微積分 III 演習

－ (3) Cauchy 列，部分列 －

担当：佐藤 弘康

例題 3.1. 漸化式

$$a_1 \geq 1,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n + 1} \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{3.1}$$

で定まる数列が収束することを示し，その極限を求めよ．

解． $a_{n+1} - a_n$ を計算すると

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{a_{n-1} + 1} = -\frac{a_n - a_{n-1}}{(a_n + 1)(a_{n-1} + 1)},$$

となる．(3.1) 式より，$a_n \geq 1$ であるから

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{4}|a_n - a_{n-1}|$$

が成り立つ．この操作を繰り返すことにより

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{4^{n-1}}|a_2 - a_1|$$

を得る．したがって，任意の $m, n \in \mathbf{N}$ $(m > n)$ に対しては

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq \left(\frac{1}{4^{m-2}} + \frac{1}{4^{m-3}} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right)|a_2 - a_1| \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{4}} \cdot |a_2 - a_1| \\
&< \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \cdot |a_2 - a_1| = \frac{|a_2 - a_1|}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

となる．$b_n = \frac{|a_2 - a_1|}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は 0 に収束するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 n_ε が存在し，$n \geq n_\varepsilon$ ならば $b_n < \varepsilon$ を満たす．したがて，$\{a_n\}$ は

Cauchy 列となり，収束することがわかる．a_n の極限を a とおき，(3.1) の両辺の極限をとると

$$a = 1 + \frac{1}{a+1}.$$

この式を a について解くことにより，$a = \sqrt{2}$ を得る． $\square$

問題 3.1. 例題 3.1 の漸化式 (3.1) で定まる数列 $\{a_n\}$ が $\sqrt{2}$ に収束することを $\varepsilon - N$ 論法で証明せよ．

ヒント：$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

問題 3.2. 漸化式

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{3.2}$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ が収束することを，次の 2 つの方法で証明せよ．

(1) $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示す．
(2) 極限値を求め (予想し)，その値に収束することを $\varepsilon - N$ 論法で証明する．

問題 3.3. 任意の自然数 n ($n \geq 2$) に対し，

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c|a_n - a_{n-1}| \tag{3.3}$$

を満たす定数 c ($0 \leq c < 1$) が存在するならば，数列 $\{a_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ．

注意：この主張は例題 3.1，問題 3.2 の一般化となっている．

問題 3.4.

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列でないことを証明せよ．

問題 3.5. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき，その部分列も a に収束することを示せ．

問題 3.6. 数列 $\{a_n\}$ において，部分列 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$ がそれぞれ α, β, γ に収束するならば，$\alpha = \beta = \gamma$ であって $\{a_n\}$ も α に収束することを示せ．