

行列式の基本性質

[性質 1] $|A'| = |A|$ (つまり, 行に関する性質は, 列についても成立する)

[性質 2] ★ 1 つの行 (列) を c 倍した行列式の値は, もとの行列式の c 倍になる.

[性質 3]

[性質 4] ★ 2 つの行 (列) を入れ替えた行列式は, 元の行列式の (-1) 倍に等しい.

[性質 5]

[性質 6] ★ 1 つの行 (列) の c 倍を他の行 (列) に加えた行列式の値は, 元の行列式の値に等しい.

[性質 7] $|AB| = |A||B|$

クォータ科目「数学」第 12 回 (担当: 佐藤 弘康) 1/4

【復習】行列の基本変形

「行列式の基本性質 2, 4, 6」は, 「行列の基本変形」と関連している.

→ 行列式の計算に, 行列の基本変形を活用することができる.

行列の基本変形

基本行列 M ((a) $A(i, j: c)$, (b) $P(i, j)$, (c) $M(i: c)$) を行列 A に左 (右) からかけた行列 MA (AM) は, A の

- (a) 第 j 行 (第 i 列) の c 倍を第 i 行 (第 j 列) に加えた行列
→ [性質 6] に対応
- (b) 第 i 行 (列) と第 j 行 (列) を入れ換えた行列
→ [性質 4] に対応
- (c) 第 i 行 (列) を c 倍した行列
→ [性質 2] に対応

クォータ科目「数学」第 12 回 (担当: 佐藤 弘康) 2/4

行列の基本変形と行列式

- [性質 7] を用いて理解することもできる. 基本行列の行列式はそれぞれ

○ $|A(i, j: c)| = 1$ 例) $|A(1, 2: c)| = \begin{vmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

○ $|P(i, j)| = -1$ 例) $|P(1, 2)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

○ $|M(i: c)| = c$ 例) $|M(2: c)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = c$

よって,

$$|A(i, j: c)A| = |A|, \quad |P(i, j)A| = -|A|, \quad |M(i: c)A| = c|A|.$$

クォータ科目「数学」第 12 回 (担当: 佐藤 弘康) 3/4

行列の基本変形と行列式 (計算方法)

方針

- 行列式の [性質 2, 4, 6] を用いて, 行列式を簡単な行列式に変形する.
- 例えば, 0 成分が多い行列に変形する ([性質 6] が重要な役割を果たす).
- 三角行列の行列式は, 対角成分の積に等しい. (p.135 例 5 を参照)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角行列

- 一般の n 次正方行列の行列式も, 同様の方法で計算できる

クォータ科目「数学」第 12 回 (担当: 佐藤 弘康) 4/4