Hadamard 多様体上の Poisson 核と重心の幾何学 *

佐藤 弘康 †（日本工業大学 工学部 共通教育系）

1 Poisson 核と確率測度の空間の幾何

n 次元 Hadamard 多様体 (X^n, g) の理想境界*1 ∂X には，$X \cup \partial X$ が n 次元円板 D^n と同相となるような位相*2がはいり，与えられた境界条件を満たす調和関数を求める問題（無限遠 Dirichlet 問題）を考えることができる．つまり，$f \in C^0(\partial X)$ に対し，

$$u = f \text{ on } \partial X \qquad \text{and} \qquad \Delta u = 0 \text{ on } X \tag{1}$$

を満たす関数 u を求める問題である．この微分方程式の基本解 $P(x,\theta)$ を X 上の **Poisson 核** という．つまり，$f(\theta)$ と $P(x,\theta)$ との畳み込み

$$u(x) = \int_{\theta \in \partial X} f(\theta)\, P(x,\theta)\, d\lambda_0(\theta)$$

が (1) の解となるような関数である．ここで，λ_0 は，X の基点 o を固定し，∂X を接空間 T_oX 内の原点を中心とする単位球面と同一視したときの標準体積要素（確率測度）である．Poisson 核の代わりに，測度をこめて $\mu_x := P(x,\theta)\,\lambda_0$ を考えてもよい．これを調和測度とよぶ*3．

X が Poisson 核をもつとき，$x \in X$ に対して，調和測度 $\mu_x = P(x,\theta)\,\lambda_0$ を対応させる写像 $\Theta : X \to \mathscr{P}^+(\partial X)$ を定義することができる．ここで，$\mathscr{P}^+(\partial X)$ は λ_0 に絶対連

部分多様体幾何とリー群作用 2015 （2015 年 9 月 7 日, 8 日, 東京理科大学森戸記念館）講演予稿.

* 本研究は伊藤光弘氏（筑波大学名誉教授）との共同研究に基づく．

† E-mail : hiroyasu@nit.ac.jp

*1 X^n 上の弧長パラメーターをもつ半開測地線全体の集合を同値関係「$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ は $t > 0$ で有界」による同値類全体の集合を X の**理想境界**とよび，∂X と書く．∂X は $(n-1)$ 次元球面に同相である．

*2 錐位相． [1] を参照.

*3 任意の Hadamard 多様体において，Poisson 核が存在するとは限らない．曲率が真に負で有界ならば，Poisson 核（調和測度）が存在することがわかっている．詳細は [13] を参照.

続な正値確率測度の空間

$$\mathscr{P}^+(\partial X) := \left\{ \mu \;\middle|\; \int_{\partial X} d\mu = 1,\ \mu \ll \lambda_0,\ \frac{d\mu}{d\lambda_0} > 0 \right\}$$

である．この写像 Θ を X 上の **Poisson 核写像**とよぶ．

$\mathscr{P}^+(\partial X)$ には，統計学における Fisher 情報量や Fisher 情報行列に由来する Riemann 計量 G を，次のように定義することができる．$\mathscr{P}^+(\partial X)$ の接空間は $\int_{\partial X} d\tau = 0$ を満たす符号付き測度の全体とみなすことができ，$\tau_1, \tau_2 \in T_\mu \mathscr{P}^+(\partial X)$ に対し，

$$G_\mu(\tau_1, \tau_2) = \int_{\theta \in \partial X} \frac{d\tau_1}{d\mu}(\theta) \, \frac{d\tau_2}{d\mu}(\theta) \, d\mu(\theta)$$

によって内積 G_μ を定める．$\mu \mapsto G_\mu$ を $\mathscr{P}^+(\partial X)$ 上の **Fisher 情報計量**[*4]とよぶ．

(X, g) が Damek-Ricci 空間[*5]のとき，Poisson 核写像 $\Theta : (X, g) \to (\mathscr{P}^+(\partial X), G)$ は相似的かつ調和的（つまり，極小埋め込み）であることがわかっている [8]．この事実の証明においては，Damek-Ricci 空間が等質空間であることと，Poisson 核が Busemann 関数[*6]の指数関数として

$$P(x, \theta) = \exp\{-\rho \, B_\theta(x)\} \tag{2}$$

と表されること[*7]が本質的である．ここで，ρ は (X, g) の体積エントロピー

$$\rho = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}\,(B(p; r))$$

である．実際に，$\Theta : (X, g) \to (\mathscr{P}^+(\partial X), G)$ が相似的かつ調和的ならば，X 上の Poisson 核は，(2) で与えられることがわかっている [9]．さらに，この事実から (X, g) は漸近的調和多様体[*8]であり，可視公理[*9]を満たすことがわかる．

[*4] この計量は，測度空間 $(M, \mathfrak{A}, \lambda)$ に対して $\mathscr{P}^+(M)$ 上で定義され，底空間 M の幾何に関係なく，断面曲率 $\frac{1}{4}$ の定曲率計量である．また，測地的に完備ではない．詳細は [5] を参照．

[*5] H-type 群と呼ばれる冪零群を 1 次元拡張した可解 Lie 群に，ある左不変計量をいれた空間．階数 1 非コンパクト型対称空間を含む Hadamard 多様体のクラスである．詳細は [2] を参照．

