数列について

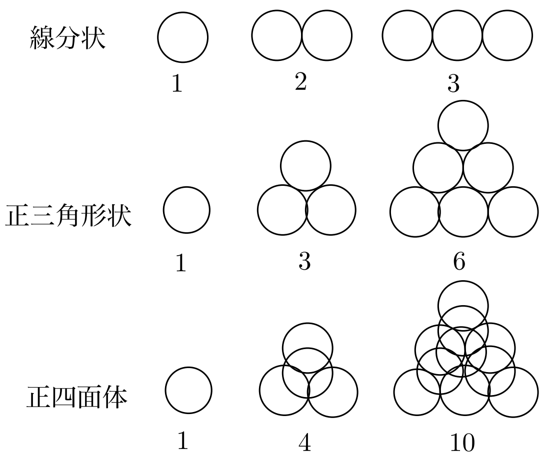
東京学芸大学教育学部 D 類数学専攻
D95-3309 佐藤 弘康

教育実地研究用資料

1 数列

同じボールを，下の図のように一直線上に並べた列をつくると，その個数は，ボールの下に書かれた数の列をつくる．

また，正三角形や正四面体をつくるようにボールを並べていくと，同様に，数の列ができる．



このように，ある規則に従って並んでいる数の列を数列といい，数列の各数を項という．ここで，数列を決定する規則は，言語で表現できるものもあるが，言語的に表現できないものや，数式の関係式としてのみ表現できるものもあるから，規則をつねに言語で表現させようとしないことが大切である．

例 1　紙のサイズも数列と考えられる．

数列を一般的に表すには，アルファベットの小文字に項の番号を添えて，

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

のように書く．このとき，a_1 を初項（または第一項），a_2 を第二項，…，a_n を第 n 項という．

問題 1　次の数列の第四項および第 n 項を求めよ．

(1)　1，4，9，$\boxed{a_4}$，25…

(2)　1，3，5，$\boxed{a_4}$，9 …

上の問題 (1) の数列の第 n 項は

$$a_n = n^2$$

と表すことができる．この式で，n に $1, 2, 3, \ldots$ を代入すると，その数列の初項から順に得られるので，この式は，数列の各項を一般的に表していると考えられるので，第 n 項を一般項という．

問題 2　次の数列の一般項を求めよ，

(1) 3，6，9，12，15，…

(2) 2，6，10，14，18，…

(3) 2，6，18，48，162，…

項の個数が有限である数列を有限数列といい，その項の個数を項数，最後の項を末項という．

フィボナッチ数列

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8, \ldots$$

この数列は，1202 年，ピサのレオナルドという人が，うさぎの繁殖に関わらせてつくった数列である．なお,「フィボナッチ」とはこの人のあだなである．

彼は，次の２つを仮定した．

(i) うさぎは永久に生き続ける．

(ii) どの１つがいのうさぎも，２ヶ月で親うさぎになり，毎月子どもを１つがい産む．

つがいの数は，１つがいのうさぎが生まれたところから数えられる. (ii) から，このつがいは２ヶ月たたないと子どもを産まないので，最初の２ヶ月のつがいの数は１のままである．３ヶ月目には，子どもを１つがい産むから，つがいの数は３，５ヶ月目には５というように増えていき，上記のような数列ができる．

この数列には次のような，数学的に面白い性質がある．

$$a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$$

$$a_{2n+1} = a_n^2 + a_{n+1}^2$$

$$a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^n$$

また，木の小枝についている葉を，根元から先の方に一枚一枚螺旋をかくようにたどっていくと，１枚の葉からすぐ先の葉に到る回転数 m/n が木の種類によって一定しているのである．

ニレやシナノキは $\frac{1}{2}$

セイヨウブナやハシノキは $\frac{1}{3}$

アンズは $\frac{2}{5}$

ポプリやセイヨウナシは $\frac{3}{8}$

ヤナギやアーモンドは $\frac{5}{13}$

というように，不思議とフィボナッチ数列の２つおきの数が現れるのである．

2 等差数列

次の数列は，３で割ると１余る自然数を，小さいほうから順に並べてつくった数列である．

$$1,\ 4,\ 7, 10, 13, 16, \ldots$$

この数列は，初項１に次々に一定の数３を加えて得られた数列と考えることができる．

このように，初項に次々に一定の数を加えて得られる数列を等差数列といい，加える一定の数を公差という．等差数列の一般項は，a を初項，d を公差とすると

$$a_n = a + (n-1)d$$

と書くことができる．

問題 2　第５項が７，第９項が 19 である等比数列の初項，公差を求めよ．

問題 3　第 n 項が $-3n+5$ で表される数列はどのような数列か．

等差数列の和　（説明事項は教科書を参照）

初項 a，末項 l の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

末項が未知の場合，公差を d とすると

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

となる．ここで，注意したいことは，２つめの公式の a の係数の２を忘れない様にすることである．

例 2　１から n までの自然数の和は

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

となる．これはボールを正三角形上に並べる例の一般項になっている．

問題 4　初項から第 8 項までの和が 40，初項から第 15 項までの和が -30 である等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ．

