数学クォータ科目「数学」第 1 回 (4/4)

合成関数とその微分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】１変数関数の合成関数とその微分

- ２つの関数 $y = f(t)$ と $t = g(x)$ に対して, $y = f(g(x))$ で定まる独立変数 x の関数を,「f と g の合成関数」という.
- $y = f(g(x))$ の導関数は, それぞれの関数の積となる.

$$y' = f'(g(x))\,g'(x)$$

または

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{df}{dt}(g(x))\,\frac{dg}{dx}(x), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dt}\,\frac{dg}{dx}$$

と表す場合もある.

- 「１変数関数の合成関数の微分」の効用：
複雑に見える関数も, いくつかの単純な関数の合成関数と見ることにより, 微分計算が容易にできる.

２変数関数の合成関数とその微分（１）

２変数関数 $f(x, y)$ に対し，

(1)　２つの１変数関数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ を $f(x, y)$ に代入した関数

$$z(t) := f(\varphi(t), \psi(t))$$

は独立変数 t の１変数関数となる．この関数の導関数は

$$z'(t) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t).$$

または

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t))\,\frac{d\varphi}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t))\,\frac{d\psi}{dt}(t),$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{d\psi}{dt}.$$

２変数関数の合成関数とその微分（２）

２変数関数 $f(x,y)$ に対し，

(1) ２つの２変数関数 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ を $f(x,y)$ に代入した関数

$$z(u,v) := f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

は独立変数 u, v の２変数関数となる．この関数の偏導関数は

$$z_u(u,v) = f_x(\varphi(u,v), \psi(u,v))\, \varphi_u(u,v) + f_y(\varphi(t), \psi(u,v))\, \psi_u(u,v),$$
$$z_v(u,v) = f_x(\varphi(u,v), \psi(u,v))\, \varphi_v(u,v) + f_y(\varphi(t), \psi(u,v))\, \psi_v(u,v).$$

または

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{du}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{dv} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{dv}.$$

２変数関数の合成関数（１）の意味

(1) $f(x,y)$ と $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ の合成

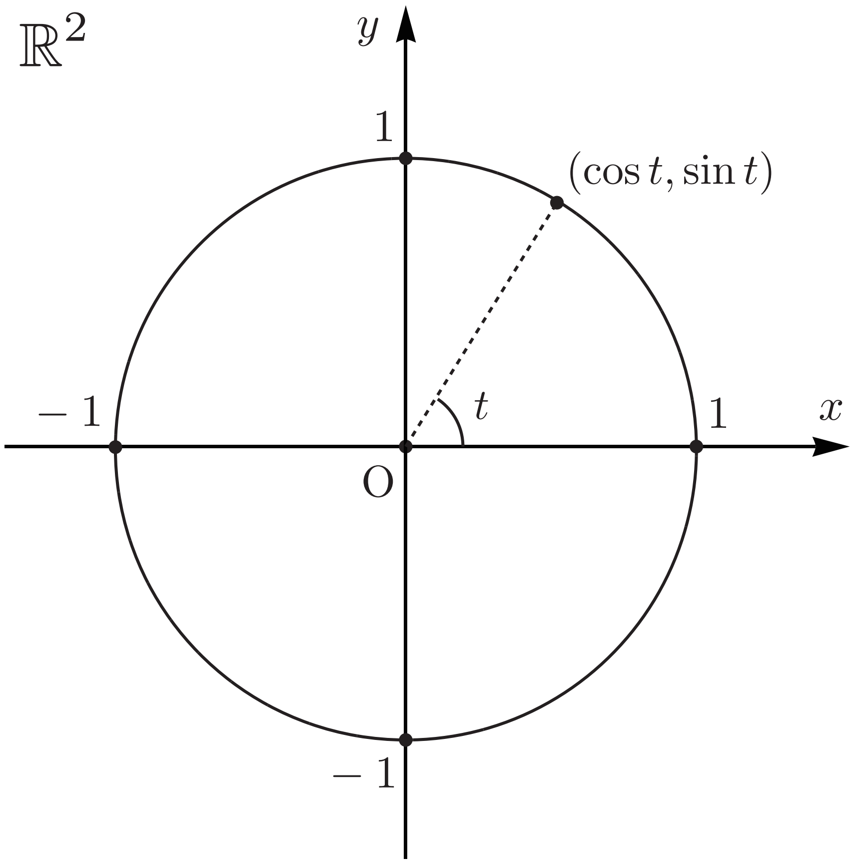
$\longrightarrow$ $f(x,y)$ を平面内の曲線 $(x,y)=(\varphi(t),\psi(t))$ に制限すること.