[*6] 測地線 γ に対して定まる X 上の関数 $b_\gamma(x) = \lim_{t\to\infty} (d(\gamma(t), x) - t)$ を Busemann 関数という ([12] を参照)．Hadamard 多様体の場合，基点 $o \in X$ を固定すると，$\theta \in \partial X$ に対し，$\gamma_\theta(0) = o, \gamma(\infty) = \theta$ を満たす測地線 $\gamma_\theta(t)$ が唯一つ定まる．この測地線が定める Busemann 関数を B_θ と書く．

[*7] Poisson 核が (2) と表されるとき，「X は **Busemann-Poisson 核**を許容する」とよぶことにする．

[*8] Busemann 関数のすべての等位超曲面（ホロ球面）が平均曲率一定で，すべて共通の値をとるとき，X を**漸近的調和多様体**という．空間の性質については [6, 11] を参照．

[*9] 理想境界の任意の 2 点 θ_1, θ_2 に対し，$\gamma(\infty) = \theta_1$，$\gamma(-\infty) = \theta_2$ を満たす X 上の測地線 γ が存在するとき，(X, g) は**可視公理**を満たすという．

「Poisson 核写像 Θ が相似的かつ調和的（つまり，極小埋め込み）となるような空間はどのような空間か（Damek-Ricci 空間の限るのか)」を明らかにするのが本研究の目標である．

2　Hadamard 多様体の重心写像

前節で述べた問題を考える上で道具の一つになり得ると考えているのが，重心写像である．$\mu \in \mathscr{P}^+(\partial X)$ に対して定まる X 上の関数

$$\mathbb{B}_\mu : X \to \mathbb{R};\ x \mapsto \int_{\theta\in\partial X} B_\theta(x)\, d\mu(\theta) \tag{3}$$

の臨界点を μ の**重心**とよぶ．空間 X が

(i) 可視公理を満たし，
(ii) 任意の $x \in X$ に対し，∂X 上の関数 $\theta \mapsto B_\theta(x)$ が連続

ならば，任意の $\mu \in \mathscr{P}^+(\partial X)$ に対して，その重心が存在することが保証される．さらに

(iii) X 上の 2 形式 $\displaystyle\int_{\theta\in\partial X} \nabla dB_\theta(\,\cdot\,,\cdot\,)\, d\mu_0(\theta)$ が正定値となるような $\mu_0 \in \mathscr{P}^+(\partial X)$ が少なくとも 1 つ存在

すれば，任意の $\mu \in \mathscr{P}^+(\partial X)$ に対してその重心はただ 1 つ定まる．この条件の下，$\mu \in \mathscr{P}^+(\partial X)$ に対してその重心 $\mathrm{bar}(\mu)$ を対応させる写像 $\mathrm{bar} : \mathscr{P}^+(\partial X) \to X$ を**重心写像**[*10]とよぶ．

重心写像を用いた既知の結果としては，E. Douady ら [4] や G. Besson ら [3] の研究がある．E. Douady らは，円周 S^1 の同相変換を円板 D^2 内の同相変換に拡張する際に重心写像を用いており，G. Besson らは階数 1 非コンパクト型対称空間の剛性定理の証明において，等長写像を構成する際に重心写像を用いている．

本講演では，これまでに明らかになっている重心写像の性質，特にファイバー空間としての重心写像の性質について述べる（[7, 10] を参照)．

[*10] 実際には，関数 $\mathbb{B}_\mu : X \to \mathbb{R}$ の最小値を与える点が μ の重心である．

参考文献

[1] W. Ballmann, M. Gromov, M. and S. Viktor, Manifolds of nonpositive curvature, Progr. Math. **61**, Birkhäuser, Boston, MA, 1985.

[2] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces, Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[3] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, *Entropes et Rigidités des Espaces Localement Symétriques de Courbure Strictement Négative*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 731-799.

[4] E. Douady and C. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math. **157** (1986), 23-48.

[5] T. Friedrich, *Die Fisher-Information und symplektische Strukturen.* Math. Nach. **153** (1991), 273-296.

[6] J. Heber, *On harmonic and asymptotically harmonic homogeneous spaces*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 869-890.

[7] 伊藤光弘, 重心写像の Fisher 情報幾何, 連続講演記録, 東京理科大学 (2015).

[8] M. Itoh and H. Satoh, *Information geometry of Poisson kernels on Damek-Ricci spaces*, Tokyo J. Math. **33** (2010), 129-144.

[9] M. Itoh and H. Satoh, *Fisher information geometry, Poisson kernel and asymptotical harmonicity*, Differential Geom. Appl. **29** (2011), S107-S115.

[10] M. Itoh and H. Satoh, *Geometry of Fisher information metric and the barycenter map*, Entropy **17** (2015), 1814-1849.

[11] G. Knieper and N. Peyerimhoff, *Noncompact asymptotically harmonic manifolds*, arXiv:1307.0629v2.

[12] 酒井 隆, リーマン幾何学, 数学選書 11, 裳華房, 1992.

[13] R. Schoen and S.-T. Yau, Lectures on Differential Geometry, Intern. Press, Boston, 1994.