

数学クォータ科目「応用解析」第 1 回 / ベクトル解析 (1)

ベクトル関数の微分と積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

イントロダクション)「応用解析」について

この科目では次の3つのテーマについて学習する。

- (1) ベクトル解析
- (2) 複素関数論 (または, 複素解析)
- (3) 微分方程式

- 解析学 \equiv 微分積分学

つまり, 3つとも「微分積分学」と関連。

- 「微分積分学」の対象は 関数。これまで扱っていた関数は,
 - 1変数関数 $y = f(x)$ (「基礎数学 I」「II」または, 高校数学)
変数 x の値を定めると, 変数 y の値がただひとつ決まる。
 - 2変数関数 $z = f(x, y)$ (「数学」)
変数 x, y の値を定めると, 変数 z の値がただひとつ決まる。

イントロダクション) 「応用解析」について

この科目では次の3つのテーマについて学習する。

- (1) ベクトル解析
- (2) 複素関数論 (または, 複素解析)
- (3) 微分方程式

- 解析学 \equiv 微分積分学

つまり, 3つとも「微分積分学」と関連。

- 「微分積分学」の対象は関数。これまで扱っていた関数は, 実数値関数
 - 1変数関数 $y = f(x)$ (「基礎数学 I」「II」または, 高校数学)
変数 x の値を定めると, 変数 y の値がただひとつ決まる。
 - 2変数関数 $z = f(x, y)$ (「数学」)
変数 x, y の値を定めると, 変数 z の値がただひとつ決まる。

イントロダクション)「応用解析」について

この科目では次の関数を扱う．

(1) ベクトル解析

- (1 変数) ベクトル関数
- スカラー場
- ベクトル場
- (2 変数) ベクトル関数

(2) 複素関数論

- 複素関数 (複素 1 変数複素数値関数)
- 複素平面内の曲線 (実 1 変数複素数値関数)

(3) 微分方程式

- 1 変数関数

イントロダクション)「応用解析」について

この科目では次の関数を扱う．

(1) ベクトル解析

- (1 変数) ベクトル関数 : 1 変数関数の三つ組
- スカラー場 : 3 変数関数
- ベクトル場 : 3 変数関数の三つ組
- (2 変数) ベクトル関数 : 2 変数関数の三つ組

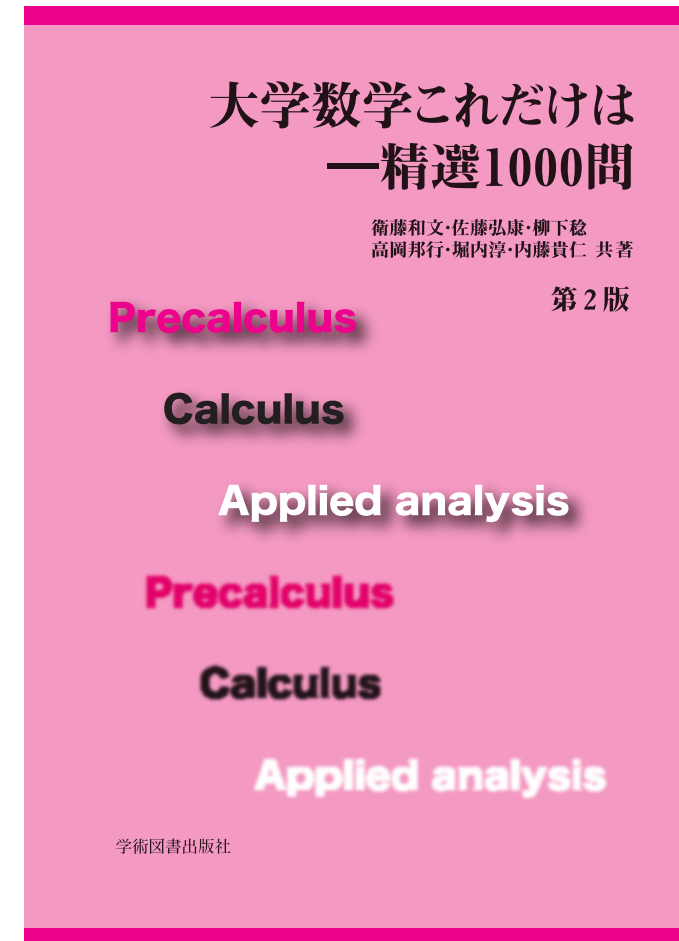
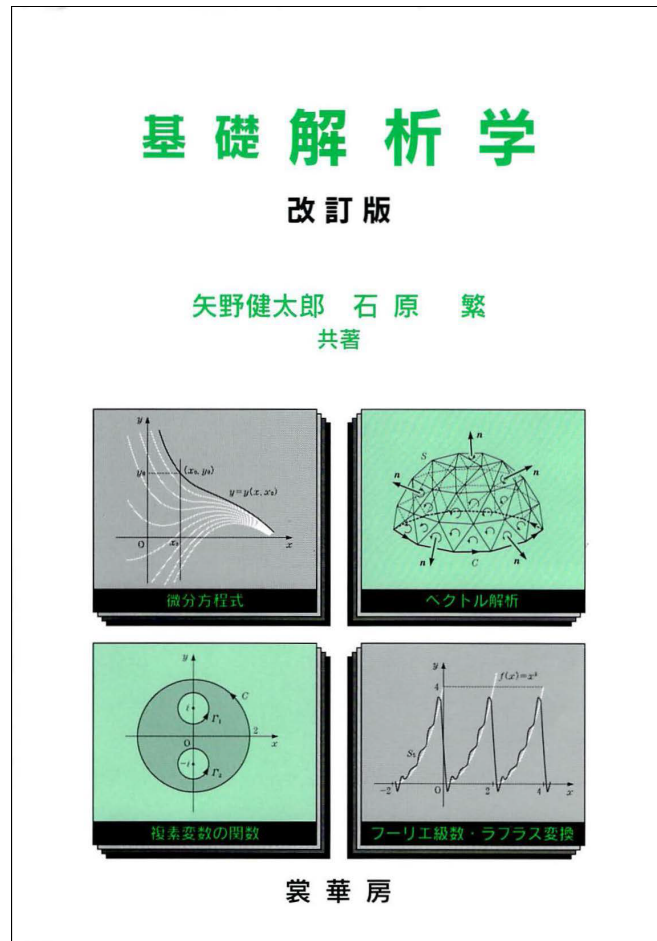
(2) 複素関数論

