調和 Hadamard 多様体と Gauss 超幾何微分方程式 *

佐藤 弘康 †（日本工業大学 工学部 共通教育系）

1 はじめに

本講演では，調和 Hadamard 多様体 (X^n, g) における動径関数の Fourier 変換（球 Fourier 変換）を考える．調和多様体とは，計量 g の体積要素 dv_g の密度関数が動径関数となる Riemann 多様体であり，この条件は測地球面の平均曲率が動径関数となることと同値である．$o \in X$ を固定し，X 上のラプラシアン $\mathcal{L}$ を o を原点とする極座標で表すと

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sigma(r)\frac{\partial}{\partial r} + (\text{測地球方向の微分})$$

となる（ここで，$\sigma(r)$ は測地球面 $G(o;r)$ の平均曲率）．動径関数に作用する部分 $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}} := \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \sigma(r)\dfrac{\partial}{\partial r}$ に対し，X 上の動径関数 φ_λ が微分方程式

$$\mathcal{L}_{\mathrm{rad}} f(x) = -\left(\frac{\rho^2}{4} + \lambda^2\right) f(x), \qquad f(o) = 1 \tag{1}$$

の解であるとき，φ_λ を**球関数**という（ただし，ρ は (X, g) の体積エントロピー）．X 上のコンパクト台をもつ C^∞ 級動径関数 f に対し，f の**球 Fourier 変換** $\widetilde{f}$ を

$$\widetilde{f} = \int_{x \in X} f(x)\,\varphi_\lambda(x)\,dv_g = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty f(r)\,\varphi_\lambda(r)\,S(r)\,dr \tag{2}$$

と定義する（ただし，$S(r)$ は測地球面 $G(o;r)$ の体積密度関数）．調和多様体の場合，Busemann 関数[*1] B_θ（ただし，$\theta \in \partial X$）の指数関数 $\varphi_\lambda = \exp\left\{-\left(\dfrac{\rho}{2} + i\lambda\right) B_\theta\right\}$ は $\mathcal{L}\varphi_\lambda = -\left(\dfrac{\rho^2}{4} + \lambda^2\right)\varphi_\lambda$ を満たす[*2]ので，これを用いて Fourier 変換を定義することができるが，Fourier 反転変換や Plancherel の公式が成立するかどうかは，一般的には不明である．

対称空間における Fourier 変換 については S. Helgason [6] によって，さらに，階数 1 非コンパクト対称空間を含む調和 Hadamard 多様体のクラスである Damek-Ricci 空間においては

第 62 回幾何学シンポジウム（2015 年 8 月 27 日〜30 日, 東京理科大学）講演予稿.

* 本研究は伊藤光弘氏（筑波大学名誉教授）との共同研究に基づく.

† E-mail : hiroyasu@nit.ac.jp

*1 測地線 γ に対して定義される関数．Hadamard 多様体の場合は，$\theta \in \partial X$ に対して定まる関数と思ってよい．定義と基本的な性質については [15] を参照.

*2 これは漸近的調和多様体（つまり，Busemann 関数の等位超曲面がすべて平均曲率一定）に対して成り立つ.

E. Damek, F. Ricci [4, 13] らによる結果がある．J.-P. Anker ら [1] は，Damek-Ricci 空間の球 Fourier 変換が Tom H. Koornwinder [9] による Jacobi 関数と Jacobi 変換に関するより一般的な枠組みに置き換えて展開できることを示した（[14] も参照）．そこでの本質は，(∗)「**球関数が満たす方程式** (1) **が変数変換** $\boldsymbol{z = -\sinh\frac{r}{2}}$ **によって，超幾何微分方程式**

$$z(1-z)u'' + \{c-(a+b+1)z\}\,u' - ab\,u = 0 \tag{3}$$

に変換されること」である．そこで，

定義 1. 上の条件 (∗) を満たす調和 Hadamard 多様体を**超幾何型**とよぶ．

超幾何型調和 Hadamard 多様体は次のように特徴づけることができる．

定理 2. n 次元調和 Hadmard 多様体 (X, g) が超幾何型であるための必要十分条件は，半径 r の測地球面の体積密度関数 $S(r)$ が

$$S(r) = \mathrm{Const}\,\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{n-1}\left(\cosh\frac{r}{2}\right)^{2\rho-(n-1)} \tag{4}$$

と表されることである（ただし，ρ は (X, g) の体積エントロピー）．

注意 3. n 次元 Damek-Ricci 空間 $X = AN$ の体積要素は

$$dv_g = 2^{m+k}\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{m+k}\left(\cosh\frac{r}{2}\right)^{k} dr\,dv_{S^{n-1}(1)} \tag{5}$$

