線形代数 I 演習

− 演習問題の解答と補足 −

担当：佐藤 弘康

□ 平面ベクトルの演算，線形独立・線形従属，内積

問題 1.1 (1)

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\mathbf{0} \tag{1}$$

とおき、これを満たすスカラー c_1, c_2 を求める．これは連立方程式

$$\begin{cases} c_1+3c_2=0\\ 2c_1+4c_2=0\end{cases} \tag{2}$$

の解を求めることと同値である．方程式 (2) の解は $c_1=c_2=0$ だけなので，(1) を満たすスカラーは $c_1=c_2=0$ のみである．したがって，$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ は線形独立である．

(2) 例えば，$2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=0$ が成り立つので，線形従属．

(3) 線形独立 (証明は (1) と同様)．

(4) 任意の実数 $c\in\mathbf{R}$ に対して $c\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ であるから，$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ は線形従属．

(5) 例えば，$5\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}-9\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=0$ が成り立つので，線形従属．

問題 1.2 (1) 任意の $x,y\in\mathbf{R}^2$ に対し，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\dfrac{3y-4x}{4}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\dfrac{2x-y}{2}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ と表すことができるので，$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ は $\mathbf{R}^2$ を張る．また，線形独立であることも問題 1.1(1) と同様に証明できる．よって，基底である．$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$．

(2) 例えば，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ の線形結合で表すことはできないので，$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ は $\mathbf{R}^2$ を張らない．したがって，基底ではない．

(3) 任意の $x, y \in \mathbf{R}^2$ に対し，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y-x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と表すことができるので，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{R}^2$ を張る．また，線形独立であることも問題1.1(1) と同様に証明できる．よって，基底である．$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

問題 1.3 (1) $\mathbf{0} = c_1(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) + c_2(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}) = (c_1+3c_2)\boldsymbol{a} + (2c_1+4c_2)\boldsymbol{b}$ とおくと，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立だから，$c_1+3c_2=0, 2c_1+4c_2=0$ が成り立つ．しかし，これを満たすのは $c_1=c_2=0$ のときだけなので，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ は線形独立である．

(2) $2(-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) + (2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}) = \mathbf{0}$ であるから，$-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ はどんなベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対しても線形従属である．

問題 1.4 「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形独立 $\Longleftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$」を示すには,「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属 $\Longleftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$」を示せばよい．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が線形従属} &\Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b} \quad (k \in \mathbf{R}) \\ &\Longleftrightarrow a_1 = kb_1,\ a_2 = kb_2 \\ &\Longleftrightarrow a_1 : b_1 = a_2 : b_2 \\ &\Longleftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \end{aligned}$$

問題 2.1 (1) $\|\boldsymbol{u}\| = \dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \|\boldsymbol{v}\| = 2\sqrt{5},\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$．なす角は $\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{5},\ \|\boldsymbol{v}\| = 3\sqrt{5},\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -15$．なす角は π.

(3) $\|\boldsymbol{u}\| = 2,\ \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2(4-2\sqrt{2})} = \sqrt{2(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1),\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2(\sqrt{3}-1)$．なす角は $\dfrac{\pi}{4}$.

(4) $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| = 1,\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta-\varphi)$．なす角は $(\theta-\varphi)$.

問題 2.2 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \end{pmatrix}$ であるから，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ を計算すると

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) &= (a_1+b_1)(a_1-b_1) + (a_2+b_2)(a_2-b_2) \\ &= (a_1)^2 - (b_1)^2 + (a_2)^2 - (b_2)^2 \\ &= \left\{(a_1)^2 + (a_2)^2\right\} - \left\{(b_1)^2 + (b_2)^2\right\} \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 - \|\boldsymbol{b}\|^2. \end{aligned}$$

したがって，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = 0$，すなわち，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ が直交することと $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ は同値である（つまり，対角線が直交する平行四辺形はひし形であるということ）．

問題 2.3 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とおくと，三角形 OAB の面積は $\dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ に等しい．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ より，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta &= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\left(\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}.
\end{aligned}$$

