確率論について

東京学芸大学教育学部 D 類数学専攻
D95-3309 佐藤 弘康

教育実地研究用資料

1 確率の意味

天気予報の雨の降る確率や野球の打率など，確率という語はすっかりお茶の間に浸透した言葉となった．また，確率という語は使わないまでも，日常的によく，ことがらの起こる確かさの程度を数を用いて表す.「今日，彼女から便りがくることは 100 %確実だ」,「今度の選挙では十中八九○○氏がかつだろう」,「あの人の言う事は 1/3 ぐらいしか信用できない」．しかし，こうした日常的な表現において，確からしさ表すために用いられる数は，通常そんなはっきりした根拠をもつものではない．というのも，これらは人間の感情が関わっていたり，一回かぎりの事柄で，繰り返されることがない現象であるから，このようなものは確率論の対象とすることはできない．我々が普通，確率を考えるのは，何回も繰り返すことができ（あるいは，同様の状況を何回も想定することができ），その意味で永続性のある現象で，一回一回の結果は偶然に支配されるけれども，全体として数学的な法則性が観取される，ということがらに対してである．

教科書の冒頭　「自然や社会の現象には，偶然に支配されているとみなされるものがいろいろある．このような現象について，観測や実験を繰り返すと，その現象の起こりやすさの度合いを考えることができる.」(啓林館)

「私たちの身のまわりには，偶然によって決まる事柄がたくさんある．硬貨を投げたときに表が出るか裏が出るか，宝くじに当たるかどうか，生まれる赤ちゃんが男の子か女の子か，などがそうである．これらのことについて，あらかじめ結果を知ることはできない.」(東京書籍)

「明日の天気，電話での会話の長さ，宝くじの当選番号などは，確定的に予想することはできなくて，その起こりやすさの程度しかわからない．このような起こりやすさの程度を数量的に表すことを考えてみよう.」(第一学習社)

明日の天気，電話の会話の長さ，宝くじの当選番号などの他に，人間の寿命，電球の寿命，野球の勝敗など，我々の身のまわりには結果が偶然に支配されているとみなされる出来事が多い．

また，くじ引きやじゃんけんで当番を決める場合のように，偶然を利用して公平を期そうとすることもある．

このような場合に，どのような結果がどの程度の確実さで起こるのであろうか．この起こりやすさの度合いを数値で表したものが確率であることを理解させる．

2 試行と事象

試行とは，何回も繰り返すことができ，毎回の結果が偶然に支配されるような実験や観察のことをいい，事象とは試行の結果として起こることがらのことをいう．

例 1　さいころを投げるという試行には「1 が出る」,「偶数が出る」,「3 以上が出る」などの事象が

ある．

例 2　火星に生物がいるかいないか．

人間がいる確率，いない確率は，わからないから，いる，いないを半分して 1/2 ずつとしておこう．猿がいるかいないかも同様に 1/2．犬がいるかいないか，雉がいるかいないかも同様に 1/2．ゆえに，これらのどれもがいない確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^4}$$

もっとたくさんの生物について考えれば，この確率はいくらでも小さくなる．したがって生物が一つもいないという確率は 0 で，火星には生物がいる．

このようなばかげた議論の反省から，確率の議論で論ずべき対象を制限する必要性を感じて，上で述べたような事象についてのみ，確率を考える．

さいころや硬貨を投げる試行において，「1 の目が出る」,「表が出る」事象の確率がそれぞれ，1/6 , 1/2 となることは，実験によらなくても想像できる．しかし，次の例で示すようなことは，多くの実験や観察をしてはじめて確率が考えられる題材である．

例 3　我が国の男子の生まれる確率は 0.514 と考えられる．

年次	出生児数 n	男児数 r	$\frac{r}{n}$
昭和 52	1,755,100	903,380	0.515
53	1,708,643	879,149	0.515
54	1,642,580	845,844	0.515
55	1,576,889	811,418	0.515
56	1,529,455	786,596	0.514
57	1,515,392	777,855	0.513
58	1,508,687	775,206	0.514
59	1,489,780	764,597	0.513
60	1,431,577	735,284	0.514
61	1,382,946	711,301	0.514

