数学クォータ科目「数学」第２回 (3/3)

２変数関数のべき級数展開

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】１変数関数のマクローリン展開

マクローリン展開

関数 $f(x)$ が 何度でも微分可能ならば, ある区間で

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots$$

と表せる.

今回の目標

- ２変数関数 $f(x, y)$ を x, y のべき級数で表す.

（１変数関数のマクローリン展開と合成関数の微分を利用する）

２変数関数のべき級数展開（考え方）

(1) ２変数関数 $f(x, y)$ と $x(t) = a + ht,\ y(t) = b + kt$ との合成関数

$$F(t) := f(a + ht, b + kt)$$

を考える（a, b, h, k は定数）.

(2) 独立変数 t の１変数関数 $F(t)$ をマクローリン展開する;

$$F(t) = F(0) + F'(0)\,t + \frac{F''(0)}{2}\,t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}\,t^n + \cdots$$

(3) $t = 1$ を代入する;

$$\underbrace{\boxed{F(1)}}_{f(a+h,\,b+k)} = \underbrace{\boxed{F(0)}}_{f(a,\,b)} + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

$\boxed{\text{問}}$ $F^{(n)}(0)$ はどのように表される？ → $\boxed{\text{答}}$ 点 (a, b) における偏微分係数

合成関数 $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ の微分係数 $F'(0)$

合成関数の微分（p.59 定理 2.）

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)$$

- 上の公式を $F(t)$ に適用する.

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(a+ht, b+kt) \cdot (a+ht)' + f_y(a+ht, b+kt) \cdot (b+kt)' \\ &= f_x(a+ht, b+kt)\, h + f_y(a+ht, b+kt)\, k \end{aligned}$$

- したがって, $F'(0) = f_x(a,b)\, h + f_y(a,b)\, k$.

合成関数 $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ の２次微分係数 $F''(0)$

合成関数の微分（p.59 定理 2.）

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)$$

- 上の公式を $F'(t) = f_x(a+ht, b+kt)\, h + f_y(a+ht, b+kt)\, k$ に適用する.

$$\begin{aligned}
F''(t) =& \frac{d}{dt} F(t') = \frac{d}{dt}\{f_x(a+ht, b+kt)\}\, h + \frac{d}{dt}\{f_y(a+ht, b+kt)\}\, k \\
=& \{f_{xx}(a+ht, b+kt)\, h + \boxed{f_{xy}(a+ht, b+kt)}\, k\}\, h \\
&+ \{\boxed{f_{yx}(a+ht, b+kt)}\, h + f_{yy}(a+ht, b+kt)\, k\}\, k \\
=& f_{xx}(a+ht, b+kt)\, h^2 + 2 f_{xy}(a+ht, b+kt)\, hk + f_{yy}(a+ht, b+kt)\, k^2
\end{aligned}$$

- したがって, $F''(0) = f_{xx}(a,b)\, h^2 + 2 f_{xy}(a,b)\, hk + f_{yy}(a,b)\, k^2$.

合成関数 $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ の高次微分係数

- これまでの結果をまとめると

$$F'(0) = f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k$$
$$F''(0) = f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2$$

$\longrightarrow$ $F''(0)$ の右辺において，２次偏導関数の係数に着目すると，
$(h+k)^2$ の各項であることに気づく．

- 実際に，$F'''(0)$ を計算すると，

$$F'''(0) = f_{xxx}(a,b)\,h^3 + 3f_{xxy}(a,b)\,h^2k + 3f_{xyy}(a,b)\,hk^2 + f_{yyy}(a,b)\,k^3$$

となり，３次偏導関数の係数は，$(h+k)^3$ の各項に等しいことがわかる．

- 一般には，次のように書ける；

↓二項係数 ${}_nC_j = \dfrac{n!}{j!\,(n-j)!}$

$$F^{(n)}(0) = \boxed{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n} f(a,b) = \sum_{j=0}^{n} \boxed{{}_nC_j}\, h^{n-j}k^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)$$

2変数関数のべき級数展開

- p.2 の式

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{\boxed{F^{(n)}(0)}}{n!} + \cdots$$

の各 $F^{(n)}(0)$ に, 前のページの結果をあてはめると

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) =& f(a,b) + f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2\right) + \\ &+ \cdots \frac{1}{n!}\boxed{\sum_{j=0}^{n} {}_nC_j h^{n-j}k^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j} f(a,b)} + \cdots \end{aligned}$$

２変数関数のテイラー展開

$$
\begin{aligned}
f(\boxed{a+h}, \boxed{b+k}) =& f(a,b) + f_x(a,b)\,\boxed{h} + f_y(a,b)\,\boxed{k} \\
&+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)\,\boxed{h^2} + 2f_{xy}(a,b)\,\boxed{h}\,\boxed{k} + f_{yy}(a,b)\,\boxed{k^2}\right) \\
&+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} {}_nC_j\,\boxed{h^{n-j}}\,\boxed{k^j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j} f(a,b) + \cdots
\end{aligned}
$$

- $a+h=x, b+k=y$（つまり, $h=x-a, k=y-b$） とおくと,

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& f(a,b) + f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-b) \\
&+ \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(a,b)\,(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)\,(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)\,(y-b)^2\right\} \\
&+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} {}_nC_j(x-a)^{n-j}\,(y-b)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j} f(a,b) + \cdots
\end{aligned}
$$

- これを, 点 (a,b) における $f(x,y)$ のテイラー展開という.

2変数関数のマクローリン展開

- 特に, 原点 $(0,0)$ におけるテイラー展開

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y \\
&+ \frac{1}{2}\left\{ f_{xx}(0,0)\,x^2 + 2f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\,y^2 \right\} + \\
&+ \cdots \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} {}_nC_j x^{n-j}\, y^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-j} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j} f(0,0) + \cdots
\end{aligned}
$$

  を $f(x,y)$ のマクローリン展開という.

- $f(x,y)$ のマクローリン展開を求めるには,
  - 原点 $(0,0)$ における関数値 $f(0,0)$ および,
  - （高次）偏微分係数 $f_x(0,0), f_y(0,0), f_{xx}(0,0), \ldots$

  を求めればよい.