

## 解析 I 演習 (2 学期: ベクトル解析)

## - 第 5 回 スカラー場・ベクトル場 (2) -

担当: 佐藤 弘康

未発表問題: 1.3(2), 1.4, 2.4, 2.5(3), 3.1, 3.4, 3.7(2)(3), 4.1 ~ 4.9, 4.11

◇ 方向微分係数  $f$  を  $\mathbb{R}^3$  の開集合  $D$  で定義されたスカラー場とし,  $v \in \mathbb{R}^3$  を単位ベクトルとする.  $x \in D$  に対し

$$\left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

が存在するとき, これを点  $x$  における  $v$  方向の方向微分係数と呼び,  $\left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)_x$  で表す.

問題 5.1.  $f$  をスカラー場,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  を  $\mathbb{R}^3$  の単位ベクトルとすると,

$$\left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)_x = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x) + v_3 \frac{\partial f}{\partial z}(x)$$

となることを示せ.

問題 5.2.  $S^2$  を  $\mathbb{R}^3$  内の単位ベクトル全体の集合とする.  $f$  をスカラー場,  $x \in \mathbb{R}^3$  を  $f$  の定義域内の点とすると,

$$v \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)_x \quad (5.1)$$

により  $S^2$  上の実数値関数を定義する. このとき, 関数 (5.1) の最大値および最大値を与える  $v \in S^2$  を求めよ.

問題 5.3. 次のベクトル場  $X$  が保存ベクトル場かどうか考察せよ.

(1)  $X(x) = a$  ( $a \in \mathbb{R}^3$  は定ベクトル)

(2)  $X(x) = x$

問題 5.4.  $A$  を 3 次正方行列とすると,  $x$  を列ベクトルとみなし,  $X_A(x) = Ax$  で  $\mathbb{R}^3$  上のベクトル場  $X_A$  を定義する.  $X_A$  が保存ベクトル場であるためには  $A$  が対称行列であることが必要十分であることを証明せよ.

□ レポート問題 (提出期限: 10 月 19 日)

問題 5.5. 1 変数ベクトル関数  $r = r(t)$  において,  $[r, r', r''] = 0$  ならば,  $r \times r'$  の向きは一定であることを示せ.