例 4　画びょうを投げて，画びょうが上を向く確率は下の表より 0.57 と考えられる．(この確率を 0.54 と書いている教科書もある)

回数 n	上を向いた回数 r	$\frac{r}{n}$
300	174	0.580
400	228	0.570
500	288	0.568
600	345	0.575
700	401	0.573
800	453	0.566
900	512	0.569
1000	568	0.568

上の例のように，ある試行において，試行の回数 n を大きくするとき，ある事象の起こる回数 r の相対度数

$$\frac{r}{n}$$

がある一定の値 p に近づいて行くと考えられるならば，その p のことをその事象の経験的確率または統計的確率という．

2.1　根元事象と全事象

さいころを 1 回投げるとき,「2 以下の目が出る」という事象は「1 の目が出る」「2 の目が出る」という 2 つの事象に分けることができる．このように，ある試行においてそれ以上もう分けることのできない事象を根元事象という．(同じさいころ投げでも，なげる回数が 2 回ならば，その根元事象は (1,1),(1,2),(1,3),. . .,(6,5),(6,6) となる．

問題 1　硬貨を 3 回投げる試行を行うとき，根元事象をすべて列挙せよ．

解　1 回目を x，2 回目を y，3 回目を z として組 (x, y, z) で表せば,

$$\begin{array}{ll}(表, 表, 表) & (表, 表, 裏)\\ (表, 裏, 表) & (表, 裏, 裏)\\ (裏, 表, 表) & (裏, 表, 裏)\\ (裏, 裏, 表) & (裏, 裏, 裏)\end{array}$$

根元事象というものを踏まえて試行を定義すると,「試行とは，確率空間の要素，すなわち根元事象を一つピックアップすること」となる．

1つの試行において，根元事象全体からなる事象を，その試行の全事象という．これを一般に U で表す．さいころ投げの根元事象「1の目が出る」,「2の目が出る」, ...,「6の目が出る」を単に，$1, 2, \ldots, 6$, と表すことにすると

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

と集合で表すことができる．このように根元事象を記号化することによって，事象を集合を使って表記することができる．

ここで，根元事象も事象であるから，$\{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}$ のように集合として表すべきではないかと考える生徒に対しては，確かにその通りであるが，確率論においては習慣として，要素を1つ持つ集合と要素の間に1対1の対応をつけて，$\{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}$ は，それぞれ $1, 2, \ldots, 6$ と同一視して考えていることを注意すればよい．

事象を集合と考えるとき，空集合 $\emptyset$ に対応する事象を空事象といい，$\emptyset$ で表す．空事象とは，絶対に起こり得ない事象であり，さいころ投げの例では「7の目が出る」などがそうである．

2.2　同様に確からしい

『すべてのことがらは，われわれの知識が発達すればはっきりとした因果関係を認めることができる．もし，全能者が現在のあらゆる条件を知るならば，次の瞬間の状態を完全に理解するであろう．

確率ということが問題になるのはわれわれの未知からなのであって，同様に確からしいということは，どれがより確からしいと判断できる知識が欠けていることを意味する.』（ラプラス）

さいころを投げるという試行において，どの目が出るかということは，あらかじめ予測はできません．しかし，さいころが正しく作られているのであれば，1の目が出ること，2の目が出ること，... 6の目が出ることは，どれも同じ程度に期待される．すなわち，どの目が出ることも 1/6 の程度であると推測されます．