と表すことができる．ただし，k は一般化 Heisenberg 代数 $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(N)$ の中心 $\mathfrak{z}$ の次元で，$m = n-(k+1)$ である．また，Damek-Ricci 空間 AN の体積エントロピーは N の等質次元 $k + \dfrac{m}{2}$ に等しいことから，(4) を満たしていることがわかる．

本稿では次節で Jacobi 関数と Jacobi 変換に関する基本事項 [9] を紹介し，§3 で Damek-Ricci 空間における球 Fourier 変換が §2 の議論に帰着できることを述べる ([1, 14])．§4 で定理 2 を証明し，最後に §5 で関連する話題について述べる．

2 Jacobi 関数と Jacobi 変換

2.1 Gauss 超幾何関数　$a, b, c \in \mathbb{C}$（ただし，$c \neq 0, -1, -2, \ldots$）に対して，

$$ {}_2F_1(a, b, c; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k} \times \frac{z^k}{k!}, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash[0, \infty) \tag{6}$$

を Gauss 超幾何関数とよぶ．ただし，$(a)_k$ は $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+(k-1))$ である．これは，原点で正則かつ値 1 をとる，微分方程式 (3) の唯一つの解である．

2.2 Jacobi 関数

$$\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2}, \alpha+1; -\sinh^2 t\right)$$

を Jacobi 関数とよぶ．$|\beta| < \alpha + 1$ のとき，$\left\{\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}\right\}$ は重み関数

$$\Delta_{\alpha,\beta}(t) = (2\sinh t)^{2\alpha+1}(2\cosh t)^{2\beta+1} \tag{7}$$

に関して，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の正規直交系をなす．

$$L_{\alpha,\beta} = \frac{d^2}{dt^2} + \{(2\alpha+1)\coth t + (2\beta+1)\tanh t\}\frac{d}{dt} \quad \left(= \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\Delta'_{\alpha,\beta}(t)}{\Delta_{\alpha,\beta}(t)}\frac{d}{dt}\right) \tag{8}$$

とおくと，$z = -\sinh^2 t$ と変数変換することにより (3) 式は $L_{\alpha,\beta}v = -\left(\lambda^2 + (\alpha+\beta+1)^2\right)v$ となる（ただし，$\alpha = c-1,\ \beta = a+b-c,\ \lambda^2 = -(a-b)^2$）．

2.3 Jacobi 変換　$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ に対し，

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\,\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\,\Delta_{\alpha,\beta}(t)\,dt \tag{9}$$

を f の Jacobi 変換とよぶ．$f \in \mathcal{D}_{\mathrm{even}}(\mathbb{R})$，すなわち，$f$ がコンパクト台をもつ $\mathbb{R}$ 上の偶関数ならば，$\widehat{f}$ は 解析的な偶関数となる．

定理 4 ([9])**.** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が $\alpha > -1,\ \alpha \pm \beta + 1 \geq 0$ を満たすとする．このとき，$f, g \in \mathcal{D}_{\mathrm{even}}(\mathbb{R})$ に対し，次が成り立つ．

(i) **逆変換**：$f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\,\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\,\frac{1}{|\boldsymbol{c}_{\alpha,\beta}(\lambda)|^2}d\lambda$

(ii) **Plancherel の定理**：$\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,\overline{g(t)}\,\Delta_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\,\overline{\widehat{g}(\lambda)}\,\frac{1}{|\boldsymbol{c}_{\alpha,\beta}(\lambda)|^2}d\lambda$

ただし，$\boldsymbol{c}_{\alpha,\beta}(\lambda)$ は Harish-Chandra の $\boldsymbol{c}$-関数；$\boldsymbol{c}_{\alpha,\beta}(\lambda) = \dfrac{2^{\alpha+\beta+1-i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{i\lambda+\alpha+\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i\lambda+\alpha-\beta+1}{2}\right)}$.

