関数とは

- ２つの変数 x, y がある.

  （変数とは, いろいろな値をとる文字のこと）

- 変数 x の値を決めると, それに応じて y の値が決まるとき,

  「y は x の（１変数）関数である」

  という. このとき, $\begin{cases} x & \text{を独立変数} \\ y & \text{を従属変数} \end{cases}$ という.

- 変数 y が独立変数 x の関数であることを, 一般的に $y = f(x)$ と書く.
  - f は「x に対して, $y(= f(x))$ を対応させる規則」と解釈できる.
  - 「x の関数」とは「x で記述される式 $f(x)$」と考えてよい.

定義域と値域

関数 $y = f(x)$ に対し,

- 変数 x のとる値の範囲を, 「関数 $f(x)$ の定義域」という.

例えば,	$a \leqq x \leqq b$	閉区間といい, $[a, b]$ と書く.
	$a < x < b$	開区間といい, (a, b) と表す.
	$a < x \leqq b,\ \ a \leqq x < b$	それぞれ $(a, b], [a, b)$ と表す.
	$a < x,\ \ a \leqq x$	それぞれ $(a, \infty), [a, \infty)$ と表す.
	$x < b,\ \ x \leqq b$	それぞれ $(-\infty, b), (-\infty, b]$ と表す.
	実数全体	$(-\infty, \infty)$, または $\mathbb{R}$ と表す.

- x が関数 $f(x)$ の定義域内を動くとき, y がとる値の範囲のことを「関数 $f(x)$ の値域」という.

２次関数とは

- 関数 $y = f(x)$ が x の 2 次多項式で表されるとき, すなわち,

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a, b, c \text{ は定数で}, a \neq 0)$$

  のとき, y を x の 2 次関数という.

例） (1) $y = 2x^2$

(2) $y = 2x^2 - 4x + 3$

(3) $y = \qquad -4x + 3$ $\leftarrow$ 2 次関数ではない.

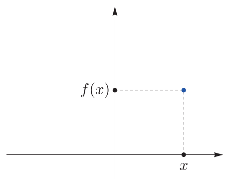
(4) $y = 2(x-1)^2 + 1$

※ (2) と (4) は同じ関数である. (4) を (2) の標準形とよぶことがある.

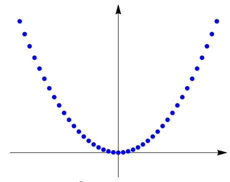
- ２次関数のグラフは放物線である.

関数のグラフとは

- 関数 $y = f(x)$ の定義域内の値 x を与えると, 平面内の点 $(x, f(x))$ が定まる（下左図）.
- このような点の全体は, 平面内の曲線をなす（下右図）.



座標平面における点 $(x, f(x))$

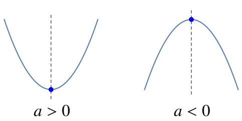

$y = ax^2$ のグラフ（$a > 0$ の場合）

- この曲線を, 「関数 $y = f(x)$ のグラフ」という.
- 「点 (α, β) が関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点である」ことと, 「α, β が $\beta = f(\alpha)$ を満たす」ことは同じ.

２次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

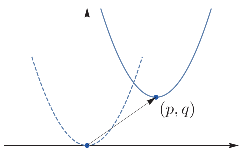
- 2 次関数のグラフを放物線とよび
  - $a > 0$ のとき, 「下に凸」,
  - $a < 0$ のとき, 「上に凸」

  の放物線という.



- ２次関数の最小値, または最大値を与える点を, 「放物線の頂点」という.
- 放物線の頂点を通り, 縦軸に並行な直線を「放物線の軸」という.
  （放物線は軸に関して対称である）

- $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは, 「$y = ax^2$ のグラフを, 頂点が (p, q) になるように平行移動した放物線」である.



２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ（平方完成）

$$
\begin{aligned}
y &= a(x-p)^2 + q \\
&\quad \downarrow \text{展開公式 } (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\
&= a(x^2 - 2px + p^2) + q \\
&\quad \downarrow \text{分配法則 } A(\alpha+\beta) = A\alpha + A\beta \\
&= ax^2 - 2apx + ap^2 + q \\
&= ax^2 - 2apx + (ap^2 + q)
\end{aligned}
$$

上の計算の「逆」が平方完成

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x\right) + c \\
&= a\left\{x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\
&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c
\end{aligned}
$$