数学クォータ科目「応用解析」第 4 回 / ベクトル解析（4）

線積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

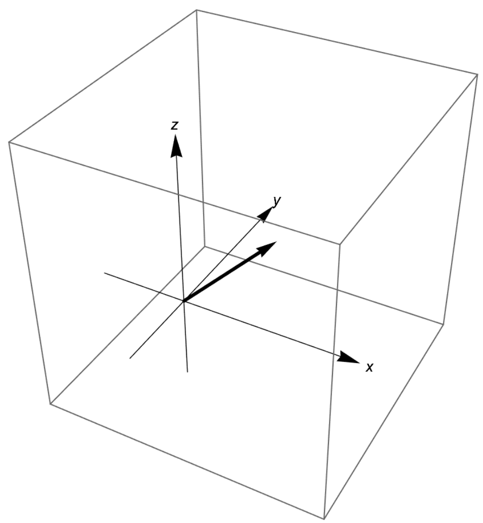
- ベクトル場の発散と回転，ベクトルの外積

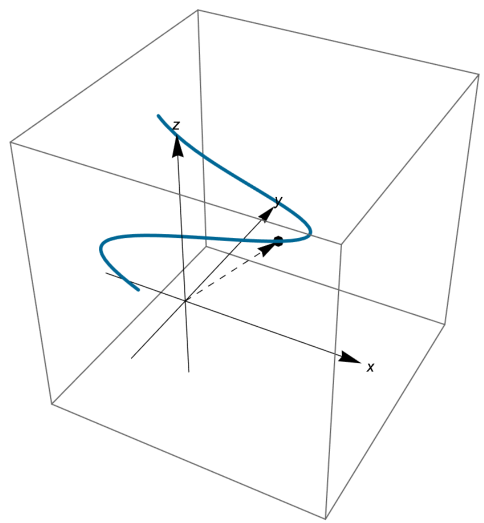
今回の授業で理解してほしいこと

- 空間曲線の弧長と弧長パラメーター
- スカラー場の線積分
- ベクトル場の線積分

【再掲】１変数ベクトル関数のホドグラフ（空間直線）

- 変数 t の値を決めると，その値に応じてベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ がただ一つ定まるとき, $\boldsymbol{A}(t)$ を独立変数 t の**ベクトル関数**という.
- ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$ の成分は, １変数関数.
- ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の始点を定点 O に固定すると, $\boldsymbol{A}(t)$ の終点 P は一般に 1 つの曲線を描く. この曲線を $\boldsymbol{A}(t)$ の**ホドグラフ**という.
- ベクトル関数と曲線を同一視し, $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$ と表す.





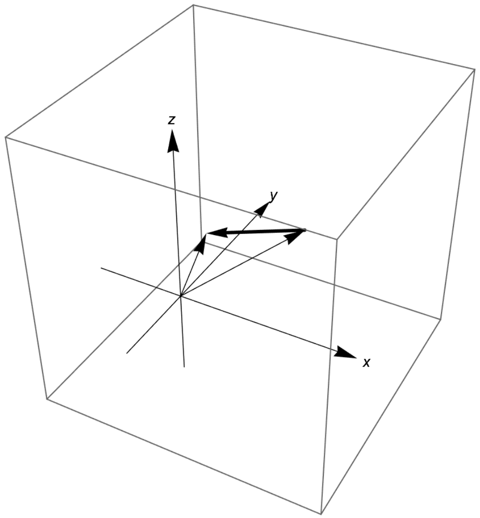
【再掲】１変数ベクトル関数の微分（接ベクトル）

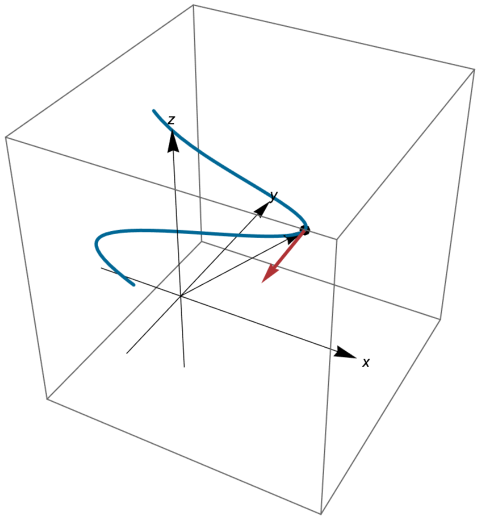
- ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$ の微分；

$$\boldsymbol{r}'(t) = x'(t)\,\boldsymbol{i} + y'(t)\,\boldsymbol{j} + z'(t)\,\boldsymbol{k}$$

- $\boldsymbol{r}'(t)$ を始点が $\boldsymbol{r}(t)$ のベクトルと考えると, $\boldsymbol{r}'(t)$ は曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ に接するベクトル（接ベクトル）である.