- 複素関数 (複素 1 変数複素数値関数) : 2 変数関数の組
- 複素平面内の曲線 (実 1 変数複素数値関数) : 1 変数関数の組

(3) 微分方程式

- 1 変数関数

「応用解析」の教科書・参考書



今回の授業で理解してほしいこと

- (1変数) ベクトル値関数の
 - 概念とその幾何学的な解釈
 - 微分の計算と微分の幾何学的な解釈
 - 不定積分と定積分の計算

【復習 1】（空間）ベクトルとは

- 有向線分 線分の両端点に「始点」と「終点」の情報を付与したモノ。
 - 2つの有向線分が平行移動により始点と終点を重ねるならば, それらを同じモノとみなす. これを **ベクトル** とよぶ.
- ベクトル A に対し, $A = \overrightarrow{OP}$ となるような点 $P(l, m, n)$ がひとつ定まる.
※始点が原点 O になるように A を平行移動したときの終点が P .
- ベクトルの表し方
 - 成分表示: P の座標で A を表したもの. $A = (l, m, n)$
 - 基本ベクトル表示: ベクトルの線形演算 (和とスカラー倍) の性質から, $A = li + mj + nk$ と書ける.
- 上の対応により, 以後は点とベクトルを同一視して扱うことがある.

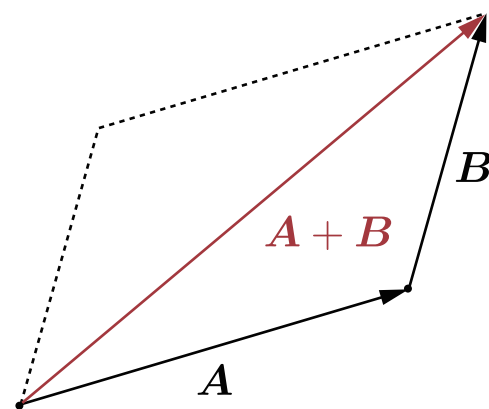
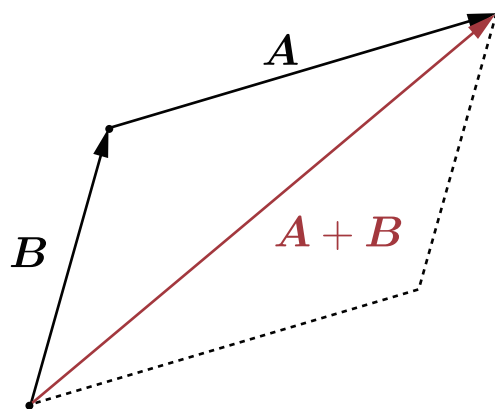
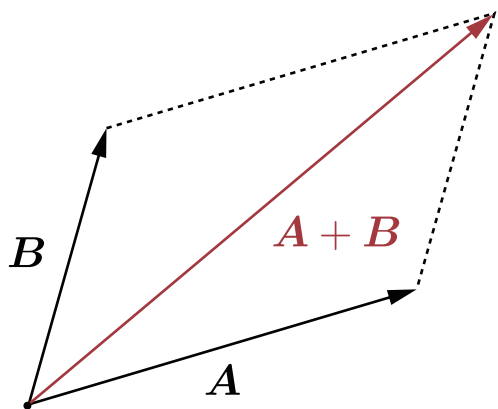
$$P(l, m, n) \leftrightarrow A = (l, m, n) \leftrightarrow A = li + mj + nk$$

