

Hadamard 多様体上の Poisson 核と重心の幾何学

佐藤 弘康

^{にっぽん}
(日本工業大学 工学部 共通教育系)

伊藤光弘氏（筑波大学数理物質系）との共同研究に基づく

2015 年 9 月 8 日

部分多様体幾何とリー群作用 2015

(東京理科大学 森戸記念館)

§0.1) 概要 (研究の目的)

- Hadamard 多様体 (X, g) と,
その理想境界 ∂X 上の正值確率測度の空間 $(\mathcal{P}^+(\partial X), G)$ を考える.
- X と $\mathcal{P}^+(\partial X)$ の間の写像を通して, (X, g) の特徴付けを与えたい.
 - 調和測度 (Poisson 核測度) μ_x を与える写像 $X \rightarrow \mathcal{P}^+(\partial X)$
 - 重心写像 $\mathcal{P}^+(\partial X) \rightarrow X$

§0.2) 目次

§1. 正值確率測度の空間の Fisher 情報計量

- Friedrich [5] の仕事の紹介
- 確率測度の「幾何平均」による Fisher 情報計量の測地線の特徴付け

§2. Hadamard 多様体の基本事項

§3. Poisson 核写像

(この研究の動機)

§4. 重心写像

(問題解決の道具?)

§1.1) 正值確率測度の空間

- 測度空間 $M = (M, \mathfrak{A}, \lambda)$
- M 上の正值確率測度の空間 ;

$$\mathcal{P}^+(M) = \left\{ \mu : \text{measure, } \int_M d\mu = 1, \mu \ll \lambda, \frac{d\mu}{d\lambda} > 0 \right\}$$

- 接空間 ; $T_\mu \mathcal{P}^+(M) = \left\{ \tau : \text{signed measure, } \int_M d\tau = 0, \frac{d\tau}{d\mu} \in L^2(M, \mu) \right\}$
 - $\mathcal{P}^+(M)$ 内の曲線 $\mu(t)$ (ただし, $\mu(0) = \mu$) とすると,
 $\mu'(0) \in T_\mu \mathcal{P}^+(M)$.
 $\int d(\mu(t)) = 1$ であるから, この両辺を t 微分すると $\int d(\mu'(0)) = 0$
 - 逆に, $\int d\tau = 0$ を満たす符号付き測度 τ に対して, $\mu(t) = \mu + t\tau, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ とおくと, $\mu(0) = \mu, \mu'(0) = \tau$.

§1.2) Fisher 情報計量

- $\tau_1, \tau_2 \in T_\mu \mathcal{P}^+(M)$ に対し,

$$G_\mu(\tau_1, \tau_2) := \int_M \frac{d\tau_1}{d\mu} \frac{d\tau_2}{d\mu} d\mu = \int_M \frac{q_1}{p} \frac{q_2}{p} p d\lambda$$

ただし, $\mu = p \lambda$, $\tau_1 = q_1 \lambda$, $\tau_2 = q_2 \lambda$.

統計モデル上の Fisher 計量

$\xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^n$ でパラメトライズされた確率分布の族 ;

$$S = \{p_\xi = p(x; \xi) \mid \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \Xi\}$$

$\xi \in \Xi$ における S の Fisher 情報行列 $g_\xi = (g_{ij}(\xi))$;

$$g_{ij}(\xi) = \int \partial_i \log p(x; \xi) \cdot \partial_j \log p(x; \xi) \cdot p(x; \xi) dx \quad (\partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i})$$

§1.2) Fisher 情報計量

- $\tau_1, \tau_2 \in T_\mu \mathcal{P}^+(M)$ に対し,

$$G_\mu(\tau_1, \tau_2) := \int_M \frac{d\tau_1}{d\mu} \frac{d\tau_2}{d\mu} d\mu$$

- $\mu \mapsto G_\mu$ を Fisher 情報計量とよぶ.
- M 上の全単射な可測変換は, $(\mathcal{P}^+(M), G)$ に等長的に作用する.
- G の Levi-Civita 接続 ; $\tau_1, \tau_2 \in T_\mu \mathcal{P}^+(M)$ に対し,

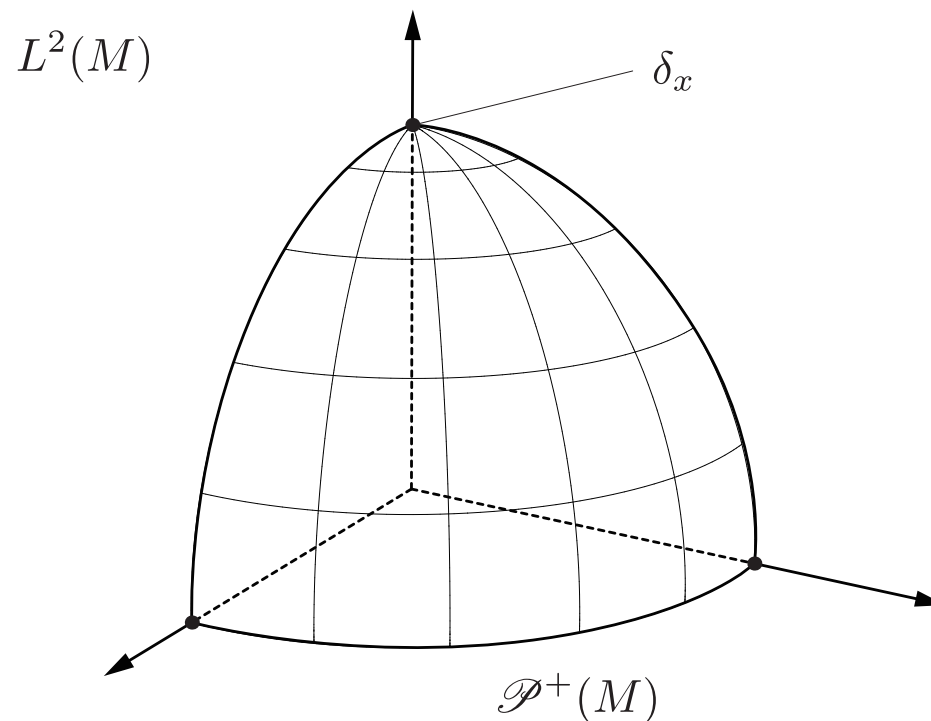
$$\nabla_{\tau_1} \tau_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\tau_1}{d\mu} \frac{d\tau_2}{d\mu} - G_\mu(\tau_1, \tau_2) \right) \mu$$

ただし, τ_2 を定ベクトル場と見ている.

