情報数学 III 期末試験 解答

$\boxed{1}$

(1) 空間内の **2** つの平面

$$2x+3y-4z=-3,\quad x+2y-3z=-3$$

の交線の 方向ベクトル を求めなさい．（**5** 点）

（解）連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=-3 \\ x+2y-3z=-3 \end{cases}$$

の解の全体が，上記の 2 平面の交点全体の集合である．連立方程式の拡大係数行列は，行基本変形により

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

と簡約階段行列に変形できるので，解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書くことができる（ただし，t は任意の実数）．これは空間内の直線を表し，その方向ベクトルは $\underline{\boldsymbol{(-1,2,1)}}$（またはその実数倍）である．

- 方向ベクトルを明示していなくても，連立方程式が解けていれば 3 点．

(2) **2** 次曲線 $2x^2-xy+by^2+3x-2y-1=0$ が無心 **2** 次曲線であるとする．このとき，b の値 を求めなさい．（**5** 点）

（解）問題の 2 次曲線は

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3x-2y-1=0$$

と書ける．これが無心 2 次曲線であるから，2 次の項の係数行列は

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & b \end{pmatrix} = 0$$

を満たす．つまり，$2b-\frac{1}{4}=0$ であるから，$\underline{\boldsymbol{b=\frac{1}{8}}}$ である．

(3) **2** 次曲線 $x^2-4xy-2y^2=1$ をある直交行列 P を用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換したら $\alpha\bar{x}^2+\beta\bar{y}^2=1$ となった．このときの 直交行列 P を求めなさい．（**7** 点）

（解）問題の 2 次曲線は

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と書ける．2 次の項の係数行列を $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ とおき，A の固有値と固有ベクトルを求める．A の固有多項式は

$$\Phi_A(t)=\det(tE_2-A)=\det\begin{pmatrix} t-1 & 2 \\ 2 & t+2 \end{pmatrix}$$
$$=t^2+t-6=(t-2)(t+3)$$

であるから，A の固有値は $\underline{2 \text{ と } -3}$ である．

固有値 2 のとき，

$$2E_2-A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは $\underline{c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ と書ける．

固有値 -3 のとき，

$$2E_2-A=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，固有ベクトルは $\underline{c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ と書ける．

A は対称行列であるから，異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．上で求めた固有ベクトルをそれぞれノルムが 1 になるように定数倍し，それを並べて行列 P をつくる．例えば $P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと，${}^tPAP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ となり，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換すると，

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} {}^tPAP \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \\ &= 2\bar{x}^2-3\bar{y}^2 \end{aligned}$$

となる．つまり，求める行列 P は $\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$ など．

- この問題の解は一意的に定まるものではないことに注意せよ．
- 行列 A の固有値を求めていれば 1 点．
- 行列 A の各固有地に関する固有ベクトルを求めていれば，各 2 点．

(4) ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ が行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルであるとする．このとき，k の値を求めなさい．（**5** 点）

（解）仮定から

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 5\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

を満たす α（固有値）が存在する．上式の左辺を計算すると $\begin{pmatrix} 2 \\ 5k \\ -4 \end{pmatrix}$ であるから，これが $\begin{pmatrix} -\alpha \\ 5\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ と等しくなるためには $\alpha=-2$ でなければならない．したがって，第 2 成分を比較すると $5k=5\alpha=-10$ であるから $\underline{\boldsymbol{k=-2}}$ である．

2 空間の同次座標系において，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の積として表されるアフィン変換を φ とする．

このとき点 $P(1,2,3)$ に対し，$\underline{\varphi(P)\text{ の座標を直交座標}}$ で答えなさい．（**5** 点）

（解）$f(\vec{p}) = A\vec{p} + \vec{v}$ で与えられるアフィン変換は同次座標系では行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} & A & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ の積として表される．したがって，問題の 4 次正方行列が与えるアフィン変換は直交座標系では

$$\varphi(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{p} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と表されるので，点 P の像は

$$\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

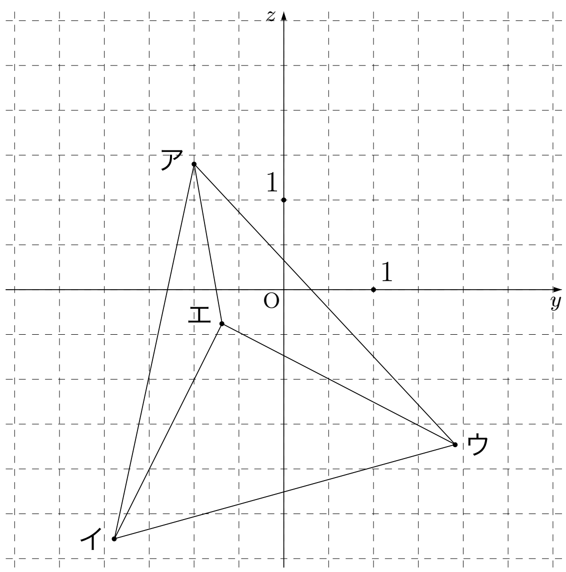
である．もちろん，点 P を同次座標で $(1:2:3:1)$ と表し

$$\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

と求めてもよい．

- 点 P を同次座標で表し，アフィン変換を与える 4 次正方行列との積を計算していれば（結果が正しくなくても）1 点．

3 視点が $V(8,-1,-1)$，投影面が yz-平面 $(x=0)$ である透視投影を Φ_V とする．右下の図は，**4** 点 $A(-1,a,-3)$，$B(-2,-1,2)$，$C(-3,3,-2)$，$D(-5,-\frac{1}{2},0)$ を頂点とする四面体を Φ_V で投影した像のワイヤーフレームである．このとき，以下の問に答えなさい．



(1) 点 B,C,D の各像が図中のア〜エのどの点に対応するか答えなさい．（各 **5** 点）

（解）視点 V を同次座標で $(8:-1:-1:1)$ と表すと，透視投影 Φ_V は同次座標系において行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

の積として表される．点 B,C,D を同次座標でそれぞれ $(-2:-1:2:1)$，$(-3:3:-2:1)$，$(-10:-1:0:2)$ と表すと

$$\Phi_V(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 14 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_V(C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \\ -19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{21}{11} \\ -\frac{19}{11} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_V(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -18 \\ -10 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

となる．計算結果と図中の点の位置を比較することにより $\underline{\Phi_V(B)\text{ は（ア）}}$，$\underline{\Phi_V(C)\text{ は（ウ）}}$，$\underline{\Phi_V(D)\text{ は（エ）}}$ であることがわかる．

(2) a の値としてもっとも近いものは **(i)** -1 と **(ii)** -2 のどちらか答えなさい．（**5** 点）

（解）(1) 結果から，$\Phi_V(A)$ が（イ）である．点 A を同次座標で $(-1:a:-3:1)$ と表すと

$$\Phi_V(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ a \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8a-1 \\ -25 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8a-1}{9} \\ -\frac{25}{9} \end{pmatrix}$$

となる．ここで，図より（イ）の y 座標は $-2 < y < -\frac{3}{2}$ を満たすことがわかる．$a=-1$ のときは $\Phi_V(A)$ の y 座標は -1 となるので，不適である．$a=-2$ のとき，$\Phi_V(A)$ の y 座標は $-\frac{17}{9}$ となり，これは $-2 < y < -\frac{3}{2}$ を満たす．よって，$\underline{a\text{ の値としては }\mathbf{-2}\text{ の方が近い}}$．