線形代数 I 演習

― 第 4 回 転置行列，特殊な行列 ―

担当：佐藤 弘康

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 行列 A の転置行列 ${}^tA$ とはどのような行列か.

(2) 対称行列，交代行列 (歪対称行列) とはどのような行列か.

(3) 対角行列，スカラー行列とはどのような行列か.

(4) 上三角行列，下三角行列とはどのような行列か.

問題 4.1. 次の行列を対称行列と交代行列の和で表せ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

問題 4.2. A, B が上三角行列ならば，AB および $A+B$ も上三角行列であることを示せ.

定義. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，その対角成分の和 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ を行列 A の**トレース**といい，$\mathrm{Tr}\,A$ で表す (トレースの性質については教科書 p.31 問題 11 参照).

問題 4.3. $A \in M(n, \mathbf{R})$ に対し，次の 2 つの条件が同値であることを証明せよ.

(i) 任意の交代行列 $B \in M(n, \mathbf{R})$ に対して，$\mathrm{Tr}(AB) = 0$.

(ii) A は対称行列.

定義. 行列 A が**冪零 (べきれい) 行列**であるとは，$A^k = O$ となる自然数 k が存在することである.

問題 4.4. 対角成分がすべて 0 の上三角行列

$$N = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

は冪零行列であることを示せ.

■ 第 1 回，第 2 回の解と捕捉

問題 1.1 (1) 任意の実数 $c \in \mathbf{R}$ に対して $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ であるから，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は線形従属.

(2) 線形独立. (3) $2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ だから，線形従属. (4) 線形独立.

(5) $5\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ だから，線形従属.

問題 1.2

(1) 線形独立ではないので，基底ではない.

(2) 線形独立で，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \dfrac{3b-4a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \dfrac{2a-b}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ より，$\mathbf{R}^2$ を張る．よって，基底である．$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(3) 線形独立で，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (b-a)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より，$\mathbf{R}^2$ を張る．よって，基底である．$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

問題 1.3 (1) $0 = c_1(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) + c_2(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}) = (c_1+3c_2)\boldsymbol{a} + (2c_1+4c_2)\boldsymbol{b}$ とおくと，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立だから，$c_1+3c_2 = 0, 2c_1+4c_2 = 0$ が成り立つ．しかし，これを満たすのは $c_1 = c_2 = 0$ のときだけなので，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ は線形独立である.

(2) $2(-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) + (2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}) = 0$ であるから，$-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ はどんなベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対しても線形従属である.

問題 1.4 「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形独立 $\Longleftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$」を示すには,「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属 $\Longleftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$」を示せばよい.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が線形従属} &\Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b} \quad (k \neq 0) \\
&\Longleftrightarrow a_1 = kb_1,\ a_2 = kb_2 \\
&\Longleftrightarrow a_1 : b_1 = a_2 : b_2 \\
&\Longleftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0.
\end{aligned}$$

問題 2.1

(1) $\|\boldsymbol{u}\| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\|\boldsymbol{v}\| = 2\sqrt{5}$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$．なす角は $\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\boldsymbol{v}\| = 3\sqrt{5}$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -15$．なす角は π.

(3) $\|\boldsymbol{u}\| = 2$, $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2(4-2\sqrt{2})} = \sqrt{2(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2(\sqrt{3}-1)$. なす角は $\dfrac{\pi}{4}$.

(4) $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| = 1$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta-\varphi)$．なす角は $(\theta-\varphi)$.

問題 2.2 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 &= (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

問題 2.3 (解 1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ の成分をそれぞれ

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，(2.1) 式から

$$x^2 + y^2 = 1,\ u^2 + v^2 = 1,\ xu + yv = 0 \tag{4.2}$$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}_1)\boldsymbol{f}_1 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}_2)\boldsymbol{f}_2 =& (a_1 x + a_2 y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a_1 u + a_2 v)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} a_1 x^2 + a_2 xy \\ a_1 xy + a_2 y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 u^2 + a_2 uv \\ a_1 uv + a_2 v^2 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} a_1(x^2 + u^2) + a_2(xy + uv) \\ a_1(xy + uv) + a_2(y^2 + v^2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから，$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}_1)\boldsymbol{f}_1 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}_2)\boldsymbol{f}_2$ となることを示すには

$$x^2 + u^2 = 1,\ y^2 + v^2 = 1,\ xy + uv = 0 \tag{4.3}$$

を示せばよい．

条件式 (4.2) より

$$\begin{aligned}0 &= (xu + yv)^2 \\ &= x^2u^2 + 2xuyv + y^2v^2 \\ &= x^2u^2 - 2(xu)^2 + (1 - x^2)(1 - u^2) \\ &= 1 - x^2 - u^2\end{aligned}$$

が成り立つ．$y^2 + v^2 = 1$ も同様に示すことができる．次に

$$\begin{aligned}(xy + uv)^2 &= x^2y^2 + 2xyuv + u^2v^2 \\ &= x^2(1 - x^2) - 2(xu)^2 + u^2(1 - u^2) \\ &= x^2 + u^2 - (x^2 + u^2)^2 \\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

より，$xy + uv = 0$ を得る．以上で (4.3) が証明された．

注意. (4.3) 式より，ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ が正規直交基底ならば, $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$ も正規直交基底になることがわかる.