一般に，ある試行において，いくつかの事象の起こり方が同じ程度に期待されるとき，それらの事象は同様に確からしいという．これは古典的な確率論の中心をなす概念である．

注意　上の問題1において，気をつけることは，全事象をどのようにおくか，つまり根元事象の定め方である．3枚の硬貨を投げるのであるから，表全部，表2枚と裏1枚，表1枚と裏2枚，裏全部という分け方も可能である．これを全事象と考えれば，2枚だけ表が出る確率は，1/4 となるが，これはもちろん誤りである．というのは,「すべての根元事象は同程度に確からしい」という前提を満たしてないからである．

3　確率

どの根元事象の起こり方も同様に確からしいとする．そのとき，各事象 A のおこる確率（Probability）を次のように定義する．

まず，各根元事象の確率を

$$\frac{1}{n(U)}$$

と定義する．ただし，$n(U)$ とは全事象 U に属する根元事象の数とする．

また，一般に事象 A が $n(A)$ 個の根元事象からなる事象ならば，事象 A の確率 $P(A)$ を

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

と定義する．

このような確率を数学的確率または先駆的確率という．

問題 2　2枚の硬貨を投げるとき，少なくとも1枚は表が出る確率を求めよ．

解　この試行の全事象 U は

$$U = \{(\text{表}, \text{表}), (\text{表}, \text{裏}), (\text{裏}, \text{表}), (\text{裏}, \text{裏})\}$$

で，少なくとも 1 枚は表が出る事象 A は

$$A = \{(\text{表}, \text{表}), (\text{表}, \text{裏}), (\text{裏}, \text{表})\}$$

であるから，その確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

問題 3　２個のさいころを同時に投げるとき，目の和が５の倍数である確率を求めよ．

解　２個のさいころを a, b とし，たとえば，a に 3 の目，b に 5 の目が出ることを $(3, 5)$ と書くことにすれば，この試行の根元事象は

$$\begin{array}{c}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\\cdots\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{array}$$

で，$6 \times 6 = 36$ 個ある．このうち，目の和が５の倍数になるという事象 B は

$$\begin{aligned}B &= \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\\&\quad (4,6),(5,5),(6,4)\}\end{aligned}$$

問題 4　袋の中に赤い玉が４個，白い玉が６個入っています．この袋の中から，２個の玉を取り出すとき，２個とも赤い玉である確率を求めよ．

解　赤い玉４個，白い玉６個の合わせて 10 個の玉から 2 個の玉を取り出す取り出し方は

$${}_{10}C_2$$

通りあります．そしてそのうちで，赤い玉４個から２個を取り出す取り出し方は

$${}_4C_2$$

通りある．したがって，求める確率は

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{2}{15}$$

確率を定義するのに，最も慣習的な表現をすれば，ある試行において起こり得るすべての場合が同様に確からしいならば，事象 A の確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

によって求められる，ということができる．通常，確率を求めるには，この式を用いればよい．(問題 2 から問題 4 にいくにつれて，解法が徐々に，こうした慣習的な，簡略な方向に変化していることを認められるであろう.)

ガリレオの問題　３個のさいころを投げて目の和が 9 になる場合と 10 になる場合とは，下記のように，いずれも６通りしかない．しからば，この２つの場合が起こる確率は等しいといえるか．

1	2	6	1	3	6
1	3	5	1	4	5
1	4	4	2	2	6
2	2	5	2	3	5
2	3	4	2	4	4
3	3	3	3	3	4

ベルトランのパラドックス　与えられた円の内部に勝手に弦をひくとき，弦の長さが，この円の内接三角形の一辺より長い確率を求めよ．

解法 I　円の半径を r とする．円の中心から弦までの距離を x とすると，弦の長さが内接三角形の一辺より長くなるのは，$0 \leq x < r/2$ のときであるから，求める確率は 1/2（図１）

解法 II　弦の中心が，半径が $r/2$ の円内にあることと考え，面積比として 1/4（図２）

解法 III　弦の一端で円に接線をひき，その接線と弦のなす角を θ とすれば，弦の長さが内接三角形の一辺より長くなるのは，$\pi/3 < \theta < 2\pi/3$ のときであるから，求める確率は 1/3（図３）

