

実数の定義

数学科教育法 資料

以下の3つの公理系を満たし、少なくとも2つの元を含む集合 \mathbb{R} の元を実数という。

公理 (I) : \mathbb{R} は可換体である

\mathbb{R} には2つの演算「+」と「 \times 」が定義され、以下を満たす；

(1) 任意の2つ元 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、その和 $x + y \in \mathbb{R}$ が定まり、以下の性質を満たす。

(a) 交換法則 : $x + y = y + x$

(b) 結合法則 : $(x + y) + z = x + (y + z)$

(c) 和に関する単位元の存在：

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $x + 0 = x$ を満たす数 $0 \in \mathbb{R}$ が存在する。

(d) 和に関する逆元の存在：

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $x + y = 0$ を満たす $y \in \mathbb{R}$ が存在する (y を x の逆符号の数とよび、 $y = -x$ と書く)。

(2) 任意の2つ元 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、その積 $xy \in \mathbb{R}$ が定まり、以下の性質を満たす。

(a) 交換法則 : $xy = yx$

(b) 結合法則 : $(xy)z = x(yz)$

(c) 積に関する単位元の存在：

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $x \cdot 1 = x$ を満たす数 $1 \in \mathbb{R}$ が存在する。

(d) 積に関する逆元の存在：

任意の $x \in \mathbb{R}$ (ただし、 $x \neq 0$) に対して、 $xy = 1$ を満たす $y \in \mathbb{R}$ が存在する (y を x の逆数とよび、 $y = \frac{1}{x}$ と書く)。

(3) 和と積は分配法則を満たす : $x(y + z) = xy + xz$ 。

公理 (II) : 演算と両立する大小関係

任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、次のうち1つだけが成り立つ；

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

さらに

(1) $x < y$ かつ $y < z$ ならば、 $x < z$ である。

(2) $x < y$ ならば、 $x + z < y + z$ である。

(3) $x < y$ かつ $z > 0$ ならば、 $xz < yz$ である。

公理 (III) : 実数の連続性

実数の任意の切断 (A, B) に対し、必ず次の2つのうちのどちらか一方が成り立つ：

(1) A に最大数が存在し、 B に最小数が存在しない。

(2) A に最大数が存在せず、 B に最小数が存在する。

- (D) 実数の任意の切断 (A, B) に対し, 必ず次の 2 つのうちのどちらか一方が成り立つ:
- (1) A に最大数が存在し, B に最小数が存在しない.
 - (2) A に最大数が存在せず, B に最小数が存在する.

(W) 空でなく, 上に (下に) 有界な \mathbb{R} の部分集合は上限 (下限) を持つ. (命題 1.1)

(A) (アルキメデスの原理) $a, b > 0$ とするとある自然数 n に対して $na > b$ が成り立つ. (命題 1.4)

(M) 上に有界な単調増加数列 $\{x_n\}$ は $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に収束する. 下に有界な単調減少数列 $\{x_n\}$ は $\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に収束する. (命題 1.11)

(K) (区間縮小法) $\{I_n\}$ が実数の空でない有界閉区間の単調減少列ならば, すべての I_n に属する点が存在する. (命題 1.12)

(B-W) 有界な数列は収束する部分列を持つ. (命題 1.13)

(C) コーシー列は収束する. (命題 1.15)

上の命題は以下の関係を満たす;

$$(D) \iff (W) \iff (M) \iff (K)+(A) \iff (B-W) \iff (C)+(A)$$