3　Damek-Ricci 空間上の球 Fourier 変換

Damek-Ricci 空間とは一般化 Heisenberg 群（または H-type 群）とよばれる 2-step 冪零 Lie 群 N を 1 次元拡大した単連結可解 Lie 群 AN 上に，ある左不変計量を与えた Riemann 多様体である．Damek-Ricci 空間は階数 1 非コンパクト型対称空間を含む調和 Hadamard 多様体のクラスである（詳細は [2] を参照）．

Damrk-Ricci 空間 AN 内の半径 r の測地球面の体積密度関数は (5) より，$S(r) = 2^{m+k}\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{m+k}\left(\cosh\frac{r}{2}\right)^k$ となることがわかる．$m+k = 2\alpha+1,\ k = 2\beta+1$ とおくと，$\boldsymbol{S(r) = 2^{-k}\Delta_{\alpha,\beta}\left(\frac{r}{2}\right)}$ である．また，測地球面の平均曲率は $\sigma(r) = \dfrac{S'(r)}{S(r)}$ であるから，AN 上のラプラシアン $\mathcal{L}$ の動径部分 $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}$ は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{rad}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{m+k}{2}\coth\frac{r}{2} + \frac{k}{2}\tanh\frac{r}{2}\right)\frac{\partial}{\partial r} \tag{10}$$

となる．ここで，$r=2t$ と変換すると，$\boldsymbol{4\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \{(m+k)\coth t + k\tanh t\}\dfrac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{= L_{\alpha,\beta}}$ となり，AN 上の球関数は $\boldsymbol{\varphi_\lambda(r) = \phi_{2\lambda}^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{r}{2}\right)}$ によって与えられることがわかる．以上のことから，Damek-Ricci 空間における球 Fourier 変換は，本質的には*3 $\alpha = \dfrac{n}{2}-1,\ \beta = \rho - \dfrac{n}{2}$ の場合の Jacobi 変換であることがわかる．

4 定理 2 の証明

(X,g) が超幾何型，すなわち，§1 の条件 $(*)$ を満たすならば，(4) が成り立つことを示す．

一般に，$z = -\sinh^2\dfrac{r}{2}$ と変換すると，$\dfrac{dz}{dr} = -\dfrac{1}{2}\sinh r,\ \dfrac{d^2z}{dr^2} = -\dfrac{1}{2}\cosh r$ である．$f(r)=u(z)$ とおくと，

$$\frac{df}{dr} = -\frac{1}{2}\sinh r\cdot u'(z), \quad \frac{d^2f}{dr^2} = -z(1-z)u''(z) - \frac{1}{2}\cosh r\cdot u'(z)$$

となる．したがって，(1) は

$$z(1-z)\,u''(z) + \frac{1}{2}(\cosh r + \sigma(r)\,\sinh r)\,u'(z) - \left(\lambda^2 + \frac{\rho^2}{4}\right)u(z) = 0 \tag{11}$$

となる．(X,g) が超幾何型ならば，この方程式は

$$z(1-z)\,u''(z) + (A+Bz)\,u'(z) - ab\,u(z) = 0 \tag{12}$$

となる (ただし，$A=c,\ B=-(a+b+1)$ は定数)．つまり，$\dfrac{1}{2}(\cosh r + \sigma(r)\,\sinh r) = A - B\sinh^2\dfrac{r}{2}$ であるから，

$$\sigma(r) = \left(A-\frac{1}{2}\right)\coth\frac{r}{2} - \left(A+B+\frac{1}{2}\right)\tanh\frac{r}{2} \tag{13}$$

となる．

X の測地線 γ に対して定義される X 上の Busemann 関数 $B_\gamma(x) = \lim_{t\to\infty}(d(\gamma(t),x)-t)$ の等位超曲面をホロ球面という．調和多様体内のすべてのホロ球面は平均曲率一定で，その値は (X,g) の体積エントロピー ρ に等しい*4．ホロ球面は測地球面の半径を $r\to\infty$ としたときの極限と考えられるので，

$$\rho = \lim_{r\to\infty}\sigma(r) = \left(A-\frac{1}{2}\right) - \left(A+B+\frac{1}{2}\right) = -B-1 \tag{14}$$

となり，$B=-(\rho+1)$ を得る．また，$r\to 0$ のときの測地球面の平均曲率の挙動（[3] を参照）より

$$(n-1) = \lim_{r\to 0} r\sigma(r) = \left(A-\frac{1}{2}\right)\lim_{r\to 0} r\coth\frac{r}{2} = 2\left(A-\frac{1}{2}\right) \tag{15}$$

---

*3 定数倍の違いがある．AN における球 Fourier 変換と Jacobi 変換は，$\widetilde{f}(\lambda) = \dfrac{2^{2-k}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\widehat{f(2\,\cdot)}(2\lambda)$ を満たす．

*4 この性質は，より一般の漸近的調和 Hadamard 多様体においても成り立つ（[7] を参照）．

となり，$A = \dfrac{n}{2}$ を得る．以上のことから，

$$\sigma(r) = \frac{n-1}{2}\coth\frac{r}{2} + \left(\rho - \frac{n-1}{2}\right)\tanh\frac{r}{2} \tag{16}$$