(解 2) (2.1) 式を満たす 2 つのベクトルは互いに直交し，その長さは 1 だから，ある数 $\theta \in \mathbf{R}$ を用いて $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ $\left(= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}\right)$ と表すことができる. $\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ ならば,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a},\boldsymbol{f}_1)\boldsymbol{f}_1 + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{f}_2)\boldsymbol{f}_2 &= (a_1\cos\theta + a_2\sin\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + (-a_1\sin\theta + a_2\cos\theta)\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1\cos^2\theta + a_2\sin\theta\cos\theta \\ a_1\cos\theta\sin\theta + a_2\sin^2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1\sin^2\theta - a_2\cos\theta\sin\theta \\ -a_1\sin\theta\cos\theta + a_2\cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

逆の場合も同様である.

(解 3) $\mathbf{R}^2$ の内積 $(\cdot,\cdot)$ は以下の性質を満たす；

ip-1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$

ip-2) $(c\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ $(c \in \mathbf{R})$

ip-3) $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b})$

上の性質 ip-1) 〜 ip-3) を用いて証明しよう. $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ が $\mathbf{R}^2$ の基底であることから，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{f}_1 + c_2\boldsymbol{f}_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}) \tag{4.4}$$

と $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ の線形結合で表すことができる．そこで，(4.4) の両辺と $\boldsymbol{f}_1$ との内積をとると

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{f}_1, c_1\boldsymbol{f}_1 + c_2\boldsymbol{f}_2) \\
&= (\boldsymbol{f}_1, c_1\boldsymbol{f}_1) + (\boldsymbol{f}_1, c_2\boldsymbol{f}_2) \\
&= c_1(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_1) + c_2(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2) \\
&= c_1.
\end{aligned}$$

したがって，$c_1 = (\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{a})$ を得る．$c_2 = (\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{a})$ も同様である.

問題 1. 内積の性質 ip-1) 〜 ip-3) および

ip-4) 任意の $\boldsymbol{a}$ に対し $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \geq 0$．$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0$ が成り立つのは $\boldsymbol{a} = 0$ のときに限る.

が成り立つことを確かめよ.

問題 2.4 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$ であるから，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ を計算すると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) &= (a_1+b_1)(a_1-b_1) + (a_2+b_2)(a_2-b_2) \\ &= (a_1)^2 - (b_1)^2 + (a_2)^2 - (b_2)^2 \\ &= \left\{(a_1)^2 + (a_2)^2\right\} - \left\{(b_1)^2 + (b_2)^2\right\} \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 - \|\boldsymbol{b}\|^2.\end{aligned}$$

したがって，$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ ならば，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = 0$，すなわち，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ は直交する．

問題 2.5 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とおくと，三角形 OAB の面積は $\dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ に等しい．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta &= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\left(\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}.\end{aligned}$$

問題 2.6 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 \\ &= (a_1)^2 + a_1b_1 + (b_1)^2 + (a_2)^2 + a_2b_2 + (b_2)^2 \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

同様に $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$．したがって，$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2)$．

問題 2. 内積の性質 ip-1) ～ ip-3) を用いて問題 2.4，問題 2.6 を証明せよ．また，問題 2.4，問題 2.6 は幾何学的にはどのように解釈できるか？

問題 2.7 (1) $\sqrt{-1}$ の 4 乗根を $z = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\theta)$ とおくと $z^4 = \sqrt{-1}$ であるから，

$$r^4(\cos 4\varphi + \sqrt{-1}\sin 4\theta) = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right) \tag{4.5}$$

が成り立つ．ここで，(4.5) 式の両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4 = 1 \ (r \text{ は正の実数}),\quad 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \ (n \text{ は整数})$$

であるから，$r=1$，$\theta=\dfrac{\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{9\pi}{8},\dfrac{13\pi}{8}$ である．加法定理 (倍角の公式) より

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

したがって，$\sqrt{-1}$ の 4 乗根は $\pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\sqrt{-1}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right),\pm\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-\sqrt{-1}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$.

