透視投影の同次座標表示

視点を S，投影面を平面 $z=0$ とする透視投影を φ_S とする．S の同次座標表示を $S=\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\sigma_0\end{bmatrix}$ とし，点 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_0\end{bmatrix}$ の φ による像を $B=\varphi(A)=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_0\end{bmatrix}$ とする．
このとき，同次座標系において透視投影は行列の積で表すことができる；

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-\sigma_3 & 0 & \sigma_1 & 0\\ 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_0 & -\sigma_3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_0\end{bmatrix} \tag{7.1}$$

平行投影の同次座標表示

投影面を平面 $z=0$ とするベクトル $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ 方向への平行投影を $\varphi_{\vec{v}}$ とし，点 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_0\end{bmatrix}$ の $\varphi_{\vec{v}}$ による像を $B=\varphi_{\vec{v}}(A)=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_0\end{bmatrix}$ とする．このとき，同次座標系において平行投影は行列の積で表すことができる；

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-v_3 & 0 & v_1 & 0\\ 0 & -v_3 & v_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -v_3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_0\end{bmatrix} \tag{7.2}$$

問題 7.2. 透視投影の同次座標表示を導く過程[*1]を参考にして，平行投影の同時座標表示 (7.2) を導きなさい．

[*1] 授業ノートを参考にしなさい．

例題 7.3. $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ を空間 $\mathbf{R}^3$ 内の点とする．S を視点とし，投影面を平面 $z = 0$ とする透視投影を φ_S とする．以下の問に答えなさい．

(1) 点 S, A を同次座標で表しなさい．

(2) 同次座標系において透視投影 φ_S を表す 4 次正方行列を書きなさい．

(3) 透視投影 φ_S による点 A の像 B を求め，同次座標で表しなさい．

(4) B を直交座標に書き直しなさい．

解． (1) 例えば $S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ など．[*2]．

(2) (1) で定めた S の同次座標に対して，$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}}$

(4) 同次座標から直交座標に直すには，第 4 の座標で他の座標の値を割れば良い．したがって，$B = \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$ [*3]．

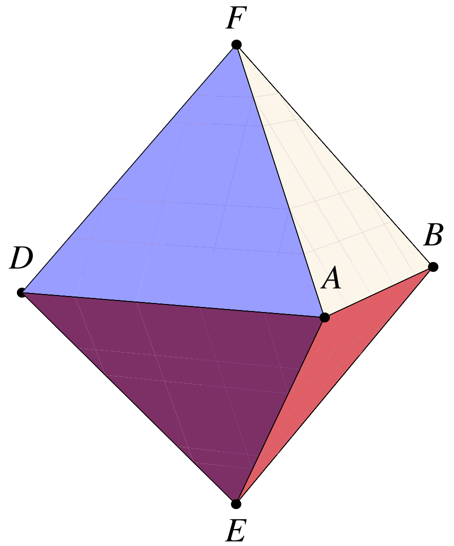
[*2] 同次座標系による表し方は一意的ではない．A についても S と同様に第 4 の座標を 1 としてよいが，ここではすべての座標の値が整数となるようにした（整数の方が計算が簡単になるのため）．

[*3] (1) から (3) までの解は同次座標の決め方に依るが，投影像の直交座標表示は一意的に決まる．

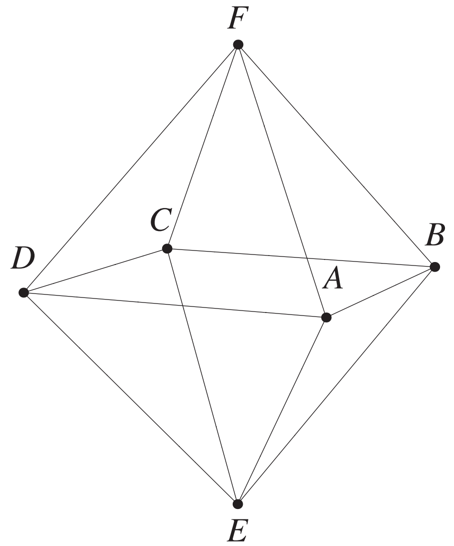
問題 7.4. 視点が $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$，投影面が平面 $z = 0$ の透視投影を φ_S とする．6 個の点

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

を頂点とする 8 面体（下図参照）を φ_S で移した像（図形）のワイヤーフレームを xy-平面に書きなさい．



サーフェイス モデル



ワイヤーフレーム モデル