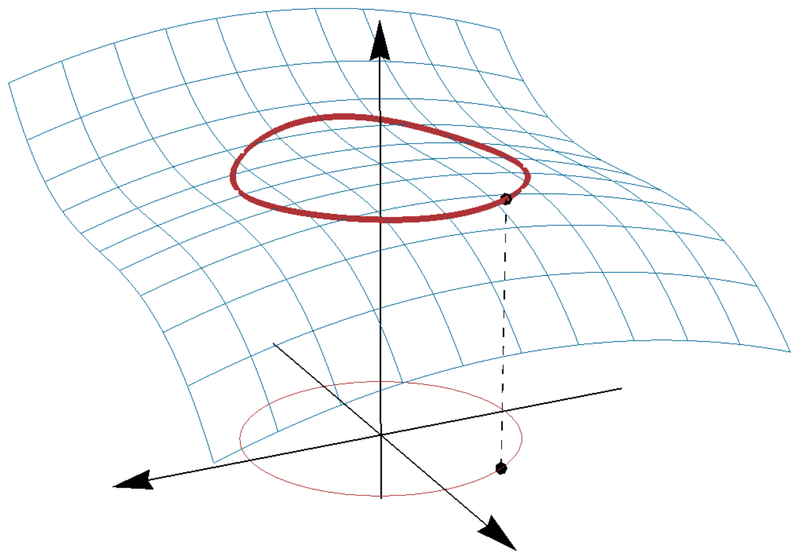
曲線のパラメータ表示

- ２つの関数の組 $(\varphi(t),\psi(t))$ は独立変数 t に対して, 平面の点を対応させるものである.
- t を定義域内で動かすとき, 点 $(\varphi(t),\psi(t))$ は平面内の曲線をなす.

２変数関数の合成関数（１）の例

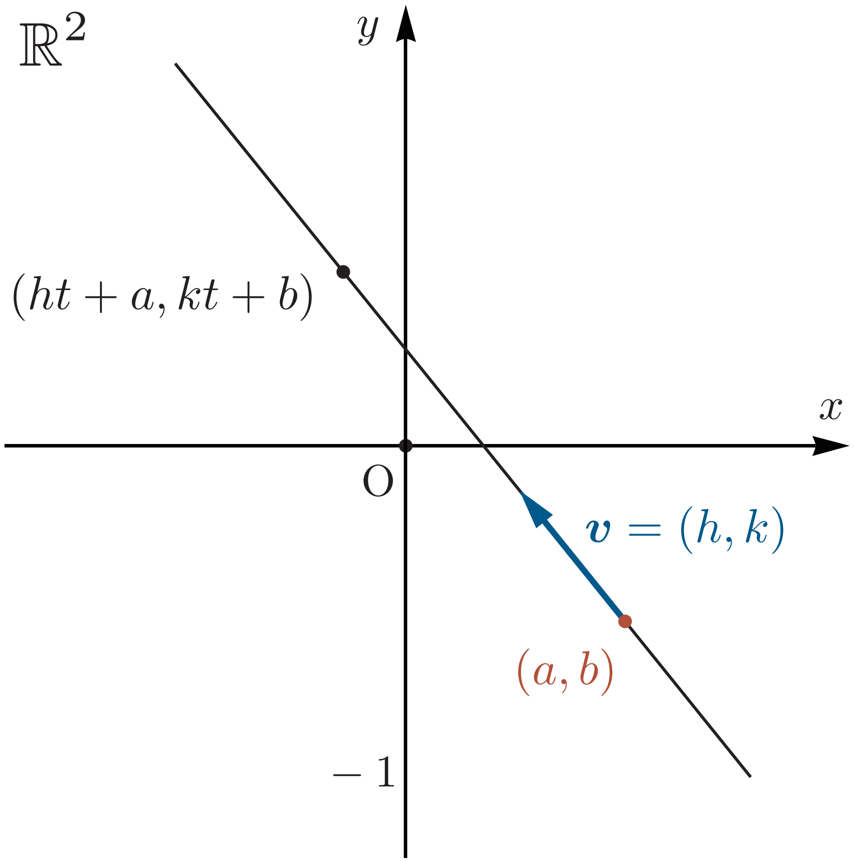
例１）$(x, y) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ は, 原点を中心とする半径 1 の円である.