- $2G(\nabla_{\tau_1} \tau_2, \tau_3) = \tau_1 G(\tau_2, \tau_3) + \tau_2 G(\tau_1, \tau_3) - \tau_3 G(\tau_1, \tau_2)$
- $G(\nabla_{\tau_1} \tau_2, \tau_3) = -\frac{1}{2} \int_M \frac{d\tau_1}{d\mu} \frac{d\tau_2}{d\mu} \frac{d\tau_3}{d\mu} d\mu$

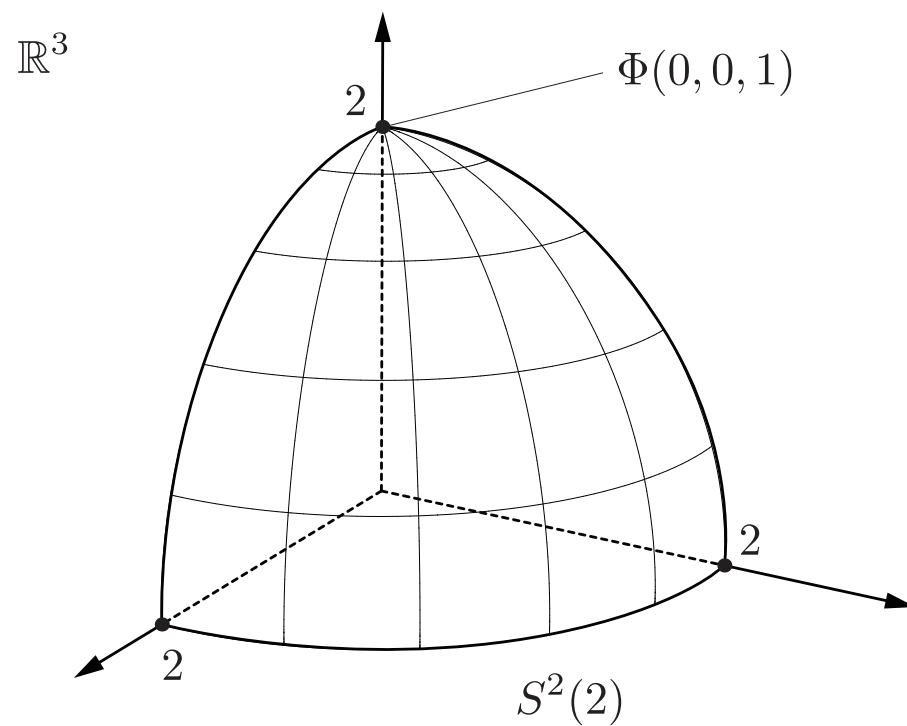
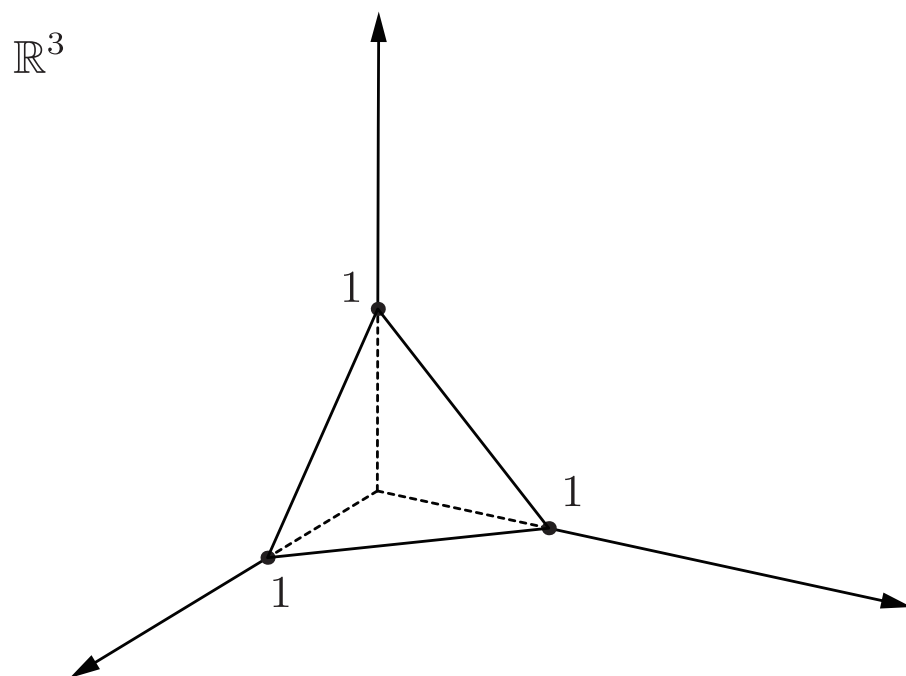
§1.3) Fisher 情報計量の曲率

- $(\mathcal{P}^+(M), G)$ は断面曲率 $\frac{1}{4}$ の定曲率空間
- $\Phi : \mathcal{P}^+(M, \lambda) \rightarrow L^2(M, \lambda) ; \mu = p \lambda \mapsto 2 \sqrt{p}$
- $L^2(M, \lambda)$ 上の内積 $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_M f_1 f_2 d\lambda$ を Φ で引き戻すと, $\Phi^* \langle \cdot, \cdot \rangle = G$ つまり, Φ は等長的な埋め込みである.
- $\mathcal{P}^+(M, \lambda)$ は $L^2(M, \lambda)$ 内の半径 2 の球面 (ただし第 1 象限の部分).



$M = \{x_1, x_2, x_3\}$ のとき,

- $\mathcal{P}^+(M) = \{(p_1, p_2, p_3) \mid p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_1, p_2, p_3 > 0\}$
- $\Phi : \mathcal{P}^+(M) \rightarrow \mathbb{R}^3 ; (p_1, p_2, p_3) \mapsto (2\sqrt{p_1}, 2\sqrt{p_2}, 2\sqrt{p_3})$

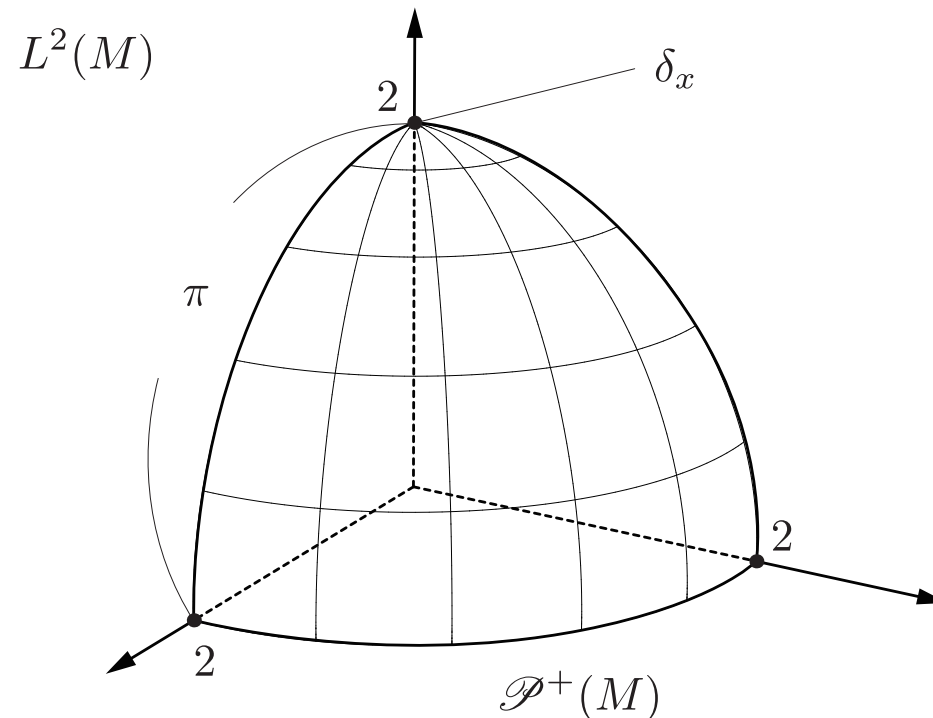


§1.4) Fisher 情報計量の測地線

- $\begin{cases} \mu(0) = \mu \in \mathcal{P}^+(M) \\ \mu'(0) = \tau \in T_\mu \mathcal{P}^+(M) \end{cases}$ を満たす測地線 ;

$$\mu(t) = \left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \cdot \frac{d\tau}{d\mu} \right)^2 \mu \quad (1)$$

