

数学クォータ科目「基礎数学 II」第 4 回

微分の計算 (3)

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

これまでのまとめ (1)

関数 $y = f(x)$ がある.

- $x = a$ から $x = b (= a + h)$ までの平均変化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

← 2点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の傾き

- $x = a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

← 点 $(a, f(a))$ における接線の傾き

- 導関数 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

これまでのまとめ (2)

- **微分の性質** 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し,

$$(1-1) \{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(1-2) \{k f(x)\}' = k f'(x)$$

- **基本的な関数の微分**

$$(2-1) (k)' = 0 \text{ (すなわち, 定数関数の微分は消える)}$$

$$(2-2) (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ } (\alpha \text{ は実数})$$

$$(2-3) (\sin x)' = \cos x$$

$$(2-4) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(2-5) (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(2-6) (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

これまでのまとめ (3)

- 微分公式

(3-1) 合成関数の微分：
$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x)$$

特に，
$$\frac{d}{dx} f(ax + b) = a f'(ax + b)$$

(3-2) 積の微分公式：
$$\{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(3-3) 商の微分公式：
$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

特に，
$$\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

今週のこと

- 基本的な関数の微分 (4) 指数関数と対数関数の微分

$$(2-7) (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \log a} \quad \text{特に, } (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(2-8) (e^x)' = e^x$$

ここで,

- e ($= 2.71\dots$) は自然対数の底 (または, ネイピア数) とよばれる定数.
- $\log x$ とは, e を底とする対数関数 ($\log x = \log_e x$).

- 微分公式 (3)

$$(3-4) \text{ 対数微分法: } f'(x) = f(x) \cdot (\log f(x))'$$

対数関数の微分

問1) $f(x) = \log_a x$ を微分しなさい.

(解)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(\frac{x+h}{x} \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+H)}{H} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \lim_{H \rightarrow 0} \log_a (1+H)^{\frac{1}{H}} \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ここで, $\lim_{H \rightarrow 0} (1+H)^{\frac{1}{H}} = e$ である.

$$= \frac{\log_a e}{x} \quad \text{※ 特に, } a = e \text{ のとき, } (\log_e x)' = \frac{\log_e e}{x} = \frac{1}{x} \text{ である.}$$

指数関数 e^x の微分

問2) $f(x) = e^x$ を微分しなさい.

(解)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

ここで, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \dots\dots (*)$ である.

$$= e^x$$

(*) の証明: $H = e^h - 1$ (つまり, $h = \log(H+1)$) とおく. h が 0 に十分近いとき, H も 0 に十分近い. よって

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{H}{\log(H+1)} = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log(H+1)}{H}} = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{\log (H+1)^{\frac{1}{H}}} = \frac{1}{\log e} = 1.$$

対数微分法

- $f(x)$ の微分の求めるために、 $\log f(x)$ の微分を計算する方法.

- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ と, 合成関数の微分公式 より,

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \text{つまり} \quad f'(x) = f(x) \cdot (\log f(x))'$$

- $\log f(x)$ を計算することの効用

(1) 積や商が, 和や差に分解される.

$$\text{例) } \log (f(x) \cdot g(x)) = \log f(x) + \log g(x)$$

$$\text{例) } \log \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \log f(x) - \log g(x)$$

(2) 累乗の指数が, 対数の定数倍となる.

$$\text{例) } \log (f(x)^\alpha) = \alpha \cdot \log f(x)$$

対数微分法の計算例

問3) $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{(x^2-3x+1)^3}$ を微分しなさい.

(解) $\log f(x) = 2 \log(2x-1) - 3 \log(x^2-3x+1)$ である.

対数微分法の計算例

問 4) $f(x) = a^x$ を微分しなさい (ただし, $a > 0$).

(解) $\log f(x) = \log a^x = x \log a$ である. この式の両辺を微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log a.$$

よって,

$$f'(x) = f(x) \log a = a^x \log a$$