線形代数 I 演習

― 第 9 回 正則行列 ―

担当：佐藤 弘康

基本問題 以下のことを確認せよ.

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} とはどのような行列か.

(2) 正則行列とはどのような行列のことか.

(3) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

問題 9.1. 次の行列が正則であるかどうか調べ，正則ならば (9.1) を用いて逆行列を求めよ (ただし，$a, b \in \mathbf{R}$ は定数).

(1) $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & a-1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

問題 9.2. 公式 (9.1) および行列のブロック分割を用いて，次の正則行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

問題 9.3. 次の命題のうち，正しいものには証明を与え，正しくないものには反例を与えよ.

(1) $A \in M(n, \mathbf{R})$ が正則ならば，${}^tA$ も正則である.

(2) $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ が正則ならば，AB も正則である.

(3) $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ が正則ならば，$A + B$ も正則である.

問題 9.4. $A \in M(n, \mathbf{R})$ に対して，$AX = O$ となる $X \in M(n, \mathbf{R})$ (ただし $X \neq O$) が存在するならば，A は正則行列ではないことを示せ.

問題 9.5. 冪零行列は正則行列か？

■ 連立方程式

未知数 x, y に関する連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{9.2}$$

を考えよう．$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおけば，上の連立方程式は行列とベクトルの方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{9.3}$$

に書き換えることができる．つまり，(9.2) の解 x, y を求めることと (9.3) を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めることは同値である．

もしも A が正則ならば，(9.3) の両辺に左から A^{-1} をかけることで

$$\boldsymbol{x} = (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

となり，方程式の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ であることがわかる．

問題 9.6. 上の方法を用いて，次の連立方程式の解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

■ 線形独立

平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して，

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{9.4}$$

を満たすスカラーが $(x, y) = (0, 0)$ だけのとき，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立であると定義した．ベクトルの方程式 (9.4) は両辺の各成分を比較することで連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

と同値であり，また $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおけば，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{9.5}$$

と同値である．

もしも行列 A が正則ならば，(9.5) の両辺に左から A^{-1} をかけることで $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ となり，(9.5) の解，すなわち (9.4) の解は $(0, 0)$ だけであることがわかり，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立となる．つまり，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の成分を並べてできる行列 A が正則行列ならば，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立である．