【復習 2】 ベクトルの大きさ，線形演算

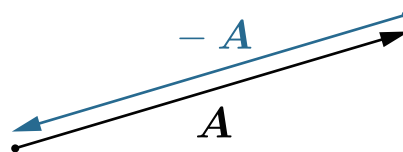
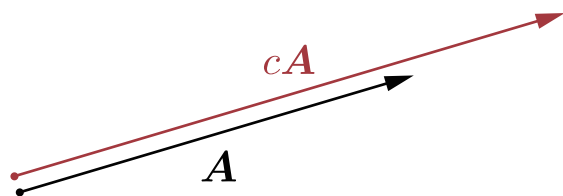
- ベクトル $A = li + mj + nk$ の**大きさ**； $|A| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$

※線分としての長さのこと.

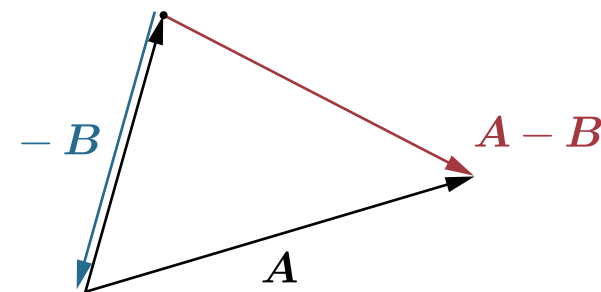
- 和** $A + B$



- スカラー倍** cA



- 差** $A - B = A + (-B)$



(1変数) ベクトル関数

定義

変数 t の値を決めると、その値に応じてベクトル $A(t)$ がただ一つ定まるとき、 $A(t)$ を独立変数 t のベクトル関数という。

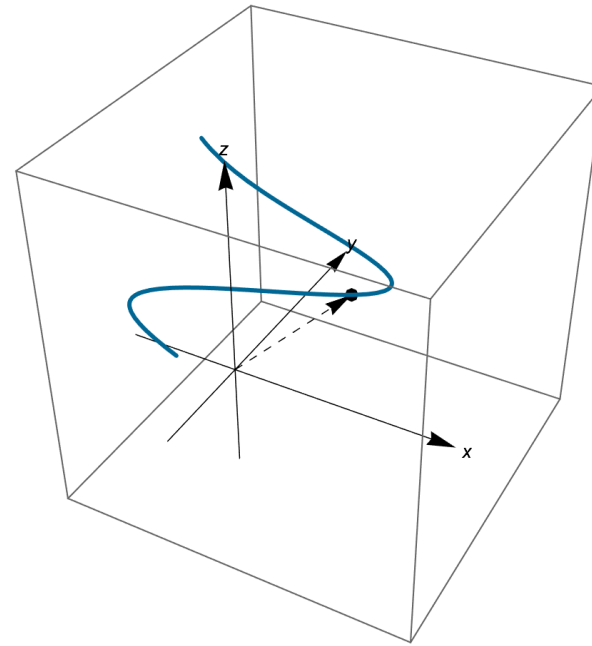
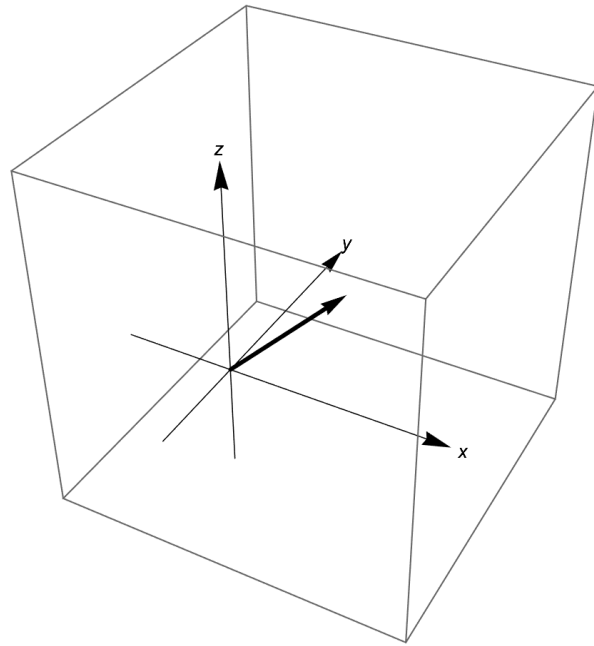
- $A(t)$ はベクトルなので、基本ベクトル表示が得られる；

