微積分 III 演習

− (4) 関数の極限，連続性 −

担当：佐藤 弘康

例題 4.1. $\mathbf{R}$ 上で定義された関数 $f(x) = x^2$ について

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

を証明せよ．

解. $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ とは「任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|x - a| < \delta \text{ ならば } |f(a) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つような $\delta > 0$ が存在すること」である．論理記号を使えば

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(a) - \alpha| < \varepsilon.$$

したがって，勝手にとった ε に対して δ をどのようにとればよいかが問題である．

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| =& |(x-1)(x+1)| = |x-1||x+1| \\ =& |x-1||(x-1)+2| \leq |x-1|(|x-1|+2). \end{aligned}$$

ここで，$|x - 1| < \delta$ ならば，$|x^2 - 1| < \delta(\delta + 2)$．したがって，$|x^2 - 1| < \varepsilon$ となるためには，$\delta(\delta + 2) \leq \varepsilon$ となるように δ をとればよい．例えば $\delta = \sqrt{\varepsilon + 1} - 1$． □

問題 4.1. 次の関数の極限を求め，そのことを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$

例題 4.2. 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$(ただし $x > 0$) が連続関数であることを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ.

解. $a \in \mathbf{R}$ で関数 $f(x)$ が連続とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{4.1}$$

が成り立つ $\delta > 0$ が存在することだから，与えられた ε に対して δ をどう定めるか考えればよい.

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{ax}|x - a|.$$

i) $\underline{x > a}$ のとき，$\dfrac{1}{ax} < \dfrac{1}{a^2}$ だから，$|x - a| < a^2\varepsilon$ となるように x をとればよい.

ii) $\underline{x < a}$ のとき，$a < 2x$ を仮定しよう（つまり，$a - x < \dfrac{a}{2}$ を満たす x に限定して考える）．このとき，$|x - a| < \dfrac{a^2\varepsilon}{2}$ とすればよい.

以上のことから，勝手な ε に対して，$\delta = \min\left\{a^2\varepsilon, \dfrac{a}{2}, \dfrac{a^2\varepsilon}{2}\right\}$ とおけば，(4.1) を満たすことがわかる.

任意の a と ε に対して上のような δ が選べるので，関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は各点 $x > 0$ で連続である. □

問題 4.2. 次の関数 $f(x)$ が連続関数であることを示せ.

(1) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (x \geq 0)$
(2) $f(x) = x^2$ $\quad (x \in \mathbf{R})$

問題 4.3. 連続な関数 $f(x)$ が閉区間 $[0, 1]$ 上で $0 \leq f(x) \leq 1$ を満たすならば，$x_0 = f(x_0)$ を満たす $x_0 \in [0, 1]$ が少なくとも 1 つ存在することを示せ.

ヒント： 中間値の定理を用いる.

問題 4.4. ある区間で定義された 2 つの連続関数 $f(x)$, $g(x)$ が，すべての有理数 x に対して $f(x) = g(x)$ ならば，その区間全体で $f(x) = g(x)$ であることを示せ.

ヒント： 区間 I で定義された関数 $f(x)$ が連続であるための必要十分条件は，任意の収束列 $\{a_n\}$（ただしその極限を a も I に含まれる）に対して，$\{f(a_n)\}$ も収束しその極限は $f(a)$ である.