確率測度空間の Fisher 情報計量と距離関数

伊藤 光弘　(筑波大学 数理物質系)
佐藤 弘康　(日本工業大学 工学部)

2016 年 3 月 19 日
日本数学会 2016 年度年会
(筑波大学)

1. 確率測度の空間

- $(M, d\theta)$: 標準確率測度 $d\theta$ をもつコンパクト連結 C^∞-多様体
- $\mathcal{P}^+(M)$: M 上の正値確率測度の全体；

$$\mathcal{P}^+(M) := \left\{ \mu = f\, d\theta \;\middle|\; \int_M d\mu = 1,\ f \in C^0(M),\ f(x) > 0 \right\}$$

  - 次の埋め込み ρ により誘導位相をいれる；

$$\rho : \mathcal{P}^+(M) \to L^2(M, d\theta)\,;\ \mu = f(x)\, d\theta \mapsto 2\sqrt{f(x)}$$

1. 確率測度の空間

- $(M, d\theta)$: 標準確率測度 $d\theta$ をもつコンパクト連結 C^∞-多様体
- $\mathcal{P}^+(M)$: M 上の正値確率測度の全体；

$$\mathcal{P}^+(M) := \left\{ \mu = f\, d\theta \,\middle|\, \int_M d\mu = 1,\ f \in C^0(M),\ f(x) > 0 \right\}$$

  - 次の埋め込み ρ により誘導位相をいれる；

$$\rho : \mathcal{P}^+(M) \to L^2(M, d\theta)\ ;\ \mu = f(x)\, d\theta \mapsto 2\sqrt{f(x)}$$

- 接空間は $T_\mu\mathcal{P}^+(M) = \left\{ \tau \,\middle|\, \int_M d\tau = 0,\ \dfrac{d\tau}{d\mu} \in C^0(M) \right\}$
  - $\tau_1, \tau_2 \in T_\mu\mathcal{P}^+(M)$ の内積；$G_\mu(\tau_1, \tau_2) = \displaystyle\int_M \frac{d\tau_1}{d\mu}\frac{d\tau_2}{d\mu} d\mu$
  - $\mu \mapsto G_\mu$ を Fisher 計量とよぶ.

1. 確率測度の空間

[2] T. Friedrich(1991)

- 計量 G の Levi-Civita 接続の公式.
- 定曲率空間である（曲率 1/4）.
- 初期値 $\gamma(0) = \mu, \dot{\gamma}(0) = \tau$ に対する測地的の公式（[4] も参照）;

$$\mu(t) = \left(\cos\frac{t}{2} + \frac{d\tau}{d\mu}\ \sin\frac{t}{2}\right)^2 \mu, \quad \text{ただし，} |\tau|_\mu = 1$$

- 測地的に完備ではない.

$$\because\ \mu(\pi) = \left(\frac{d\tau}{d\mu}\right)^2 \mu \notin \mathcal{P}^+(M) \quad \left(\frac{d\tau}{d\mu}\ \text{は零点をもつ}\right)$$

2. 主結果

定理 1.

任意の $\mu, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ に対し，これらを結ぶ弧長 $\ell = \ell(\mu, \mu_1)$ の測地線分 $\gamma : [0, \ell] \to \mathcal{P}^+(M)$ が一意的に存在する.

ここに，弧長関数 $\ell : \mathcal{P}^+(M) \times \mathcal{P}^+(M) \to [0, \pi)$ は

$$\cos \frac{\ell(\mu, \mu_1)}{2} = \int_{x \in M} \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu}(x)}\, d\mu(x)$$

で与えられる.

定理 2.

Fisher 計量 G に関する距離 $d_G(\mu, \mu_1)$, $\mu, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ は, μ, μ_1 を一意的に結ぶ最短測地線分の長さ $\ell = \ell(\mu, \mu_1)$ で与えられる.

2. 主結果 (1)

定理 1.

任意の $\mu, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ **に対し，これらを結ぶ弧長** $\ell = \ell(\mu, \mu_1)$ **の測地線分** $\gamma : [0, \ell] \to \mathcal{P}^+(M)$ **が一意的に存在する.**

ここに，弧長関数 $\ell : \mathcal{P}^+(M) \times \mathcal{P}^+(M) \to [0, \pi)$ **は**

$$\cos \frac{\ell(\mu, \mu_1)}{2} = \int_{x \in M} \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu}(x)}\, d\mu(x)$$

で与えられる.

2. 主結果 (1)

定理 1.