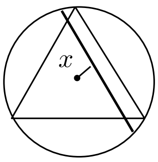

図１

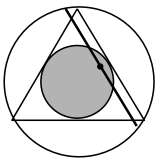

図２

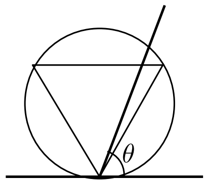

図３

4　確率の基本性質

事象を，根元事象を要素とする集合と考えると，全事象 U はすべての根元事象を含む集合 U であり，すべての事象は U の部分集合となる．ゆえに

$$0 \leq n(A) \leq n(U)$$

が成り立つ．ここで，$n(A) = 0$ のときは A が空事象のときであり，$n(A) = n(U)$ のときは A が全事象 U そのもののときに他ならない．そこで，上の式を $n(U)$ で割ると，$P(A) = n(A)/n(U)$ であるから

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

が成り立つ．特に，$P(\emptyset) = 0$, $P(U) = 1$ である．

4.1　加法定理

ある試行における２つの事象を A，B とするとき，A, B がともに起こる事象を A と B の和事象とよび，

$$A \cup B$$

で表す．

また，A, B の少なくとも一方が起こる事象を A と B の積事象とよび，

$$A \cap B$$

で表す．

例 5　１つのさいころを投げる試行において，A を偶数の出る事象，B を３以下の目が出る事象とする．すなわち，

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{1, 2, 3\}$$

とする．このとき，和事象 $A \cup B$ は「$1, 2, 3, 4, 6$ のいずれかの目が出る事象」となり，積事象 $A \cap B$ は「2 の目が出る事象」となる．すなわち，

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 6\} \\ A \cap B &= \{2\} \end{aligned}$$

である．

一般に，ある試行において，２つの事象を A, B とすると，

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

であるから，両辺を $n(U)$ で割ると

$$P(A \cup B = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

が成り立つ．これを確率の加法定理という．

問題 5　事象が３つの場合の加法定理はどうなるか．

事象 A, B が同時には決して起こらないとき，すなわち，

$$A \cap B = \emptyset$$

であるとき，事象 A, B は互いに排反である，あるいは２つの事象 A, B は排反事象であるという．

このとき，$P(A \cup B) = 0$ であるから，加法定理の式は

$$P(A \cup B = P(A) + P(B)$$

となる．

問題 6　２個のさいころを投げるとき，目の和が奇数になる確率を求めよ．

解　２個のさいころをＰ，Ｑとする．このとき，目の和が奇数となるのは，２つの事象

$$\begin{aligned} A &: \text{P が奇数で，Q が偶数} \\ B &: \text{P が偶数で，Q が奇数} \end{aligned}$$

のいずれかが起こる場合であり，事象 A, B は排反である．

全事象を U とすれば，

$$n(U) = 6^2 = 36$$

また，事象 A, B については

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{1}{4} \\ P(B) &= \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

したがって，求める確率 $P(A \cup B)$ は

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

上の問題，は加法定理を使う問題であるが，重要なのは，加法定理を使うことよりも，むしろ，扱う対象を排反な２つの事象に分解していることである．

問題 7　5 円硬貨と 10 円硬貨を 3 枚ずつ計 6 枚を同時に投げるとき，表の出た硬貨の合計金額が 15 円になる確率を求めよ．

解　次の２つの排反な事象に分けることができる．

A　:　5 円硬貨が 3 枚表が出る

B　:　5 円硬貨と 10 円硬貨が 1 枚ずつ表が出る

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2^6} + \frac{3^2}{2^6} = \frac{5}{32}$$

