

関数のべき級数展開

- 級数とは？
→ 数列 $\{a_n\}$ の各項を順に加えた式のこと。(p.15 を参照)
- べき級数とは？
→ 級数の各項が x のべき関数 $c_n x^n$ である級数のこと (c_n は定数)。

事実 (べき級数展開)

関数 $f(x)$ が $x = a$ のまわりで連続かつ微分可能であるならば、ある区間で

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

のようなべき級数として表すことができる。

(意味) $a - \rho < x < a + \rho$ のにおいて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(x)$.

クォータ科目「数学」第3回 (担当: 佐藤 弘康) 1/5

テイラー展開, マクローリン展開

- テイラーの定理 (p.62 定理 1.)
 - $R_n(x)$ を剰余項という (他の表し方もある)。
 - $n = 1$ のときは、平均値の定理 (p.46 定理 8.)
 - 定理の証明には、ロルの定理 (p.45 定理 7.) が使われる。
ロルの定理は、「 $f(a) = f(b)$ を満たす関数に対する平均値の定理」
↓ $a = 0$ の場合
- マクローリンの定理 (p.63 定理 1.)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ならば...
 - $f(x)$ は無限級数として表すことができる。
 - これを満たす x の最大範囲が $a - \rho < x < a + \rho$ のとき、 ρ のことを $f(x)$ の収束半径という。

クォータ科目「数学」第3回 (担当: 佐藤 弘康) 2/5

マクローリン級数を求めるには？

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

- 上の式中で未知なのは、 $x = 0$ のにおける $f(x)$ の値、および微分係数たち。
- 一般の n のに対して、 $f^{(n)}(0)$ がわかればよい。(例 1, 2, 3)

例)
$$\begin{cases} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots & (\rho = \infty) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots & (\rho = \infty) \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots & (\rho = \infty) \\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots & (\rho = 1) \\ \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots & (\rho = 1) \end{cases}$$

クォータ科目「数学」第3回 (担当: 佐藤 弘康) 3/5

べき級数展開の応用：近似値の計算

- テイラー級数における有限の n までの式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

を、 $f(x)$ の n 次近似式という。

- 1 次近似: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ ($x = a$ における接線)
- 2 次近似: $y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$
- ...

- $x = a + h$ とした式

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

は、 h が十分小さければ、 $f(a+h)$ の近似値と解釈できる。(p.64 注意)

クォータ科目「数学」第3回 (担当: 佐藤 弘康) 4/5

2変数関数のべき級数展開 (次回のテーマ)

2変数関数 $f(x, y)$ に対し、

- $x(t) = a + ht, y(t) = b + kt$ (a, b, h, k は定数) との合成関数を考える;
 $F(t) := f(a + ht, b + kt)$

- $F(t)$ をマクローリン展開すると、

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \cdots$$

- $t = 1$ のとき、

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots \rightarrow f(a+h, b+k) =$$

$$f(a, b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

- $F^{(n)}(0)$ は、 h, k の n 次多項式として表すことができる。
- その係数は $f(x, y)$ の点 (a, b) における偏微分係数。

クォータ科目「数学」第3回 (担当: 佐藤 弘康) 5/5