- $(\mathcal{P}^+(M), G)$ は測地的に完備ではない. $\mu(\pi) = \left(\frac{d\tau}{d\mu} \right)^2 \mu \notin \mathcal{P}^+(M)$



§1.5) 確率測度の幾何平均と測地線 (1)

- $\mu_0 = p_0 \lambda, \mu_1 = p_1 \lambda \in \mathcal{P}^+(M)$ に対して,

$$l(\mu_0, \mu_1) = 2 \cos^{-1} \left(\int_M \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_0}} d\mu_0 \right) = 2 \cos^{-1} \left(\int_M \sqrt{p_1 p_0} d\lambda \right)$$

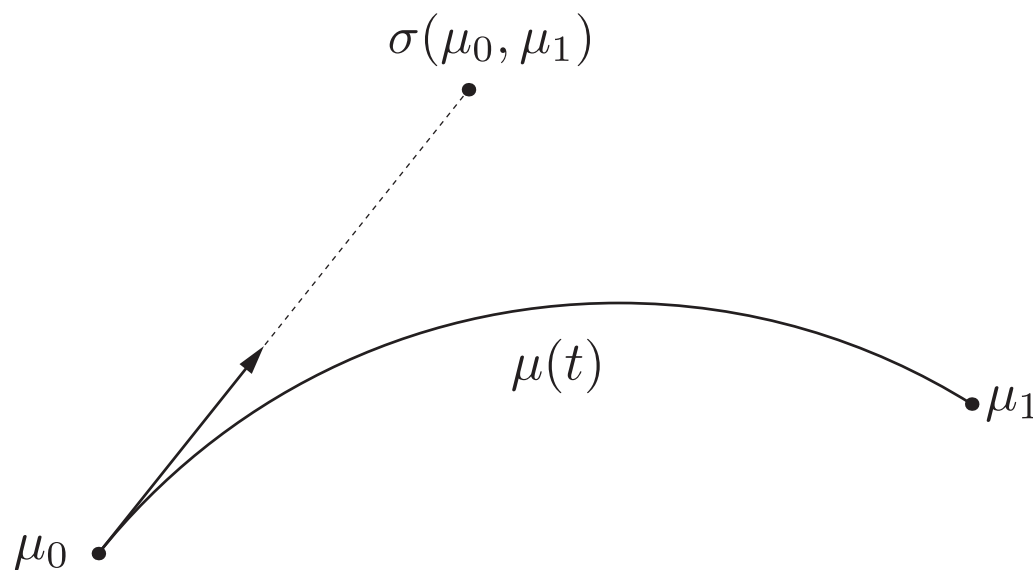
- l は $(\mathcal{P}^+(M), G)$ の距離を与える. $0 \leq l < \pi$.
- $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ の正規化幾何平均測度 $\sigma(\mu_0, \mu_1)$ を以下で定義;

$$\sigma(\mu_0, \mu_1) := \frac{1}{\cos \frac{l(\mu_0, \mu_1)}{2}} \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_0}} \mu_0$$

§1.5) 確率測度の幾何平均と測地線 (2)

- $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ に対し, この 2 点を結ぶ測地線 $\mu(t)$ が存在したとする.
 $\mu(0) = \mu_0, \mu(l) = \mu_1$ ならば,

$$\mu'(0) = \frac{1}{\tan \frac{l}{2}} (\sigma(\mu_0, \mu_1) - \mu_0), \quad l = l(\mu_0, \mu_1) \quad (2)$$



- (2) を (1) に代入することにより, ...

§1.5) 確率測度の幾何平均と測地線 (3)

2 点 μ_0, μ_1 を結ぶ測地線は

$$\mu(t) = a_0(t)\mu_0 + a_1(t)\mu_1 + a_2(t)\sigma(\mu_0, \mu_1) \quad (3)$$

ただし, $a_0(t) = \left(\frac{\sin \frac{l-t}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \right)^2$, $a_1(t) = \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \right)^2$, $a_2(t) = 2 \cos \frac{l}{2} \left(\frac{\sin \frac{l-t}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \right) \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \right)$.

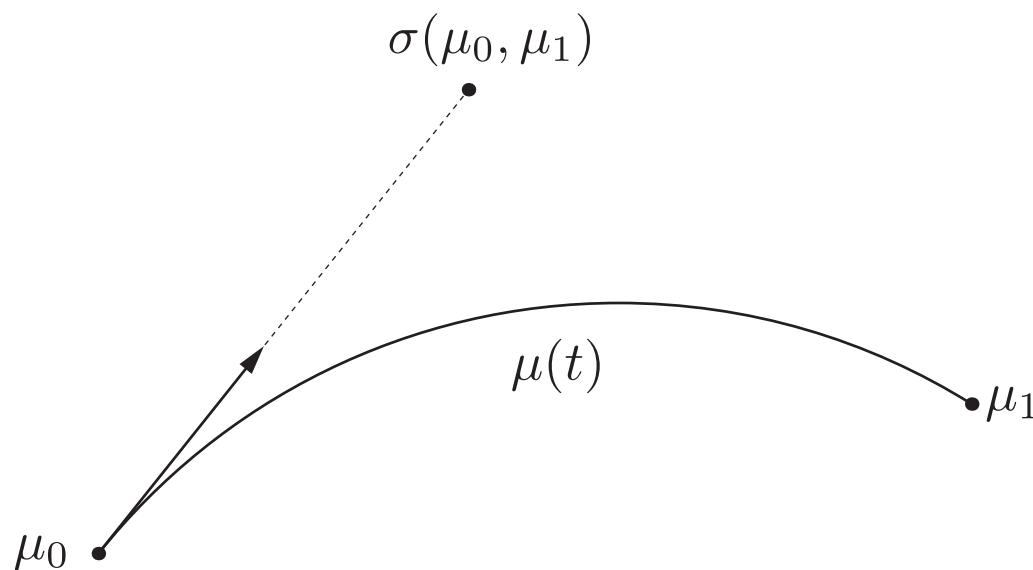
- 逆に, 任意の $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ に対し, (3) 式によって表される曲線は
 - $(\mathcal{P}^+(M), G)$ の測地線の方程式を満たす.
 - $\mu(0) = \mu_0, \mu(l) = \mu_1$. ただし, $l = l(\mu_0, \mu_1)$.
 - 任意の $t \in [0, l]$ で $a_0(t) + a_1(t) + a_2(t) = 1$ かつ $a_i(t) \geq 0, i = 0, 1, 2$.
- であるから, $\mu(t) \in \mathcal{P}^+(M), t \in [0, l]$.
- よって, $\mathcal{P}^+(M)$ の任意の 2 点は $\mathcal{P}^+(M)$ 上の測地線で結ぶことができる.

§1.5) 確率測度の幾何平均と測地線 (4)

- 2 点 $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ を結ぶ測地線を $\mu(t)$ とする.

