□ 前回のまとめ：2 変数関数の極値の判定 (Judgement of Extrema)

<u>1st Step</u>：$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ となる点 (a,b) を求める．
Finding a point (a,b) such that $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$.

<u>2nd Step</u>：上で求めた (a,b) にたいし，この点における f のヘッセ行列 H の行列式 $\det(H)$ を計算する．For (a,b) satisfying $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$, calculate the determinant of the Hessian matrix H of f at (a,b);

$$H=H_f(a,b)=\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}.$$

このとき，

$$\begin{cases} \det(H)>0, f_{xx}(a,b)>0 & \Longrightarrow \quad F(x,y)\geq 0 \text{（}f\text{ は }(a,b)\text{ で極小値をとる）} \\ & \qquad f \text{ has a local minimum at } (a,b). \\ \det(H)>0, f_{xx}(a,b)<0 & \Longrightarrow \quad F(x,y)\leq 0 \text{（}f\text{ は }(a,b)\text{ で極大値をとる）} \\ & \qquad f \text{ has a local maximum at } (a,b). \\ \det(H)<0 & \Longrightarrow \quad F(x,y)\text{ は正にも負にもなる（極値をとらない）} \\ & \qquad f \text{ does not have an extremum at } (a,b). \\ \det(H)=0 & \Longrightarrow \quad \text{極値をとる場合もとらない場合もある} \\ & \qquad \text{The test tells us nothing.} \end{cases}$$

この判定法は 3 つ以上の変数を持つ関数についても自然に拡張できる（演習書 p.130）．また，この判定法は「ヘッセ行列の固有値」の言葉で説明することができる．
キーワード：固有値，行列の対角化（線形代数）

The judgement of extrema mentioned above is extended for functions of $n(\geq 3)$-variables (See [微積分学入門 p.130]). Moreover, this judgement can be restated in terms of eigenvalues of H. *Keywords*: eigenvalues, diagonalization of matrices.

□ **det**$(H)=0$ の場合

- (a,b) で極小値をとる $\Longleftrightarrow$ 十分小さい h,k にたいし $f(a+h,b+k)\geq f(a,b)$ が成り立つ．
  例）$f(x,y)=x^4+y^4\geq 0=f(0,0)$．したがって，原点で極小値をとる．
- (a,b) で極値をとらない $\Longleftrightarrow$ $f(a+h_1,b+k_1)\geq f(a,b)$，$f(a+h_2,b+k_2)\leq f(a,b)$ を満たす十分小さい $h_i,k_i(i=1,2)$ が存在する．
  例）$f(x,y)=-x^3+2y^3$ とする．$f(k,k)=k^3$ であるから，$f(k,k)$ の符号は k の符号に依る．つまり $f(x,y)$ は原点の近傍で正にも負にもなる．したがって，$f(x,y)$ は原点で極値をとらない．

□ 追加問題

問題 8.5. 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 3x^4$
(2) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$
(3) $f(x, y) = (y - a^2x^2)(y - b^2x^2)$

問題 8.6. 与えられた長さ l の針金を 3 つに切り，円，正方形，正三角形を 1 つずつ作り，その面積の和を最小にするにはどのようにすればよいか．

□ 前回の課題の略解　$f(x, y) = x^4 + y^4 - 10x^2 + 16xy - 10y^2$

- $(0, 0)$：$H = \begin{pmatrix} -20 & 16 \\ 16 & -20 \end{pmatrix}, \det(H) = 144 > 0, f_{xx}(0, 0) = -20 < 0$．したがって，この点で極大値をとる．
- $(\pm1, \pm1)$：$H = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}, \det(H) = -192 < 0$．したがって，この点で極値をとらない．
- $(\pm3, \mp3)$：$H = \begin{pmatrix} 88 & 16 \\ 16 & 88 \end{pmatrix}, \det(H) = 7488 > 0, f_{xx}(\pm3, \mp3) = 88 > 0$．したがって，この点で極小値をとる．