$$A(t) = A_x(t) \mathbf{i} + A_y(t) \mathbf{j} + A_z(t) \mathbf{k}$$

- つまり、ベクトル関数 $A(t)$ を考えることは、
3つの1変数関数の組 $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ を考えることと同じである。
- $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ のことをベクトル関数 $A(t)$ の成分とよぶ。

(1変数) ベクトル関数

例1) $A(t) = \sin 3t \, i + \cos t \, j + \frac{1}{t+1} \, k$



- ベクトル関数 $A(t)$ の始点を定点 O に固定すれば, $A(t)$ の終点 P は一般に1つの曲線を描く. この曲線を $A(t)$ の **ホドグラフ** という.

(1変数) ベクトル関数

例2) 成分が独立変数 t の1次関数のベクトル関数；

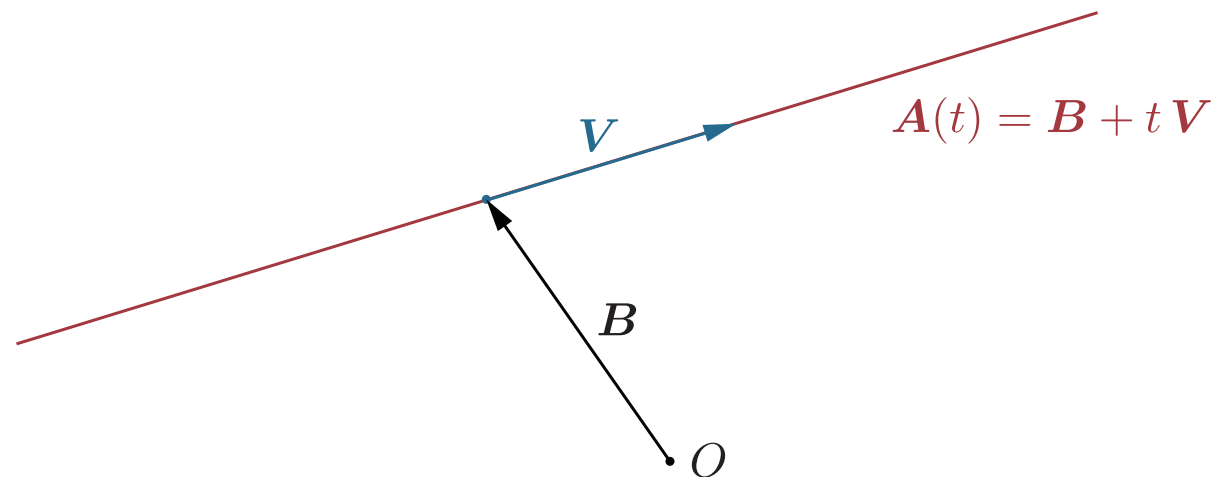
$$A(t) = (b_1 + v_1 t) \mathbf{i} + (b_2 + v_2 t) \mathbf{j} + (b_3 + v_3 t) \mathbf{k}$$

- これは

$$A(t) = (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) + t (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}) = \mathbf{B} + t \mathbf{V}$$

と書ける. ただし, $\mathbf{B} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{V} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$.

- このベクトル関数のホドグラフは, 直線である.



(1変数) ベクトル関数の微分 (導関数)

