

## 1 変数関数の積分：不定積分

### 不定積分

- 関数  $f(x)$  に対し、 $F'(x) = f(x)$  を満たす関数  $F(x)$  のことを「 $f(x)$  の原始関数」という。
- $F(x)$  が  $f(x)$  の原始関数ならば、任意の定数  $C$  を加えた関数  $F(x) + C$  も  $f(x)$  の原始関数である。  
(つまり、 $f(x)$  の原始関数は一意には決まらず、無数にある)
- $F(x) + C$  のことを「 $f(x)$  の不定積分」とよび、 $\int f(x) dx$  と書く；

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ を積分定数とよぶ})$$

クォータ科目「数学」第7回（担当：佐藤 弘康） 1/6

## 1 変数関数の積分：定積分（リーマン和）

### リーマン和

- $f(x)$ ：区間  $[a, b]$  で定義された有界な関数 ( $|f(x)| < K$ )
- 区間  $[a, b]$  を  $n$  個の小区間に分割
  - 区間内に  $(n-1)$  個の分点を選ぶ； $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$   
(このような大小関係をもつ点を「 $[a, b]$  の分割」とよび、 $\Delta$  と書く)
  - $[a, b]$  は  $I_k = [x_{k-1}, x_k] (k = 1, 2, \dots, n)$  に分割される。
  - 小区間の幅  $x_k - x_{k-1}$  の最大値を分割  $\Delta$  のノルムとよび、 $\|\Delta\|$  と書く。
- 各小区間  $I_k$  から  $\xi_k$  を適当に選ぶ (つまり、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ ) 。
- 次の和をリーマン和という；

$$R(\Delta; \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

クォータ科目「数学」第7回（担当：佐藤 弘康） 2/6

## 1 変数関数の積分：定積分（定義）

### 定積分

- $f(x)$  のリーマン和の極限

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} R(\Delta; \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

が、分割  $\Delta$  と点  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  の選び方に依らずに一定値  $I$  に収束するとき、この  $I$  を「 $f(x)$  の  $[a, b]$  における定積分」とよび、

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

と書く。

- $f(x) \geq 0$  かつ連続関数ならば、 $\int_a^b f(x) dx$  は、「平面内の曲線  $y = f(x)$  と、3つの直線  $x = a, x = b, x$  軸で囲まれた領域」の面積と解釈できる。

クォータ科目「数学」第7回（担当：佐藤 弘康） 3/6

## 1 変数関数の積分：定積分（計算方法）

### 微分積分学の基本定理

$S(x) = \int_a^x f(x) dx$  とおく。このとき、 $S'(x) = f(x)$  が成り立つ。つまり、

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x).$$

- このことから、 $S(x)$  は  $f(x)$  の原始関数のひとつである。  
つまり、 $S(x) = F(x) + C$  と書ける ( $F(x)$  は  $f(x)$  の原始関数、 $C$  は定数) 。
- (定義から)  $S(a) = 0$  と定めると、 $C = -F(a)$  である。したがって、

$$\int_a^b f(x) dx = S(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

クォータ科目「数学」第7回（担当：佐藤 弘康） 4/6

## 2 変数関数の積分：2重積分の定義

- $f(x, y)$ ：領域  $\Omega$  で定義された有界な関数 ( $|f(x, y)| < K$ )
- 領域  $\Omega$  を  $m$  個の小領域  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  に分割 ( $\Delta$ ) 。
- 各小領域  $\Omega_k$  から点  $(\xi_k, \eta_k)$  を適当に選ぶ。
- 次の和をリーマン和という；

$$R(\Delta; \{(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_m, \eta_m)\}) = \sum_{k=1}^m f(\xi_k, \eta_k) S(\Omega_k)$$

- $\Omega$  の分割  $\Delta$  を限りなく細かくしていくとき、このリーマン和が分割の仕方と点  $(\xi_k, \eta_k)$  の選び方に依らずに一定値  $I$  に近づくとき、この  $I$  を「領域  $\Omega$  における  $f(x, y)$  の2重積分」とよび、

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

と書く。

クォータ科目「数学」第7回（担当：佐藤 弘康） 5/6

## 2 変数関数の積分：累次積分（2重積分の計算）

- 累次積分とは、1変数関数の定積分の繰り返し行うこと。
- 2重積分は累次積分によって求めることができる。

### 2重積分の計算

- 領域  $\Omega$  が  $a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$  と表されるならば、

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx.$$

- 領域  $\Omega$  が  $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \alpha \leq y \leq \beta$  と表されるならば、

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy.$$

クォータ科目「数学」第7回（担当：佐藤 弘康） 6/6