数学特別研究ノート 2016.06.08 （担当：佐藤 弘康）

問題

$(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を，[1, p.117] の「内積の条件 (1)(2)(3)」を満たす写像とする．また，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ を $\mathbb{R}^2$ の基底とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2$ に対して，

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=a_1b_1(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)+(a_1b_2+a_2b_1)(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)+a_2b_2(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)$$

が成り立つことを示しなさい．

(2) $(\cdot,\cdot)$ が $\mathbb{R}^2$ 上の内積となるための $(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$ の条件を求めなさい．

（解答）．(1) 省略

(2) $A=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1), B=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2), C=(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)$ とおき，次の 2 条件

(i) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$ に対して，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geqq 0$ が成り立つ．

(ii) $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0$ となるのは $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ のときに限る．

を満たすような A,B,C の条件を求める．

(i) の条件から $A,C>0$ であることがすぐにわかる[*1]．$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ とおき，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$ を x に関して平方完成すると，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) &=Ax^2+2Bxy+Cy^2=A\left(x^2+2\frac{B}{A}xy+\frac{C}{A}y^2\right)\\ &=A\left\{\left(x+\frac{B}{A}y\right)^2-\frac{B^2}{A^2}y^2+\frac{C}{A}y^2\right\}=A\left\{\left(x+\frac{B}{A}y\right)^2+(AC-B^2)\frac{y^2}{A^2}\right\}\end{aligned}$$

となる．$\left(x+\dfrac{B}{A}y\right)^2\geqq 0, \dfrac{y^2}{A^2}\geqq 0$ であるから，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geqq 0$ となるためには，$AC-B^2\geqq 0$ が必要かつ十分であることがわかる[*2]．しかし，実際には $AC-B^2>0$ でなければならない．なぜなら，仮に $AC-B^2=0$ ならば，$\boldsymbol{w}=B\boldsymbol{e}_1-A\boldsymbol{e}_2$ に対して，$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})=0$ となるからである．

以上の考察から，(2) の解は

$$A,C>0^{*3}\qquad \text{かつ}\qquad AC-B^2>0$$

であることがわかる[*4]． □

参考文献

[1] 村上 正康・野澤 宗平・稲葉 尚志・佐藤 恒雄, 教養の線形代数（5 訂版）, 培風館, 2008.

[*1] (i) の条件を満たすためには，$A,C\geqq 0$ でなくてはならない．しかし，$A=0$ ならば，(ii) の条件に矛盾するので $A\neq 0$ である．$C\neq 0$ であることも同様．

[*2] 仮に，$AC-B^2<0$ ならば，$y\neq 0, x=-\dfrac{B}{A}y$ とすることにより，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})<0$ となる．

[*3] 実際には，$A>0$ と $C>0$ のどちらか一方を仮定すればよい．$A>0$ と $AC-B^2>0$ から，$C>0$ が導かれる．

[*4] この条件は，「行列 $\boldsymbol{D}=(d_{ij})$，$d_{ij}=(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$ の固有値がすべて正」と同値である．これにより，この事実は一般次元のベクトル空間に拡張できる．