1 変数関数の極値

- 極値とは？
  → 局所的な最大値, または最小値のこと.
- $f(a)$ が関数 $f(x)$ の極大値 $\iff$ 「$0 < |h| < \varepsilon$ ならば, $f(a) > f(a+h)$」
  $f(a)$ が関数 $f(x)$ の極小値 $\iff$ 「$0 < |h| < \varepsilon$ ならば, $f(a) < f(a+h)$」
- 極大値と極小値を合わせて「極値」という.
- 極値とは, 「関数の増減が入れかわる点」と解釈できる.

例）$f(x)$ が $x = a$ で極大値をとるならば,

◦ $h < 0$ ならば $f(a+h) < f(a)$, つまり $0 < \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)$

◦ $h > 0$ ならば $f(a) > f(a+h)$, つまり $0 > \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)$

$\boxed{\text{定理 1. (i)}}$ 「$f(x)$ が $x = a$ で極値をとる」 $\Longrightarrow$ $f'(a) = 0$

1 変数関数の極値（判定条件）

$\boxed{\text{定理 1. (i)}}$ 「$f(x)$ が $x = a$ で極値をとる」 $\Longrightarrow$ $f'(a) = 0$

- 主張の逆『$f'(a) = 0$ $\Longrightarrow$「$f(x)$ が $x = a$ で極値をとる」』は正しくない！

例）$f(x) = x^3$ は $f'(0) = 0$ を満たすが, 単調増加関数 （教科書 p.33）

- $f'(a) = 0$ のとき, テイラーの定理より, $x = a$ のまわりで

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c_x)}{2}(x-a)^2$$

  ◦ c_x は, a と x の間にある数.（平均値の定理を思い出そう）
  ◦ x が a に十分近い値ならば, c_x も当然 a に十分近い値である.
  ◦ $f''(a) < 0$ ならば, $f''(x)$ の連続性より, $f''(c_x) < 0$. $\therefore f(x) < f(a)$

$\boxed{\text{定理 1. (ii)}}$ $f'(a) = 0$ かつ $\begin{cases} f''(a) < 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極大値} \\ f''(a) > 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$

導関数 $F'(x)$ の符号と関数 $F(x)$ の増減

- ある区間で $f'(x) \begin{cases} > 0 & \Longrightarrow \quad f(x) \text{ は増加関数} \\ < 0 & \Longrightarrow \quad f(x) \text{ は減少関数} \end{cases}$

- 同様に,
  ある区間で $f''(x) \begin{cases} > 0 & \Longrightarrow \quad f'(x) \text{ は増加関数} \\ < 0 & \Longrightarrow \quad f'(x) \text{ は減少関数} \end{cases}$

  ⋮

2 次導関数の符号と関数の凸（凹）性

- ある区間で $f''(x) \begin{cases} > 0 & \Longrightarrow \quad f(x) \text{ は凸関数（下に凸）} \\ < 0 & \Longrightarrow \quad f(x) \text{ は凹関数（上に凸）} \end{cases}$ （p.70 定理 2.）

（「関数の凹凸」の定義と幾何的な意味は, 教科書 p.70 を参照）

- 関数の凹凸が入れかわる点 $(a, f(a))$ を「$y = f(x)$ の変曲点」という.

2 変数関数の極値

- $f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の極大値
  $\iff$ 「$0 < |h|, |k| < \varepsilon$ ならば, $f(a,b) > f(a+h, b+k)$」
  $f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の極小値
  $\iff$ 「$0 < |h|, |k| < \varepsilon$ ならば, $f(a,b) < f(a+h, b+k)$」
- $f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の極値
  $\iff$（任意の h,k に対し）$F(t) = f(a+ht, b+kt)$ は, $t = 0$ で極値をとる.

$\boxed{\text{定理 1.}}$ を上の $F(t)$ に適用してみる. （定理 2. [I]）

(i)（任意の h,k に対し）$F(t)$ が $t = 0$ で極値をとる.

$\Longrightarrow$（任意の h,k に対し）$F'(0) = 0$

$\iff$（任意の h,k に対し）$f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k = 0$

$\iff$ $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

2 変数関数の極値（判定条件）

$\boxed{\text{定理 1.}}$ を上の $F(t)$ に適用してみる. （定理 2. [II]）

(ii)（任意の h,k に対し）$F'(0) = 0$ かつ $\begin{cases} F''(0) < 0 & \Longrightarrow \quad F(0) \text{ は極大値} \\ F''(0) > 0 & \Longrightarrow \quad F(0) \text{ は極小値} \end{cases}$

- 合成関数の微分の公式より,

$$F''(0) = f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2 \quad (\leftarrow \text{平方完成する})$$

$$= f_{xx}(a,b)\left\{\left(h + \frac{f_{xy}(a,b)}{f_{xx}(a,b)}\cdot k\right)^2 - \frac{\{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)}{\{f_{xx}(a,b)\}^2}\cdot k^2\right\}$$

- $D(a,b) > 0$ のとき：h,k の選び方によって $F''(0)$ を正にも負にもできる.
- $D(a,b) < 0$ のとき：$f(a,b)$ は極値となる.
- $D(a,b) = 0$ のとき：$f(a,b)$ が極値か否かは判定できない.
  例）$f(x,y) = x^4 \pm y^4$（$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ かつ $D(0,0) = 0$ を満たす）.