

解析 I 演習 2 学期末試験

担当：佐藤 弘康

問 1. 3 つのベクトル関数 $a(t), b(t), c(t)$ が, 任意の t に対し長さが 1 で

$$a(t) \times b(t) = c(t), \quad b(t) \times c(t) = a(t)$$

を満たすとする. このとき, $a'(t), b'(t), c'(t)$ は 1 次従属であることを示せ.

問 2. $\mathbf{R}^3 - \{(a, b, c)\}$ 上で定義されたスカラー場

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

について以下の問に答えよ.

- (1) $X = \text{grad } f$ を求めよ.
- (2) (1) の X に対し, $\text{rot } X$ を求めよ.
- (3) (1) の X に対し, $\text{div } X$ を求めよ.

問 3. C を $r(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1 - 2 \cos \theta - \sin \theta)$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ でパラメータ表示される閉曲線とするととき,

$$\int_C x^2 dx + (x^3 + y)dy + z dz$$

の値を求めよ.

問 4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ の原点の側を裏とする曲面を S とするとき,

$$\int_S x dy \wedge dz + 2y dx \wedge dz + 3z dx \wedge dy$$

の値を求めよ.

問 5. 解析 I(2 学期) の講義と演習の内容に関して, 深く印象に残ったこと (方法や定理など何でもよい) をひとつあげて, その理由を具体的に述べよ.