微積分 I 演習

－ 第 1 章の補足（その 2），第 1 章未発表問題の略解 －

担当：佐藤 弘康

問題 1.20. $0 \leq x \leq \pi$ のとき，

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \qquad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

が成り立つことを示せ．

解. $f(x) = \sin x$ を 0 のまわりで Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\theta_1)}{3!}x^3 \\ &= x - \frac{\sin\theta_1}{6}x^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\theta_2)}{5!}x^5 \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\sin\theta_2}{125}x^5. \end{aligned}$$

ただし，$0 \leq \theta_i \leq x \leq \pi$ $(i = 1, 2)$．したがって，$\sin\theta_1, \sin\theta_2 \geq 0$ であるから，$x - \dfrac{x^3}{6} \leq f(x) \leq x$ を得る．$\cos x$ に関する不等式も同様にして得られる（この問題のポイントは Taylor の定理を適用するとき，剰余項を sin で記述すること）．

□ **第 1 章未発表問題の略解**

問題 **1.3.** (1) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

問題 **1.7.** (1) $(a^{-x})^{(n)} = a^{-x}(-\log a)^n$ (2) $(\sin^2 x)^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

問題 **1.11.** (1) $e^{x^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$ (2) $\sin(-3x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

問題 **1.12.** (1) $(x^2 + x + 1) = 1 + 2x + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)x^n$

(2) $x^2 \sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)!}$ (3) $\dfrac{x^3}{(1-x)} = \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} x^n$

問題 1.13. (2) $\dfrac{1}{(1-x)^3} = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$ (3) $2xe^{x^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x^{2n-1}}{(n-1)!}$

問題 1.15. (1) $x^3 \sin(x^2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+5}$

問題 1.16. 例題 1.22 の $\log \dfrac{1+x}{1-x}$ の展開式に $x = \dfrac{2}{3}$ を代入する．

問題 1.17. (1) tan に関する加法定理を使って $\tan\left(4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}\right)$ を計算せよ． (2) 省略

問題 1.18. (1) 1 (3) 0 (5) 0 (7) $e^{-\frac{1}{2}}$

問題 1.21. $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ とおくと，$a \in I$ である．$f(x)$ を a のまわりで Taylor 展開すると $f''(x) \geq 0$ だから

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

上の式の $x = x_k$ を代入し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ を計算せよ．