$\boxed{\text{行列式の性質}}$ n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し，$\det A = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{a\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

det-1) 行に関する線型性 (1)：

$$\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1}+b_{i1} \ \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots \ a_{in}+b_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots & a_{ij} & \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ b_{i1} \ \cdots & b_{ij} & \cdots \ b_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

det-2) 行に関する線型性 (2)：

$$\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ ca_{i1} \ \cdots & ca_{ij} & \cdots \ ca_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix} = c\cdot\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots & a_{ij} & \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

det-3) 任意の行の入れ換えに対して，(-1) 倍される：

$$\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots & a_{ij} & \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{k1} \ \cdots & a_{kj} & \cdots \ a_{kn} \\ & \cdots & \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{k1} \ \cdots & a_{kj} & \cdots \ a_{kn} \\ & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots & a_{ij} & \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

det-4) 任意の行をスカラー倍して，別の行に加えても行列式の値は変わらない：

$$\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots & a_{ij} & \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{k1} \ \cdots & a_{kj} & \cdots \ a_{kn} \\ & \cdots & \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1}+c\,a_{k1} \ \cdots & a_{ij}+c\,a_{kj} & \cdots \ a_{in}+c\,a_{kn} \\ & \cdots & \\ a_{k1} \quad \cdots & a_{kj} & \cdots \quad a_{kn} \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

det-5) $$\det\left(\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \\ * & & A & \\ & & & \end{array}\right) = a\cdot\det(A)$$

注意. (1) $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$ が成り立つことから，det-1) 〜 4) は列に関する操作についても同様のことが成り立つ．(2) det-5) は余因子展開の特別な場合である．(3) 2 次正方行列と 3 次正方行列にはサラスの公式とよばれる行列式の計算方法がある．