

同次座標系と透視投影

佐藤 弘康

3次元の物体（図形）を紙に書き写したり，コンピューターのモニターに映すなど，2次元の媒体で表現することを，ここでは投影，または射影とよぶことにします．数学的に述べると，投影とは3次元数空間 \mathbb{R}^3 から平面 π への写像です．第1節では，もっとも簡単な投影である平行投影と，目に映る像を正確に表現する方法として発展した透視投影について説明します．第2節で同次座標系という新しい座標系を導入し，第3節で透視投影を同次座標系で表現する方法を説明します．

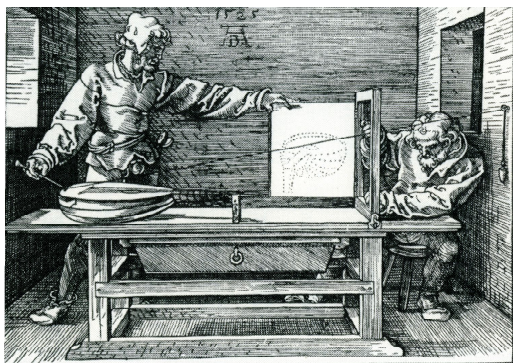


図1 「リュートを描く人」(Albrecht Dürer, 1525 年)

1 投影（射影）

1.1 平行投影

定義 1.1. π を \mathbb{R}^3 内の平面， $\vec{v} (\neq \vec{0})$ を π に平行でないベクトルとする．このとき，空間上の点 P に対し， P を通り，方向ベクトルが \vec{v} の直線と π との交点を $\Psi_{\vec{v}}(P)$ とする．

このようにして定まる写像 $\Psi_{\vec{v}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \pi$ を π への \vec{v} 方向の平行投影とよぶ.

投影 (写像) の終域である平面 π のことを, その投影の投影面とよぶ.

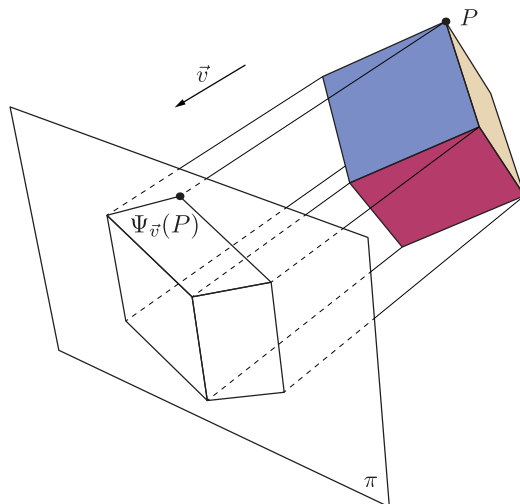


図2 平行投影

ベクトル \vec{v} の成分を $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, 投影面 π の方程式を $ax + by + cz = d$ とし, $\Psi_{\vec{v}}$ による点 $P(p_1, p_2, p_3)$ の像 $\Psi_{\vec{v}}(P)$ を求めてみよう.

点 P を通り, 方向ベクトルが \vec{v} の直線を l とする. $\Psi_{\vec{v}}(P)$ は l 上の点であるから, ある実数 t を用いて

$$\Psi_{\vec{v}}(P) = \vec{p} + t\vec{v} = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3) \quad (1.1)$$

と表すことができる (\vec{p} は点 P の位置ベクトル). さらに, $\Psi_{\vec{v}}(P)$ は平面 π 上の点であるから, (1.1) の実数 t は

$$a(p_1 + tv_1) + b(p_2 + tv_2) + c(p_3 + tv_3) = d \quad (1.2)$$

を満たす. (1.2) を t について解くと

$$t = \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{av_1 + bv_2 + cv_3} \quad (1.3)$$

を得る. したがって,

$$\Psi_{\vec{v}}(P) = \vec{p} + \left\{ \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{av_1 + bv_2 + cv_3} \right\} \vec{v} \quad (1.4)$$

となる。投影面 π の法線ベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とおくと、(1.4) は

$$\Psi_{\vec{v}}(P) = \vec{p} + \left(\frac{d - \vec{p} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \right) \vec{v} \quad (1.5)$$

と表すことができる。

平行投影

投影面 $\pi : ax + by + cz = d$ への $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 方向の平行投影 $\Psi_{\vec{v}}$ は

$$\Psi_{\vec{v}}(\vec{p}) = \vec{p} + \left\{ \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{av_1 + bv_2 + cv_3} \right\} \vec{v} = \vec{p} + \left(\frac{d - \vec{p} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \right) \vec{v}$$

で与えられる (ただし、 \vec{n} は π の法線ベクトル)。

特に、 \vec{v} が投影面 π に直交する (つまり、 \vec{v} と π の法線ベクトル \vec{n} が平行である) と
き、平行投影 $\Psi_{\vec{v}}$ を π への直交射影 (または正射影) とよぶ。

問題 1.1. 投影面 $\pi : ax + by + cz = d$ への直交射影を Ψ_{π} とする。 $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ の Ψ_{π} による像 $\Psi_{\pi}(\vec{p})$ の成分を求めなさい。

