線形代数 I 演習

－ (7) 行基本変形の応用（逆行列，連立 1 次方程式） －

担当：佐藤 弘康

□ 逆行列の計算

例題 7.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

解． n 次正則行列 A が行基本変形により単位行列 E_n に変形できたとしよう．つまり，

$$M_1 M_2 \cdots M_k A = E_n \tag{7.1}$$

となるような適当な基本行列 $M_1, \dots, M_k$ が存在するとする．各 M_i に対し，その行列 M_i^{-1} が存在するので，(7.1) の両辺に左から，M_1^{-1} から M_k^{-1} を順番にかけることにより $A = M_k^{-1} M_{k-1}^{-1} \cdots M_1^{-1}$ を得る．つまり，$A^{-1} = M_1 M_2 \cdots M_k$ が成り立つ．

そこで，$n \times 2n$ 行列 $\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix}$ に (7.1) と同じ行基本変形を施すと

$$\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[M_1 M_2 \cdots M_k \times]{} \begin{pmatrix} M_1 M_2 \cdots M_k A & M_1 M_2 \cdots M_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & A^{-1} \end{pmatrix}$$

となる．

以上のことから，$\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix}$ を行基本変形により $\begin{pmatrix} E_n & P \end{pmatrix}$ の形に変形したとき，P が A の逆行列 A^{-1} である（教科書 p.41）．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-4)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{13}(1)E_{23}(-7)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2(-\frac{1}{6})\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{12}(-1)E_{32}(-2)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[P_{23}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{array}\right).$$

したがって,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

問題 7.1. 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

問題 7.2. 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} -abc & bc & -c & 1 \\ ab & -b & 1 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 7.3. 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が正則行列になるための k の条件を求めよ. また, そのときの A の逆行列を求めよ.

問題 7.4. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 26 & -20 \\ 2 & 6 & -4 \\ 6 & 18 & -13 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して, PAP^{-1} を計算せよ. また, A^n (n は自然数) を求めよ.

□ 連立 1 次方程式の解法

例題 7.2. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = -4 \\ -x - y + 3z = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \tag{7.2}$$

の解を求めよ．

解. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，連立一次方程式 (7.2) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表すことができる (行列表示)．ここで，行列 $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[E_1(-1)P_{12}E_{12}(3)E_{32}(-2)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 11 & 11 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_2\left(\frac{1}{3}\right)E_{13}(-1)E_{23}(4)E_3\left(\frac{1}{3}\right)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[P_{23}E_{13}(1)E_{32}(2)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

と変形できる．これより，(7.2) の解が $x = -2, y = 0, z = 1$ であることがわかる．

<u>(別解)</u> 行列 A の逆行列が存在し，$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ であるから，

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例題 7.3. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+2y-4z=2 \\ 2x+3y+7z=1 \\ 3x+5y+3z=3 \end{cases} \tag{7.3}$$

の解を求めよ.

解. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，連立一次方程式 (7.3) は

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

と行列表示することができる．ここで，行列 $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-2)E_{31}(-3)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[E_2(-1)E_{12}(2)E_{32}(-1)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と簡約階段行列に変形できる．これは (7.3) が方程式

$$\begin{cases} x+26z=-4 \\ y-15z=3 \end{cases} \tag{7.4}$$

に簡約化できることを意味する．つまり，(7.3) の解（全体の集合）と (7.4) の解（全体の集合）は等しい．$z=k$ とおくと $x=-4-26k$，$y=3+15k$，つまり方程式 (7.3) の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } k\in\mathbf{R})$$

である.

問題 7.5. 次の方程式が解をもつかどうか調べ，解が存在するなら解を求めよ.

(1) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y - 3z - 4w = -6 \\ 2x + y + 5z + w = -6 \\ 2x + 2y + 2z - 3w = -10 \\ 3x + 6y - 2z + w = 4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 5x + 6y + 7z + 8w = 0 \\ 9x + 10y + 11z + 12w = 0 \\ 13x + 14y + 15z + 16w = 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x - 2y - 3z + w = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ -x - 3y - 2z + w = 2 \\ 4x + 7y + 3z - 2w = -3 \end{cases}$

問題 7.6. 次の方程式が解をもつための条件と，そのときの解を求めよ.

(1) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 2x + 7y - 4z = 3 \\ 3x + 7y - 6z = a \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + z - w = a \\ -x + y - z + 2w = b \\ -3x + 2y - 3z + 5w = c \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x - 4y + 10z = 1 \\ 3x - 2y - z = a \\ 5x - 4y + 2z = b \end{cases}$ (4) $\begin{cases} ax - by - z = 0 \\ x + y - az = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

問題 7.7. 次のことを証明せよ.

(1) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解ならば，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$，$c\boldsymbol{v} (c \in \mathbf{R})$ も $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解，$\boldsymbol{u}$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解ならば，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であることを示せ.

基本問題. 以下のことを確認せよ.

(1) 斉次連立 1 次方程式の自明解，非自明解（自明でない解）とは何か説明せよ.

(2) 斉次連立 1 次方程式の基本解とは何か説明せよ.

(3) 連立 1 次方程式の解の自由度とは何か説明せよ.

問題 7.8. 次の方程式が自明でない解をもつための条件を求めよ.

(1) $\begin{cases} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \end{cases}$

問題 7.9. 問題 7.5 の連立方程式の階の自由度をそれぞれ求めよ.

問題 7.10. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ.

(1) $k=1,2,3$ とするとき，各 k に対して方程式 $A\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}$ の自明でない解 $\boldsymbol{v}_k$ を一つ求めよ.

(2) (1) で求めたベクトル $\boldsymbol{v}_k$ を並べてできる 3 次正方行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP$ を求めよ.