問題 5　等差数列 $-23, -20, -17, \ldots$ について，次の問いに答えよ．

(i) この数列は第何項から初めて正になるか．

(ii) 初項から第何項までの和が初めて正になるか．

3　等比数列

３つの細胞が 1 時間後にそれぞれ２つの細胞に分裂し，さらに 1 時間後には分裂した細胞がそれぞれ２つずつに分裂する．

このように細胞が分裂するとき，その細胞の数に着目すると，

$$3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, \ldots$$

という数列ができる．

この数列は，初項 3 につぎつぎに一定の数 2 を掛けて得られる数列と考えることができる．

このように，初項につぎつぎに一定の数を掛けて得られる数列を等比数列といい，掛ける一定の数を公比という．

初項を a，公比を r の等比数列の一般項は，$r^0 = 1$ と定めると，

$$a_n = ar^{n-1}$$

となる．

ここで，上で一般項を説明するとき，「$r^0 = 1$」としているが，これは次の規則に基づく指数法則の拡張である．生徒にはなじみにくいので，ていねいに指導したい．

K

$$ar^0 \xrightarrow{\times r} ar^1 \xrightarrow{\times r} ar^2 \xrightarrow{\times r} ar^3$$

w　0　1　2　3

問題 6　次の等比数列の一般項を求めよ．

(i) 第 5 項が 48，第 8 項が 384

(ii) 項比が３，第３項が 81

(iii) 第２項が６，第５項が 162

上の問題 6 の (1) を，48 と 384 の間に２つの項を挿入して全体が等比数列になるようにしたいと考えたとき，挿入した項を等比中項という．

これは次のように一般化できる．

a，b の間に n 個の項を挿入して，全体が等比数列になるようにするとき，挿入した項を等比中項という．$n = 1$ のとき，等比中項は a と b の相乗平均 $\sqrt{ab}$ となる．

等比数列の和　（説明事項は教科書を参照）

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

とかける．ただし，これは $r \neq 1$ のときで，$r = 1$ のときは単に $S_n = nr$ である．

特に，初項が 1 のとき，

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

であるから，両辺に $r-1$ をかると

$$r^n - 1 = (r-1)(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1})$$

つまり，$r^n - 1$ は $r - 1$ を因数にもつということがいえる．

問題 7　初項が３項比が２である等比数列の，初項から第 n 項までの和が 93 であるとき，n の値を求めよ．

問題 8　初項から第３項までの和が 7，初項から第 6 項までの和が 63 である等比数列の，初項と公比を求めよ．

例 3　年利率５％，１年ごとの複利で毎年のはじめに１万円ずつ積み立てるとき，10 年後の元利合計を求めてみよう.（複利とは，一定期間の末ごとに，生じた利息を元金にくり入れて，その元利合計を次の期間の元金として利息を計算していく方法である.）

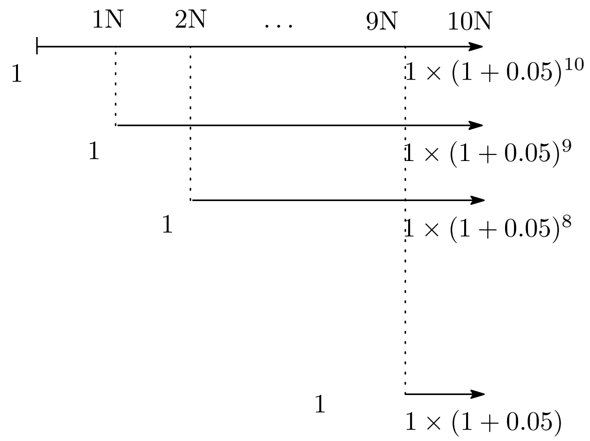
１万円を１年すえおくと，その１万円についての元利合計は

$$10000(1+0.05)\text{ 円}$$

となる．また，２年間すえおくと，これを (1+0.05) 倍して

$$10000(1+0.05)^2\text{円}$$

となる．このことから，毎年のはじめに積み立てた１万円の元利合計は，それぞれ下の図のように表される.



したがって，求める元利合計は，次のようになる.

$$\begin{aligned} & 10000(1.05+1.05^2+1.05^3+\ldots+0.05^{10}) \\ = \; & 10000 \cdot \frac{1.05(1.05^{10}-1)}{1.05-1} \\ = \; & 132067 \end{aligned}$$

問題 9　第１日は１円，第２日は２円，第３日は４円，. . . と，毎日その前日の２倍の金額を 30 日間積み立てると，総和はいくらになるか.

問題 10　初項が２，公比が３の等比数列について，次の問いに答えよ.

(i) 初項から第 n 項までの各項の逆数の和を求めよ.

(ii) 初項から第 n 項までの各項の積を求めよ.