問題 1.2. xy 平面を π とし、 π への直交射影 Ψ_{π} とする。 $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ の Ψ_{π} による
像 $\Psi_{\pi}(\vec{p})$ の成分を求めなさい。

平行投影は平行な 2 直線を平行な 2 直線に移す。



図3 「遊興風俗図屏風 (部分)」 (作者不明, 17 世紀)

定理 1.2. $\Psi_{\vec{v}}$ を投影面 π への \vec{v} 方向の平行投影とし、 l_1, l_2 を \vec{v} に平行ではない 2 つの

直線とする. このとき, l_1, l_2 が平行ならば, $\Psi_{\vec{v}}$ による像 $\Psi_{\vec{v}}(l_1), \Psi_{\vec{v}}(l_2)$ も平行である.

Proof. 直線 l_i は点 \vec{q}_i を通り, 方向ベクトルが \vec{u} であるとする ($i = 1, 2$. l_1 と l_2 は平行だから方向ベクトルは同じであることに注意せよ). l_i 上の点 \vec{p}_i は媒介変数 s を用いると $\vec{p}_i = \vec{q}_i + s\vec{u}$ と表すことができる. この点 \vec{p}_i を $\Psi_{\vec{v}}$ で移す, つまり, (1.5) に代入すると

$$\begin{aligned}\Psi_{\vec{v}}(\vec{p}_i) &= \vec{p}_i + \left(\frac{d - \vec{p}_i \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \right) \vec{v} \\ &= \vec{q}_i + s\vec{u} + \left(\frac{d - (\vec{q}_i + s\vec{u}) \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \right) \vec{v} \\ &= \left(\vec{q}_i + \frac{d - \vec{q}_i \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \vec{v} \right) + s \left(\vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \vec{v} \right)\end{aligned}$$

となる. これは l_1, l_2 の $\Psi_{\vec{v}}$ による像 $\Psi_{\vec{v}}(l_1), \Psi_{\vec{v}}(l_2)$ がともに方向ベクトル

$$\vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \vec{v}$$

の直線であることを意味する. つまり, この 2 直線は平行である. □

問題 1.3. $\Psi_{\vec{v}}$ を投影面 π への \vec{v} 方向の平行投影とし, l を方向ベクトルが \vec{v} と平行な直線とする. このとき, $\Psi_{\vec{v}}$ による l の像はどのような図形か答えなさい.

1.2 透視投影

定義 1.3. π を \mathbb{R}^3 内の平面, V を π 上にない点とする. このとき, 空間上の点 P に対し, P と V を通る直線と π との交点を $\Phi_V(P)$ とする. このようにして定まる写像 $\Phi_V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \pi$ を視点が V , 投影面が π の透視投影とよぶ.

視点を $V(v_1, v_2, v_3)$, 投影面 π の方程式を $ax + by + cz = d$ とし, Φ_V による点 $P(p_1, p_2, p_3)$ の像 $\Phi_V(P)$ を求めてみよう.

2 点 P, V を通る直線を l とする. $\Phi_V(P)$ は l 上の点であるから, ある実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\Phi_V(P) &= \vec{p} + t(\vec{v} - \vec{p}) \\ &= (p_1 + t(v_1 - p_1), p_2 + t(v_2 - p_2), p_3 + t(v_3 - p_3)).\end{aligned}\tag{1.6}$$

と表すことができる (\vec{p}, \vec{v} はそれぞれ点 P, V の位置ベクトル). さらに, $\Phi_V(P)$ は平面 π 上の点であるので, (1.6) の実数 t は

$$a\{p_1 + t(v_1 - p_1)\} + b\{p_2 + t(v_2 - p_2)\} + c\{p_3 + t(v_3 - p_3)\} = d \tag{1.7}$$

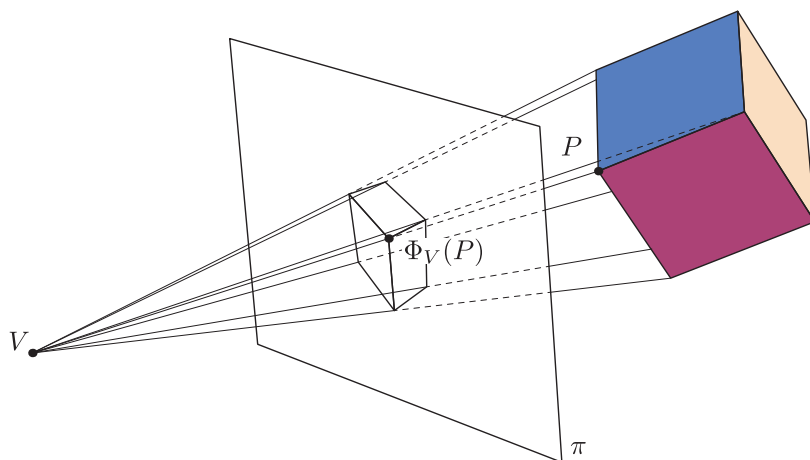


図 4 透視投影

を満たす. (1.7) を t について解くと

$$t = \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{a(v_1 - p_1) + b(v_2 - p_2) + c(v_3 - p_3)} \quad (1.8)$$

