数学クォータ科目「応用解析」第 12 回 / 微分方程式（2）

１階微分方程式

佐藤 弘康　/ 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 微分方程式とその解（一般解, 特殊解, 特異解）
- 微分方程式の解と曲線群
- 変数分離型微分方程式の解法

今回の授業で理解してほしいこと

- 同次形微分方程式とは何か？その解法は？
- 線形微分方程式とは何か？その解法は？
- ベルヌーイの微分方程式とは何か？その解法は？

１階微分方程式（２）同次形

同次形

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

と表される微分方程式を同次形という.

例） (1) 原点で y 軸と接する円群 $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ から導かれる微分方程式

$$2xyy' = y^2 - x^2$$

(2) 上の円群に直交する曲線群の微分方程式

$$y' = -\frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

１階微分方程式（２）同次形

事実

同次形微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ は, $\dfrac{y}{x} = u$ と変数変換することによって, x と $u = u(x)$ の変数分離形微分方程式になる.

- より, $y = ux$ である. これを x で微分すると, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(ux) = \dfrac{du}{dx}x+u.$
- と $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}x + u$ を同次形微分方程式 に代入すると

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u) \qquad \therefore \ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(f(u) - u)$$

- これは x と $u = u(x)$ の変数分離形微分方程式である.

１階微分方程式（２）同次形の解法

1) $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ において, $\dfrac{y}{x} = u$ と変数変換し,

変数分離形 $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}(f(u) - u)$ に直す.

2) ☐ の一般解を求める.

3) 2) で求めた一般解に ☐ を代入し, x と y の式に直す.

１階微分方程式（３）１階線形微分方程式

１階線形微分方程式

y と y' に関する１次の方程式, つまり,

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

と表される微分方程式をのことを１階線形微分方程式という.

１階線形微分方程式の一般解

１階線形微分方程式 $\boxed{}$ の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right)$$

１階微分方程式（３）１階線形微分方程式

- 一般解の公式はどのようにして導かれるか？
  - $y' + P(x)\,y = Q(x)$ において, y の０次の項 $Q(x)$ を消すと, 変数分離形 $y' = -P(x)\,y$ になる.
  - の一般解は, $y = c\,e^{-\int P(x)\,dx}$ である.
  - ここで, の解は, の 一般解 の任意定数 c が, <u>ある関数 $c(x)$</u> に置き換わったものであると考える（定数変化法）.
- の一般解は, $y = c(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}$ である.

$$\iff c'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} + c(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}(-P(x)) + P(x)\,c(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$$

$$\iff c'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$$

$$\iff c'(x) = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}$$

$$\iff c(x) = \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx} + C$$

１階微分方程式（３） １階線形微分方程式の解法

1) $\boxed{y' + P(x)\,y = Q(x)}$ の形に直す.

2) $\displaystyle\int P(x)\,dx$ を計算する.

3) $\displaystyle\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx$ を計算する.

4) 2)3) の結果を $y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\displaystyle\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx} + C\right)$ に代入する.

１階微分方程式（３）１階線形微分方程式の例

混合の問題

物質 A が m_0 [kg] 溶けた水 W [L] が水槽に入っている.
そこへ $(1+\cos t)$ [kg] の物質 A が溶けた水が毎分 w [L] ずつ流入している. 撹拌によって一様になっている混合物が同じ量だけ流出している.
このとき, 時刻 t における物質 A の量 $m(t)$ [kg] を求めなさい.

- 初期状態 $m(0) = m_0$ [kg]
- 時刻 t における塩の流入量は $(1+\cos t)$ [kg]
- 時刻 t における塩の流出量は $\dfrac{m(t)}{W}\,w$ [kg]
- したがって, $\boxed{m'(t) = (1+\cos t) - \dfrac{m(t)}{W}\,w}$

１階微分方程式（３）１階線形微分方程式の例

$$m'(t) + \frac{w}{W} m(t) = 1 + \cos t$$

- $\displaystyle \int P(x)\,dx = \int \frac{w}{W}\,dt = \frac{w}{W} t$
- $\displaystyle \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx = \int (1 + \cos t)\,e^{\frac{w}{W} t}\,dx$
$$= \frac{W}{w}\,e^{\frac{w}{W} t}\left(1 + w \cdot \frac{w\cos t + W\sin t}{w^2 + W^2}\right) + C$$
- 以上のことから, 一般解は $\displaystyle m(t) = \frac{W}{w}\left(1 + w \cdot \frac{w\cos t + W\sin t}{w^2 + W^2}\right) + C\,e^{-\frac{w}{W} t}$
- 初期条件より, $\displaystyle C = m_0 - \frac{W}{w}\left(1 + w \cdot \frac{w}{w^2 + W^2}\right) = m_0 - \frac{W(2w^2 + W^2)}{w(w^2 + W^2)}$
- よって, 特殊解は

$$m(t) = \frac{W}{w}\left(1 + w \cdot \frac{w\cos t + W\sin t}{w^2 + W^2}\right) + \left(m_0 - \frac{W(2w^2 + W^2)}{w(w^2 + W^2)}\right) e^{-\frac{w}{W} t}$$

１階微分方程式（４）ベルヌーイの微分方程式

ベルヌーイの微分方程式

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

と表される微分方程式をのことを**ベルヌーイの微分方程式**という.