問題 8　赤玉が 10 個，白玉が 6 個入っている袋から，同時に 2 個の玉を取り出すとき，同じ色の玉が取り出される確率を求めよ．

解　赤玉を２個取り出す事象を A，白玉を２個取り出す事象を B とすると，同じ色の玉を取り出す事象は $A \cup B$ である．

$$P(A) = \frac{{}_{10}C_2}{{}_{16}C_2} = \frac{45}{120} = 38$$

$$P(B) = \frac{{}_{6}C_2}{{}_{16}C_2} = \frac{15}{120} = 18$$

であり，A と B は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

注意　事象が３つ以上の場合，どの２つの事象も排反であるとき，これらは互いに排反であるという．

例えば，事象 A, B, C に対して，

$$\begin{aligned} A \cap B &= \emptyset \\ B \cap C &= \emptyset \\ C \cap A &= \emptyset \end{aligned}$$

が成り立つとき，これらは排反事象である．決して，

$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

ではないことに注意．

確率の基本性質をまとめると

(1)　任意の事象 A に対し，$0 \leq P(A) \leq 1$

(2)　$P(U) = 1$

(3)　$P(\emptyset) = 0$

(4)　A, B が排反事象のとき，
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

となる．

4.2　余事象

1 枚の硬貨を 3 回投げる試行で少なくとも 1 回は表が出る事象 A について考える．問題 1 より全事象を U とすると $n(U) = 8$ で $n(A) = 7$ であるから，全事象の要素で A に含まれてないのは，1 個だけで 1 回も表が出ないという事象である．

このように，ある事象について調べるとき，その事象にはどのような場合があるかを考えるより，そうでない場合を考えるほうがよいことがある．

ある事象 A に対して，事象 A が起こらないという事象を，事象 A の余事象といい，$\bar{A}$ で表す．

問題 9　次の余事象をいえ．

(1) よくきった 52 枚のトランプカードから２枚取り出すとき，２枚とも絵札である事象

(2) ２個のさいころを投げるとき，少なくとも一方の目が２以下である事象

次に，余事象の確率を考える．

事象 A の余事象 $\bar{A}$ に対して，$A \cap B = \emptyset$ であるから，A と $\bar{A}$ は排反事象である．また，全事象を U とすれば，

$$A \cup B = U$$

であるから，加法定理により

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(U) = 1$$

したがって

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

が成り立つ．

事象 A とその排反事象 $\bar{A}$ が，全事象 U を２つの部分に分けているということが理解できていれば，上の証明はほとんど自明である．

なお，数学 I での確率のさまざまな公式や定理などは，基本的なものばかりであるから，証明など見なくても，こんなことは当たり前であるという直感的な理解が大切である．したがって，教える側の姿勢としては，公式や定理を明示したり，あるいは証明を与える前に，それらについての直感的な理解が生徒の側に得られるように努めなければならない．

問題 10　次の確率を求めよ．

(1) ２個のさいころを投げるとき，少なくとも 1 個は２以下の目が出る確率

(2) ２個のさいころを投げるとき，異なる目が出る確率

(3) よくきった 52 枚のトランプカードから２枚のカードを取り出すとき，少なくとも 1 枚は絵札である確率

(4) よくきった 52 枚のトランプカードから２枚のカードを取り出すとき，２枚が異なる数のカードである確率

解

(1) ２個とも３以上である事象の余事象

$$1 - \frac{4^2}{6^2} = \frac{5}{9}$$

(2) 同じ目が出る事象の余事象

$$1 - \frac{6}{6^2} = \frac{5}{6}$$

(3) ２枚とも絵札でない事象の余事象

$$1 - \frac{{}_{40}C_2}{{}_{52}C_2} = \frac{7}{17}$$

(4) ２枚とも同じ数のカードである事象の余事象

$$1 - \frac{13 \times_4 C_2}{{}_{52}C_2} = \frac{16}{17}$$

問題 11　1 から 5 までの番号を書いたカードから３枚を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 取り出したカードの番号の和が 7 以上である確率

