□ 復習（行列の転置）

問題 5.4. 次の行列 A, B に対して，(i) ${}^tA$，(ii) ${}^tB$，(iii) AB，(iv) ${}^t(AB)$，(v) ${}^tB\,{}^tA$ を計算しなさい[*1].

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

問題 5.5. 次の問に答えなさい.

(1) 次のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対し，ベクトルの長さ $|\vec{a}|^2, |\vec{b}|^2, |\vec{c}|^2$，および内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}, \vec{b}\cdot\vec{c}, \vec{a}\cdot\vec{c}$ を計算しなさい.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) 次の行列 A に対し[*2]，行列の積 ${}^tA\,A$ を求めなさい.

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) (1) で計算した値と，(2) で求めた行列の成分を比較し，

$$ {}^tA\,A = \begin{pmatrix} |\vec{a}|^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & |\vec{b}|^2 & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} & |\vec{c}|^2 \end{pmatrix} $$

が成り立っていることを確かめなさい.

[*1] 一般に ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つ.

[*2] (2) の行列 A は (1) のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を並べてできる行列である.

□ 直交行列

問題 5.6. 次の行列 A に対し，${}^tA\,A = A\,{}^tA = E_3$ が成り立つこと を計算して確かめなさい．また A の行列式 を求めなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ [*3]

問題 5.7. （鏡映変換を与える行列について）[*4] 行列

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$ [*5]

が定める線形変換について，以下の問に答えなさい．

(1) S_θ が直交行列であることを確かめなさい．

(2) $\vec{p} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に対し，線形変換 S_θ による像 $S_\theta\vec{p}$ を X, Y, θ を用いて表しなさい．

(3) $\vec{p}$ と $S_\theta\vec{p}$ の中点 $\vec{m}$ を X, Y, θ を用いて表しなさい．

(4) $\vec{m}$ は直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ 上の点であることを示しなさい．

(5) ベクトル

$$\vec{p} - S_\theta\vec{p}$$

は直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \tan\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ と直交することを示しなさい．[*6]．

[*3] y 軸を回転軸とする θ-回転．

[*4] 発展問題．ぜひチャレンジしてください．

[*5] 回転変換を与える行列 $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ との成分の符号の違いに注意せよ．

[*6] (4)(5) の結果から，S_θ は直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称変換を与える．