を得る. したがって,

$$\Phi_V(P) = \vec{p} + \left\{ \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{a(v_1 - p_1) + b(v_2 - p_2) + c(v_3 - p_3)} \right\} (\vec{v} - \vec{p}) \quad (1.9)$$

となる. 投影面 π の法線ベクトルを \vec{n} とおくと, (1.9) は

$$\Phi_V(P) = \vec{p} + \left\{ \frac{d - \vec{p} \cdot \vec{n}}{(\vec{v} - \vec{p}) \cdot \vec{n}} \right\} (\vec{v} - \vec{p}) \quad (1.10)$$

と表すことができる.

透視投影

投影面を $\pi : ax + by + cz = d$, 視点を $V(v_1, v_2, v_3)$ とする透視投影 Φ_V は

$$\begin{aligned} \Phi_V(\vec{p}) &= \vec{p} + \left\{ \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{a(v_1 - p_1) + b(v_2 - p_2) + c(v_3 - p_3)} \right\} (\vec{v} - \vec{p}) \\ &= \vec{p} + \left\{ \frac{d - \vec{p} \cdot \vec{n}}{(\vec{v} - \vec{p}) \cdot \vec{n}} \right\} (\vec{v} - \vec{p}) \end{aligned}$$

で与えられる (ただし, \vec{n} は π の法線ベクトル).

問題 1.4. 視点を $V(v_1, v_2, v_3)$, 投影面を yz -平面とする透視投影を Φ_V とする. Φ_V による点 $P(p_1, p_2, p_3)$ の像 $\Phi_V(P)$ の成分を求めなさい.

平行投影によって平行な直線はふたたび平行な直線に移るが、透視投影の場合、平行な 2 直線の像がある点で交わることがある。平行線の像が交わる点のことを消失点とよぶ。図 5 では消失点が 1 点現れている。

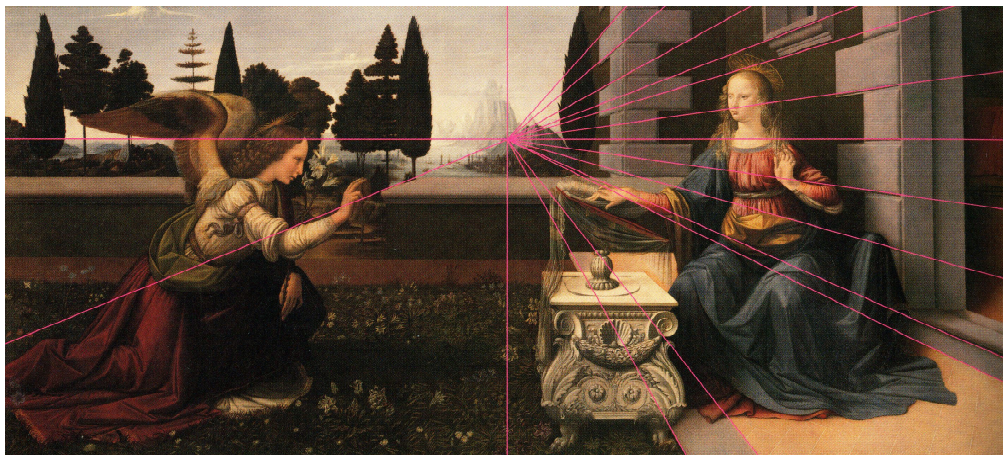


図 5 「受胎告知」(Leonardo da Vinci, 1472-1475 年)

透視投影においては、投影する対象物と視点、投影面の関係によって消失点は 1 個から 3 個現れる。

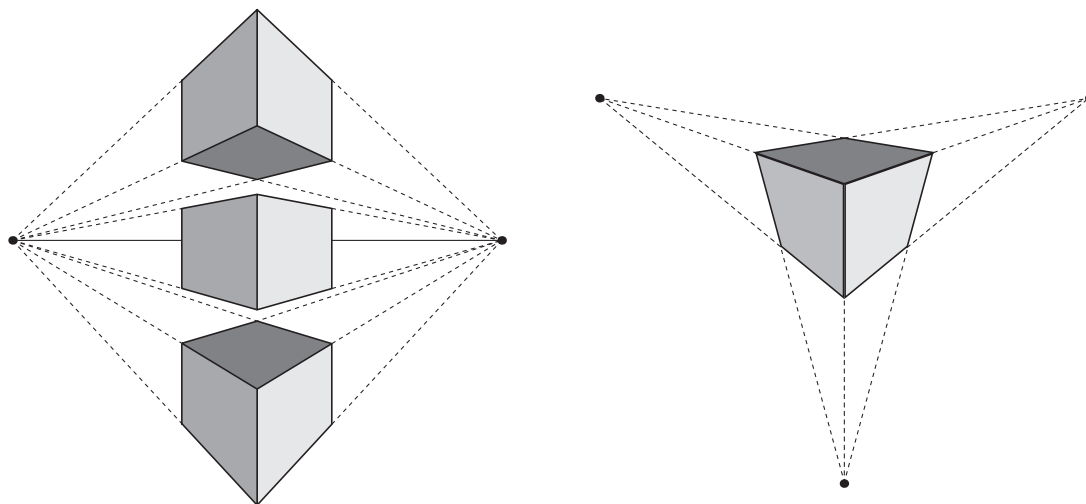


図 6 消失点が 2 つ現れる「2 点透視図法」(左) と 3 つ現れる「3 点透視図法」(右)