となる．$\sigma(r) = (\log S(r))'$ より，$S(r)$ は (4) 式によって与えられることが示される．

5　関連する話題

5.1　調和多様体の分類問題

Lichnerowicz は「調和多様体は階数 1 対称空間か Euclid 空間に限る」と提唱した (Lichnerowicz 予想 [10])．この予想は多様体がコンパクトのときに正しいことが示された [16] が，非コンパクトの場合の反例を与えたのが，Damek と Ricci である [5]．その後，非コンパクトで polynomial volume growth をもつ調和多様体は Euclid 空間に限ること [12] や，等質な調和多様体は Damek-Ricci 空間に限ることが示された．以上のことから，「等質でない exponential volume growth をもつ調和多様体」については未知である．このような空間については，次の結果が得られている．

定理 5 ([8])**.** X を単連結，非コンパクトな調和多様体とする．このとき，次の条件はすべて同値である；

(i) X は Gromov-双曲的.
(ii) X は指数的体積増大度 (purely exponential volume growth) をもつ.
(iii) X の階数は 1.
(iv) X は Anosov 測地流をもつ.

定理 2 より，超幾何型調和 Hadamard 多様体 X は，指数的体積増大度をもつ．したがって，超幾何型調和 Hadamard 多様体は，定理 5 の条件を満たす調和多様体のクラスである．

5.2　測地球面の体積密度関数は空間を決定するか

定理 2 より，超幾何型調和 Hadamard 多様体とは，体積密度関数が，ある特別な形である多様体であることがわかった．測地球面の体積密度関数の情報から，空間の特徴付けが得られるだろうか．Ramachandran-Ranjan の定理を述べる．

定理 6 ([11])**.** (M, g) を n 次元，非コンパクト，単連結，調和多様体とする．さらに，

(i) 測地球面の密度関数が $S(t) = \sinh^{n-1} t$ ならば，(M, g) は n 次元実双曲空間に等長的である.
(ii) Kähler かつ，測地球面の密度関数が $S(t) = \sinh^{2n-1} t \cosh t$ ならば，(M, g) は $2n$ 次元複素双曲空間に等長的である.

(iii) 四元数 Kähler かつ，測地球面の密度関数が $S(t)=\sinh^{4n-1}t\cosh^3 t$ ならば，(M,g) は $4n$ 次元四元数双曲空間に等長的である．

この定理の証明は，調和多様体における Ledger の公式

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{S(t)}{t^{n-1}}\right)\bigg|_{t=0}=-\frac{1}{3}\mathrm{Ric}$$

を用いて，（正則）断面曲率が一定であることを示している．

参考文献

[1] J.-P. Anker, E. Damek and C. Yacoub, *Spherical Analysis on Harmonic AN Groups*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **23** (1996), 643-679.

[2] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces, Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[3] B.-Y. Chen and L. Vanhecke, *Differential geometry of geodesic spheres*, J. Reine Angew. Math. **325** (1981), 28-67.

[4] E, Damek and F. Ricci, *Harmonic analysis on solvable extensions of H-type groups*, J. Geom. Anal. **2** (1992), 213-248.

[5] E. Damek and F. Ricci, *A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 139-142.

[6] S. Helgason, Groups and Geometric Analysis: Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions, Math. Surv. Monogr. **83**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[7] M. Itoh, H. Satoh and Y. J. Suh, *Horospheres and hyperbolicity of Hadamard manifolds*, Differential Geom. Appl. **35**, (2014), 50-68.

[8] G. Knieper, *New results on noncompact harmonic manifolds*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), 669-703.

[9] T. H. Koornwinder, *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups*, Special functions: group theoretical aspects and applications, 1-85, Math. Appl. **18**, Reidel, Dordrecht, 1984.

[10] A. Lichnerowicz, *Sur les espaces riemanniens complèment harmoniques*, Bull. Soc. Math. France **72** (1944), 146-168.

[11] K. Ramachandran and A. Ranjan, *Harmonic manifolds with some specific volume densities*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **107** (1997), 251-261.

[12] A. Ranjan and H. Shah, *Harmonic manifolds with minimal horospheres*, J. Geom. Anal. **12** (2002), 683-694.

[13] F. Ricci, *The spherical transform on harmonic extensions of H-type groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **50** (1992), 381-392.

[14] F. Rouvière, *Espaces de Damek-Ricci, Geometrie et Analyse*, Sémin. Congr. **7** (2003), 45-100.

[15] 酒井 隆, リーマン幾何学, 数学選書 11, 裳華房, 1992.

[16] Z. I. Szabó, *The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds*, J. Differential Geom. **31** (1990), 1-28.