任意の $\mu, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ **に対し，これらを結ぶ弧長** $\ell = \ell(\mu, \mu_1)$ **の測地線分** $\gamma : [0, \ell] \to \mathcal{P}^+(M)$ **が一意的に存在する.**
ここに，弧長関数 $\ell : \mathcal{P}^+(M) \times \mathcal{P}^+(M) \to [0, \pi)$ **は**

$$\cos \frac{\ell(\mu, \mu_1)}{2} = \int_{x \in M} \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu}(x)}\, d\mu(x)$$

で与えられる.

- $\gamma(0) = \mu, \gamma(\ell) = \mu_1$ **ならば,**

$$\mu_1 = \gamma(\ell) = \left(\cos \frac{\ell}{2} + \frac{d\tau}{d\mu} \sin \frac{\ell}{2}\right)^2 \mu \implies \tau = \frac{1}{\sin(\ell/2)} \left(\sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu}} - \cos \frac{\ell}{2}\right) \mu$$

2. 主結果 (2)

定理 2.

Fisher 計量 G に関する距離 $d_G(\mu, \mu_1)$, $\mu, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ は, μ, μ_1 を一意的に結ぶ最短測地線分の長さ $\ell = \ell(\mu, \mu_1)$ で与えられる.

(注意) T. Friedrich は，$\ell(\mu, \mu_1)$ が距離を与えるということをコメントしているが，証明は与えていない.

2. 主結果 (2)

定理 2.

Fisher 計量 G に関する距離 $d_G(\mu,\mu_1)$, $\mu,\mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ は, μ,μ_1 を一意的に結ぶ最短測地線分の長さ $\ell = \ell(\mu,\mu_1)$ で与えられる.

(注意) T. Friedrich は, $\ell(\mu,\mu_1)$ が距離を与えるということをコメントしているが, 証明は与えていない.

<u>証明の概略</u>: Riemann 多様体における測地線の最短性 ([1, Chap. 3] を参照)

- 指数写像 $\exp_\mu : T_\mu\mathcal{P}^+(M) \to \mathcal{P}^+(M)$ の定義
- 全正規近傍の存在性
- Gauss の補題
- 最小弧長曲線定理 (+ 定理 1.) $\Longrightarrow$ (定理 2.)

3. 準備 1)「指数写像」

- $\mu \in \mathcal{P}^+(M)$, $\tau \in T_\mu \mathcal{P}^+(M)$ に対し,
  測地線 $\gamma : [0,1] \to \mathcal{P}^+(M)$, $\gamma(0) = \mu$, $\dot{\gamma}(0) = \tau$ が存在すると仮定.
- これを $\gamma(t) = \exp_\mu(t\tau)$ と書く.

3. 準備 1)「指数写像」

- $\mu \in \mathcal{P}^+(M), \tau \in T_\mu \mathcal{P}^+(M)$ に対し，
  測地線 $\gamma : [0,1] \to \mathcal{P}^+(M), \gamma(0) = \mu, \dot{\gamma}(0) = \tau$ が存在すると仮定.
- これを $\gamma(t) = \exp_\mu(t\tau)$ と書く.
- $\mu \in \mathcal{P}^+(M)$ に対し
  - $\mathcal{B}(\mu;\varepsilon) := \left\{ \tau \in T_\mu \mathcal{P}(M) \,\middle|\, |\tau|_\mu < \varepsilon,\ \inf_{x \in M} \frac{d\tau}{d\mu}(x) > -|\tau|_\mu \cot \frac{|\tau|_\mu}{2} \right\}$
  - $B(\mu;\varepsilon) := \{ \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M) \,|\, \ell(\mu,\mu_1) < \varepsilon \}$

  とおく.

3. 準備 1)「指数写像」

- $\mu \in \mathcal{P}^+(M), \tau \in T_\mu \mathcal{P}^+(M)$ に対し,
  測地線 $\gamma : [0,1] \to \mathcal{P}^+(M), \gamma(0) = \mu, \dot{\gamma}(0) = \tau$ が存在すると仮定.
- これを $\gamma(t) = \exp_\mu(t\tau)$ と書く.
- $\mu \in \mathcal{P}^+(M)$ に対し
  - $\mathcal{B}(\mu;\varepsilon) := \left\{ \tau \in T_\mu \mathcal{P}(M) \,\middle|\, |\tau|_\mu < \varepsilon,\ \inf_{x\in M} \dfrac{d\tau}{d\mu}(x) > -|\tau|_\mu \cot \dfrac{|\tau|_\mu}{2} \right\}$
  - $\boldsymbol{B}(\mu;\varepsilon) := \{ \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M) \mid \ell(\mu,\mu_1) < \varepsilon \}$