問題 1.5. 空間内の直線が透視投影によってどのような図形に移るか、考察しなさい。

2 同次座標系

2.1 直交座標系と同次座標系

これまでは、点の位置を表す方法として直交座標系を用いてきた。平面上の点は2つの数の組 (x, y) で表され、空間上の点は3つの数の組み (x, y, z) で表された。ここでは同次座標系とよばれる新たな座標系を導入する。これは直交座標系に密接に関係していて、平面上の点を3つの数の組みで、空間上の点を4つの数の組みで表す座標系である。まずは簡単のため、平面の同次座標系について述べる。

定義 2.1. 平面 \mathbb{R}^2 上の点 $A(a_1, a_2)$ に対し、

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \quad (2.1)$$

を満たす数の組み $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_0)$ を点 A の同次座標という。

注意 2.2. $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_0)$ を点 $A(a_1, a_2)$ の同次座標とする。このとき、任意の実数 $t (\neq 0)$ に対し、 $(t\alpha_1 : t\alpha_2 : t\alpha_0)$ も点 A の同次座標となる。このように、同次座標で点を表すとき、その表し方は一意に定まらない。

$A(a_1, a_2)$ を表す同次座標の全体を考える。 $(a_1 : a_2 : 1)$ が点 A の同次座標であることと注意 2.2 から、点 A の同次座標全体は

$$\{(x, y, z) \mid (x, y, z) = t(a_1, a_2, 1), t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$$

である。これは3次元数空間 \mathbb{R}^3 内の原点と $(a_1, a_2, 1)$ を通る直線である。つまり、同次座標系とは平面上の点と、空間内の原点を通る直線を同一視する座標系とみなすことができる (図 7)。

空間の同次座標系も平面と同様に定義される。

定義 2.3. 空間 \mathbb{R}^3 上の点 $A(a_1, a_2, a_3)$ に対し、

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \quad a_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_0} \quad (2.2)$$

を満たす数の組み $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ を点 A の同次座標という。

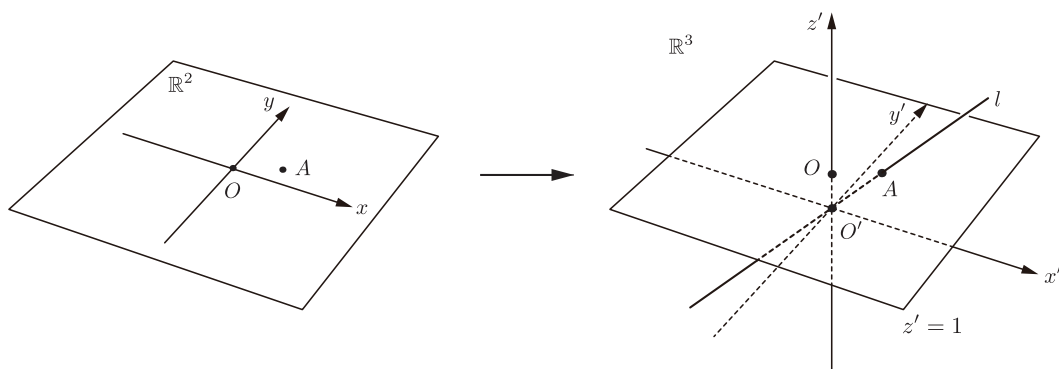


図 7 同次座標の幾何学的解釈

2.2 アフィン変換の同次座標系による表現

以後、同次座標 $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ を列ベクトルとして表すときは

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

と角括弧で表すとする。同次座標の性質より

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\alpha_1 \\ t\alpha_2 \\ t\alpha_3 \\ t\alpha_0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

である (ただし $t \neq 0$)。

2.2.1 平行移動

ここでは、 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 方向への平行移動

$$f_{\vec{u}} : \vec{a} \mapsto \vec{a} + \vec{u}$$

が同次座標系でどう表されるか考える。

点 A の直交座標を (a_1, a_2, a_3) 、同次座標を $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ とする (つまり $a_i = \alpha_i / \alpha_0$)。このとき、

$$f_{\vec{u}}(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + u_1 \\ a_2 + u_2 \\ a_3 + u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 / \alpha_0 + u_1 \\ \alpha_2 / \alpha_0 + u_2 \\ \alpha_3 / \alpha_0 + u_3 \end{pmatrix}.$$