- 特に, ベクトル $\boxed{\boldsymbol{t}(t) := \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\boldsymbol{r}'(t)}$ を接単位ベクトルという.





曲線の長さ（弧長）

- $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ を, $a \le t \le b$ で定義された曲線とする.
- $\mathrm{A} = \boldsymbol{r}(a), \mathrm{B} = \boldsymbol{r}(b)$ を端点とする弧 AB の長さを次のようにして考える.

(1) 区間 $a \le t \le b$ を適当に分割する：$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$.

(2) 対応する曲線上の点を $\mathrm{A} = \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_n = \mathrm{B}$ とする.

(3) 弧 AB の長さを折れ線の長さで近似する：$s_n := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i|$

(4) 極限値 $s := \displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ をこの曲線の弧長とよぶ.

- 実際には, 以下の式で計算できる.

$$s = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

曲線のパラメーター

- 曲線 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$ に対し, $t = \phi(u)$ を合成した曲線 $\bar{\boldsymbol{r}}(u) = \boldsymbol{r}(\phi(u)) = x(\phi(u))\,\boldsymbol{i} + y(\phi(u))\,\boldsymbol{j} + z(\phi(u))\,\boldsymbol{k}$ を考える.
- ベクトル関数としては異なるが, 同じ曲線を与えることは明らかである.
- このようにすることを, 「曲線のパラメーターを変える」と言うことがある.

定義

曲線 $\boldsymbol{r}(s) = x(s)\,\boldsymbol{i} + y(s)\,\boldsymbol{j} + z(s)\,\boldsymbol{k}$, $a \leq s \leq b$ が「弧長パラメーターをもつ」または「s は弧長パラメーターである」とは, $a \leq s \leq c (< b)$ に対応する弧の長さが, 常に $c - a$ に等しいときを言う.

注 $\displaystyle\int_a^c |\boldsymbol{r}'(s)|\,ds = c - a$. つまり, $|\boldsymbol{r}'(s)| = 1$ が成り立つことと同値である.

曲線のパラメーター

事実

任意の曲線は弧長パラメーターをもつように, パラメーターを変えることができる.

- 曲線 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$, $a \leq t \leq b$ に対し, $\boldsymbol{r}(a)$ から $\boldsymbol{r}(t)$ までの弧長を対応させる t の関数を $s(t) = \displaystyle\int_a^t |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt$ とおく.
- この関数の逆関数を $t = \phi(s)$ とし, これと $\boldsymbol{r}(t)$ と合成して $\bar{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}(\phi(s))$ とおくと, s は弧長パラメーターとなる.

空間曲線の例

例）次の曲線の弧長を求め, t が弧長パラメーターか否か調べなさい

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \alpha \cos t\, \boldsymbol{i} + \alpha \sin t\, \boldsymbol{j} + \beta t\, \boldsymbol{k}, \quad \text{（ただし, } \alpha, \beta \text{ は定数）}$$

（解）$\boldsymbol{r}'(t) = -\alpha \sin t\, \boldsymbol{i} + \alpha \cos t\, \boldsymbol{j} + \beta\, \boldsymbol{k}$ より

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{(-\alpha \sin t)^2 + (\alpha \cos t) + \beta^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

よって, $\boldsymbol{r}(0)$ から $\boldsymbol{r}(t)$ までの弧長は

$$s(t) = \int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int_0^t \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, dt = t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

したがって, $\underline{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1 \text{ のとき}, t \text{ は弧長パラメーターであるが}}$,
それ以外の場合は弧長パラメーターではない.

