# 微積分 II 演習

— 第 6 回 —

担当：佐藤 弘康

**未発表問題:**2.1, 2.3(2), 2.5, 2.10(4), 2.11(2,5), 2.12〜2.14, 3.1, 3.3〜3.8, 4.1, 4.2(3), 4.3, 4.4(3,4,6,7), 4.5, 4.6, 5.1(2〜7)〜5.3

## □ 前回の復習と補捉

◇ **問題 4.1 の解**　(1) $\mathbf{N}$ の集積点全体のなす集合 $\mathbf{N}'$ が空集合であることを示す．

まず，$p<1$ のとき，$0<\varepsilon<1-p$ を満たす $\varepsilon$ を適当にとれば，$(U_\varepsilon(p)\diagdown\{p\})\cap\mathbf{N}=\emptyset$ となる．$p\geq 1$ ならば，$n_0\leq p<n_0+1$ を満たす $n_0\in\mathbf{N}$ が必ず存在する．このとき，$0<\varepsilon<\min\{\{p-n_0,n_0+1-p\}\diagdown\{0\}\}$ を満たす $\varepsilon$ を適当にとれば，$(U_\varepsilon(p)\diagdown\{p\})\cap\mathbf{N}=\emptyset$ となる．以上のことから，任意の $p\in\mathbf{R}$ は $\mathbf{N}$ の集積点になり得ないことがわかる．したがって，$Cl(\mathbf{N})=\mathbf{N}$.

**「$\forall p\geq 1,\ \exists n_0\in\mathrm{N},\ n_0\leq p<n_0+1$」の証明．** 与えられた $p\in\mathbf{R}$ に対し，$\{n\in\mathbf{N}|n\leq p\}$ とおくと，この集合は上に有界だから，上限 (この場合は最大値)$n_0\in\mathbf{N}$ が存在する．$n_0$ が最大値だから，$n_0+1$ は $p$ より大きい．以上のことから，$n_0\leq p<n_0+1$. □

(2) $A=\{q\in\mathbf{Q}|q^2\leq 2\}$ とおく．有理数の稠密性より，任意の $p\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ が $A$ の集積点であることは明らかである．$\sqrt{2}$ は $A$ の下限であるから，任意の $x>\sqrt{2}$ に対し，ある $\varepsilon_x$ が存在し $U_{\varepsilon_x}(x)\cap A=\emptyset$ となる．したがって，$x$ は $A$ の集積点ではない．$y<\sqrt{2}$ についても同様である．以上のことから，$A$ の集積点全体の集合は $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ となり，$Cl(A)=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ である．

(4) $Cl([-1,1))=[-1,1]$．考え方は (2) と同じ．

◇ **問題 4.3 の解**　(1) 与えられた $\varepsilon>0$ に対し，$\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$ とおく．このとき，$|x-a|<\delta$ $\left(\text{すなわち},|x-a|<1\text{ かつ }|x-a|<\frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right)$ ならば，

$$\begin{aligned}|x^2-a^2|&=|x+a||x-a|=|(x-a)+2a||x-a|\\&\leq(|x-a|+2|a|)|x-a|<(1+2|a|)|x-a|\\&<(1+2|a|)\cdot\frac{\varepsilon}{1+2|a|}=\varepsilon\end{aligned}\tag{6.1}$$

が成り立つ．不等式 (6.1) は任意の $a\in\mathbf{R}$ について成り立つので，$f(x)=x^2$ は連続関数である．

(2) $a > 0$ に対して，$\delta = \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{a^2\varepsilon}{2}\right\}$ とおき，$|x-a| < \delta$ を仮定する．
$|x-a| < \frac{a}{2}$ より，$\frac{1}{ax} < \frac{2}{a^2}$ を得る．したがって，

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{xa} < \frac{2}{a^2} \cdot |x-a| < \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となり，$f(x) = \frac{1}{x}$ は点 $a$ において連続であることがわかる．上の議論は任意の $a > 0$ に対して成り立つので，$f(x)$ は連続関数である．

(5) $a > 0$ に対して，

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

となる．したがって，与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，$|x-a| < \delta = \sqrt{a}\varepsilon$ ならば，$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ だから，関数 $f(x) = \sqrt{x}$ は $a$ において連続である．また，$x < \varepsilon^2$ ならば，$\sqrt{x} < \varepsilon$ だから，$f(x)$ は 0 においても連続である．

以上のことから，$f(x)$ は連続関数である．

**注意．** (5) において，定数 $\delta$ は $a$ に依存して決まるように思われるが，$a$ に関係なく $\delta = \varepsilon^2$ に対し，

$$|x-y| < \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon \tag{6.2}$$

が成り立つ (したがって，$f(x) = \sqrt{x}$ は一様連束である)．

(6.2) **の証明．** $x \geq \varepsilon^2$ または $y \geq \varepsilon^2$ ならば，$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \varepsilon$，すなわち $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ が成り立つ．したがって，

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} < \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

また，$0 < x, y < \varepsilon^2$ のときは，常に $|x-y| < \varepsilon^2$，$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$ が成り立つ． □

