微積分 II 演習

－ 第 5 回 関数の連続性 (3) －

担当：佐藤 弘康

未発表問題： 2.1, 2.3(2), 2.5, 2.10(4), 2.11(2, 5), 2.12〜2.14, 3.1, 3.3〜3.8, 4.1, 4.2(3), 4.3, 4.4(3〜7), 4.5, 4.6

例題 7. $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x) = e^x$ は一様連続でないことを証明せよ．

解． $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で連続だから，

$$\forall a \in \mathbf{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x - a| < \delta \Longrightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つ．今，$a = \log n$ $(n \in \mathbf{N},\ n > \varepsilon)$ とすると，$\varepsilon > |f(x) - f(a)| = |e^x - n|$ より

$$\log(n - \varepsilon) < x < \log(n + \varepsilon) \tag{5.1}$$

が成り立つ．$|x - a| < \delta$ が (5.1) を満たすための最大の δ は $\log(n) - \log(n - \varepsilon) = \log\left(\frac{n}{n-\varepsilon}\right)$ であるが，この値は n をどんどん大きくしていくと 0 に近づく．したがって，すべての点 $a = \log n$ に共通する $\delta > 0$ を定めることはできない．したがって $f(x) = e^x$ は一様連続ではない．

注意： 一様連続でないことを証明するには，このほかに教科書 I,p.165 の補題 5.14 や，演習プリントの問題 3.5，問題 5.2 の結果を用いる方法などがある．

問題 5.1. 次の関数が一様連続かどうか考察せよ (一様連続でない関数について，一様連続にならないことを証明せよ．一様連続な関数については発表しなくてよい)．

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$

(2) $f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbf{R})$

(3) $f(x) = \log x \quad (x > 0)$

(4) $f(x) = e^{-|x|} \quad (x \in \mathbf{R})$

(5) $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$

(6) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbf{R})$

(7) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \geq 1)$

問題 5.2. $f(x)$ を一様連続な関数とする．このとき，2 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ に対し， $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ ならば， $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ となることを証明せよ．

問題 5.3. $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上で定義された連続関数で，任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し，

$$f(x+1) = f(x)$$

を満たすとする．このとき，f は一様連続であることを証明せよ．

□ 前回の復習と捕捉

◇ 部分列 (問題 2.6) について　定義は

> 自然数の値をとる数列 $\{n(k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ が狭義単調増加である (すなわち，任意の $k \in \mathbf{N}$ に対し，$n(k) < n(k+1)$) とき，数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ から作られた数列 $\{a_{n(k)}\}_{k\in\mathbf{N}}$ を，$\{a_n\}$ の部分列という．

つまり，数列 $\{a_n\}$ に対して，その項の一部分 (ただし，無限個の元) を抜き出し，そのままの順序に並べてできる数列

$$a_{n(1)},\ a_{n(2)}, \dots, a_{n(k)}, \dots \qquad (n(1) < n(2) < \dots < n(k) < \dots)$$

のこと．

◇ 問題 2.8 の解　数列 $\{a_n\}$ から $6n$ $(n \in \mathbf{N})$ 番目の項をとりだして部分列 a_{6n} をつくると，これは $\{a_{2n}\}$ の部分列でもあるから，問題 2.7 の結果から，$\lim a_{6n} = \alpha$. また，これは $\{a_{3n}\}$ の部分列でもあるから，$\lim a_{6n} = \gamma$．つまり，$\alpha = \gamma$ を得る．同様に，数列 $\{a_{3(2n-1)}\}$ は $\{a_{2n-1}\}$ と $\{a_{3n}\}$ の部分列だから，$\lim a_{3(2n-1)} = \beta = \gamma$. 以上のことから，$\alpha = \beta = \gamma$ を得る．

$\lim a_{2n} = \lim a_{2n-1} = \alpha$ より，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_{\varepsilon 0},\ 2n \geq n_{\varepsilon 0} \Longrightarrow |a_{2n} - \alpha| < \varepsilon$$
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_{\varepsilon 1},\ 2n-1 \geq n_{\varepsilon 1} \Longrightarrow |a_{2n-1} - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．つまり，$N = \max\{n_{\varepsilon 0}, n_{\varepsilon 1}\}$ とおくと，$n \geq N$ に対して

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$\{a_n\}$ は α に収束する．