線形代数 I 演習

― 第 5 回 行列のブロック分割，正則行列 ―

担当：佐藤 弘康

□ 連絡事項

- 未発表問題：3.2(2), 3.3, 3.4, 3.6, 3.8, 3.9, 4.1〜4.4
- この授業に関する情報を携帯電話からも参照できるようにしました．
  http://www.math.tsukuba.ac.jp/~hiroyasu/2005/m/
- 6 月 22 日は出張で不在のため休講にします．

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ)．

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} とはどのような行列か．

(2) 正則行列とはどのような行列のことか．

問題 5.1. 次の行列が正則であるかどうか調べ，正則ならば逆行列を求めよ (ただし，$a \in \mathbf{R}$ は定数)．

(1) $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & a-1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 5.2. 次の行列

$$I = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して，$I^2, J^2, K^2, IJ, JK, KI$ を計算せよ．

問題 5.3. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

について，$2A^3 - 3A^2$ を求めよ．

問題 5.4. $A \in M(n, \mathbf{R})$ に対して，$AX = O$ となる $X \in M(n, \mathbf{R})$ (ただし $X \neq O$) が存在するならば，A は正則行列ではないことを示せ.

問題 5.5. 冪零行列は正則行列か？

問題 5.6. n 次正方行列 A と B が可換 (すなわち $AB = BA$) であるとする．このとき，${}^tA$ と ${}^tB$ も可換であることを証明せよ．また，A が正則ならば A^{-1} と B も可換で，A, B が共に正則ならば A^{-1} と B^{-1} も可換であるこを証明せよ.

問題 5.7. $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ に対して，$(E_n - AB)$ が正則行列ならば，$E_n - BA$ も正則行列で

$$(E_n - BA)^{-1} = E_n + B(E_n - AB)^{-1}A$$

となることを証明せよ.