問題 4.5. 2 次多項式 $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y}) = 3\bar{x}^2 - 12\bar{x}\bar{y} - 6\bar{y}^2 + 18$ について，以下の問の答えなさい．

(1) $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \bar{A} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + 18$ と表すときの 2 次正方行列 $\bar{A}$ を書きなさい．

(2) $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \end{pmatrix} \bar{A}_0 \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix}$ と表すときの 3 次正方行列 $\bar{A}_0$ を書きなさい．

(3) $\det(\bar{A})$ および $\det(\bar{A}_0)$ を求めなさい．

(4) 行列 $\bar{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(5) 行列 $\bar{A}$ の固有ベクトル $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ で，$\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = 1$ かつ $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0$ を満たす組を 1 つ求めなさい．

(6) (5) で定めたベクトルを並べて 2 次正方行列 $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ を作りなさい．

(7) (6) で定めた行列 P に対し，$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ と座標変換する．このとき，方程式 $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y}) = 0$ を $\tilde{x}, \tilde{y}$ の方程式として表しなさい．

問題 4.6. 2 次方程式 $\bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 - 5 = 0$ が表す図形はどのような 2 次曲線か，問題 4.5 を参考にて考察しなさい．

問題 4.7. 2 次方程式 $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 5x - 10y + 5 = 0$ が表す 2 次曲線は無心 2 次曲線である（問題 4.2 (2) を参照）．この 2 次曲線について次の問に答えなさい．

(1) 問題 4.5 に方法を参考に，直交行列による座標変換を用いて方程式の 2 次の項を簡略化しなさい．

(2) (1) の座標変換を施した方程式に対し，1 次の項を消せる場合は座標の平行移動により消しなさい．

(3) この 2 次曲線がどのような形の 2 次曲線か答えなさい．