解析I演習 (2 学期：ベクトル解析)

— 試験問題 (11/16) 問 3，問 4 の解説—

担当：佐藤 弘康

問 3． C を $\boldsymbol{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1 - 2\cos\theta - \sin\theta)$，$(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ でパラメータ表示される閉曲線とするとき，

$$\int_C x^2\ dx + (x^3 + y)dy + z\ dz$$

の値を求めよ．

解 曲線 C のパラメータ表示が

$$\begin{aligned} x =& \cos\theta, \\ y =& \sin\theta, \\ z =& 1 - 2\cos\theta - \sin\theta \end{aligned} \tag{1}$$

で与えられているので，

$$\begin{aligned} dx =& -\sin\theta\ d\theta, \\ dy =& \cos\theta\ d\theta, \\ dz =& (2\sin\theta - \cos\theta)d\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

したがって，(1),(2) を積分の式に代入すると

$$\begin{aligned} &\int_C x^2\ dx + (x^3 + y)dy + z\ dz \\ =& \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2(-\sin\theta)d\theta + (\cos^3\theta + \sin\theta)\cos\theta d\theta \\ &\quad + (1 - 2\cos\theta - \sin\theta)(2\sin\theta - \cos\theta)d\theta \\ =& \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}(\cos^3\theta)'d\theta + \left(\cos^4\theta + \frac{1}{2}(\sin^2\theta)'\right)d\theta \\ &\quad + (2\sin\theta - \cos\theta - 3\sin\theta\cos\theta + 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta))d\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，(3) の第一項は

$$\frac{1}{3}\left[\cos^3\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}(1-1) = 0. \tag{4}$$

第二項は

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\ d\theta+\frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\right]_0^{2\pi}=&\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta+\frac{1}{2}(0-0)\\ =&\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta\\ =&\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta\\ =&\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta\\ =&\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\theta+\sin 2\theta+\frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{3}{4}\pi.\end{aligned} \tag{5}$$

第三項は

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}(2\sin\theta-\cos\theta-3\sin\theta\cos\theta+2\cos 2\theta)d\theta\\ =&\left[-2\cos\theta-\sin\theta-\frac{3}{2}\sin^2\theta+\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=0.\end{aligned} \tag{6}$$

したがって，(3)(4)(5)(6) より，求める値は $\dfrac{3}{4}\pi$.

別解 (Stokes の定理を使う) 曲線 C は円柱 $x^2+y^2=1$ と平面 $z=1-2x-y$ の交線であることがわかるから，閉曲線 C を境界に持つ曲面 S を上の平面内の円盤とすると，S は

$$\bar{\boldsymbol{r}}(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta,1-2r\cos\theta-r\sin\theta), \tag{7}$$

$$(0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi) \tag{8}$$

とパラメータ表示される．さらに

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{r}}_r\times\bar{\boldsymbol{r}}_\theta=&(\cos\theta,\sin\theta,-2\cos\theta-\sin\theta)\times(-r\sin\theta,r\cos\theta,2r\sin\theta-r\cos\theta)\\ =&(2r,\ r,\ r)=r(2,\ 1,\ 1)\end{aligned} \tag{9}$$

であるから，このパラメータが定める向きと曲線の向きは同調する (11/2 配布のプリント参照)．Stokes の定理より，

$$\begin{aligned}\int_C x^2\ dx+(x^3+y)dy+z\ dz=&\int_S d(x^2\ dx+(x^3+y)dy+z\ dz)\\ =&\int_S 3x^2\ dx\wedge dy\\ =&\iint 3(r\cos\theta)^2\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}drd\theta\\ =&\iint 3r^3\cos^2\theta\ drd\theta=3\int_0^1 r^3dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\ d\theta\end{aligned}$$

ここで,

$$\int_0^1 r^3 dr = \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\ d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

したがって，求める値は $\dfrac{3}{4}\pi$.

問 4． $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ の原点の側を裏とする曲面を S とするとき,

$$\int_S x\ dy\wedge dz + 2y\ dx\wedge dz + 3z\ dx\wedge dy$$

の値を求めよ.

