則行列になるための k の条件を求めよ．また，そのときの A の逆行列を求めよ．

問題 12.4. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 26 & -20 \\ 2 & 6 & -4 \\ 6 & 18 & -13 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して，PAP^{-1} を計算せよ．また，A^n (n は自然数) を求めよ．