１階微分方程式（４）ベルヌーイの微分方程式

事実

ベルヌーイの微分方程式 $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$ は, $u = y^{1-n}$ と変数変換することによって, x と $u = u(x)$ の線形微分方程式になる.

- （青枠）より, $\dfrac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\,y'$.
- （赤枠）の両辺に $(1-n)y^{-n}$ をかけると,

$$(1-n)y^{-n} \cdot y' + (1-n)y^{-n} \cdot P(x)\,y = (1-n)y^{-n} \cdot Q(x)\,y^n$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)\,u = (1-n)Q(x)}$$

１階微分方程式（４）ベルヌーイの微分方程式の解法

1) $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$ の形に直す.

2) $u = y^{1-n}$ と変数変換し,
を線形微分方程式 $u' + (1-n)P(x)\,u = (1-n)Q(x)$ に直す.

3) の一般解を求める.

4) 3) で求めた一般解に を代入し, x と y の式に直す.

１階微分方程式（４）ベルヌーイの微分方程式の例

海洋漁業を放置しておくと, やがて世界の漁業資源はひどく涸渇する. 漁獲制限するための取り決めをするには, 魚の個々の成長と個体数のモデルが必要である.

魚の成長モデル

時刻 t における, ある魚の体重を $w(t)$ と表す. 体重の変化 $w'(t)$ は, 栄養分による体重の増加量と, 呼吸による減少量の差で表される.
栄養分による増加量は表面積に比例し, 呼吸による減少量は体重に比例するとき, $w(0) = 0$ として, $w(t)$ を求めなさい.

- 栄養分による増加量：$\alpha w(t)^{\frac{2}{3}}$
- 呼吸による減少量　：$\beta w(t)$
- よって, $w'(t) = \alpha w(t)^{\frac{2}{3}} - \beta w(t)$ が成り立つ.

１階微分方程式（４）ベルヌーイの微分方程式の例

$w'(t) + \beta w(t) = \alpha w(t)^{\frac{2}{3}}$ ：$n = \dfrac{2}{3}$ の場合のベルヌーイの微分方程式.

- $u(t) = w(t)^{1-\frac{2}{3}} = w(t)^{\frac{1}{3}}$ とおくと, $u'(t) = \dfrac{1}{3}w(t)^{-\frac{2}{3}}w'(t)$.
- の両辺に $\dfrac{1}{3}w(t)^{-\frac{2}{3}}$ をかけると, $u'(t) + \dfrac{\beta}{3}u(t) = \dfrac{\alpha}{3}$
- 線形微分方程式 を解く.
  - $\displaystyle\int P(t)\,dt = \int \frac{\beta}{3}dt = \frac{\beta}{3}t$
  - $\displaystyle\int Q(t)\,e^{\int P(t)\,dt}\,dt = \int \frac{\alpha}{3}e^{\frac{\beta}{3}t}\,dt = \frac{\alpha}{\beta}e^{\frac{\beta}{3}t} + C$
  - $\displaystyle u(t) = e^{-\frac{\beta}{3}t}\left(\frac{\alpha}{\beta}e^{\frac{\beta}{3}t} + C\right) = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\frac{\beta}{3}t}$
  - $\displaystyle w(t) = u(t)^3 = \left(\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3$

１階微分方程式（４）ベルヌーイの微分方程式の例

$w'(t) + \beta w(t) = \alpha w(t)^{\frac{2}{3}}$ の一般解は $w(t) = u(t)^3 = \left(\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3$

- 初期条件 $w(0) = 0$ より, $0 = \left(\frac{\alpha}{\beta} + C\right)^3$. したがって, $C = -\frac{\alpha}{\beta}$.
- よって, 特殊解は $w(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3$ である.

４つの１階微分方程式の関係

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

変数分離形

$$\xleftarrow{u = \frac{y}{x}}$$

変数変換

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

同次形

（定数変化法）　$\downarrow\ \uparrow$　$Q(x)$ が消えると

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

線形微分方程式

$$\xleftarrow{u = y^{1-n}}$$

変数変換

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

ベルヌーイの微分方程式

まとめと復習（と予習）

- 同次形 微分方程式とはどのような微分方程式ですか？
  その一般解はどのようにして求めることができますか？
- 線形 微分方程式とはどのような微分方程式ですか？
  その一般解はどのようにして求めることができますか？
- ベルヌーイの微分方程式 とはどのような微分方程式ですか？
  その一般解はどのようにして求めることができますか？

教科書 p.12〜16

問題集 245, 246, 247, 248, 249

予 習 微分方程式の一般解 「応用解析」