問題 4.1.

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -6 & -6 & -6 \\ -3 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

(3) $\Delta = \det(A) = -54$，$\Delta_0 = \det(A_0) = -972$

(4) $\det(A) \neq 0$ より，適当に座標の平行移動をすることにより，$\varphi(x, y) = 0$ は $a\bar{x}^2 + 2h\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2 + \bar{c} = 0$ と表すことができる．実際に $x = \bar{x} - \frac{1}{3}$, $y = \bar{y} - \frac{2}{3}$ とすると，$3\bar{x}^2 - 12\bar{x}\bar{y} - 6\bar{y}^2 + 18 = 0$ となる（定数項は $\det(A_0)/\det(A)$ に等しいことに注意)．

問題 4.2.

(1) $x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$
$\Delta = \frac{3}{4} \neq 0$ であるから，有心 2 次曲線である．実際に，$x = \bar{x} - 2$，$y = \bar{y} - 2$ と座標変換すると，$\bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 - 5 = 0$ となる．

(2) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 5x - 10y + 5 = 0$
$\Delta = 0$ であるから，無心 2 次曲線である．実際に，$\varphi(x, y) = 16x^2 - 24xy + 9y^2 + 5x - 10y + 5$ とおくと，$\varphi(\bar{x} + \lambda, \bar{y} + \mu)$ の 1 次の項は

$$8\left(4\lambda - 3\mu + \frac{5}{8}\right)\bar{x} - 6\left(4\lambda - 3\mu + \frac{5}{3}\right)\bar{y}$$

となり，$\bar{x}, \bar{y}$ の係数がともに 0 となることはない．