

## 【復習】行列の固有値と固有ベクトル

### 定義

正方行列  $A$  に対し、 $Ax = \lambda x$  を満たすスカラー  $\lambda$  を「 $A$  の固有値」といい、ベクトル  $x$  を「固有値  $\lambda$  に対する固有ベクトル」という。ただし、 $x$  は零ベクトルではないとする。

**事実** 2次正方行列  $A$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2$  とし、対応する固有ベクトルをそれぞれ  $x_1, x_2$  とする。  $x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  のとき、  $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$  が正則ならば、

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち、} P^{-1}AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 1/6

## 行列の対角化

### 行列の対角化

正方行列  $A$  に対して、適当に正則行列  $P$  を選んで、 $P^{-1}AP$  を対角行列にすることを「行列の対角化」という。

### 注意

- $P^{-1}AP$  が対角行列になるような行列  $P$  は一意に定まるものではない。  
( $P$  は  $A$  の固有ベクトルを用いて構成。選び方は一意ではない)
- $P^{-1}AP$  が対角行列となるとき、その対角成分は  $A$  の固有値である。  
(対角成分の並び方は、 $P$  の構成に依る)

クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 2/6

## 行列の対角化の考え方

- 行列  $A$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  とする。
- 対応する固有ベクトルをそれぞれ  $x_1, x_2, \dots$  とする。
- 固有ベクトル達を並べて行列  $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \end{pmatrix}$  をつくる。
- これらは  $Ax_i = \lambda_i x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) を満たすので、

$$\begin{aligned} AP &= A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 & Ax_2 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $P$  が正則ならば、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$  と対角行列になる。

クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 3/6

## 行列の対角化の手順

行列  $A$  を対角化するには…

- (ステップ1)  $A$  の固有値・固有ベクトルを求める。
- (ステップ2) 固有ベクトルを並べて正則行列  $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \end{pmatrix}$  をつくる。
- (ステップ3)  $P^{-1}AP$  は、対角成分に  $A$  の固有値を並べた対角行列となる。  
(ただし、並び方は  $P$  の固有ベクトルの並び順と同じ)

### 注意

- 全固有値の積は、行列式  $|A|$  の値に等しい。
- すべての正方行列が対角化できるとは限らない。  
例) 回転  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , せん断  $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  は対角化不可能。
- 任意の対称行列は対角化可能である。

クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 4/6

## 対称行列の対角化・対角化の応用（1）

### 定理

任意の対角行列は、直交行列で対角化可能である。つまり、行列  $A$  が対称行列ならば、 ${}^tPP = E$  かつ  ${}^tPAP$  が対角行列となるような正則行列  $P$  が存在する。

- (1) 2次形式の標準化：  ${}^tP \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ,  $P^tP = E$  のとき、

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P^t P \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} P^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \alpha X^2 + \beta Y^2 \quad (2\text{次形式の標準形}) \end{aligned}$$

クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 5/6

## 対角化の応用（2）

- (2) 2変数関数  $f(x, y)$  の極値の判定：  $F(t) = f(a + ht, b + kt)$  に対し、

$$\begin{aligned} F''(0) &= f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 \\ &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \alpha H^2 + \beta K^2. \end{aligned}$$

よって、 $f(x, y)$  のヘッセ行列の固有値  $\alpha, \beta$  が、

- (i) どちらも正ならば  $f(a, b)$  は極小、(ii) どちらも負ならば極大、
- (iii) 符号が異なるときは極値にはならない。

- (3)  $A^m$  の計算：  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  ならば、 $A^m = P \begin{pmatrix} \alpha^m & 0 \\ 0 & \beta^m \end{pmatrix} P^{-1}$  である。
- (4) 微分方程式の解法への応用（詳細は割愛）

クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 6/6