□ 重積分における変数変換

- 1 変数関数の場合（置換積分）
  $x = \varphi(t)$ を $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$ を満たす 1 回微分可能関数とする．このとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

- 2 変数関数の場合
  写像 $\Phi : (u,v) \mapsto (x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ により，uv 平面上の領域 E と xy 平面上の領域 D が **1 対 1 に対応 (one-to-one correspondence)** しているとする（$x(u,v), y(u,v)$ は 1 回微分可能関数）．このとき，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

ここで，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$ ：写像 Φ のヤコビアン．

Change of variables in a multiple integral

To convert an integral from x, y to u, v coordinates we make three changes:

1. Substitute for x and y in the integrand in terms of u and v.
2. Change the xy region D into an uv region E.
3. Use the absolute value of the *Jacobian* to change the area element by making the substitution $dxdy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$.

問題演習 （アフィン変換）問題 **4.5, 4.6**（演習書 p.166, p.167）を解け．
（類似問題：教科書 p.212 演習問題 **5, 3** をアフィン変換を用いて計算せよ）

問題 **9.1.** 次の 2 重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy, \quad D = \{(x,y)\,|\,x^2 + y^2 \le a^2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (px^2 + qy^2)\,dxdy \quad (p, q \in \mathbf{R}), \quad D = \{(x,y)\,|\,x^2 + y^2 \le a^2\}$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy, \quad D=\left\{(x,y)\;\middle|\;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$

(4) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq x\}$

問題 9.2. 次の立体の体積を求めよ．Find the vlume of...

(1) 楕円体 (the ellipsoid) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$

(2) 底面積 A，高さ h の多角錐
the n-gonal pyramid with the base Area A and the height h.

(3) 2 つの円柱面 $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$ で囲まれた立体
the region bounded by the circular cylinders $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$.

(4) 円柱面 $x^2+y^2=a^2$ と 2 平面 $x+z=a$, $z=0$ で囲まれた立体
the region bounded by the circular cylinder $x^2+y^2=a^2$ and the planes $x+z=a$, $z=0$.

(5) 放物面 $x^2+y^2=4z$, 柱面 $x^2+y^2=ax$ および平面 $z=0$ で囲まれた立体
the region bounded by the paraboloid $x^2+y^2=4z$, the cylinder $x^2+y^2=ax$ and the plane $z=0$.