解　球面の極座標表示と同様に

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}(\theta,\phi) = (a\cos\theta\cos\phi, b\sin\theta\cos\phi, c\sin\phi) \\ (0\le\theta\le 2\pi,\ -\pi/2\le\phi\le\pi/2)\end{gathered} \tag{10}$$

は曲面 S のパラメータ表示を与える．さらに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_\theta(\theta,\phi) =&(-a\sin\theta\cos\phi,\ b\cos\theta\cos\phi,\ 0)\\ \boldsymbol{r}_\phi(\theta,\phi) =&(-a\cos\theta\sin\phi,\ -b\sin\theta\sin\phi,\ c\cos\phi)\end{aligned}$$

だから，法線ベクトルは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\phi =&(bc\cos\theta\cos^2\phi,\ ac\sin\theta\cos^2\phi,\ ab\sin\phi\cos\phi)\\ =&abc\cos\phi\left(\frac{1}{a}\boldsymbol{r}_1(\theta,\phi),\ \frac{1}{b}\boldsymbol{r}_2(\theta,\phi),\ \frac{1}{c}\boldsymbol{r}_3(\theta,\phi)\right)\end{aligned} \tag{11}$$

となり，法線ベクトルが曲面の外側に向いていることがわかる．したがって，$\boldsymbol{r}(\theta,\phi)$ は正のパラメータ表示である (11/2 配布のプリントを参照).

ヤコビアンは以下のようになる (これは法線ベクトル (11) の成分である)；

$$\begin{aligned}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} =&bc\cos\theta\cos^2\phi,\\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)} =&ac\sin\theta\cos^2\phi,\\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} =&ab\sin\phi\cos\phi.\end{aligned}$$

面積分の定義により，

$$\begin{aligned}
&\int_S x\ dy \wedge dz + 2y\ dx \wedge dz + 3z\ dx \wedge dy \\
=&\int_S x\ dy \wedge dz - 2y\ dz \wedge dx + 3z\ dx \wedge dy \\
=&\int \left(a\cos\theta\cos\phi \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} - 2b\sin\theta\cos\phi\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)} + 3c\sin\phi\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} \right) d\theta d\phi \\
=&abc\iint (\cos^2\theta\cos^3\phi - 2\sin^2\theta\cos^3\phi + 3\sin^2\phi\cos\phi) d\theta d\phi \\
=&abc\iint \left((3\cos^2\theta - 2)\cos^3\phi + \frac{\partial}{\partial\phi}(\sin^3\phi) \right) d\theta d\phi \\
=&abc\left\{ \int_0^{2\pi} (3\cos^2\theta - 2) d\theta\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\phi\ d\phi + [\sin^3\phi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot [\theta]_0^{2\pi} \right\}
\end{aligned} \tag{12}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (3\cos^2\theta - 2) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}(1+\cos 2\theta) - 2 \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2\theta \right) d\theta \\
&= \left[-\frac{1}{2}\theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\
&= -\pi
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\phi\ d\phi &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi(1-\sin^2\phi) d\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos\phi - \frac{1}{3}(\sin^3\phi)' \right) \\
&= \left[\sin\phi - \frac{1}{3}\sin^3\phi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}
\end{aligned} \tag{14}$$

(12)(13)(14) より，求める値は

$$abc\left(-\frac{4}{3}\pi + 2\cdot 2\pi \right) = \frac{8}{3}abc\pi.$$

別解 (ストークスの定理を使う) 球面の内部の領域のパラメータ表示と同様，曲面 S の内部 V は

$$\bar{\boldsymbol{r}}(r,\theta,\phi) = (ar\cos\theta\cos\phi, br\sin\theta\cos\phi, cr\sin\phi)$$
$$(0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ -\pi/2 \le \phi \le \pi/2)$$

で与えられる．ストークスの定理より

$$\begin{aligned}
&\int_S x\ dy \wedge dz + 2y\ dx \wedge dz + 3z\ dx \wedge dy \\
=&\int_V d(x\ dy \wedge dz + 2y\ dx \wedge dz + 3z\ dx \wedge dy) \\
=&\int_V dx \wedge dy \wedge dz + 2dy \wedge dx \wedge dz + 3dz \wedge dx \wedge dy \\
=&\int_V 2dx \wedge dy \wedge dz \quad \left(= \int_V 2\ dxdydz\right) \\
=&\iiint 2\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| drd\theta d\phi \\
=&\iiint 2|abcr^2\cos\phi| drd\theta d\phi \\
=&2abc\int_0^1 r^2\ dr \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi\ d\phi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \\
=&2abc\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1 \cdot [\sin\phi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{8}{3}abc\pi.
\end{aligned}$$