  とおく.
- $0 < \varepsilon < \pi$ とすると, $\exp_\mu : \mathcal{B}(\mu;\varepsilon) \longrightarrow \boldsymbol{B}(\mu;\varepsilon)$;

$$\tau \mapsto \exp_\mu(\tau) = \left(\cos \frac{|\tau|_\mu}{2} + \frac{1}{|\tau|_\mu} \sin \frac{|\tau|_\mu}{2} \cdot \frac{d\tau}{d\mu} \right)^2 \mu$$

  は全単射となる.

3. 準備 2)「全正規近傍」

命題 3.

$W := B(\mu, \varepsilon/4),\ 0 < \varepsilon < \pi$ は $\mu \in \mathcal{P}^+(M)$ における全正規近傍を与える.

すなわち，任意の $\mu_1 \in W$ について，以下が成り立つ.

(i) $W \subset B(\mu_1, \varepsilon)$,

(ii) $\exp_{\mu_1} : \mathcal{B}(\mu_1, \varepsilon) \xrightarrow{\cong} B(\mu_1, \varepsilon)$.

- 示すことは，「$\mu_1, \mu_2 \in W = B(\mu, \varepsilon/4) \implies \mu_2 \in B(\mu_1, \varepsilon)$」
  つまり，「$\ell(\mu, \mu_i) < \varepsilon/4\ (i = 1, 2) \implies \ell(\mu_1, \mu_2) < \varepsilon$」．道具は以下；
  - $\ell(\mu_i, \mu) < \delta \iff \left| \sqrt{f_i} - \sqrt{f} \right|_{L^2} < \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\delta/2)}$.
  - $0 < t < \pi/2$ ならば $\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} \leq \sqrt{1 - \cos 2t}$.
  - L^2-ノルムに関する三角不等式

3. 準備 3)「Gauss の補題」

命題 4.

$\tau \in T_\mu \mathcal{P}^+(M)$, $|\tau|_\mu = 1$ **に対し，** $f(r, \tau) := \exp_\mu(r\tau)$ **とする（ただし，** $r > 0$**）．このとき，動径ベクトル** $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ **と** t**-一定束縛ベクトル** $\dfrac{\partial f}{\partial \tau}$ **は，** Fisher **計量** G **について直交する**;

$$G\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \tau}\right) = 0.$$

- **測地線** $f(r, \tau)$ **の形が具体的に与えられているので，内積を直接計算することによって得られる．**

3. 準備 4) 最少弧長曲線定理

命題 5.

$0 < \varepsilon < \pi$ とする．$\gamma : [0, 1] \to B(\mu, \varepsilon)$ を $\gamma(0) = \mu$ を満たす測地線とし，$c : [0, 1] \to \mathcal{P}^{+}(M)$ を任意の区分的 C^1-曲線で，$c(0) = \gamma(0)$，$c(1) = \gamma(1)$ を満たすものとする．このとき

$$\mathcal{L}(\gamma) \leq \mathcal{L}(c)$$

がいえる．等号成立は $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$ のときである．

- $c([0, 1]) \subset B(\mu, \varepsilon)$ の場合は，$c(t) = f(r(t), \tau(t))$ とかける．Gauss の補題を用いて，弧長を評価．
- そうでない場合は，$\mathcal{L}(c) \geq \mathcal{L}(c|_{[0,t_1]}) \geq \varepsilon > \mathcal{L}(\gamma)$.
- 等号成立 $\Longleftrightarrow \tau$ に関する微分が消える．

4. 補足

- $(\mathcal{P}^+(M), G)$ の距離関数；

$$\ell(\mu,\mu_1) = 2\cos^{-1}\left(\int_{x\in M}\sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu}(x)}\,d\mu(x)\right)$$

一方,

$$d_B(\mu,\mu_1) = -\log\left(\int_{x\in M}\sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu}(x)}\,d\mu(x)\right)$$

を Bhattacharyya 距離という.

- 任意の測地線 $\gamma(t)$ に対して，$\gamma(\pi) \notin \mathcal{P}^+(M)$.

よって，$\operatorname{diam}(\mathcal{P}^+(M), G) \leq \pi$

$\operatorname{diam}(\mathcal{P}^+(M), G) = \pi$ (?)