定義

ベクトル関数 $A(t) = A_x(t) \mathbf{i} + A_y(t) \mathbf{j} + A_z(t) \mathbf{k}$ に対し,

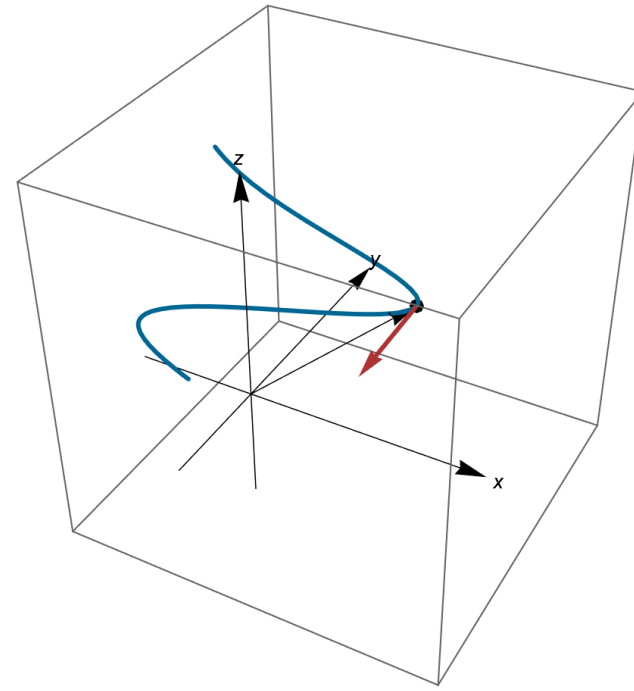
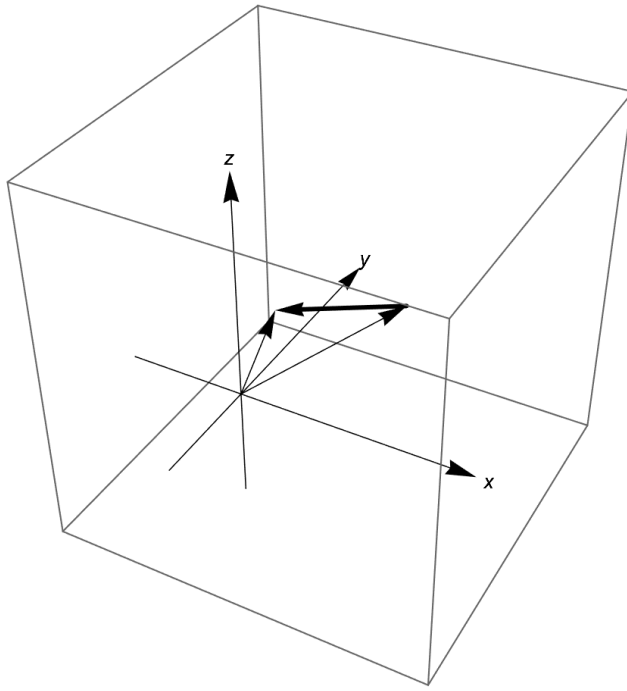
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h}$$

を $A(t)$ の微分または導関数とよび, $A'(t)$ や $\frac{dA}{dt}(t)$ と表す.

計算方法 各成分を微分すればよい.

$$\begin{aligned} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} &= \frac{A_x(t+h) - A_x(t)}{h} \mathbf{i} + \frac{A_y(t+h) - A_y(t)}{h} \mathbf{j} + \frac{A_z(t+h) - A_z(t)}{h} \mathbf{k} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} A'_x(t) \mathbf{i} + A'_y(t) \mathbf{j} + A'_z(t) \mathbf{k} \end{aligned}$$

(1変数) ベクトル関数の微分の幾何学的な解釈



- $A'(t)$ はベクトル関数 $A(t)$ の ホドグラフに接するベクトル である.

(1変数) ベクトル関数の積分

$A(t) = A_x(t) \mathbf{i} + A_y(t) \mathbf{j} + A_z(t) \mathbf{k}$ をベクトル関数とする.

- $D(t)$ の導関数が $A(t)$ であるとき, $D(t)$ を $A(t)$ の不定積分といい, 次のような記号で表す ;

$$D(t) = \int A(t) dt$$

- 実際の計算は $\int A(t) dt = \int A_x(t) dt \mathbf{i} + \int A_y(t) dt \mathbf{j} + \int A_z(t) dt \mathbf{k}$
- $A(t)$ の定義域内の区間 $a \leq t \leq b$ に対して, 1変数関数の場合と同様にしてリーマン和の極限として, 定積分 $\int_a^b A(t) dt$ が定義できる.
- 実際の計算は $\int_a^b A(t) dt = \int_a^b A_x(t) dt \mathbf{i} + \int_a^b A_y(t) dt \mathbf{j} + \int_a^b A_z(t) dt \mathbf{k}$

まとめと復習（と予習）

- ベクトル関数とは何ですか？
 - ベクトル関数のホドグラフとは何ですか？
 - ベクトル関数の微分（導関数）はどのように計算しますか？
 - ベクトル関数の微分（導関数）はどのようなベクトルですか？
 - ベクトル関数の不定積分はどのように計算しますか？
 - ベクトル関数の定積分はどのように計算しますか？

教科書 p.73～77

問題集 187, 188, 189

予 習 ベクトルの内積 「基礎数学Ⅰ」, 合成関数の微分 「数学」