$\mu(0) = \mu_0, \mu(l) = \mu_1$ ならば,

$$\mu'(0) = \frac{1}{\tan \frac{l}{2}} (\sigma(\mu_0, \mu_1) - \mu_0), \quad l = l(\mu_0, \mu_1)$$

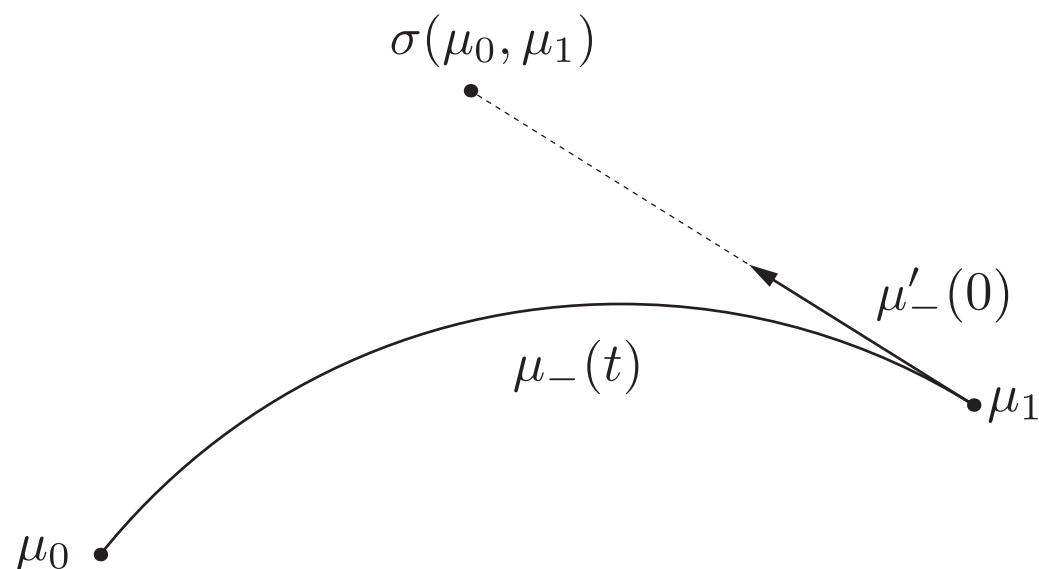


§1.5) 確率測度の幾何平均と測地線 (5)

- $\mu(t)$ の逆向きの曲線 $\mu_-(t) = \mu(l - t)$ も測地線.

$\mu_-(0) = \mu_1, \mu_-(l) = \mu_0$ だから,,

$$\mu'_-(0) = \frac{1}{\tan \frac{l}{2}} (\sigma(\mu_0, \mu_1) - \mu_1), \quad l = l(\mu_0, \mu_1)$$



§1.5) 確率測度の幾何平均と測地線 (6)

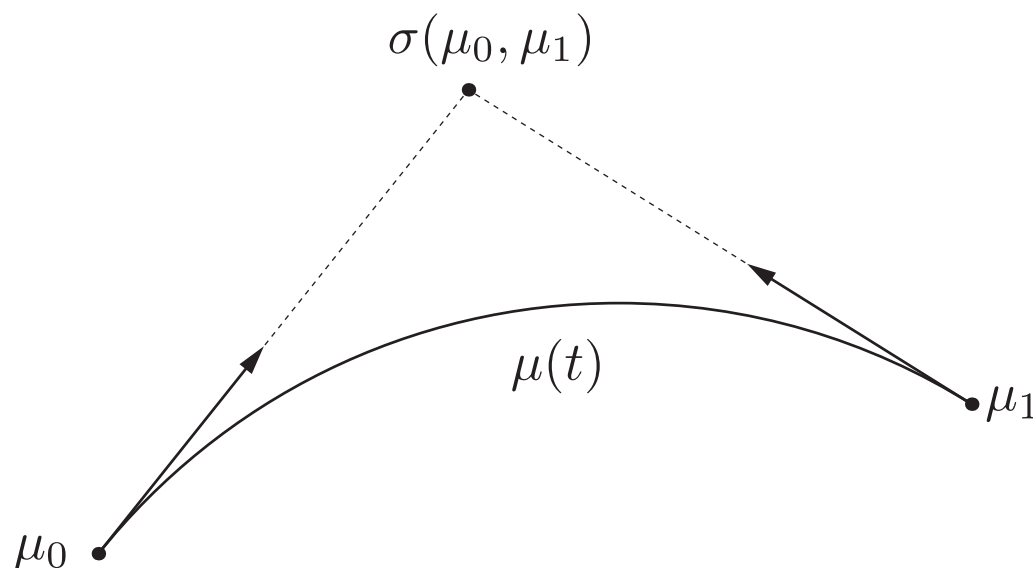
- 以上のことから，正規化幾何平均 $\sigma(\mu_0, \mu_1)$ は以下のように特徴付けられる；

- μ_0, μ_1 を通る測地線を $\mu(t)$ とする． $\mu_0 = \mu(0), \mu_1 = \mu(l)$ ．

- μ_0, μ_1 における $\mu(t)$ の接線を $L_i, i = 0, 1$ とする；

$$L_0 : l_0(s) = \mu(0) + s\mu'(0), \quad L_1 : l_1(s) = \mu(l) + s\mu'(l)$$

- このとき， L_0 と L_1 は交点をもち，その交点が $\sigma(\mu_0, \mu_1)$ である．



§1.5) 確率測度の幾何平均と測地線 (7)

以上のことをまとめると ...

定理 1. (伊藤-S)

- $l: \mathcal{P}^+(M) \times \mathcal{P}^+(M) \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{P}^+(M)$ の距離を与える.
- 任意の測地線 $\mu(t)$ に対し,

$$\mu'(t) = \frac{1}{\tan \frac{r}{2}} (\sigma(\mu(t), \mu(t+r)) - \mu(t))$$

- $\mathcal{P}^+(M)$ の任意の 2 点 μ_0, μ_1 は測地線で結べる. さらに, その測地線は, μ_0, μ_1 および, $\sigma(\mu_0, \mu_1)$ を用いて表すことができる.
- 測地線上の任意の 2 点 μ_0, μ_1 に対し, それぞれの点における測地線の接線は交点をもち, その交点は $\sigma(\mu_0, \mu_1)$ である.

§1.5) 関連する話題 (1)

- 一般化平均 (α - 冪平均) ; a, b に対して, $\left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}$.
(α が 1 のとき算術平均, 0 のとき幾何平均, -1 のとき調和平均)
- 正規化 α - 冪平均測度 ;

$$\sigma^{(\alpha)}(\mu_0, \mu_1) = \frac{1}{C} \left\{ 1 + \left(\frac{d\mu_1}{d\mu_0} \right)^\alpha \right\}^{1/\alpha} \mu_0$$

定理 2. (伊藤-S)

2 点 μ_0, μ_1 を結ぶ測地線を $\mu(t)$ とする ($\mu(0) = \mu_0, \mu(l) = \mu_1$). このとき, μ_0 と μ_1 の中点 $\mu(l/2)$ は, 正規化 $\frac{1}{2}$ - 冪平均 $\sigma^{(1/2)}(\mu_0, \mu_1)$ である.