空間曲線の例

例）次の曲線の弧長を求め, t が弧長パラメーターか否か調べなさい

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \alpha \cos t\, \boldsymbol{i} + \alpha \sin t\, \boldsymbol{j} + \beta t\, \boldsymbol{k}, \quad \text{（ただし, } \alpha, \beta \text{ は定数）}$$

注　ただし, $s(t) = t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ の逆関数 $t = \dfrac{s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ を合成したもの

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}(s) = \alpha \cos\left(\frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \boldsymbol{i} + \alpha \sin\left(\frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \boldsymbol{j} + \frac{\beta s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\, \boldsymbol{k}$$

のパラメーター s は弧長パラメーターである.

スカラー場の線積分

定義

曲線 $C : \boldsymbol{r}(s) = x(s)\,\boldsymbol{i} + y(s)\,\boldsymbol{j} + z(s)\,\boldsymbol{k},\ \alpha \leq s \leq \beta$（$s$ は弧長パラメーター）とスカラー場 $\varphi(x, y, z)$ に対し,

$$\int_C \varphi\, ds := \int_\alpha^\beta \varphi(x(s), y(s), z(s))\, ds$$

を「曲線 C に沿っての φ の（線素に関する）**線積分**」と言う.

注 $C : \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k},\ a \leq t \leq b$ が弧長パラメーターでない場合は, 以下の式で表される.

$$\int_C \varphi\, ds = \int_a^b \varphi(x(t), y(t), z(t))\, |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt$$

ベクトル場の線積分

定義

曲線 $C : \boldsymbol{r}(s) = x(s)\,\boldsymbol{i} + y(s)\,\boldsymbol{j} + z(s)\,\boldsymbol{k},\ \alpha \leq s \leq \beta$（$s$ は弧長パラメーター）とベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ に対し,

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{A}(x(s), y(s), z(s)) \cdot \boldsymbol{t}(s)\, ds$$

を「曲線 C に沿っての $\boldsymbol{A}$ の線積分」と言う.

$\boxed{\text{注}}$ $C : \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k},\ a \leq t \leq b$ が弧長パラメーターでない場合,

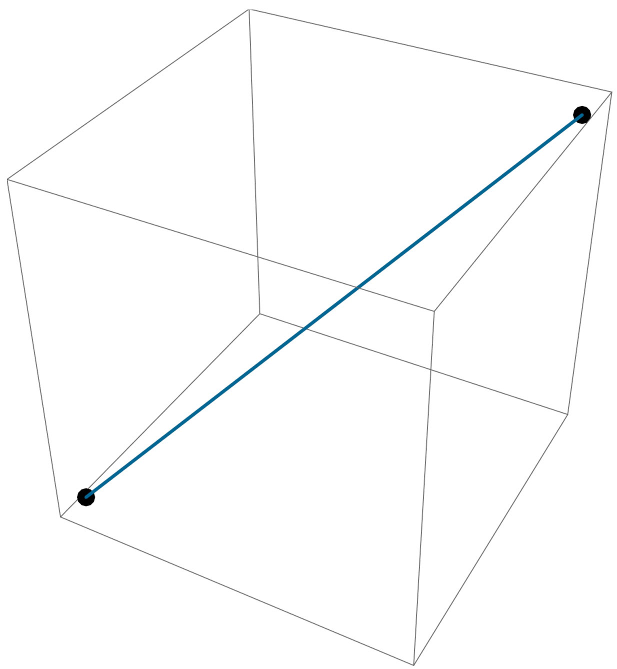
$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_a^b \boldsymbol{A}(x(t), (t), z(t)) \cdot \underbrace{\boxed{\boldsymbol{t}(t)}}_{\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\boldsymbol{r}'(t)} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \boxed{\int_a^b \boldsymbol{A}(x(t), (t), z(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt}$$