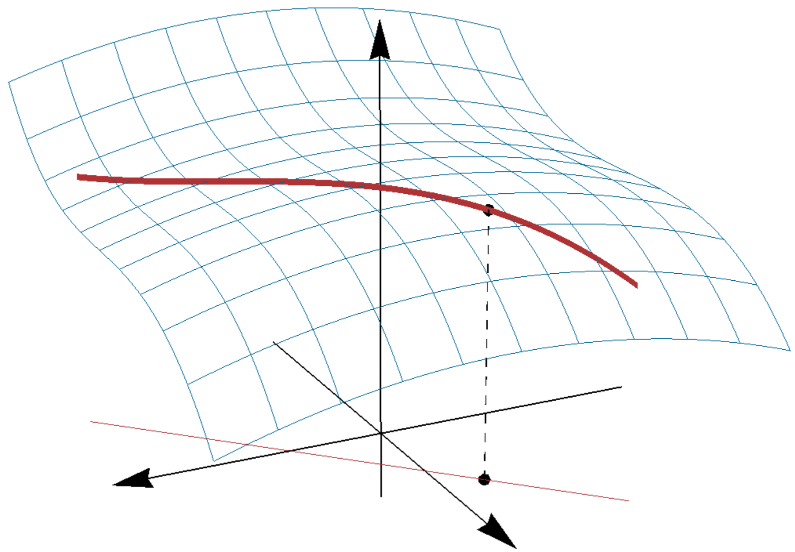




２変数関数の合成関数（１）の例

例２）$(x, y) = (ht + a, kt + b)$ は, 点 (a, b) を通り, 傾きが $\dfrac{k}{h}$ の直線である.





