微積分 II 演習

－ 偏微分（課題：10/10 まで） －

担当：佐藤 弘康

問題 7.1.

$$u(x,y,t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^2 \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{4t}\right\}, \quad (t>0, (x,y)\in \mathbf{R}^2)$$

は $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ を満たすことを示せ．ただし，$\exp\{x\} = e^x$.

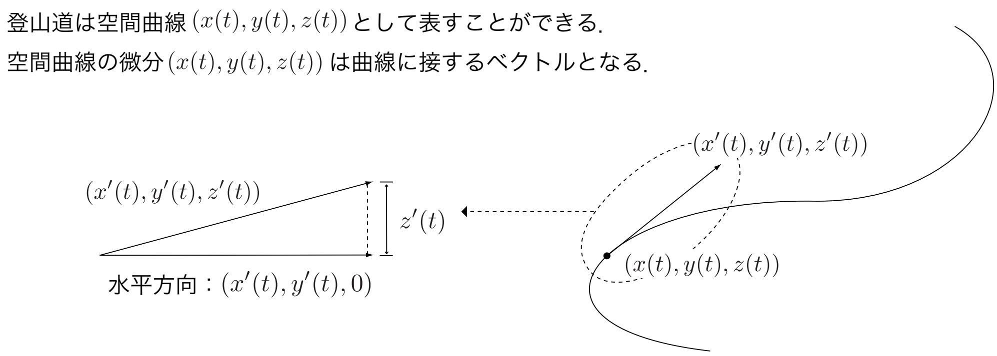
問題 7.2. 水平面を xy-平面とし，鉛直方向を z 軸として，山の表面が $z = f(x,y)$ で表されているとする．地図の上で，この山の登山道が $x = x(t)$，$y = y(t)$ で表されるとすれば，この道の勾配は

$$\frac{f_x(x(t),y(t))\,x'(t) + f_y(x(t),y(t))\,y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

で与えられることを示せ．ただし $f(x,y)$ は全微分可能，$x(t), y(t)$ は微分可能とする．

ここで，勾配 (**grade** or **slope**) とは傾斜面の傾きを示す度合いのこと．

水平方向の変化にたいする水平面からの距離の比をいう．曲線の場合，接線の傾きと考えてよい．



問題 7.3. $f(x,y)$ を領域 D で定義された C^2 級関数とする（つまり，$f(x,y)$ は D で連続かつ，2 階までの偏導関数が定義可能でそれも D で連続）．このとき，

$$f\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

を満たすならば，$f(x,y) = g(x)\,h(y)$ とかけることを示せ．ただし，$f(x,y)$ は D 上で 0 でないとする [ヒント：一学期末試験の問 3 (2)].