微積分 I 演習

－ 第 3 回 関数の極限，関数の連続性 －

担当：佐藤 弘康

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 関数とは何か.

(2) 関数 f の定義域，値域とは何か.

(3) 関数 f の逆関数とはどのような関数か.

(4) 関数の極限値とは何か．また，右極限値，左極限値とは何か.

(5) 「関数が連続である」とはどういうことか.

(6) 中間値の定理，最大値の定理はどのような主張か述べよ.

問題 3.1. 例 1.2, 1.3（教科書 p.20,21）を参考にして，次の極限を求めよ．なお，例 1.3 の結果は証明なしで使用してよい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^4}{(1+2x^2)^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ （ただし $b\neq 0$）

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

問題 3.2. 次の関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続かどうか調べよ.

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$　(2) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

問題 3.3. 関数 $f(x)=x[x]$ の連続性を $-2<x<3$ の範囲で調べよ．ただし，$[a]$ は a を超えない最大の整数を表す[*1]．例えば，$[1.2]=1$, $[\pi]=3$.

[*1] これをガウスの記号と呼ぶ

例題 3.1. 関数 $f(x) = x^2 - 4x + 1$ の逆関数を求めよ．

解. 関数 $f(x)$ の逆関数を求め方を大雑把に言うと，$y = f(x)$ とおいた式を x について解く．その式の y と x を入れ替えたものを $y = g(x)$ とするとき，$g(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ である．

$y = x^2 - 4x + 1$ とおいて x について平方完成すると

$$(x-2)^2 - y - 3 = 0.$$

ここで，$x \geq 2$ のとき $x = 2 + \sqrt{y+3}$，$x < 2$ のとき $x = 2 - \sqrt{y+3}$．したがって，定義域を $\{x \mid x \geq 2\}$ としたときの $f(x)$ の逆関数は

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+3}$$

で，定義域を $\{x \mid x < 2\}$ としたときの $f(x)$ の逆関数は

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+3}$$

である．また，どちらの関数も定義域は $\{x \mid x \geq -3\}$ である．

問題 3.4. 次の関数の逆関数を求めよ．

(1) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0)$

(2) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(3) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(4) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

例題 3.2. 次の値を求めよ．

$$\sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{12}{13}$$

解. $\theta_1 = \sin^{-1}\dfrac{5}{13}$，$\theta_2 = \sin^{-1}\dfrac{12}{13}$ とおくと，$\sin\theta_1 = \dfrac{5}{13}$，$\sin\theta_2 = \dfrac{12}{13}$ であるから，$\cos\theta_1 = \dfrac{12}{13}$，$\cos\theta_2 = \dfrac{5}{13}$．ここで，

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1 = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1.$$

したがって，$\theta_1 + \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$．

問題 **3.5.** 次の式を示せ.

(1) $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$

(2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

(3) $\sin^{-1} \dfrac{16}{65} + \sin^{-1} \dfrac{5}{13} = \sin^{-1} \dfrac{3}{5}$

(4) $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$

(5) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

問題 **3.6.** 次の関数を双曲線関数[*2]という.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

このとき，次式を証明せよ.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$（複号同順）

(3) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh y \sinh x$（複号同順）

問題 **3.7.** 実数上で定義された連続関数 f が任意の実数 x に対し，$f(x+1) = f(x)$ を満たすとき，f は最大値を持つことを示せ.

問題 **3.8.** ある放射性物質の t 時間後の質量 $f(t)$ は次の式で表されるとする.

$$f(t) = ae^{-bt} \quad (a \text{ は現在量，} b > 0)$$

(1) 現在量の半分の量になるのは何時間後か（この値をその物質の半減期という）.

(2) 半減期を t_0 とすると，常に

$$f(t + t_0) = \frac{1}{2} f(t)$$

であることを示せ.

(3) 何時間後には，その量が ε より少なくなるか.

[*2] “h” はハイパボリック (hyperbolic) の頭文字．sinh の読み方はハイパボリックサイン.