# 微積分 II 演習

− 2 変数関数の Taylor 展開，極値問題 −

（課題：10/17（金）17:00，私の研究室ドアの封筒まで）

担当：佐藤 弘康

復習. 1 変数関数 $\varphi(t)$ の $t=\alpha$ における（形式的な）**Taylor** 展開とは何か？

**問題 8.1.** 2 変数関数 $f(x,y)$ にたいし，$\varphi(t)=f(a+th,b+tk)$ とおく.

(1) $\varphi'(t)$ および $\varphi''(t)$ を計算せよ.

(2) $t=0$ における $\varphi(t)$ の Taylor 級数を 2 次の項まで書け.

偏微分作用素 $D_x$, $D_y$

- $D_xf=\frac{\partial f}{\partial x}$ を意味する．また，$(D_xf)(a,b)=f_x(a,b)$.
- $k\in\mathbf{R}$ にたいし，$(kD_x)f=k\,f_x$ （$x$ で偏微分した偏導関数を $k$ 倍する）.
- $(D_x)^2f=(D_x(D_xf))=D_xf_x=f_{xx}$.
- $((D_x+D_y)f)(a,b)=f_x(a,b)+f_y(a,b)$.

**問題 8.2.** 2 変数関数 $f(x,y)$ にたいし，$\varphi(t)=f(a+th,b+tk)$ とおく.

(1) $((hD_x+kD_y)f)(a,b)=\varphi'(0)$ となることを示せ.

(2) $\left((hD_x+kD_y)^2f\right)(a,b)=\varphi''(0)$ となることを示せ.

$\boxed{\text{課題：演習書 }\mathbf{3.13}}$ ただし (3) については $\varphi(t)=f(a+th,b+tk)$ とし，

$$\varphi^{(n)}(t)=((hD_x+kD_y)^nf)(a+th,b+tk)$$

を示せ.

**2 変数関数の Taylor 級数**

- $\varphi(t) := f(a+th, b+tk)$ を $t=0$ で Taylor 展開し，その Taylor 級数に $t=1$ を代入することにより，

$$f(a+h, b+k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left((hD_x + kD_y)^n f\right)(a,b) \qquad \text{(演習書 p.115)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,j!} h^m k^j \frac{\partial^{m+j} f}{\partial x^m \, \partial y^j}(a,b) \qquad \text{(演習書 p.117)}$$

- $x = a+h$, $y = b+k$ を代入することにより

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,j!} (x-a)^m (y-b)^j \frac{\partial^{m+j} f}{\partial x^m \, \partial y^j}(a,b)$$

を得る．これが $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における（形式的な）Taylor 展開である．

課題：演習書 **3.16** （例題 3.10 を参考に）

**問題 8.3.** 次の関数の Taylor 級数を 2 次の項まで求めよ．

(1) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$，$(x,y)=(0,0)$

(2) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$，$(x,y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

復習．極値とは何か．また，1 変数関数の極値を求め方を説明せよ．

課題：

**問題 8.4.** 関数 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 10x^2 + 16xy - 10y^2$ にたいして

(1) $f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$ を満たす点 $(a,b)$ をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたすべての点にたいし，その点における $f(x,y)$ の Taylor 級数を 2 次の項まで求めよ．