

問題 2.8. シュワルツの不等式 (教科書 p.9 例題 1.2 (1)) を証明したい. 以下の問いに答えよ.

- (1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) の根 (解) の種類と 2 次式の判別式の関係について簡単に説明せよ (復習せよ).

- (2) \mathbf{a}, \mathbf{b} を (平面) ベクトル, x をスカラーとする. $f(x) = \|x\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2$ とおくと,

$$f(x) = \|\mathbf{a}\|^2 x^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})x + \|\mathbf{b}\|^2$$

となることを示せ (プリント p.2 の内積の性質を用いてよい). また, $f(x)$ の判別式を計算せよ.

- (3) $f(x)$ の定義から $f(x) \geq 0$ を満たすが, このとき, $f(x)$ の判別式はどのような式を満たすか?