これを同次座標になおし、同次座標の性質を用いると、

$$f_{\vec{u}}(A) = \begin{bmatrix} \alpha_1/\alpha_0 + u_1 \\ \alpha_2/\alpha_0 + u_2 \\ \alpha_3/\alpha_0 + u_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_0 u_1 \\ \alpha_2 + \alpha_0 u_2 \\ \alpha_3 + \alpha_0 u_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

となる。このとき右辺は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

と、行列の積で表すことができる。

平行移動の同次座標表示

点 A の同次座標を $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ とする。このとき、 \vec{u} 方向への平行移動は $f_{\vec{u}}$ は

$$f_{\vec{u}}(A) = \left(\begin{array}{ccc|c} E_3 & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

と表すことができる。

問題 2.1. \vec{u}, \vec{v} を空間ベクトルとする。このとき、以下の問に答えなさい。

(1) 4 次正方行列の積 $\left(\begin{array}{ccc|c} E_3 & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} E_3 & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ を求めなさい。

(2) 4 次正方行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} E_3 & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ の逆行列を求めなさい。

2.2.2 線形変換

ここでは、3 次正方行列 $M = (m_{ij})$ に対し、線形変換

$$f_M : \vec{a} \mapsto M\vec{a}$$

が同次座標系でどう表されるか考える.

点 A の直交座標を (a_1, a_2, a_3) , 同次座標を $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ とする (つまり $a_i = \alpha_i/\alpha_0$). このとき,

$$f_M(A) = M \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 m_{1j} a_j \\ \sum_{j=1}^3 m_{2j} a_j \\ \sum_{j=1}^3 m_{3j} a_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 (m_{1j} \alpha_j)/\alpha_0 \\ \sum_{j=1}^3 (m_{2j} \alpha_j)/\alpha_0 \\ \sum_{j=1}^3 (m_{3j} \alpha_j)/\alpha_0 \end{pmatrix}.$$

これを同次座標になおし, 同次座標の性質を用いると,

$$\begin{aligned} f_M(A) &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^3 (m_{1j} \alpha_j)/\alpha_0 \\ \sum_{j=1}^3 (m_{2j} \alpha_j)/\alpha_0 \\ \sum_{j=1}^3 (m_{3j} \alpha_j)/\alpha_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^3 m_{1j} \alpha_j \\ \sum_{j=1}^3 m_{2j} \alpha_j \\ \sum_{j=1}^3 m_{3j} \alpha_j \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる.

線形変換の同次座標表示

点 A の同次座標を $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ とする. このとき, 3 次正方行列 M が生成する線形変換 f_M は

$$f_M(A) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

と表すことができる.

問題 2.2. M, N を 3 次正方行列とする. このとき, 以下の問に答えなさい.

(1) 4 次正方行列の積 $\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & N & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ を求めなさい.

(2) M が正則行列のとき, 4 次正方行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ の逆行列を求めなさい.

2.3 アフィン変換

M を 3 次正方行列, \vec{u} を空間ベクトルとすると, アフィン変換

$$f: \vec{a} \mapsto M\vec{a} + \vec{u}$$

は線形変換 f_M と平行移動 $f_{\vec{u}}$ の合成変換 $f = f_{\vec{u}} \circ f_M$ である. したがって, 2.1 節, 2.2 節の結果から以下のことがわかる.

アフィン変換の同次座標表示

点 A の同次座標を $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ とする. このとき, 3 次正方行列 M および空間ベクトル \vec{u} が生成するアフィン変換 $f(\vec{a}) = M\vec{a} + \vec{u}$ は

$$f(A) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \vec{u} \\ & M & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

と表すことができる.

問題 2.3. M を 3 次正方行列, \vec{u} を空間ベクトルとする. このとき, 4 次正方行列の積

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \vec{u} \\ & E_3 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ および } \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \vec{u} \\ & E_3 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

を求めなさい.

問題 2.4. M を正則な 3 次正方行列, \vec{u} を空間ベクトルとする. このとき, 4 次正方行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \vec{u} \\ & M & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

の逆行列を求めなさい.

3 透視投影の同次座標系による表現

3.1 yz -平面への透視投影

視点が $V(v_1, v_2, v_3)$ 、投影面が yz -平面の透視投影 Φ_V を考える。 yz -平面を方程式で表すと $x = 0$ であるから、 Φ_V は (1.10) において、 $\vec{n} = (1, 0, 0)$ 、 $d = 0$ を代入した式で与えられる。 $P(p_1, p_2, p_3)$ に対し、

$$\begin{aligned}\Phi_V(P) &= \vec{p} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{(\vec{v} - \vec{p}) \cdot \vec{n}} (\vec{v} - \vec{p}) \\ &= (p_1, p_2, p_3) - \frac{p_1}{v_1 - p_1} (v_1 - p_1, v_2 - p_2, v_3 - p_3) \\ &= (p_1, p_2, p_3) - \left(p_1, \frac{p_1(v_2 - p_2)}{v_1 - p_1}, \frac{p_1(v_3 - p_3)}{v_1 - p_1} \right) \\ &= \left(0, \frac{p_2(v_1 - p_1) - p_1(v_2 - p_2)}{v_1 - p_1}, \frac{p_3(v_1 - p_1) - p_1(v_3 - p_3)}{v_1 - p_1} \right) \\ &= \left(0, \frac{p_2 v_1 - p_1 v_2}{v_1 - p_1}, \frac{p_3 v_1 - p_1 v_3}{v_1 - p_1} \right)\end{aligned}$$