§1.5) 関連する話題 (2)

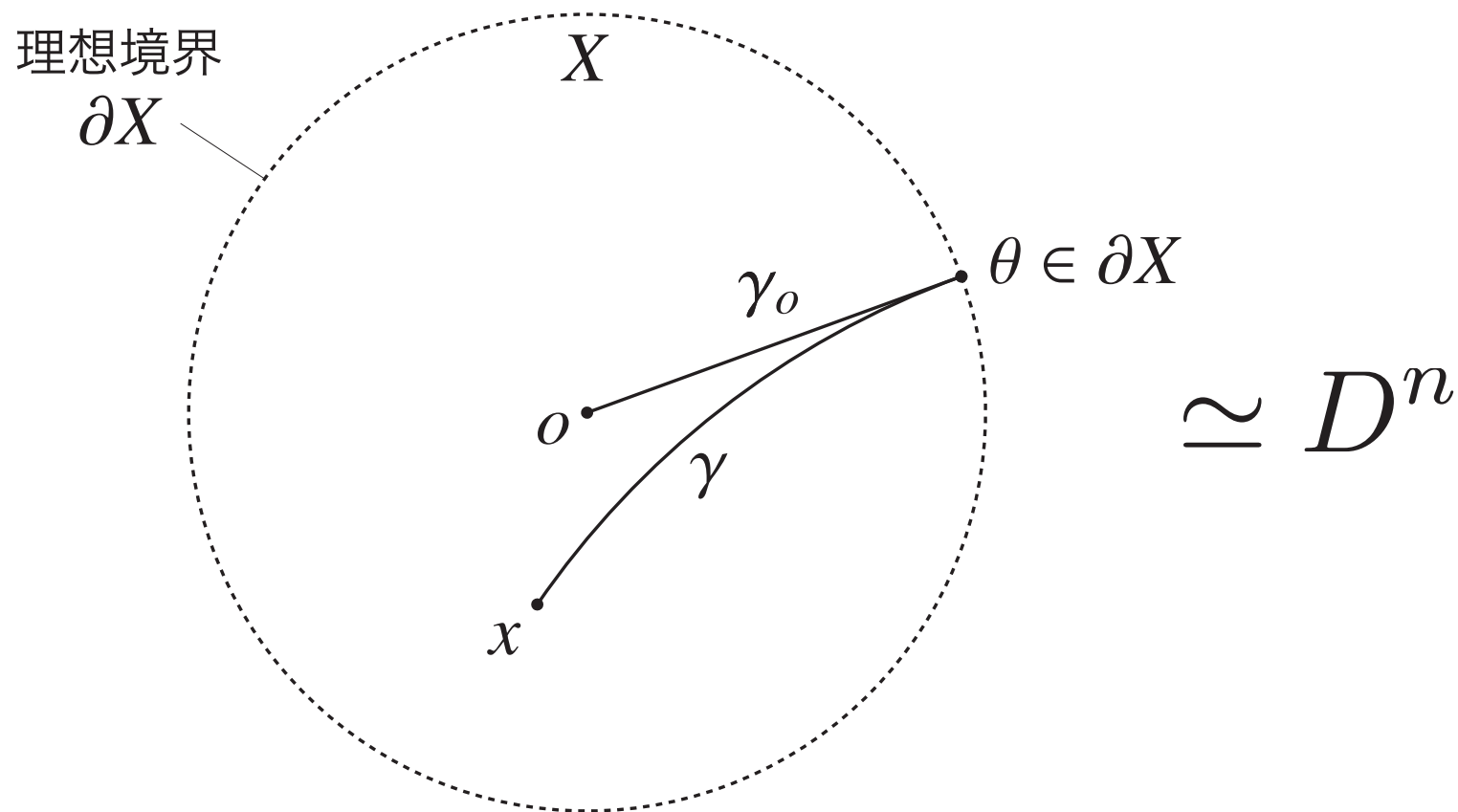
- Ohara, Integr. equ. oper. theory **50** (2004), 537-548.
 - 対称錐 Ω 上のある特別なポテンシャル関数に関する Hesse 計量, および双対接続構造 $(\nabla^{(\alpha)}, \nabla^{(-\alpha)})$ を定義 (統計多様体の構造).
 - $\nabla^{(\alpha)}$ に関する測地線を α -測地線とよぶ.
 - Ω 上の α -冪平均を定義 (作用素平均).

定理 (Ohara)

$x, y \in \Omega$ を結ぶ α -測地線の中点は, x と y の α -冪平均である.

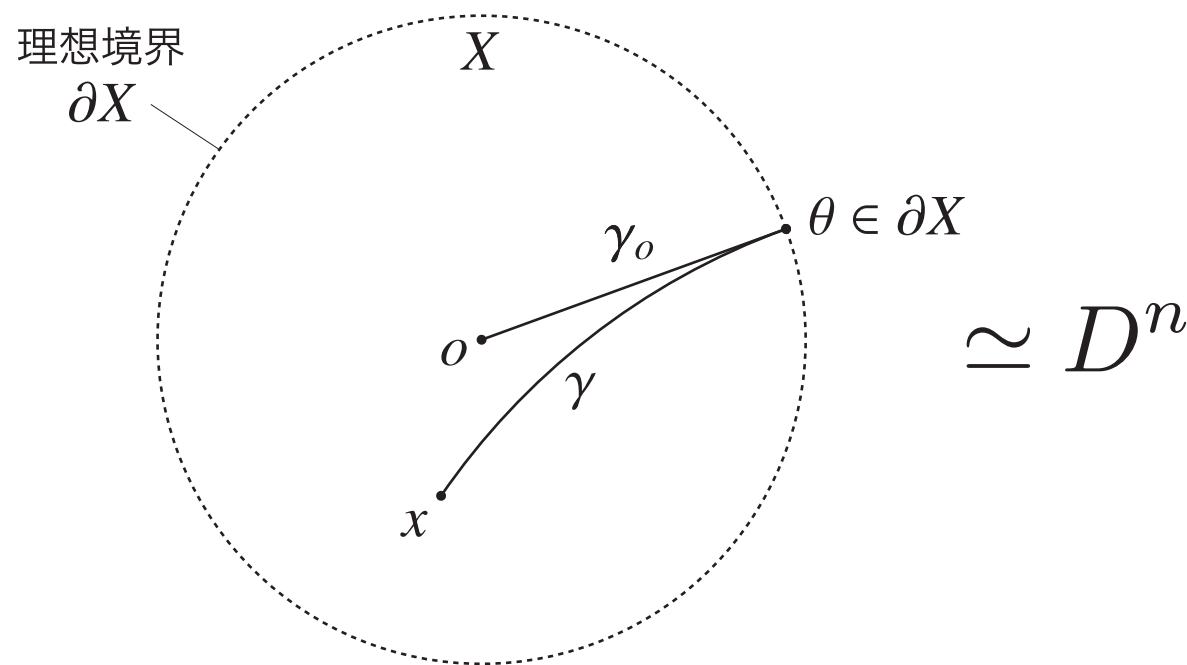
§2.1) Hadamard 多様体と理想境界

- (X, g) : n 次元 Hadamard 多様体 (つまり, 単連結, 完備, 非正曲率)
- X の理想境界 $\partial X = \{X \text{ 上の半開測地線}\} / \sim$
ただし, $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < \infty, \quad t > 0$
- ∂X は $(n-1)$ 次元球面に同相 ; $\partial X \simeq U_o X \subset T_o X$



§2.2) Buseman 関数 (1)

- 測地線 γ に対して定まる X 上の関数 ; $B_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{d(\gamma(t), x) - t\}$
- $\gamma_1 \sim \gamma$ ならば, $B_{\gamma_1}(x) = B_\gamma(x) + B_{\gamma_1}(\gamma(0))$.
- $o \in X$ を固定すると, $\theta \in \partial X$ に対し, $\gamma_o(0) = o$, $\gamma_o(\infty) = \theta$ を満たす測地線が唯一つ定まる. これによって, $B_\theta(x) = B_{\gamma_o}(x)$ と定める.
- $B_\theta(x) = \text{Length}(\gamma) - \text{Length}(\gamma_o)$. つまり, $B_\theta(x)$ の値は「 o から θ までの距離」を原点としたときの, 「 x から θ までの距離」を測っている.

