2 次曲面

変数が 3 つの 2 次式

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \quad (6.1)$$

が与える空間 $\mathbf{R}^3$ 内の図形を **2** 次曲面とよぶ.

2 次曲面の分類（step1）

2 次式 (6.1) は行列，ベクトルを用いて

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + c = 0 \quad (6.2)$$

と表すことができる．係数行列 A の対角化（直交変換）と適当な平行移動により，以下の 3 つの型に分類できる．

(1) A の固有値はすべて非零のとき，

$$\alpha_1x^2 + \alpha_2y^2 + \alpha_3z^2 + \gamma = 0 \quad (6.3)$$

(2) A の固有値 0 に対応する固有ベクトルが 1 つしかないとき，

$$\alpha_1x^2 + \alpha_2y^2 + \beta_3z + \gamma = 0 \quad (6.4)$$

(3) A の固有値 0 に対応する固有ベクトルで線形独立なベクトルが 2 つあるとき，

$$\alpha_1x^2 + \beta_2y + \gamma = 0 \quad (6.5)$$

2 次曲面の分類（step2）：(1) の場合

(6.3) において

- $\gamma \neq 0$ のとき，$\alpha'_1 x^2 + \alpha'_2 y^2 + \alpha'_3 z^2 = 1$．$\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ の符号が
  (1-1-1) すべて正のとき，楕円面.
  (1-1-2) 負のものが 1 つのとき，一葉双曲面.
  (1-1-3) 負のものが 2 つのとき，二葉双曲面.
- $\gamma = 0$ のとき，$\alpha'_1 x^2 + \alpha'_2 y^2 + \alpha'_3 z^2 = 0$．$\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ の符号が
  (1-2-1) すべて同じとき，原点.
  (1-2-2) 異符号のものを含むとき，楕円錐.

2 次曲面の分類（step3）：(2) の場合

(6.4) において

- $\beta_3 \neq 0$ のとき，$\alpha'_1 x^2 + \alpha'_2 y^2 + z = 0$．$\alpha'_1, \alpha'_2$ の符号が
  (2-1-1) すべて正のとき，楕円放物面.
  (2-1-2) 正と負のとき，双曲放物面.
- $\beta_3 = 0$ のとき，
  - $\gamma \neq 0$ のとき，$\alpha'_1 x^2 + \alpha'_2 y^2 = 1$．$\alpha'_1, \alpha'_2$ の符号が
    (2-2-1) すべて正のとき，楕円柱面.
    (2-2-2) 正と負のとき，双曲線柱面.
  - $\gamma = 0$ のとき，$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 = 0$．$\alpha_1, \alpha_2$ の符号が
    (2-2-1) すべて同じとき，直線.
    (2-2-2) 異符号のものを含むとき，交差する 2 つの平面.

2 次曲面の分類（step4）：(3) の場合

(6.5) において

- $\beta_2 \neq 0$ のとき，$\alpha'_1 x^2 + y = 0$.
  (3-1-1) 放物線柱面.
- $\beta_2 = 0$ のとき，$\alpha_1 x^2 + \gamma = 0$.
  (3-2-1) $\gamma \neq 0$ のとき，平行する 2 つの平面.
  (3-2-2) $\gamma = 0$ のとき，1 つの平面.