となる。これを同次座標で表すと

$$\begin{aligned}\Phi_V(P) &= \left(0 : \frac{p_2 v_1 - p_1 v_2}{v_1 - p_1} : \frac{p_3 v_1 - p_1 v_3}{v_1 - p_1} : 1 \right) \\ &= (0 : p_2 v_1 - p_1 v_2 : p_3 v_1 - p_1 v_3 : v_1 - p_1).\end{aligned}$$

ここで、 V, P の同次座標をそれぞれ $(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0), (\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_0)$ とすると、

$$\begin{aligned}\Phi_V(P) &= \left(0 : \frac{\mu_2 \sigma_1}{\mu_0 \sigma_0} - \frac{\mu_1 \sigma_2}{\mu_0 \sigma_0} : \frac{\mu_3 \sigma_1}{\mu_0 \sigma_0} - \frac{\mu_1 \sigma_3}{\mu_0 \sigma_0} : \frac{\sigma_1}{\sigma_0} - \frac{\mu_1}{\mu_0} \right) \\ &= (0 : \mu_2 \sigma_1 - \mu_1 \sigma_2 : \mu_3 \sigma_1 - \mu_1 \sigma_3 : \mu_0 \sigma_1 - \mu_1 \sigma_0) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_2 \sigma_1 - \mu_1 \sigma_2 \\ \mu_3 \sigma_1 - \mu_1 \sigma_3 \\ \mu_0 \sigma_1 - \mu_1 \sigma_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ -\sigma_0 & 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

つまり、この場合は透視投影も行列の積で表される。

yz -平面への透視投影

視点が $V(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0)$, 投影面が yz -平面である透視投影を Φ_V とする. このとき, 点 $P(\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_0)$ に対し

$$\Phi_V(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ -\sigma_0 & 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_0 \end{bmatrix}$$

と表すことができる.

問題 3.1. 視点 $V(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0)$, 投影面が次の各平面である透視投影も, 同時座標系で表すと 4 次正方行列の積で表すことができる. その 4 次正方行列を求めなさい.

- (1) xy -平面
- (2) xz -平面

例題 3.2. $V(1, 2, 3)$ を視点とし, 投影面を平面 $x = 0$ とする透視投影を Φ_V とする. 点 $P(-1, \frac{1}{2}, 1)$ に対し, 以下の問に答えなさい.

- (1) 点 V, P を同次座標で表しなさい.
- (2) 同次座標系において透視投影 Φ_V を表す 4 次正方行列を書きなさい.
- (3) 透視投影 Φ_V による点 P の像 $\Phi_V(P)$ を求め, 同次座標で表しなさい.
- (4) (3) で求めた $\Phi_V(P)$ の同次座標を直交座標に直しなさい.

解. (1) 例えば $V(1 : 2 : 3 : 1)$, $P(-2 : 1 : 2 : 2)$ など^{*1}.

(2) (1) で定めた V の同次座標に対して,
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

^{*1} 同次座標系による表し方は一意的ではない. A についても S と同様に第 4 の座標を 1 としてよいが, ここではすべての座標の値が整数となるようにした (整数の方が計算が簡単になるのため).

- (4) 同次座標から直交座標に直すには、同時座標の第 4 成分を取り除き、他の成分は第 4 成分で割った値にすればよい。したがって、 $(0, \frac{5}{4}, 2)^{*2}$ 。

問題 3.3. 視点が $V(10, 3, \frac{1}{2})$ ，投影面が平面 $x = 0$ の透視投影を Φ_V とする。6 個の点 $A(1, 1, 3)$ ， $B(-1, 1, 3)$ ， $C(-1, -1, 3)$ ， $D(1, -1, 3)$ ， $E(0, 0, \frac{3}{2})$ ， $F(0, 0, \frac{9}{2})$ を頂点とする 8 面体を Φ_V で移した像のワイヤースケッチを yz -平面に書きなさい。

