1 ベクトル $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{b}=(c-2)\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+(1-c)\boldsymbol{k}$ に対して, 次の問に答えなさい.【各 3 点】

(1) $\boldsymbol{a}$ と平行な単位ベクトルをすべて答えなさい. ただし, 「$\boldsymbol{a}$ と平行なベクトル」とは, $\boldsymbol{a}$ のスカラー倍として表されるベクトルのことである.

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ より, 求めるベクトルは,

$$\frac{1}{\sqrt{14}}(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}) \text{ と } -\frac{1}{\sqrt{14}}(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$$

である.
【1 点】一方だけの場合.

(2) $c=1$ のとき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ は鋭角か, 直角か, 鈍角か判定しなさい.

$c=1$ のとき, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ である. このとき

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-1)+2\times(-2)+3\times 0=-5$$

である. $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}<0$ より, θ は鈍角である.

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角が直角となるような c の値を求めなさい.

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角が直角となるのは, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ のときに限る.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=1\times(c-2)+2\times(-2)+3\times(1-c)\\&=c-2-4+3-3c=-3-2c.\end{aligned}$$

よって, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ となるのは, $\underline{c=-\frac{3}{2}}$ のときである.
【1 点】途中まで計算が正しく, 条件 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ を使っている.

(4) $c=3$ のとき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を求めなさい.

$c=3$ のとき, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ である. このとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&3\\1&-2&-2\end{vmatrix}\\&=(2\times(-2)-3\times(-2))\,\boldsymbol{i}\\&\quad+(3\times1-1\times(-2))\,\boldsymbol{j}\\&\quad+(1\times(-2)-1\times 2)\,\boldsymbol{k}=\underline{2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}}.\end{aligned}$$

【1 点】定義が正しく, 途中まで計算が正しい.

2 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)=t\,\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\frac{1}{t}\boldsymbol{k}$ の $t=1$ から $t=2$ までの定積分を求めなさい.【3 点】

$$\begin{aligned}&\int_1^2\left(t\,\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\frac{1}{t}\boldsymbol{k}\right)dt\\&=\left(\int_1^2 t\,dt\right)\boldsymbol{i}-\left(\int_1^2 dt\right)\boldsymbol{j}+\left(\int_1^2\frac{1}{t}\,dt\right)\boldsymbol{k}\\&=\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2\boldsymbol{i}-[t]_1^2\,\boldsymbol{j}+[\log t]_1^2\,\boldsymbol{k}\\&=\frac{4-1}{2}\boldsymbol{i}-(2-1)\,\boldsymbol{j}+\log 2\,\boldsymbol{k}\\&=\underline{\frac{3}{2}\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\log 2\,\boldsymbol{k}}.\end{aligned}$$

3 次の (1)〜(10) の空欄に当てはまる最も適切なものを

(ア) スカラー **(イ)** スカラー場 **(ウ)** 0（スカラー）
(エ) ベクトル **(オ)** ベクトル場 **(カ)** $\mathbf{0}$（零ベクトル）
(キ) 一般には定義不可能

の中から選びなさい. ただし, ここで「ベクトル（場）」という場合は, 3 次元空間における空間ベクトル（場）を指すものとする.【各 1 点】

(1) 2 つのベクトルの内積は, **(ア)** である.

(2) 2 つのベクトルの外積は, **(エ)** である.

(3) スカラー場の勾配は, **(オ)** である.

(4) スカラー場の発散は, **(キ)** である.

(5) スカラー場の回転は, **(キ)** である.

(6) ベクトル場の勾配は, **(キ)** である.

(7) ベクトル場の発散は, **(イ)** である.

(8) ベクトル場の回転は, **(オ)** である.

(9) 2 つのベクトル場の内積は, **(イ)** である.

(10) スカラー場の勾配の回転は, **(カ)** である.

4 スカラー場

$$\varphi(x,y,z) = x^2y - xz + \log y$$

とベクトル場

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = (2xy^2 - yz)\,\boldsymbol{i} + (x^2y+1)\,\boldsymbol{j} - xy\,\boldsymbol{k}$$

に対し，次の問に答えなさい．【各 3 点】

(1) φ の勾配を求めなさい．

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\varphi =& \nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\varphi \\ =& \underline{(2xy - z)\,\boldsymbol{i} + \left(x^2 + \frac{1}{y}\right)\boldsymbol{j} - x\,\boldsymbol{k}.}\end{aligned}$$

(2) φ の勾配の発散を求めなさい．

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi =& \nabla\cdot\mathrm{grad}\varphi \\ =& \nabla\cdot\left\{(2xy - z)\,\boldsymbol{i} + \left(x^2 + \frac{1}{y}\right)\boldsymbol{j} - x\,\boldsymbol{k}\right\} \\ =& \underline{-\frac{1}{y^2} + 2y.}\end{aligned}$$

【1 点】(1) は正しくないが，(2) の計算は正しい．

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転を求めなさい．

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{A} =& \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ =& \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2 - yz & x^2y+1 & -xy \end{vmatrix} \\ =& \underline{-x\,\boldsymbol{i} + (-2xy + z)\,\boldsymbol{k}.}\end{aligned}$$

(4) $\boldsymbol{A}$ の回転の発散を求めなさい．

任意のベクトル場に対し，その回転の発散は，各点に零ベクトル $\boldsymbol{0}$ を対応させるベクトル場である．
【1 点】(3) は正しくないが，(4) の計算は正しい．

(5) ベクトル場 $\varphi\boldsymbol{A}$ の回転を求めなさい．ただし，$\varphi\boldsymbol{A}$ は，点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ に対し，$\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の $\varphi(x,y,z)$ 倍を対応させるベクトル場である．

一般に，

$$\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad}\varphi\times\boldsymbol{A} + \varphi\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$$

が成り立つ．(1) の結果から，$\boldsymbol{A} = y\,\mathrm{grad}\varphi$ と書けることがわかる．つまり，$\boldsymbol{A}$ と $\mathrm{grad}\varphi$ は平行なので，

$$\mathrm{grad}\varphi\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．よって，(3) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{A}) =& \varphi\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} \\ =& (x^2y - xz + \log y)\{-x\,\boldsymbol{i} + (-2xy + z)\,\boldsymbol{k}\} \\ =& -x(x^2y - xz + \log y)\,\boldsymbol{i} \\ &+ (-2xy + z)(x^2y - xz + \log y)\,\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

となる．
【1 点】公式 $\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad}\varphi\times\boldsymbol{A} + \varphi\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ を活用している．