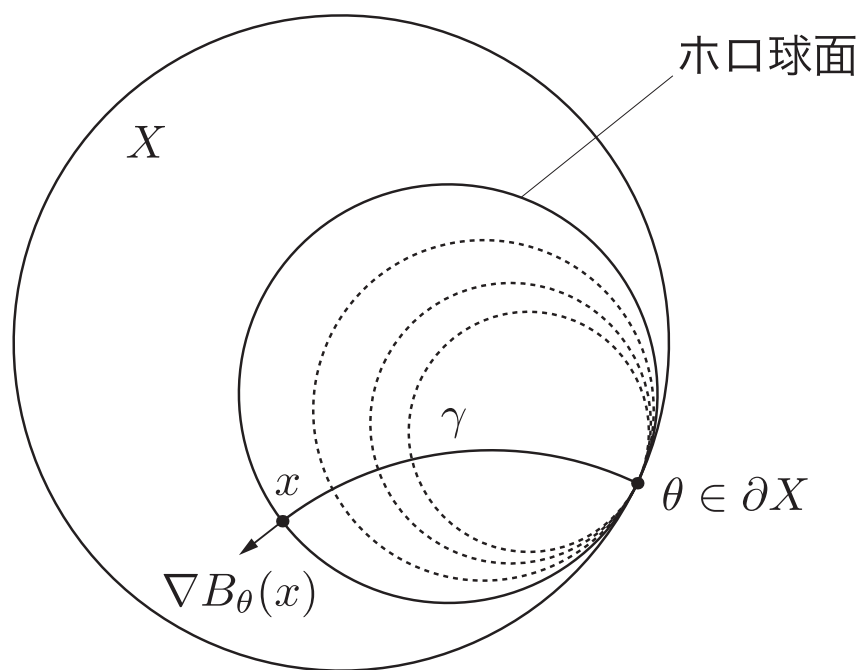


§2.2) Buseman 関数 (2)

- Busemann 関数の性質

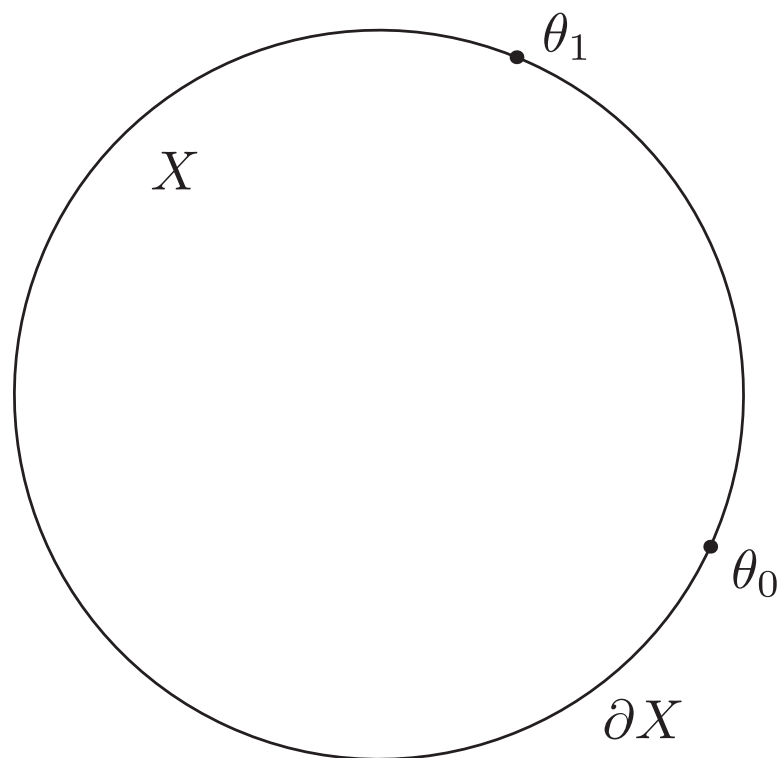
- $\nabla B_\theta(x) = -\gamma'(0)$ ($\gamma(t)$ は, $\gamma(0) = x$, $\gamma(\infty) = \theta$ を満たす測地線).
- 特に, $|\nabla B_\theta|^2 = 1$
- (X, g) の等長変換 φ に対し, $B_\theta(\varphi x) = B_{\varphi^{-1}\theta}(x) + B_\theta(\varphi o)$
- $\nabla dB_\theta \geq 0$

- B_θ の等位超曲面をホ口球面とよぶ.



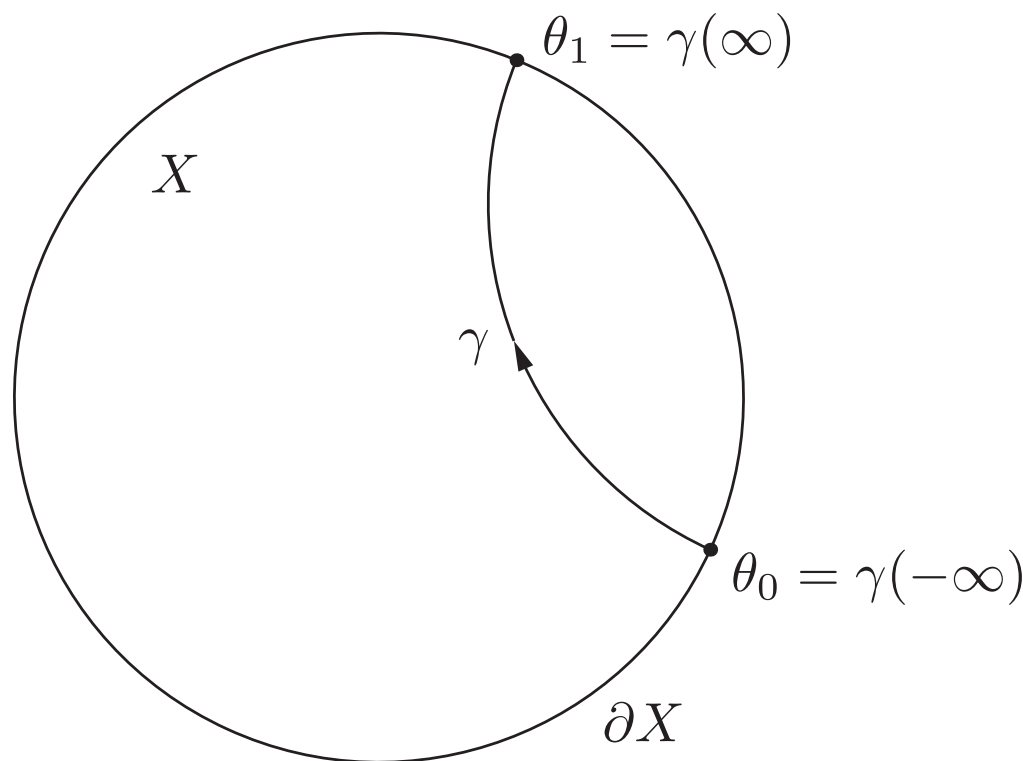
§2.3) 可視公理

- (X, g) が「**可視公理**を満たす」とは、理想境界上の任意の 2 点 θ_0, θ_1 が、 X 上の測地線で結ぶことができることをいう。
- つまり、 $\gamma(\infty) = \theta_1, \gamma(-\infty) = \theta_0$ を満たす測地線 γ が存在する。



