情報数学 III 中間試験 解答

部分点について

- 式変形の過程や説明がなく，解（正答）のみを書いたものは 1 点のみ加点．しかし，明らかに当てずっぽうで書いたと判断したものは加点しない．
- 式や説明の中に不正確な記述がある場合は 1 点減点．
- 解以外の記述があるが，説明になっていない場合は 2 点減点．
- $\boxed{3}$ (2) は (1) が不正解でも，「直交行列の逆行列はその転置行列に等しい」ことを理解していると判断されるものは 2 点．
- $\boxed{4}$ (3) は 2 次回転行列の一般形が正しく書いてある場合は 2 点．
- $\boxed{4}$ (4) は l' のパラメーター表示が正しく書かれていれば 2 点．
- $\boxed{5}$ は 6 点とします．
- $\boxed{5}$ を連立方程式を用いて解く場合，正しい連立方程式を導き出せていれば 2 点．

$\boxed{1}$ **（1 時限）**

(1) ベクトルの内積の定義を述べなさい．

「ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ に対して，

$$\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$

で決まる実数のこと．ただし，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角」．もちろん，成分を用いた定義（教科書の (1.32) および (1.37)）でもよい．

(2) ベクトル $\boldsymbol{\vec{a}=(1,2,3)}$ と $\boldsymbol{\vec{b}=(2,\alpha,\beta)}$ に対し，$\boldsymbol{\vec{a}}$ と $\boldsymbol{\vec{b}}$ の外積 $\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ が零ベクトルであるとする．このとき，$\boldsymbol{\alpha,\beta}$ の値を求めなさい．

外積を計算して，それが $(0,0,0)$ となるような α,β を求めればよい．答えは $\underline{\alpha=4,\ \beta=6}$．また，$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ となるのは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行のときに限ることから，外積を計算しなくても解を得ることができる（$\vec{a},\vec{b}$ の第 1 成分がそれぞれ 1, 2 であることから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行ならば $\vec{b}=2\vec{a}$ となる）．

（2 時限）

(1) 空間ベクトルの外積の定義を述べなさい．

直交座標系で $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ と成分表示されるベクトルに対し，

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

で定義されるベクトルのこと．

(2) ベクトル $\boldsymbol{\vec{a}=(1,2,3)}$ と $\boldsymbol{\vec{b}=(2,-k,2k)}$ が直交しているとする．このとき，$\boldsymbol{k}$ の値を求めなさい．

条件から $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は 0 であるから，

$$(\vec{a},\vec{b})=2-2k+6k=2+4k=0.$$

したがって，$\underline{k=-\frac{1}{2}}$．

$\boxed{2}$ （共通）

$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$-座標系において点 P の座標が $(1,2)$ であるとは，

$$\overrightarrow{OP}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$$

が成り立つことである．

(1) $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$-座標系において $O'(-5,2)$ であるから，$\overrightarrow{OO'}=-5\vec{e}_1+2\vec{e}_2$．$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'P}&=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OO'}\\&=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-(-5\vec{e}_1+2\vec{e}_2)\\&=6\vec{e}_1\ (=6\vec{e}_1+0\vec{e}_2).\end{aligned}$$

したがって，$\{O';\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$-座標系における P の座標は $\underline{(6,0)}$ である．

(2) $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ と $\{\vec{f}_1,\vec{f}_2\}$ の関係式を $\overrightarrow{OP}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=(2\vec{f}_1+\vec{f}_2)+2(\vec{f}_1+\vec{f}_2)\\&=4\vec{f}_1+3\vec{f}_2.\end{aligned}$$

したがって，$\{O;\vec{f}_1,\vec{f}_2\}$-座標系における点 P の座標は $\underline{(4,3)}$ である．

$\boxed{3}$ （共通）

(1) ${}^tA\,A$ を計算し，${}^tA\,A=E$ となるための k の値を求めればよい．答えは $\underline{k=-\frac{2}{\sqrt{6}}}$ である．

(2) 直交行列の逆行列は ${}^tA$ である．したがって，

$$A^{-1}={}^tA=\underline{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}}.$$

$\boxed{4}$

(1) 方向ベクトルを $\overrightarrow{AB}=(-3,-1)$ とすると，l は点 A を通るので，l 上の点は

$$(1,2)+t(-3,-1)=\underline{(1-3t,2-t)}$$

と表せる．

(2) 点 (a_1, a_2) が直線 l 上の点であるとは，

$$(a_1, a_2) = (1-3t, 2-t)$$

を満たす実数 t が存在することと同値である．

(1 時限)：$(-5, 0)$
第 1 座標を比較すると，$-5 = 1-3t$ より，$t = 2$ を得る．これは第 2 座標の方程式 $2-t=0$ も満たすので，$(-5,0)$ は l 上の点である．

(2 時限)：$(-1, 3)$
第 1 座標を比較すると，$-1 = 1-3t$ より，$t = \frac{2}{3}$ を得る．しかし，これは第 2 座標の方程式 $2-t=3$ を満たさない．したがって，$(-1,3)$ は l 上の点ではない．

(3) $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) l 上の点 $\vec{p}$ は (1) のようにパラメーター表示できるので，

$$\begin{aligned} f(\vec{p}) =& \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-3t \\ 2-t \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1-2t \\ 3-4t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

このことから，l' は直線である．この直線上の点を (x,y) とおくと，$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-2t)$，$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(3-4t)$．この 2 式から t を消去すると，$2x - y = -\frac{5}{\sqrt{2}}$．

$\boxed{5}$ （おまけ）

(1 時限)　2 点 $A(1,1), B(2,-1)$ の g による像 $A' = g(A), B' = g(B)$ の座標がそれぞれ $A'(3,-1), B'(0,5)$ である．

線形変換 g の表現行列を $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおく．
$g(1,1) = (3,-1)$ より，

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ z+w \end{pmatrix}.$$

同様に，$g(2,-1) = (0,5)$ より，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ 2z-w \end{pmatrix}.$$

したがって，x, y, z, w は連立方程式

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z+w=-1 \\ 2z-w=5 \end{cases}$$

の解である．これを解くと $x = 1, y = 2, z = \frac{4}{3}, w = -\frac{7}{3}$．
したがって，$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$．

(2 時限)　2 点 $A(1,-1), B(1,2)$ の g による像 $A' = g(A), B' = g(B)$ の座標がそれぞれ $A'(-1,5), B'(5,-4)$ である．

上の解法とは別の方法で解く．問題の条件より，

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

これをひとつの式で表すと

$$M\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

と書ける（線形代数の「行列の（ブロック）分割」を参照）．
したがって，

$$\begin{aligned} M =& \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ =& \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

この問題からわかることは，「**f を平面の線形変換とする．このとき，2 点 $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，$f(\vec{a}), f(\vec{b})$ がわかれば，f が完全に決定される（ただし，$\{\vec{a}, \vec{b}\}$ が 1 次独立でなければならない）**」ということである．