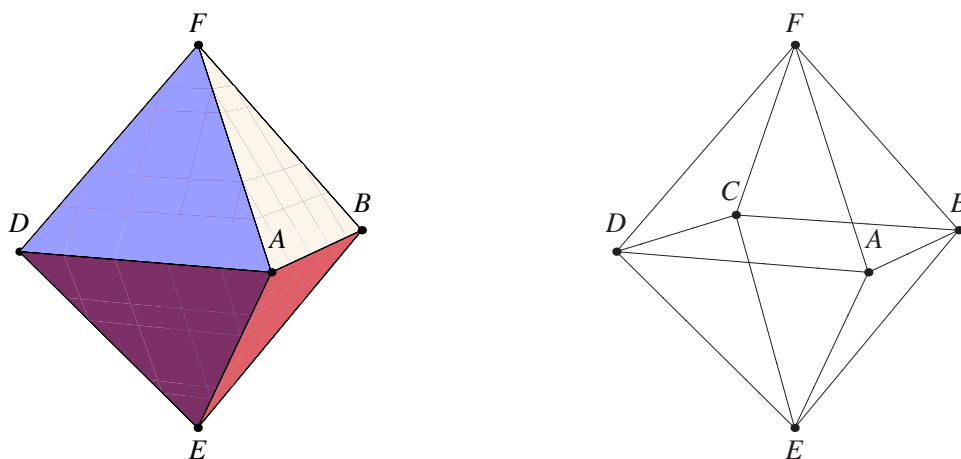


図 8 サーフェイス モデル (左) とワイヤースケッチ モデル (右)

コンピュータグラフィックスの立体表現手法

- ワイヤースケッチモデル
立体図形を、その輪郭を表す線のみで表現する手法。
- サーフェイスモデル
形状をその表面だけで表現したもの（ワイヤースケッチで作成された形状の表面に、面のデータを加えたもの）。
- ソリッドモデル
立体図形を体積を持った（中身の詰まった）3次元構造として表現。

3.2 一般の平面への透視投影

視点が $V(v_1, v_2, v_3)$ ，投影面が一般の平面 $\pi: ax + by + cz = d$ の透視投影についても、適当に座標変換することによって行列の積で表すことができる。その行列を次の 3 つの手

*2 (1) から (3) までの解は同次座標の決め方に依るが、投影像の直交座標表示は一意的に決まる。

順で求めよう。

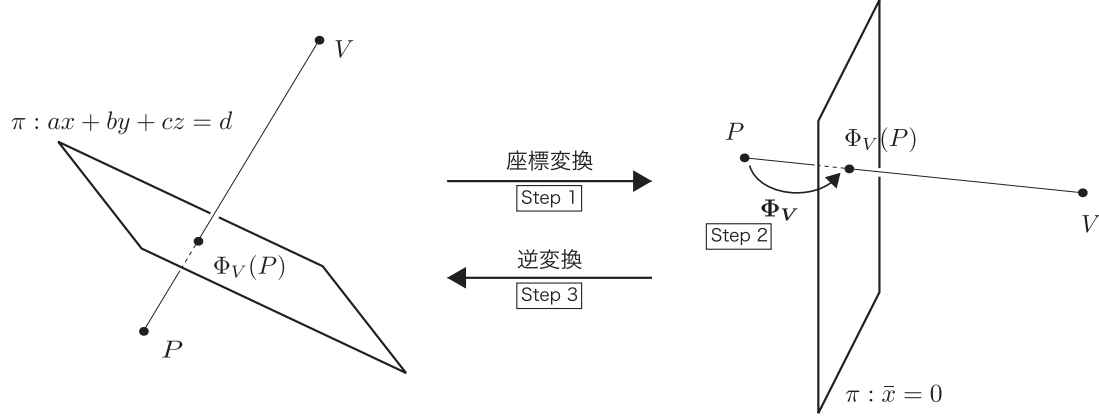


図9 一般の平面への透視投影を行列の積で表す手順

3.2.1 Step 1: どう座標変換したらよいか?

座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \vec{u} \quad (3.1)$$

によって, 方程式 $ax + by + cz = d$ が $\bar{x} = 0$ (つまり $\bar{y}\bar{z}$ -平面) となるように直交行列 M とベクトル \vec{u} を選ぶ. ここで, M の第 i 列の列ベクトルを \vec{m}_i (つまり, $M = (\vec{m}_1 \ \vec{m}_2 \ \vec{m}_3)$) とし, $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{\bar{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ とする. このとき, $ax + by + cz = d$ は

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = d \quad (3.2)$$

と書ける. (3.1) を (3.2) に代入すると

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{x} = d &\iff \vec{n} \cdot (M\vec{\bar{x}} + \vec{u}) = d \\ &\iff \vec{n} \cdot (M\vec{\bar{x}}) + \vec{n} \cdot \vec{u} = d \\ &\iff (\vec{n} \cdot \vec{m}_1 \ \vec{n} \cdot \vec{m}_2 \ \vec{n} \cdot \vec{m}_3) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \vec{n} \cdot \vec{u} = d \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる. したがって, 最後の式が $\bar{x} = 0$ となるために,

$$\vec{n} \cdot \vec{m}_1 = k (\neq 0), \quad \vec{n} \cdot \vec{m}_2 = \vec{n} \cdot \vec{m}_3 = 0 \quad (3.4)$$

を満たすように \vec{m}_i ($i = 1, 2, 3$) を選び,

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = d \quad (3.5)$$

となるように \vec{u} を選べばよい. たとえば, M については,

- $\vec{m}_1 = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n}$,
- \vec{n} に直交する単位ベクトルを適当に選び, \vec{m}_2 とする,
- $\vec{m}_3 = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2$

とすればよい.