(2) z を -1 の 6 乗根とする．すなわち，$z^6+1=0$．このとき，

$$\begin{aligned} z^6+1 &= (z^2+1)(z^4-z^2+1)\\ &= (z^2+1)\left\{(z^2+1)^2-3z^2\right\}\\ &= (z^2+1)(z^2+1+\sqrt{3}z)(z^2+1-\sqrt{3}z)\end{aligned}$$

と因数分解できる．したがって，-1 の 6 乗根は $\pm\sqrt{-1},\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}$.

問題 2.8 (1) $\sqrt{-1}=\cos\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\sin\dfrac{\pi}{2}$. (2) $-5=5\cdot(-1)=5\left(\cos\pi+\sqrt{-1}\sin\pi\right)$.

(3) $\sqrt{3}+3\sqrt{-1}=2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

問題 2.9 (1) 複素数 w が実数になるための必要十分条件は $w-\overline{w}=0$ である．さらに，共役複素数の性質

cc-1) $\overline{(w_1w_2)}=\overline{w_1}\cdot\overline{w_2}$

cc-2) $\overline{\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)}=\dfrac{(\overline{w_1})}{(\overline{w_2})}$

を用いると，

$$\frac{z}{1+z^2}\text{が実数}\iff\left(\frac{z}{1+z^2}\right)-\left(\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}\right)=0$$

である．

$$0=\frac{z}{1+z^2}-\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}=\frac{(z-\overline{z})-z\overline{z}(z-\overline{z})}{(1+z^2)(1+\overline{z}^2)}=\frac{(z-\overline{z})(1-z\overline{z})}{(1+z^2)(1+\overline{z}^2)}.$$

ここで，仮定より $b\neq 0$，すなわち $z-\overline{z}\neq 0$ であるから，$z\overline{z}=1$ を得る．すなわち，$a^2+b^2=1$.

(2) z^4 が実数になるためには $z^4-\overline{(z^4)}=0$.

$$0=z^4-(\overline{z})^4=(z-\overline{z})(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2).$$

仮定より，$z^2+\overline{z}^2=2(a^2-b^2)\neq 0$．したがって，$z^4$ が実数になるのは $z\pm\overline{z}=0$，すなわち，$a=0$ または $b=0$ のときである (つまり，z が実数かまたは純虚数のどちらかの場合).

問題 3. 共役複素数の性質 cc-1), cc-2) 及び

cc-3) $\overline{(\overline{w})}=w$

を証明せよ．

問題 4. 問題 2.9 (1) の解は $a^2+b^2=1$ $(b \neq 0)$ と書いたが，さらに $b^2 \neq 1$ という条件も必要である．その理由を説明せよ．

問題 2.10 証明には偏角の性質

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \tag{4.6}$$

を用いる (教科書 p.10 を参照).

(1) 実数 $c \in \mathbf{R}$ に対して $\arg(c) = 0$ であるから，$\arg(cz) = \arg(c) + \arg(z) = \arg(z)$.

(2) $z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbf{R}$ であるから，$0 = \arg(z\overline{z}) = \arg(z) + \arg(\overline{z})$.

(3) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{1}{|w|^2}(z\overline{w})$ であるから，$\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg(z\overline{w}) = \arg z + \arg \overline{w} = \arg z - \arg w$.

問題 2.11 $z\overline{w} = \overline{(\overline{z}w)}$ であるから，

$$\begin{aligned}\overline{z}w + z\overline{w} = 0 &\Longleftrightarrow \overline{z}w = k\sqrt{-1} \quad (\text{ただし}, k \in \mathbf{R}) \\ &\Longleftrightarrow \arg(\overline{z}w) = \frac{\pi}{2} \ \left(= \arg(k\sqrt{-1})\right) \\ &\Longleftrightarrow \arg z - \arg w = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

問題 5. $\overline{z}w + z\overline{w}$ の意味がわかれば，問題 2.11 はほとんど明らかである．複素数平面において，$\overline{z}w + z\overline{w}$ は何を意味するか考察せよ．

問題 2.12

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{-1})(3+\sqrt{-1}) &= 6 + 5\sqrt{-1} + (-1) \\ &= 5(1+\sqrt{-1}) \\ &= 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

であるから，$\arg(2+\sqrt{-1}) + \arg(3+\sqrt{-1}) = \dfrac{\pi}{4}$. ここで，$\theta_1 = \arg(2+\sqrt{-1})$，$\theta_2 = \arg(3+\sqrt{-1})$ とおくと，$\tan\theta_1 = \dfrac{1}{2}$，$\tan\theta_2 = \dfrac{1}{3}$，すなわち，$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$.
したがって，$\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ を得る．