

問題 4.1.

(1) $\Phi_A(t) = t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3)$

(2) 2 と 3

(3) $k = 2$ のとき; $(2E_2 - A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

したがって, $\underline{v_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ (ただし, $c \neq 0$ は実数).

$k = 3$ のとき; $(2E_2 - A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

したがって, $\underline{v_3 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ (ただし, $c \neq 0$ は実数).

(4) (省略)

問題 4.2. (以下, c は零でない実数とする)*¹

(1) 固有値は -2 と 1 .

-2 に関する固有ベクトルは $c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 1 に関する固有ベクトルは $c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

(2) 固有値は -1 , 固有ベクトルは $c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(3) 固有値は -3 と 0 .

-3 に関する固有ベクトルは $c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 0 に関する固有ベクトルは $c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(4) 実数の固有値は存在しない.*²

(5) 固有値は $1, 2, 3$. 固有値はそれぞれ $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

*¹ 固有ベクトルを問う問題では, この「 c 倍」は特に書かなくてもよい.*² 複素数の範囲で考えると, 固有値は $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$. $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ に関する固有ベクトルは $c \begin{pmatrix} \sqrt{5} - 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
 $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ に関する固有ベクトルは $c \begin{pmatrix} \sqrt{5} + 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ である (この c は任意の複素数).