「微分積分学の基本定理」の証明

微分積分学の基本定理

$[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し, $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおく.
このとき, $S'(x) = f(x)$ が成り立つ.

- 仮定から, $f(x)$ は最大値・最小値をもつ；$m \leqq f(x) \leqq M$.
- $m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$.

$$\therefore m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M$$

- **中間値の定理**より, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$ を満たす, $a \leqq c \leqq b$ が存在.

「微分積分学の基本定理」の証明（続き）

- **中間値の定理**より, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$ を満たす, $a \leqq c \leqq b$ が存在.
- $h > 0$ ならば,

$$\begin{aligned}
\frac{S(x+h)-S(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\{(x+h)-x\}\,f(c_x) = f(c_x) \qquad (x \leqq c_x \leqq x+h)
\end{aligned}$$

$$\therefore S'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_x) = f(x).$$

２重積分の定義（リーマン和の極限）

- $f(x,y)$：領域 Ω で定義された有界な関数 $(|f(x,y)| < K)$
- 領域 Ω を m 個の小領域 $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ に分割.
- 各小領域 Ω_k から 点 (ξ_k, η_k) を適当に選ぶ.
- 次の和をリーマン和という；

$$R(\Delta; \{(\xi_1,\eta_1), \ldots, (\xi_m,\eta_m)\}) = \sum_{k=1}^m f(\xi_k,\eta_k)\,S(\Omega_k)$$

- Ω の分割 Δ を限りなく細かくしていくとき, このリーマン和が分割の仕方と点 (ξ_k,η_k) の選び方に依らずに一定値 I に近づくとき, この I を「領域 Ω における $f(x,y)$ の**２重積分**」とよび,

$$I = \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$$

と書く.

２重積分と累次積分

- ２重積分：平面内の領域 Ω と２変数関数 $f(x,y)$ から定まる量；（リーマン和の極限）
  - $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$
- 累次積分：定積分の繰り返し（計算方法）
  - $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$
  - $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

注意

- ２重積分の $dxdy$ と累次積分の $dx\,dy$ は意味が違う.
- 積分順序は, 積分領域 Ω の表現方法に依存する（一意的ではない）.

空間内の領域の体積

- Ω 上で $f(x,y) \geqq 0$ ならば, ２重積分 $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$ は, 底面が Ω で, 上面が曲面 $z = f(x,y)$ の柱体の**体積**である.
- この柱体は空間内の領域

$$V = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \Omega, 0 \leqq z \leqq f(x,y)\}$$

と表すことができる.

- $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$ ならば, $\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x,y)\,dy$ は, 上の柱体を平面 $x = x_0$ で切ったときの切り口の面積を表す.
- （体積）$= \int_a^b$（面積）dx $\left(= \int_\alpha^\beta \text{（面積）}\,dy\right)$.