§2.3) 可視公理

- (X, g) が「**可視公理**を満たす」とは、理想境界上の任意の 2 点 θ_0, θ_1 が、 X 上の測地線で結ぶことができることをいう。
- つまり、 $\gamma(\infty) = \theta_1, \gamma(-\infty) = \theta_0$ を満たす測地線 γ が存在する。



- 同値条件： $\lim_{x \rightarrow \theta' \neq \theta} B_\theta(x) = \infty$ ([1] を参照)

§3.1) Poisson 核

- 無限遠 Dirichlet 問題： $f \in C^0(\partial X)$ に対し，以下を満たす u を求める；

$$u = f \text{ on } \partial X \quad \text{and} \quad \Delta u = 0 \text{ on } X$$

- この微分方程式の基本解 $P(x, \theta)$ を X 上の **Poisson 核** という；

$$u(x) = \int_{\theta \in \partial X} f(\theta) P(x, \theta) d\lambda_0(\theta)$$

ここで， λ_0 は基点 $o \in X$ を固定し， ∂X を $U_o X \subset T_o X$ と同一視したときの標準体積要素（確率測度）． $P(o, \theta) = 1$ も要請する．

- Poisson 核のかわりに測度 $\mu_x = P(x, \theta) \lambda_0$ 考えてもよい（これを調和測度という）．
- 曲率が負で有界（または，このような空間に quasi-isometric）ならば，Poisson 核（調和測度）の存在性が保証される．

§3.2) Poisson 核写像

- Poisson 核が存在するとき、次の写像が定義可能；

$\Theta : X \rightarrow \mathcal{P}^+(\partial X); x \mapsto P(x, \theta) \lambda_0(\theta)$. これを **Poisson 核写像** とよぶ.

定理 3. (伊藤-S[8], 伊藤-穴戸 Diff. Geom. Appl. **26** (2008))

(X, g) が n 次元 Damek-Ricci 空間とき、Poisson 核写像は**相似的**；

$$\Theta^* G = \frac{\rho^2}{n} g,$$

かつ**調和的** (Θ がエネルギー汎関数 $\Theta \mapsto \frac{1}{2} \int_X \text{tr}_g(\Theta^* G) dv_g$ の臨界点) である. ここで, ρ は (X, g) の**体積エントロピー**；

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Vol} B(x; r)}{r}$$

§3.2) Poisson 核写像

定理 3. (伊藤-S[8], 伊藤-宍戸 Diff. Geom. Appl. **26** (2008))

(X, g) が n 次元 Damek-Ricci 空間とき, Poisson 核写像は相似的; $\Theta^*G = \frac{\rho^2}{n}g$, かつ調和的である. ここで, ρ は (X, g) の体積エントロピー.

- Damek-Ricci 空間とは, H-type 群を 1 次元拡張した可解 Lie 群.
- 階数 1 非コンパクト型対称空間を含む Hadamard 多様体のクラス.
- 上の定理の本質は,
 - Damek-Ricci 空間が等質空間であること,
 - Damek-Ricci 空間上の Poisson 核が, Busemann 関数の指数関数

$$P(x, \theta) = \exp \{-\rho B_\theta(x)\}$$

と表すことができることである.

定理 4. (伊藤-S[9])

(X, g) が等質 Hadamard 多様体で, Poisson 核が

$$P(x, \theta) = \exp \{-\rho B_\theta(x)\} \quad (4)$$

と表されるならば, Poisson 核写像は相似的; $\Theta^*G = \frac{\rho^2}{n}g$, かつ調和的である. ここで, ρ は (X, g) の体積エントロピー.

定理 5. (伊藤-S[9])

(X, g) 上の Poisson 核写像が相似的かつ調和的ならば, Poisson 核は (4) の形で表される.

- Poisson 核が (4) の形で表されるとき, 「 (X, g) は Busemann-Poisson 核をもつ」という.

§3.3) 問題

問題

(X, g) 上の Poisson 核写像が相似的かつ調和的な空間は Damek-Ricci 空間に限るのか.

- 「 (X, g) 上の Poisson 核写像が相似的かつ調和的」ならば, ...

$$\implies P(x, \theta) = \exp \{-\rho B_{\theta}(x)\}$$

\implies 漸近的調和多様体 かつ 可視公理を満たす.

ここで,

- すべてのホ口球面が平均曲率一定かつ, 共通値をとるような Riemann 多様体を漸近的調和多様体とよぶ.
- すべての測地球面が平均曲率一定で, その値が半径にのみ依存するような Riemann 多様体を調和多様体とよぶ.

§3.4) 関連する話題 (1)

- 調和多様体 \implies 漸近的調和多様体 (逆は?)
- 調和多様体の分類問題
 - Lichnerowicz conjecture (1944)
 - Szabó, J. Differential Geom. **31** (1990), 1-28.
「コンパクトな調和多様体は階数 1 対称空間に限る」
 - Ranjan-Shah, J. Geom. Anal. **12** (2002), 683-694.
「非コンパクトで polynomial volume growth をもつ調和多様体は Euclid 空間に限る」
 - Heber, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 869-890.
「等質な調和多様体は, Euclid 空間か, 階数 1 対称空間か, Damek-Ricci 空間に限る」
「非コンパクト, 単連結, 等質な漸近的調和かつ Einstein であるような空間は, Euclid 空間, 階数 1 対称空間, Damek-Ricci 空間に限る」

§3.4) 関連する話題 (2)

定理 (Knieper, Comment. Math. Helv. **87** (2012))

Let X be a simply connected noncompact harmonic manifold. Then the following assertions are equivalent;

- (i) X is Gromov hyperbolic.
- (ii) X has purely exponential volume growth.
- (iii) X has rank one.
- (iv) X has an Anosov geodesic flow with respect to the Sasaki metric.

§3.4) 関連する話題 (3)

定理 (Knieper-Peyerimhoff [11])

Let (X, g) be an asymptotically harmonic manifold such that $|R| \leq R_0$ and $|\nabla R| \leq R'_0$ with suitable constants $R_0, R'_0 > 0$. Then the following properties are equivalent;

- (i) X is Gromov hyperbolic.
- (ii) X has purely exponential volume growth.
- (iii) X has rank one.
- (iv) X has an Anosov geodesic flow with respect to the Sasaki metric.

§4.1) 正值確率測度の重心

- Hadamard 多様体 (X, g) を考える.
- $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対し, 次の関数を定義する;

$$\mathbb{B}_\mu : X \rightarrow \mathbb{R} ; \mathbb{B}_\mu(x) = \int_{\theta \in \partial X} B_\theta(x) d\mu(\theta)$$

- \mathbb{B}_μ の臨界点を, μ の**重心**とよぶ. つまり,
 x が μ の重心 \iff 任意の $V \in T_x X$ に対して, $\int_{\partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d\mu = 0$.
- (X, g) が Busemann-Poisson 核をもつとき, x は $\Theta(x) = \mu_x$ の重心である.
- 任意の $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対する重心の存在性;
 - (i) 可視公理を満たすこと.
 - (ii) 任意の $x \in X$ に対し, ∂X 上の関数 $\theta \mapsto B_\theta(x)$ が連続
- $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ の重心の一意性;
 - X 上の 2 形式 $\int_{\theta \in \partial X} \nabla dB_\theta(\cdot, \cdot) d\mu(\theta)$ が正定値であればよい.