**□ レポート問題 (問題 2.4) の解説**　(2.3) 式を繰り返し使うと

$$|a_n - a_{n-1}| \leq c^{n-2}|a_2 - a_1|, \qquad (n \geq 2)$$

を得る．したがって，$m, n \in \mathbf{N}$ $(n < m)$ に対して，

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq (c^{m-2} + c^{m-3} + \ldots + c^{n-1})|a_2 - a_1| \\
&= \frac{c^{n-1}(1 - c^{m-n})}{1-c} \cdot |a_2 - a_1| \\
&< \frac{c^{n-1}}{1-c} \cdot |a_2 - a_1|
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$0 \leq c < 1$ より，数列 $\{\frac{c^{n-1}}{1-c} \cdot |a_2 - a_1|\}$ は 0 に収束するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ が存在し，$n \geq n_\varepsilon$ ならば $\frac{c^{n-1}}{1-c} \cdot |a_2 - a_1| < \varepsilon$ が成り立つ．したがて，任意の $m, n \geq n_\varepsilon$ に対して

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

となるので，$\{a_n\}$ は Caushy 列である．

## □ 未発表問題のヒント

◇ **問題 2.1**　(1) 下に有界な集合 $S$ に対し，集合 $S'$ を

$$S' = \{(-s) | s \in S\}$$

と定めると，$S'$ は上に有界な集合となる．連続性公理より，$S'$ には上限 $l'$ が存在する．このとき，$l = (-l')$ が $S$ の下限となる．

(2)「ある $a, b > 0$ が存在し，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し，$na \leq b$ が成り立つ」と仮定する．このとき，集合 $A = \{na | n \in \mathbf{N}\}$ は上に有界だから，上限 $l$ が存在する．上限の定義から，任意に $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_\varepsilon a \in A$ が存在し，$l - \varepsilon < n_\varepsilon a$ を満たす．$\varepsilon$ としてある特別な数を選ぶと，$l$ が $A$ の上限であることに矛盾が生じる．

◇ **問題 2.5**　$m > n$ に対し，

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \ldots + \frac{1}{n+1} \right| \\ &> \left| \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m} \right| \\ &= \frac{m-n}{m} \end{aligned}$$

が成り立つ．$\{a_n\}$ が Cauchy 列でないことを示したいので,「勝手に与えた $n_\varepsilon$ に対し，十分大きな $m, n \in \mathbf{N}$ を適当にとれば，$|a_m - a_n| > \varepsilon$ となるような $\varepsilon > 0$ が存在する」ことを示したい．$\varepsilon$ を具体的に与えてみて，上の性質を満たす自然数 $n, m$ がとれるかどうか考察せよ．

◇ **問題 2.12**　問題 2.1(2) 同様,「任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し，$na \leq b$ を満たす $a, b > 0$ が存在する」と仮定する．ここで，$a_n = an$ とおくと，上の仮定から数列 $\{a_n\}$ は有界な単調増加数列となる．したがって，連続性の公理より，$\{a_n\}$ は収束する．ここから，何か矛盾が導き出せないか？(ヒント：Cauchy の条件)

◇ **問題 2.13**　$\{a_n\}$ を上に有界な単調増加数列とする．このとき集合 $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ を定めると，この集合は上に有界な集合であるから，上限 $a$ が存在する．この $a$ が数列 $\{a_n\}$ の極限になっている．

◇ **問題 2.14**　この問題は，Cauchy 列に関する次の補題から得られる：

**補題**　$\{a_n\}$ を Cauchy 列とする．このとき，

(1) $\{a_n\}$ は有界である．

(2) $\{a_n\}$ が収束する部分列を含めば，$\{a_n\}$ も収束する．

◇ **問題 3.3**　関数 $\sin^2 x$ が一様連続であることは例題 6 の解法を参照．関数 $\sin(x)^2$ が一様連続でないことの証明は問題 5.2 の結果を用いよ．

◇ **問題 3.4**　(3.1) 式を満たす関数を加法的関数とよぶ．加法的関数は

$$f(x) - f(y) = f(x - y)$$

を満たす．

◇ **問題 3.5**　「$|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$」が成り立っているとする．このとき，$x \in (a, b)$ は $I_1 = (a, a+\delta)$，$I_2 = [a+\delta, b-\delta]$，$I_3 = (b-\delta, b)$ のいずれかの区間に含まれる．一様連続の条件から，$x \in I_1$ または $x \in I_3$ のとき $f(x)$ は有界である．また，最大値の定理から，$f(x)$ を閉区間 $I_2$ 上に制限した関数は最大値，最小値をとるから，$f(x)$ は $I_2$ 上でも有界である．したがって，$f$ は開区間 $(a, b)$ 上で有界である．以上の議論は，$a < a+\delta < b-\delta < b$ の場合．$a, b, \delta$ の大きさで場合分けが必要である．

◇ **問題 3.6**　$g(x) = f(x) - x$ とおいて平均値の定理を適用する．

◇ **問題 3.7**　定理 5.13(教科書 I, p.164) を参照．

◇ **問題 3.8**　区間 $I$ が無限区間 $((a,\infty), [a,\infty), (-\infty,b), (-\infty,b], (-\infty,\infty))$，有界開区間 $((a,b))$，有界半開区間 $((a,b], [a,b))$ のとき，その上で最大値，最小値をとらない関数が存在するかどうか考察せよ．

◇ **問題 4.3**　区間縮小法を用いて集積点を求めることができる．

◇ **問題 4.4**　(4)「$x \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$」から「$|e^{-|x|} - e^{-|y|}| < |x-y|$」が成り立つことが証明できる．例えば，$x > y \geq 0$ ならば，

$$\begin{aligned}\left|e^{-|x|} - e^{-|y|}\right| &= e^{-|y|}\left|1 - e^{-|x|+|y|}\right| \\ &= e^{-y}\left|1 - e^{-(x-y)}\right| \\ &< x - y.\end{aligned}$$

それでは，他の場合は？