定義. $\mathbf{R}$ は以下の 3 つの公理系を満たし，少なくとも二つの元を含む集合である.

実数の公理 (I)「実数は体である（四則演算ができる）」

実数には二つの演算 $+$(和) と $\times$(積) が定義され，以下を満たす.

(1) 結合法則：任意の $a, b, c \in \mathbf{R}$ に対して

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$$

(2) 可換法則：任意の $a, b, c \in \mathbf{R}$ に対して

$$a + b = b + a, \quad a \times b = b \times a.$$

(3) 分配法則：任意の $a, b, c \in \mathbf{R}$ に対して

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

(4) 単位元の存在：0 は任意の $a \in \mathbf{R}$ に対し，$a + 0 = a$ を満たす数である（0 は和に関する単位元）．また，1 は任意の $a \in \mathbf{R}$ に対し，$a \times 1 = a$ を満たす数である（1 は積に関する単位元）.

(5) 逆元の存在：任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して，$a + b = 0$ を満たす $b \in \mathbf{R}$ が存在する（b を a の和に関する逆元といい $-a$ と書く）．また，$a \neq 0$ ならば，$a \times b = 1$ となる $b \in \mathbf{R}$ が存在する（このとき，b を a の積に関する逆元といい $\frac{1}{a}$ と書く）.

実数の公理 (II)「演算と両立する全順序（大小関係）が存在する」

(1) 任意の $a, b \in \mathbf{R}$ に対して，以下のうち 1 つだけが成り立つ：

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

(2) $a < b$ かつ $b < c$ ならば，$a < c$ である.

(3) $a < b$ ならば，任意の c に対して $a + c < b + c$ である.

(4) $a < b$ かつ $c > 0$ ならば，$a \times c < b \times c$ である.

実数の公理 (III)「実数の連続性」

(W) 実数の集合 $A \neq \emptyset$ が上（下）に有界ならばその上限（下限）が存在する.

$\iff$ **(M)** $\iff$ **(K)** $+$ **(A)** $\iff$ **(B-W)** $\iff$ **(C)** $+$ **(A)** $\iff$ **(D)**

これまで当たり前のように使ってきた実数に関する等式，不等式も実数の公理を用いて証明することができる．

問 1. 実数の公理 (I) を用いて，次のことを証明してみよう．

(1) 和に関する単位元 0 および積に関する単位元 1 はそれぞれ唯一つ存在する．
(2) 和に関する逆元，積に関する逆元も唯一つ存在する．
(3) 任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して，$a \times 0 = 0$ が成り立つ．
(4) $1 \neq 0$ である．

問 2. 実数の公理 (I) を用いて，次のことを証明してみよう．以後，積の記号「×」は省略する．

(1) $-(-a) = a$
(2) $(-1)a = -a$
(3) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$
(4) $(-a)(-b) = ab$
(5) $ab = 0 \implies a = 0$ または $b = 0$
(6) $\dfrac{1}{(-a)} = -\left(\dfrac{1}{a}\right)$
(7) $\dfrac{1}{ab} = \left(\dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{b}\right)$

問 3. 実数の公理 (I) および (II) を用いて，次のことを証明してみよう．なお，$a \leq b$ は「$a < b$ または $a = b$ のうちいずれか一方が成り立つ」ことを意味する（$\geq$ についても同様）．

(1) $a \leq b,\ c \leq d \Longrightarrow a + c \leq b + d$
(2) $a \leq b,\ c < d \Longrightarrow a + c < b + d$
(3) $a > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$
(4) $a^2 (= aa) \geq 0$
(5) $a > b$ ならば，$a > c > b$ を満たす，$c \in \mathbf{R}$ が存在する．
(6) $1 > 0$