情報数学 III 第 3 回小テスト（レポート）　学籍番号 | | | | | | | |　氏名

1 ある直交座標系において方程式 $x^2-2x-y^2-3y-1=0$ で表される図形（曲線）を C とする．原点の移動（座標の平行移動）によって座標変換したら，C の方程式が $aX^2+bY^2=c$ になったとする．このときの以下の問に答えなさい．

(1) (x,y) と (X,Y) の関係式を答えなさい．(3 点)

(2) XY-座標系における C の方程式 $aX^2+bY^2=c$ の定数 a,b,c を求めなさい．(4 点)

$x^2-2x-y^2-3y-1=0$ を x, y それぞれに関して平方完成すると

$$(x-1)^2-\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$$

となる．したがって

$$x-1=X, \quad y+\frac{3}{2}=Y$$

とすると，$X^2-Y^2=-\frac{1}{4}$ となる

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ //

(2) $a=1,\ b=-1,\ c=-\frac{1}{4}$ //

2 $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ を平面の直交座標系とする．次の問に答えなさい．(各 3 点)

(1) $\vec{e'}_1=\frac{1}{2}\vec{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2, \vec{e'}_2=p\vec{e}_1+q\vec{e}_2$ と基底を変換するとき，

$$(\ \vec{e'}_1\quad \vec{e'}_2\ )=(\ \vec{e}_1\quad \vec{e}_2\ )A$$

を満たす行列 A（変換行列）を求めなさい．

(2) $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$–座標系における点 P の座標を (x,y)，$\{O,\vec{e'}_1,\vec{e'}_2\}$–座標系における点 P の座標を $(x,'y')$ とする．このとき，(x,y) と (x',y') の関係式（変換式）を答えなさい．

(3) $\{O,\vec{e'}_1,\vec{e'}_2\}$ が定める座標系も直交座標系となるとき，p,q の値を求めなさい．ただし，A の行列式の値は正であるとする．

$\Leftrightarrow$ A は直交行列

(1) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & p \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & q \end{pmatrix}$ //

(2) $P(x,y) \to \overrightarrow{OP}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$P(x',y') \to \overrightarrow{OP}=(\vec{e'}_1\ \vec{e'}_2)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2)A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

したがって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ //

(3) $E={}^tA\cdot A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & p \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}p-\frac{\sqrt{3}}{2}q \\ \frac{1}{2}p-\frac{\sqrt{3}}{2}q & p^2+q^2 \end{pmatrix}$

よって $\frac{1}{2}p-\frac{\sqrt{3}}{2}q=0$，$p^2+q^2=1$。 $\det(A)=1$ より $\frac{1}{2}q+\frac{\sqrt{3}}{2}p=1$.

3つの条件より $p=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$q=\frac{1}{2}$ //

点/40 点

3 行列 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, ベクトル $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対し，点変換 f_1, f_2 を

$$f_1(\vec{p}) = A_1\vec{p} + \vec{d_1}, \quad f_2(\vec{p}) = A_2\vec{p} + \vec{d_2}$$

で定義する．以下の問に答えなさい．（各 4 点）

(1) f_1 と f_2 の合成を $f_1 \circ f_2(\vec{p}) = B_1\vec{p} + \vec{v_1}$ とする．このとき，行列 B_1 とベクトル $\vec{v_1}$ を求めなさい．
(2) f_1 の逆変換を $f_1^{-1}(\vec{p}) = B_2\vec{p} + \vec{v_2}$ とする．このとき，行列 B_2 とベクトル $\vec{v_2}$ を求めなさい．
(3) $f_2 = f_1 \circ g$ を満たす点変換 g を $g(\vec{p}) = B_3\vec{p} + \vec{v_3}$ とする．このとき，行列 B_3 とベクトル $\vec{v_3}$ を求めなさい．

(1) $f_1(f_2(\vec{p})) = A_1 f_2(\vec{p}) + \vec{d_1} = A_1(A_2\vec{p} + d_2) + \vec{d_1}$

$= (A_1A_2)\vec{p} + (A_1 d_2 + \vec{d_1}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}}_{B_1}\vec{p} + \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}}$

(2) $\vec{p} = f_1^{-1}(f_1(\vec{p})) = B_2 f_1(\vec{p}) + \vec{v_2} = B_2(A_1\vec{p} + \vec{d_1}) + \vec{v_2}$

$= (B_2A_1)\vec{p} + (B_2\vec{d_1} + \vec{v_2})$

この式はどんな $\vec{p}$ に対しても成り立つ。$\vec{p} = \vec{0}$ を代入すると $\boxed{B_2\vec{d_1} + \vec{v_2} = \vec{0}}$

を得る。したがって結局 $\boxed{\vec{p} = (B_2A_1)\vec{p}}$ → $B_2 = A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ //

$\vec{v_2} = -B_2\vec{d_1} = -A_1^{-1}\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ //

(3) $f_2 = f_1 \circ g \Leftrightarrow g = f_1^{-1} \circ f_2$

(1)と同様にすると

$B_3 = B_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ //

$\vec{v_3} = B_2 d_2 + \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$ //

4 行列 $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $S_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$ に対し，次の問に答えなさい．（各 4 点）

(1) $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$ が成り立つことを示しなさい．
(2) R_θ^{-1} を求めなさい．
(3) $S_\theta = AR_\theta$ を満たす行列 A を求めなさい．

(1) 加法定理を使う。（省略）

(2) $R_0 = E$ より $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ //

$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ //

(3) $A = S_\theta \cdot R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta \end{pmatrix}$ //

$= S_{2\theta}$ //