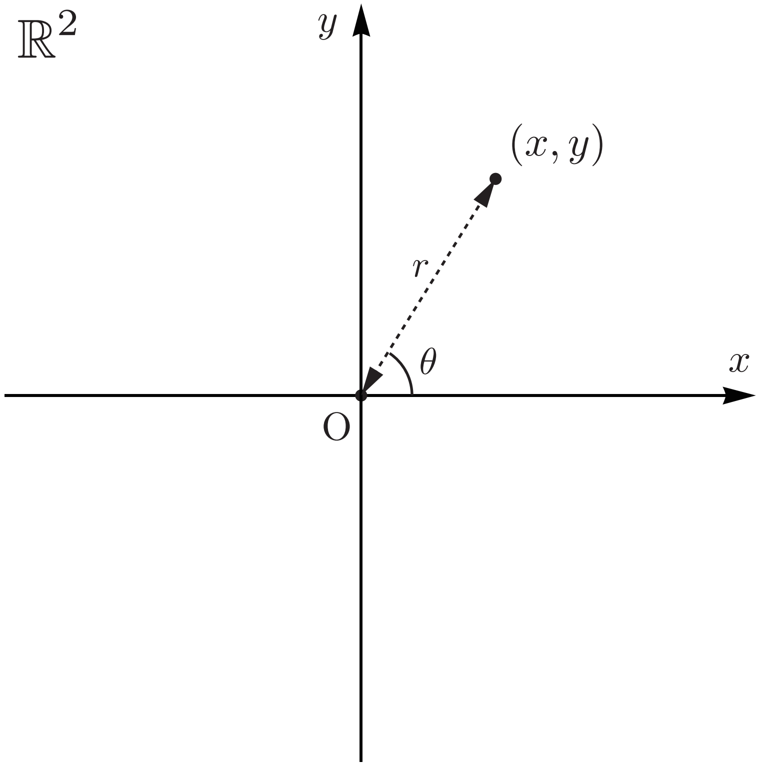
2変数関数の合成関数（2）の意味

(1) $f(x,y)$ と $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ の合成

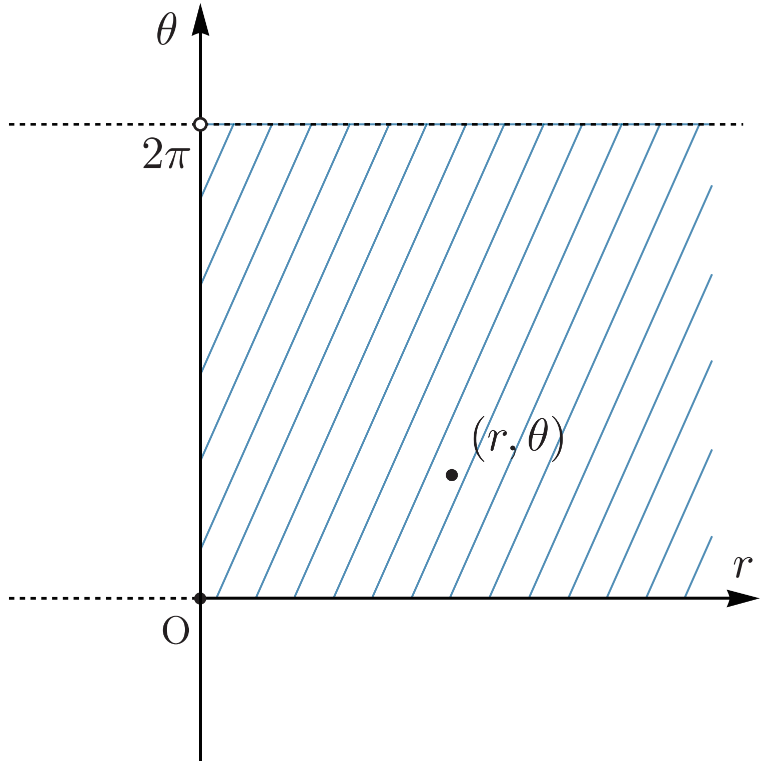
$\longrightarrow$ 座標変換 $(x,y)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ により, 関数 $f(x,y)$ を uv-平面上の関数とみること.

例）極座標変換 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

xy-平面 $(-\infty < x, y < \infty)$



$r\theta$-平面 $(r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$



２変数関数の合成関数（２）の微分の計算例

$\boxed{\text{例題}}$ 次の関数 $z = f(x, y)$ を $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標変換し, r, θ に関して偏微分しなさい.

例１） $f(x, y) = x^2 + y^2$

［解１］関数を合成すると

$$\begin{aligned} z = f(r\cos\theta, r\sin\theta) =& (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \\ =& r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ =& r^2. \end{aligned}$$

よって,

$$z_r(r, \theta) = 2r, \quad z_\theta(r, \theta) = 0.$$

２変数関数の合成関数（２）の微分の計算例

例題　次の関数 $z = f(x, y)$ を $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標変換し, r, θ に関して偏微分しなさい.

例１）$f(x, y) = x^2 + y^2$

［解２］合成関数の偏微分の公式を利用する;

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x \\ f_y(x, y) = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x_r = \dfrac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) = \cos\theta \\ y_r = \dfrac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) = \sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} x_\theta = \dfrac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta) = -r\sin\theta \\ y_\theta = \dfrac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta) = r\cos\theta \end{cases}$$

よって,

$$z_r = f_x(x, y)\, x_r + f_y(x, y)\, y_r = 2r\cos\theta \cdot \cos\theta + 2r\sin\theta \cdot \sin\theta = 2r,$$

$$z_\theta = f_x(x, y)\, x_\theta + f_y(x, y)\, y_\theta = 2r\cos\theta \cdot (-r\sin\theta) + 2r\sin\theta \cdot r\cos\theta = 0.$$

※ ２通りの方法で, 同じ結果が得られた.

２変数関数の合成関数（２）の微分の計算例

$\boxed{\text{例題}}$ 次の関数 $z = f(x, y)$ を $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標変換し, r, θ に関して偏微分しなさい.

例２） $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

例１）と同様に, ２通りの方法で偏導関数を求めてみよう.