# 微積分 II 演習

－ 第 4 回 関数の連続性 (2) －

担当：佐藤 弘康

**未発表問題：** 2.1, 2.3〜2.6, 2.8, 2.10(4〜7), 2.11(2, 4, 5), 2.12〜2.14, 3.1, 3.3〜3.8
(問題 3.2 を削除してください．)

**問題 4.1.** $\mathbf{R}$ の部分集合 $A$ の集積点とはどのような点か，$A$ の閉包とはどのような集合か説明せよ．

**問題 4.2.** 次の $\mathbf{R}$ の部分集合の閉包を求めよ．

(1) 自然数全体の集合 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

(2) 二乗したものが 2 以下となる有理数全体の集合

(3) $\left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \middle| \, n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$

(4) $[-1, 1)$

**問題 4.3.** $A$ を無限個の元を含む $\mathbf{R}$ の有界な部分集合とする．このとき，$A$ は必ず集積点を持つことを証明せよ．

**問題 4.4.** 次の関数が連続であることを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて示せ．

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad (x > 0)$

(2) $f(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbf{R})$

(3) $f(x) = \log x \qquad (x > 0)$

(4) $f(x) = e^{-|x|} \qquad (x \in \mathbf{R})$

(5) $f(x) = \sqrt{x} \qquad (x \geq 0)$

(6) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbf{R})$

(7) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \geq 1)$

**問題 4.5.** 関数 $g(x)$ の値域が関数 $f(x)$ の定義域に含まれるとき，実数 $x$ に対し $f(g(x))$ を対応させる関数を考えることができる．この関数を $f\circ g$ と書き，$f$ と $g$ の合成関数と呼ぶ．$f$ と $g$ がともに連続な関数ならば，$f\circ g$ も連続であることを証明せよ．

**問題 4.6.** $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上で定義された連続関数で，任意の $x\in\mathbf{R}$ に対し，

$$f(x+1)=f(x) \tag{4.1}$$

を満たすとする．このとき，次を示せ；

(1) $f$ は有界な関数で，最大値と最小値が存在する．

(2) $f(x_0+\pi)=f(x_0)$ を満たす $x_0\in\mathbf{R}$ が存在する．

**NOTE**：(4.1) 式を満たす関数を (周期 1 の)周期関数 と呼ぶ．

## □ 前回の復習と捕捉

**◇ 問題 1.7 の解**　仮定 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ より，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ が存在し，

$$n\geq n_\varepsilon \implies \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-r\right|<\varepsilon$$

が成り立つ．すなわち，

$$(r-\varepsilon)a_n<a_{n+1}<(r+\varepsilon)a_n,\ (n\geq n_\varepsilon).$$

この式を繰り返し使うことにより

$$a_{n+1}<(r+\varepsilon)a_n<\ldots<(r+\varepsilon)^{n-n_\varepsilon+1}a_{n_\varepsilon}, \tag{4.2}$$
$$a_{n+1}>(r-\varepsilon)a_n>\ldots>(r-\varepsilon)^{n-n_\varepsilon+1}a_{n_\varepsilon} \tag{4.3}$$

を得る．

$r<1$ のとき，$r+\varepsilon<1$ を満たすように $\varepsilon$ をとれば，数列 $\{(r+\varepsilon)^N\}$ は 0 に収束するから，(4.2) 式より $a_n$ が 0 に収束することがわかる．また，$a_n$ はある項から先は単調減少数列になっていることもわかる ($\varepsilon=1-r$ とおけばよい)．

一方，$r>1$ のとき，$r-\varepsilon>1$ を満たすように $\varepsilon$ をとれば，数列 $\{(r-\varepsilon)^N\}$ は正無限大に発散するから，(4.3) 式より $a_n$ が正無限大に発散することがわかる．

**注意.** $r=1$ のときは，$a_n$ が収束するとも発散するとも言えない．例えば，$a_n$ として，$\frac{1}{n}$ と $n$ をとれば，$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ は共に 1 に収束するが，前者は 0 に収束するのに対し，後者は正無限大に発散する．

◇ **問題 2.2 の解**　まず，漸化式から数列 $\{a_n\}$ は全ての $n \in \mathbf{N}$ に対して $1 \le a_n \le \frac{3}{2}$ を満たすことがわかる．数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$$

と定めると，

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} - \sqrt{2}}{a_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{1 + \frac{1}{a_n+1} - \sqrt{2}}{1 + \frac{1}{a_n+1} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{(1-\sqrt{2})a_n + 2 - \sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})a_n + 2 + \sqrt{2}} = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right) \cdot b_n \end{aligned}$$

であるから，$b_n$ は等比数列となることがわかる．さらに，公比は $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ $(<1)$ だから $\{b_n\}$ は $0$ に収束する．すなわち，任意の $\varepsilon$ に対し，ある $n_\varepsilon$ が存在し，$n \ge n_\varepsilon$ ならば，$|b_n| < \varepsilon$ を満たす．この式と $\{a_n\}$ の有界性から

$$|a_n - \sqrt{2}| < |a_n + \sqrt{2}|\varepsilon \le \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\varepsilon$$

が成り立つ．これで $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ が証明された．

(別解)　$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ と書けることに着目すると

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \sqrt{2}| &= \left| \frac{1}{a_n+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right| = \frac{|a_n - \sqrt{2}|}{(\sqrt{2}+1)(a_n+1)} \\ &< \frac{1}{\sqrt{2}+1}|a_n - \sqrt{2}| < \ldots < \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^n |a_1 - \sqrt{2}| \end{aligned}$$

を得る．数列 $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^n |a_1 - \sqrt{2}| \right\}$ が $0$ に収束することから，$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ となることがわかる．