§4.2) 重心写像 (1)

- 以上のことから, (X, g) が

(i) 可視公理を満たし,

(ii) 任意の $x \in X$ に対し, ∂X 上の関数 $\theta \mapsto B_\theta(x)$ が連続

かつ

(iii) X 上の 2 形式 $\int_{\theta \in \partial X} \nabla dB_\theta(\cdot, \cdot) d\mu_0(\theta)$ が正定値となるような $\mu_0 \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ が少なくとも 1 つ存在

すれば, 任意の $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対してその重心はただ 1 つ定まる.

- (X, g) が上の条件を満たすとき, $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対してその重心 $\text{bar}(\mu)$ を対応させる写像

$$\text{bar} : \mathcal{P}^+(\partial X) \rightarrow X$$

を**重心写像**とよぶ.

§4.2) 重心写像 (2)

- (X, g) が Busemann-Poisson 核をもつとき,
 - (i) (可視公理) 満たす.
 - (ii) $(\forall x \in X \text{ に対する関数 } \partial X \ni \theta \mapsto B_\theta(x) \in \mathbb{R} \text{ の連続性})$?
 - (iii) $(\exists \mu_0 \text{ s.t. } \int_{\theta \in \partial X} \nabla dB_\theta(\cdot, \cdot) d\mu_0(\theta) \text{ が正定値}) \leftarrow \mu_0 = \Theta(o)$
- 以後, (X, g) は Busemann-Poisson 核をもち, (ii) を満たすと仮定する.

事実

$\text{bar}(\mu)$ は, 関数 \mathbb{B}_μ の最小値を与える点である.

§4.3) ファイバー空間 $\text{bar} : \mathcal{P}^+(\partial X) \rightarrow X$

- (X, g) は Busemann-Poisson 核をもち, (ii) を満たすと仮定.
- bar は全射.
- $\text{bar} \circ \Theta = \text{Id}_X$ (Poisson 核写像は bar の切断).
- ファイバー $\text{bar}^{-1}(x) \subset \mathcal{P}^+(\partial X)$ は凸集合;

$$\mu_0, \mu_1 \in \text{bar}^{-1}(x) \implies (1-s)\mu_0 + s\mu_1 \in \text{bar}^{-1}(x), \quad s \in [0, 1]$$

- 局所自明性については, まだ明らかに成っていない.
- 接空間の分解はわかっている.

§4.4) 接空間の分解 (1)

- $\text{bar}(\mu) = x$ とする.

- $\tau \in T_\mu \text{bar}^{-1}(x) \subset T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$

\iff 任意の $V \in T_x X$ に対して, $\int_{\partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d\tau(\theta) = 0 \quad \cdots (*)$

- $V \in T_x X$ に対し, $\nu_\mu^x(V) := \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle \mu$ とおく.

- $\text{bar}(\mu) = x$ であるから, $\forall V \in T_x X$ に対し $\int_{\partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d\mu = 0$.

つまり, $\nu_\mu^x(V) \in T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$

- $0 = \int_{\partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d\tau = \int_{\partial X} \frac{d(\nu_\mu^x(V))}{d\mu} \frac{d\tau}{d\mu} d\mu = G_\mu(\nu_\mu^x(V), \tau)$

\iff 任意の $V \in T_x X$ に対して, $G_\mu(\nu_\mu^x(V), \tau) = 0 \quad \cdots (**)$

- $(**)$ は μ に依っているが, $(*)$ は μ と無関係であることに注意.

- $\mu = \Theta(x) = \mu_x$ ならば, $(**) \iff G(d\Theta_x(V), \tau) = 0$

§4.4) 接空間の分解 (2)

- $\text{bar}(\mu) = x$ ならば, $\nu_\mu^x : T_x X \rightarrow T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$
- $\tau \in T_\mu \text{bar}^{-1}(x) \subset T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$
 \iff 任意の $V \in T_x X$ に対して, $G_\mu(\nu_\mu^x(V), \tau) = 0$
- $T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$ は, $T_\mu \text{bar}^{-1}(x)$ の方向と, $\text{Im}(\nu_\mu^x)$ の方向に分解できる ;

$$T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X) = T_\mu \text{bar}^{-1}(x) \oplus \text{Im}(\nu_\mu^x) \quad (\text{直交分解})$$

- $\tau \in T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$ の $\text{Im}(\nu_\mu^x)$ の方向 : $\nu_\mu^x(V_\tau), V_\tau = \sum_{i=1}^n G_\mu(\tau, \nu_\mu^x(e_i^G)) e_i^G$

ただし, $\{e_i^G\}_{i=1,\dots,n}$ は $T_x X$ の内積

$$G_\mu(\nu_\mu^x(\cdot), \nu_\mu^x(\cdot)) = \int_{\theta \in \partial X} \langle \nabla B_\theta(x), \cdot \rangle \langle \nabla B_\theta(x), \cdot \rangle d\mu(\theta)$$

に関する正規直交基底.

§4.5) ファイバーと測地線 (1)

定理 6. (伊藤-S)

2 点 $\mu_0, \mu_1 \in \text{bar}^{-1}(x)$ を結ぶ測地線 $\mu(t)$ がファイバー $\text{bar}^{-1}(x)$ に含まれるための必要十分条件は

$$\sigma(\mu_0, \mu_1) \in \text{bar}^{-1}(x)$$

定理 7. (伊藤-S)

$\mu(0) = \mu, \mu'(0) = \tau$ である測地線 $\mu(t)$ がファイバー $\text{bar}^{-1}(x)$ に含まれるための条件は

(i) $\text{bar}(\mu) = x$ (ii) $\tau \in T_\mu \text{bar}^{-1}(x)$

(iii) 任意の $V \in T_x X$ に対し,
$$\int_{\partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle \left(\frac{d\tau}{d\mu} \right)^2 d\mu = 0$$

§4.5) ファイバーと測地線 (2)

定理 7. (伊藤-S)

$\mu(0) = \mu$, $\mu'(0) = \tau$ である測地線 $\mu(t)$ が ファイバー $\text{bar}^{-1}(x)$ に含まれるための条件は

(i) $\text{bar}(\mu) = x$

(ii) $\tau \in T_\mu \text{bar}^{-1}(x)$

(iii) 任意の $V \in T_x X$ に対し,
$$\int_{\partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle \left(\frac{d\tau}{d\mu} \right)^2 d\mu = 0$$

(iii) の条件は, 次のように解釈できる ;

- $\text{bar}^{-1}(x) \subset \mathcal{P}^+(\partial X)$ の第 2 基本形式に関する条件 : $H_\mu(\tau, \tau) = 0$
- 確率測度 $\mu_\tau := \left(\frac{d\tau}{d\mu} \right)^2 \mu \in \mathcal{P}(\partial X)$ の重心が x である.

§4.6) 関連する話題

- Douady-Earle [4]
 - 円周 S^1 の同相写像を円板 D 内の同相写像に拡張する際に重心写像を用いている.
- Besson-Courtois-Gallot [3] (井関, 数学 49 (1997) も参照)
 - 階数 1 非コンパクト型対称空間の剛性定理.
「 (X, g_0) と (Y, g) はいずれもコンパクトな同じタイプの負曲率局所対称空間で $\dim X = \dim Y > 3$ とする. このとき, $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ ならば, (X, g_0) と (Y, g) は計量を適当に定数倍すれば等長的である.」
 - ホモトピー同値写像 $f : Y \rightarrow X$ から得られる理想境界間の写像 $\bar{f} : \partial\tilde{Y} \rightarrow \partial\tilde{X}$ と, 重心写像を用いて, $F : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ 構成し, F が等長写像であることを示している.