(2) 取り出したカードの番号の和が 10 以下である確率

5　確率の計算

確率の加法定理や余事象の確率を組み合わせて，いろいろな事象の確率を計算する方法を考える．

問題 12　赤球 5 個と白球 4 個が入っている袋がある．この袋から同時に 4 個の球を取り出すとき，そのなかに赤球が 2 個以上ある確率を求めよ．

解　9 個の球から 4 個取り出す方法は

$${}_9C_4 = 126(\text{通り})$$

そのなかに赤球が 2 個以上ある事象を A とすると，$\bar{A}$ は,「赤球が 1 個だけ出るか， 1 個も出ない」事象である．赤球が 1 個だけのとき，白球は 3 個となるので,

$${}_5C_1 \times_4 C_3 = 20(\text{通り})$$

赤球が 1 個もでないのは,

$${}_4C_4 = 1(\text{通り})$$

したがって，求める確率は

$$1 - \frac{20+1}{126} = \frac{5}{6}$$

この問題では，余事象を使わなくても計算量は，さほどかわらない.

問題 13　10 枚の硬貨を同時に投げるとき，2 枚以上表が出る確率を求めよ.

問題 14　20 枚の硬貨を同時に投げるとき，4 枚以上表が出る確率を求めよ．また，問題 13 の答えと比べてみよ.

問題 15　3 本の当たりくじが入っている 10 本のくじを，P，Q の 2 人がこの順に 1 本ずつ引くとき，P が当たりくじを引く確率，および Q が当たりくじを引く確率を求めよ.

解　P が当たりくじを引く確率は，10 本中 3 本の当たりくじを引く場合であるから

$$\frac{3}{10}$$

Q が当たりくじを引くには，次の 2 つの場合がある．

A:　P が当たりくじを引いて，Q も当たりくじを引く

B:　P がはずれを引いて，Q は当たりくじを引く

すべての場合の数は $10 \times 9 = 90$ 通りある．このうち，事象 A は $3 \times 2 = 6$ 通り，事象 B は $7 \times 3 = 21$ 通りある．したがって,

$$P(A) = \frac{6}{90}, \quad P(B) = \frac{21}{90}$$

2 つの事象 A, B は排反であるから，Q が当たりくじを引く確率は,

$$P(A) + P(B) == \frac{6}{90} + \frac{21}{90} = \frac{3}{10}$$

問題 17　1 から 5 までの通し番号のついた 5 枚のカードをよくきり，このなかから 2 枚のカードを 1 枚ずつ順に取り出すとき，次の確率を求めよ.

(1)　1 枚目のカードの番号が偶数である確率

(2)　2 枚目のカードの番号が偶数である確率

問題 18　2 本の当たりくじが入っている 4 本のくじがある．P と Q がこの順で交互にくじを引くとき，最初に当たりくじを引くのが P である確率を求めよ.

解　最初に引いたくじが当たる確率は,

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

「P はずれ-Q はずれ-P 当たり」である確率は,

$$\frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{6}$$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

6　独立な試行と確率

２つの試行を行うとき，１つの試行の結果が他の試行の結果に何か影響するのかどうか考えてみる．

例 **6**　１枚の 10 円玉を投げるという試行と，１個のさいころを投げるという試行．

例 **7**　２人の人が順番にくじを引く．ただし，最初に引いた人は，引いたくじを戻さない．

例６の試行で，10 円玉の表が出るか，裏が出るかということはさいころの目の出方に影響するとは考えられない．逆に，例７は最初に引く人が当たりを引くか，はずれを引くかで，後の人の当たりを引く確率は変化する．

例６のように，２つの試行 T_1, T_2 を行っても，試行の結果がお互いに影響しないとき，この２つの試行は独立であるという．

このとき，試行 T_1 で A が起こり，試行 T_2 で B が起こる確率は

$$P(A)P(B)$$

である．

２つの試行が互いに独立であることの定義はあいまいな表現でしか与えられていない．よって，指導の際には，具体例を通して理解させるより他はない．

例 **8**