問題 3.4. 上で述べたように直交行列 (を構成する 3 つの列ベクトル) を定めたものが, なぜ (3.4) を満たすのか, 「直交行列の定義 (性質)」と「空間ベクトルの外積の性質」を用いて説明しなさい.

例題 3.5. (3.1) のように座標変換したら, 平面 $x + y - z = 2$ の方程式が $\bar{x} = 0$ になったとする. このような変換を与える直交行列 M とベクトル \vec{u} をそれぞれ 1 つ求めなさい.

解. 平面 $x + y - z = 2$ の法線ベクトルは $\vec{n} = (1, 1, -1)$ であるから, $\vec{m}_1 = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ とする. \vec{n} に直交するベクトルとして, $(1, -1, 0)$ を選び, これを適当に定数倍して単位ベクトルにしたものを $\vec{m}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ とする. \vec{m}_3 は \vec{m}_1, \vec{m}_2 の両方に直交する単位ベクトルであるから $\vec{m}_3 = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$. したがって,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

(3.5) を満たす \vec{u} は, たとえば $\vec{u} = (1, 1, 0)$ など.

問題 3.6. (3.1) のように座標変換したら, 平面 $3x - 4y + 5z = 6$ の方程式が $\bar{x} = 0$ になったとする. このような変換を与える直交行列 M とベクトル \vec{u} をそれぞれ 1 つ求めなさい.

3.2.2 Step 2 : $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ -座標系へ変換

Step 1 で求めた直交行列 M とベクトル \vec{u} を用いて, (3.1) 式のように $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ -座標系に変換し, この座標系で透視投影する.

視点 V , 投影する点 P の xyz -座標系に付随する同次座標をそれぞれ $(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0)$, $(\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_0)$ とする. また, 点 P, V の $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ -座標系に付随する同次座標をそれぞれ $(\bar{\sigma}_1 : \bar{\sigma}_2 : \bar{\sigma}_3 : \bar{\sigma}_0)$, $(\bar{\mu}_1 : \bar{\mu}_2 : \bar{\mu}_3 : \bar{\mu}_0)$ とする. つまり, σ_i と $\bar{\sigma}_j$ は

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \vec{u} \\ M & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

を満たすので,

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & -{}^t M \vec{u} \\ {}^t M & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

となる (μ_i と $\bar{\mu}_j$ も同様の関係式を満たす). $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ -座標系で平面 π へ透視投影した点は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\sigma}_2 & \bar{\sigma}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{\sigma}_3 & 0 & \bar{\sigma}_1 & 0 \\ -\bar{\sigma}_0 & 0 & 0 & \bar{\sigma}_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \bar{\mu}_2 \\ \bar{\mu}_3 \\ \bar{\mu}_0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

と書ける.

3.2.3 Step 3 : xyz -座標系へ逆変換

Step 2 で求めた投影像を (3.8) の逆変換で xyz -座標系に戻す;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \vec{u} \\ M & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\sigma}_2 & \bar{\sigma}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{\sigma}_3 & 0 & \bar{\sigma}_1 & 0 \\ -\bar{\sigma}_0 & 0 & 0 & \bar{\sigma}_1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} & & & -{}^t M \vec{u} \\ {}^t M & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

以上が, 一般の平面への透視投影を行列の積の形で表すための手順である.

例題 3.7. 視点を $V(8, 9, -6)$, 投影面を $\pi : x + y - z = 2$ とする透視投影を Φ_V とする. Φ_V は同次座標において行列の積で表すことができる. その行列を求めなさい. また, この結果を利用して点 $P(3, 2, -1)$ の投影像 $\Phi_V(P)$ を求めなさい.

解. Step 1 の座標変換は例題 3.5 の結果を使う.

$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ -座標系における視点 V の同次座標を求めよう.

$${}^tM = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad -{}^tM\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

であるから, (3.8) より

$$V = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ -3 \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

したがって, $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ -座標系における Φ_V は行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 21\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 21\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & 0 & 21\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

の積である. (3.10) より, xyz -座標系における Φ_V を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 21\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 21\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & 0 & 21\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 13\sqrt{2} & -8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} & 16\sqrt{2} \\ -9\sqrt{2} & 12\sqrt{2} & 9\sqrt{2} & 18\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 15\sqrt{2} & -12\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 23\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる (これをスカラー倍した行列も同じ投影を表す). 点 $P(3:2:-1:1)$ の投影像は

$$\begin{pmatrix} 13\sqrt{2} & -8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} & 16\sqrt{2} \\ -9\sqrt{2} & 12\sqrt{2} & 9\sqrt{2} & 18\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 15\sqrt{2} & -12\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 23\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \\ 17\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{17} \\ \frac{6}{17} \\ \frac{3}{17} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

問題 3.8. 視点を $V(8, -9, 6)$, 投影面を $\pi: 3x - 4y + 5z = 6$ とする透視投影を Φ_V とする. Φ_V は同次座標において行列の積で表すことができる. その行列を求めなさい. また, この結果を利用して点 $P(3, 2, -1)$ の投影像 $\Phi_V(P)$ を求めなさい.