平面内の領域の面積

- 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq 0$ ならば, 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は, $y = f(x)$ のグラフ（曲線）と, ３つの直線 $x = a, x = b, x$ 軸で囲まれた図形の**面積**である.
- ２つの曲線 $y = f(x), y = g(x)$ と２つの直線 $x = a, x = b$ によって囲まれる図形の面積 S は
  - 区間 $[a, b]$ において, $f(x) \geqq g(x)$ ならば, $S = \displaystyle\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx.$
  - 一般に, $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$

  ※定積分の性質（p.85 定理 2.）を参照.
- （面積）$= \displaystyle\int_a^b$（長さ）$dx.$

「微分積分学の基本定理」の証明

微分積分学の基本定理

$[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し, $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおく.
このとき, $S'(x) = f(x)$ が成り立つ.

- 仮定から, $f(x)$ は最大値・最小値をもつ；$m \leqq f(x) \leqq M$.
- $m(b-a) = \displaystyle\int_a^b m\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b M\,dx = M(b-a).$

$$\therefore m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M$$

- **中間値の定理**より, $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$ を満たす, $a \leqq c \leqq b$ が存在.

「微分積分学の基本定理」の証明（続き）

- **中間値の定理**より, $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$ を満たす, $a \leqq c \leqq b$ が存在.
- $h > 0$ ならば,

$$\begin{aligned}
\frac{S(x+h) - S(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\{(x+h) - x\}\, f(c_x) = f(c_x) \qquad (x \leqq c_x \leqq x+h)
\end{aligned}$$

$$\therefore S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c_x) = f(x).$$

２重積分と累次積分

- ２重積分：平面内の領域 Ω と２変数関数 $f(x, y)$ から定まる量；（リーマン和の極限）
  - $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\,dxdy$
- 累次積分：定積分の繰り返し（計算方法）
  - $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx$
  - $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\,dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx\,dy$

注意

- ２重積分の $dxdy$ と累次積分の $dx\,dy$ は意味が違う.
- 積分順序は, 積分領域 Ω の表現方法に依存する（一意的ではない）.

空間内の領域の体積

- Ω 上で $f(x, y) \geqq 0$ ならば, ２重積分 $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\,dxdy$ は, 底面が Ω で, 上面が曲面 $z = f(x, y)$ の柱体の**体積**である.
- この柱体は空間内の領域

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega, 0 \leqq z \leqq f(x, y)\}$$

  と表すことができる.
- $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx$ ならば, $\displaystyle\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x, y)\,dy$ は, 上の柱体を平面 $x = x_0$ で切ったときの切り口の面積を表す.
- （体積）$= \displaystyle\int_a^b$（面積）dx $\left(= \displaystyle\int_\alpha^\beta\right.$（面積）$\left.dy\right).$