ベクトル場の線積分

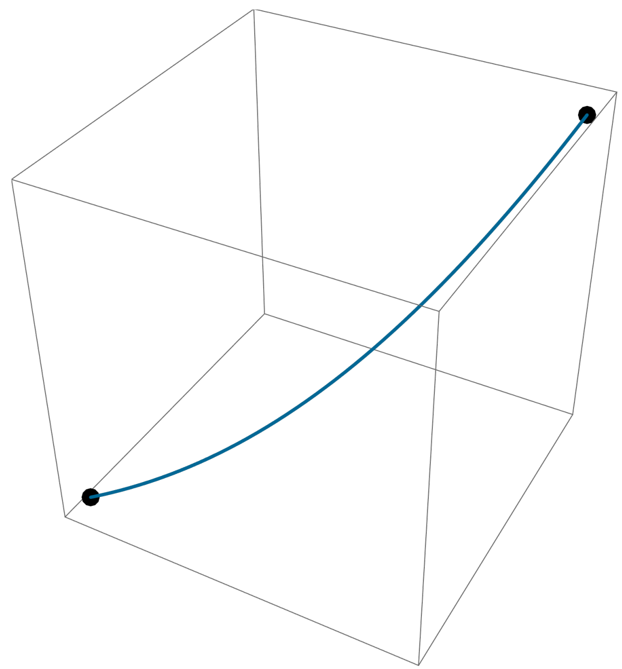
例題）ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (3x^2y^2 + y^3z^2)\,\boldsymbol{i} + (2x^3y + 3xy^2z^2)\,\boldsymbol{j} + 2xy^3z\,\boldsymbol{k}$ について, 次の曲線 C に沿った線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$ を求めなさい.

(1) $C : \boldsymbol{r} = t\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq 1$

(2) $C : \boldsymbol{r} = t\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} + t^2\,\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq 1$



$\boldsymbol{r} = t\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}$



$\boldsymbol{r} = t\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} + t^2$

ベクトル場の線積分

例題）ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (3x^2y^2 + y^3z^2)\,\boldsymbol{i} + (2x^3y + 3xy^2z^2)\,\boldsymbol{j} + 2xy^3z\,\boldsymbol{k}$ について, 次の曲線 C に沿った線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$ を求めなさい.

(1) $C : \boldsymbol{r} = t\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

（解）$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (3t^4 + t^5)\,\boldsymbol{i} + (2t^4 + 3t^5)\,\boldsymbol{j} + 2t^5\,\boldsymbol{k}$ より,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}(t) = 5t^4 + 6t^5.$$

したがって,

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds = \int_0^1 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}(t)\,dt = \int_0^1 (5t^4 + 6t^5)\,dt = \Big[t^5 + t^6\Big]_0^1 = \boxed{2}.$$

ベクトル場の線積分

例題）ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (3x^2y^2 + y^3z^2)\,\boldsymbol{i} + (2x^3y + 3xy^2z^2)\,\boldsymbol{j} + 2xy^3z\,\boldsymbol{k}$ について, 次の曲線 C に沿った線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$ を求めなさい.

(2) $C : \boldsymbol{r} = t\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} + t^2\,\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

（解）$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2t\,\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (3t^4 + t^7)\,\boldsymbol{i} + (2t^4 + 3t^7)\,\boldsymbol{j} + 2t^6\,\boldsymbol{k}$ より,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}(t) = 5t^4 + 8t^7.$$

したがって,

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds = \int_0^1 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}(t)\,dt = \int_0^1 (5t^4 + 8t^7)\,dt = \Big[t^5 + t^8\Big]_0^1 = \boxed{2}.$$

ベクトル場の線積分の性質

定理

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ の勾配ベクトル場 $\nabla\varphi$ の線積分 $\displaystyle\int_C \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{t}\, ds$ の値は, 曲線 C の端点にのみ依存する. 特に, $C : \boldsymbol{r}(t), a \leq t \leq b$ に対し,

$$\int_C \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \varphi(\boldsymbol{r}(b)) - \varphi(\boldsymbol{r}(a)).$$

注 前の例題の

- ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ はスカラー場 $\varphi(x, y, z) = x^3y^2 + xy^3z^2$ の勾配.
- ２つの曲線は, 端点がともに原点 $(0, 0, 0)$ と点 $(1, 1, 1)$ である.
- よって, 上の定理より $\displaystyle\int_C \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{t}\, ds = \varphi(1, 1, 1) - \varphi(0, 0, 0) = 1 + 1 = 2$.

まとめと復習（と予習）

- 曲線の弧長とは何ですか？
- 曲線の弧長パラメーターとは何ですか？
- 曲線の接単位ベクトルとは何ですか？
- スカラー場の（線素に関する）線積分に定義は？
- ベクトル場の線積分に定義は？

教科書 **p.89〜96**

問題集 **199, 200, 201, 202, 203**

予 習 2重積分 「数学」