

数学クォータ科目「基礎数学 II」第 5 回

不定積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

これまでのまとめ (1)

関数 $y = f(x)$ がある.

- $x = a$ から $x = b (= a + h)$ までの平均変化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

← 2点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の傾き

- $x = a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

← 点 $(a, f(a))$ における接線の傾き

- 導関数

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

これまでのまとめ (2)

- 基本的な関数の微分

(2-1) $(k)' = 0$ (すなわち, 定数関数の微分は消える)

(2-2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α は実数)

(2-3) $(\sin x)' = \cos x$

(2-4) $(\cos x)' = -\sin x$

(2-5) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(2-6) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

(2-7) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$ 特に, $(\log x)' = \frac{1}{x}$

(2-8) $(a^x)' = a^x \log a$ 特に, $(e^x)' = e^x$

これまでのまとめ (3)

- 微分公式

(3-1) 合成関数の微分： $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

特に， $\frac{d}{dx}f(ax + b) = a f'(ax + b)$

(3-2) 積の微分公式： $\{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(3-3) 商の微分公式： $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

特に， $\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

(3-4) 対数微分法： $f'(x) = f(x) \cdot (\log f(x))'$

今週のこと

- 原始関数と不定積分
- 基本的な関数の不定積分
- $\frac{d}{dx}f(ax+b) = a f'(ax+b)$ を利用した不定積分の計算
- 置換積分法 (\leftrightarrow 合成関数の微分の公式)
- 部分積分法 (\leftrightarrow 積の微分の公式)
 - いずれの方法も被積分関数を積分ができる形に直して積分する。

原始関数

- 関数 $f(x)$ に対し, $F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ のことを「 $f(x)$ の**原始関数**」という.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{F(x)} & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & f(x) & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & \boxed{f'(x)} \\ f(x) \text{ の原始関数} & & & & f(x) \text{ の導関数} \end{array}$$

- $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば, 任意の定数 C を加えた関数 $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である.
 - なぜなら, 定数関数の微分は 0 だから, $F'(x) = f(x)$ ならば, $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x)$ である.
 - つまり, $f(x)$ の原始関数は一意には決まらず, **無数に存在する**.

不定積分

- $F(x) + C$ のことを「 $f(x)$ の不定積分」とよび、 $\int f(x) dx$ と書く；

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ を積分定数とよぶ})$$

- $\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \implies \int f(x) dx = F(x) + C$
- 不定積分とは「 $f(x)$ の原始関数全体を表すもの」と解釈できる.
- 不定積分の性質 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し,
 - $\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
 - $\int \{k f(x)\} dx = k \int f(x) dx$

基本的な関数の不定積分 (I)

- $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C & (\alpha \neq -1) \\ \log |x| + C & (\alpha = -1) \end{cases}$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C = -\cot x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$

基本的な関数の不定積分 (II)

- $\frac{d}{dx}F(ax + b) = a F'(ax + b)$
- $F'(x) = f(x)$ のとき, $\frac{d}{dx}F(ax + b) = a F'(ax + b) = a f(ax + b)$.
- $\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \implies \int f(x) dx = F(x) + C$
- よって,

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

基本的な関数の不定積分 (II)

- $\int (ax + b)^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha + 1} \cdot \frac{1}{a} (ax + b)^{\alpha+1} + C & (\alpha \neq -1) \\ \frac{1}{a} \log |ax + b| + C & (\alpha = -1) \end{cases}$
- $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
- $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a \tan(ax + b)} + C = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
- $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

置換積分法

- 積分 $\int f(x) dx$ において, $x = g(t)$ と置き換えるとき,

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

考え方 $x = g(t)$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = g'(t)$.

この式から形式的に得られる $dx = g'(t) dt$ を代入する.

(証明) $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると, 合成関数の微分の公式 より

$$\begin{aligned} \int f(g(t)) g'(t) dt &= \int F'(g(t)) g'(t) dt = \int \frac{d}{dt} F(g(t)) dt \\ &= F(g(t)) + C = F(x) + C = \int f(x) dx \end{aligned}$$

置換積分法

- 積分 $\int f(x) dx$ において, $x = g(t)$ と置き換えるとき,

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

- x の式を t と置き換えてもよい.

問 1) $f(x) = \tan x$ の不定積分を, $\sin x = t$ と置換して求めなさい.

部分積分法

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

- 2つの関数の積となっている関数を積分するときに有用な方法.
- 一方の関数を **ある関数の微分** とみる.
(つまり, 一方の **関数の原始関数** を求める必要がある.)
- 2つの関数のうち, どちらを $g'(x)$ とみるのか?
 - 微分することにより「簡単な」関数になる方を $f(x)$ とする.

例 1) n 次関数は微分すると次数がひとつ下がり, より簡単な関数になる.

例 2) 三角関数 $\sin x, \cos x$ や指数関数 e^x は, 微分しても「変わらない」ため, 関数として簡単にはならない.

部分積分法

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

問2) $I = \int x \cos x dx$ を求めなさい.

- 被積分関数は x と $\cos x$ の積なので、部分積分法が有効である.
- この2つを比較すると、 x の方が微分すると簡単な関数となるため、

$f(x) = x, g'(x) = \cos x$ として部分積分する.

解) $\int \cos x dx = \sin x + C$ より、

$$\begin{aligned} I &= \int x (\sin x)' dx = x \sin x - \int (x)' \sin x dx \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) = \underline{x \sin x + \cos x + C}. \end{aligned}$$

部分積分法

問3) $I = \int e^x \cos x dx$ を求めなさい.

- 被積分関数は e^x と $\cos x$ の積だが，どちらも微分によって「簡単な」関数にはならない.
- このような場合，どちらか一方（のタイプ）を $g'(x)$ と見て部分積分を繰り返すことで，次のようにして I の値が求まる.

部分積分法

問3) $I = \int e^x \cos x dx$ を求めなさい.

解) 方針: 三角関数の方を $g'(x)$ と考える.

$$\begin{aligned} I &= \int e^x (\sin x)' dx = e^x \sin x - \int (e^x)' \sin x dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x (-\cos x)' dx \\ &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int (e^x)' (-\cos x) dx \right) \\ &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right) \\ &= e^x \sin x - (-e^x \cos x + I) = e^x \sin x + e^x \cos x - I. \end{aligned}$$

$$2I = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$\therefore I = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)$$

部分積分法

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

(証明) 積の微分の公式 $\frac{d}{dx}\{f(x) g(x)\} = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$ より,

$$f(x) g(x) = \int f'(x) g(x) dx + \int f(x) g'(x) dx.$$

右辺の第 2 項を移項すれば, 部分積分の式が得られる. (証明終)

- 特に, $f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \cdot (x)'$ より,

$$\int f(x) dx = x f(x) - \int x f'(x) dx$$

問 4) 上の公式を利用し, $f(x) = \log x$ の不定積分を求めなさい.