線形代数 II 演習

－ 余因子行列 －

担当：佐藤 弘康

例題 12.1. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

の行列式と余因子行列を求めよ.

解. 第 1 列について $|A|$ を余因子展開すると

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) + (-1) \times (-12) = 6.$$

次に，余因子行列を求める．各小行列 A_{ij} の行列式は

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -12, \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9, \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6, \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

となるので，余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 9 \\ -4 & 8 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

また，定理 3.20(教科書 p.90) より，逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である.

問題 12.11. 次の行列 A にたいし，その行列式 $|A|$ と余因子行列 $\widetilde{A}$ を求め，$A\cdot\widetilde{A} = |A|E_3$ が成り立つことを確認せよ．さらに，正則なら逆行列を求めよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 12.12. 正方行列 A, B に対して，次のことを証明せよ．

(1) $|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$
(2) $\widetilde{A^{-1}} = \left(\widetilde{A}\right)^{-1}$ (ただし，A は正則行列とする)
(3) $\widetilde{{}^tA} = {}^t\left(\widetilde{A}\right)$

$\boxed{\text{考えてみよう}}$

(1) 基本行列 $E_{ij}(c), E_i(c), P_{ij}$ の余因子行列を求めよ．
(2) $\widetilde{AB}$ は $\widetilde{A}$ と $\widetilde{B}$ を用いて表せないだろうか？
(例：${}^t(AB) = {}^tB\cdot{}^tA$，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$)
(3) A に余因子行列をとる操作を 2 回行った行列 $\widetilde{\left(\widetilde{A}\right)}$ はどんな行列だろうか？
(例：${}^t\left({}^tA\right) = A$，$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$)