問題 2.4 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 \\
&= (a_1)^2 + a_1b_1 + (b_1)^2 + (a_2)^2 + a_2b_2 + (b_2)^2 \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).
\end{aligned}$$

同様に $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$．したがって，

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2) \tag{3}$$

が成り立つ．(3) は高校の数学 A の「平面図形」で学習した（と思われる）中線定理に他ならない．

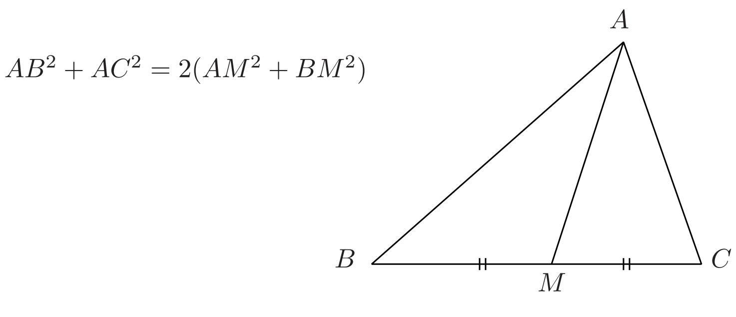


図 1: 中線定理

問題 3.1 $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$ とおくと $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(1) $\|\boldsymbol{v}\| = 5$．したがって，$\boldsymbol{v}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\dfrac{1}{5}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

(2) 逆向きだから，(1) のベクトルに (-1) 倍して $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

(3) 求めるベクトルを $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ は直交するから $0 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 4x + 3y$．また，$\boldsymbol{u}$ は長さが 1 であるから $x^2 + y^2 = 1$．これら 2 式から，$x = \pm\frac{3}{5}, y = \mp\frac{4}{5}$ を得る (複号同順)．したがって求めるベクトルは $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

問題 3.2 (1) (i) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属のとき，$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ を満たす，少なくとも一方は 0 でない x, y が存在する．このとき，$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ が成り立つので，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ も線形従属である．

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形独立のときを考える．$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ とおき，

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \quad (x, y, z \in \mathbf{R})$$

とおく．この式は

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \tag{4}$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \tag{5}$$

と書き換えることができる．(4) 式に a_2 をかけ，(5) 式に a_1 をかけて引き算して x を消去すると

$$(b_1 a_2 - b_2 a_1)y + (c_1 a_2 - c_2 a_1)z = 0$$

を得る．ここで，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立だから，問題 1.4 の結果から $b_1 a_2 - b_2 a_1 \neq 0$ が成り立つので，

$$y = -\frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} z \tag{6}$$

を得る．z を 0 でない適当な実数とすれば，(6), (4) から x, y が定まる．したがって，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は線形従属であることがわかる．

(2) n 個 $(n \geq 3)$ のベクトルから 3 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を選ぶと，(1) の結果より，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たすスカラー c_1, c_2, c_3 が存在する (ただし，c_1, c_2, c_3 のうち少なくとも 1 つは 0 でない)．このスカラーに対して，

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_4 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は線形従属である．

□ 複素数

問題 **4.1** (1) z を -1 の 4 乗根とする．つまり，z は $z^4=-1$ を満たす複素数である．このとき，

$$\begin{aligned}0=z^4+1=&(z^4+2z^2+1)-2z^2\\=&(z^2+1)^2-(\sqrt{2}z)^2\\=&(z^2+1+\sqrt{2}z)(z^2+1-\sqrt{2}z).\end{aligned}$$

したがって，-1 の 4 乗根は $\dfrac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-1}\sqrt{2}}{2}$ である（ただし，複合任意）．

(2) z を -1 の 6 乗根とする．つまり，z は $z^6=-1$ を満たす複素数である．このとき，

$$\begin{aligned}0=z^6+1&=(z^2+1)(z^4-z^2+1)\\&=(z^2+1)\left\{(z^2+1)^2-3z^2\right\}\\&=(z^2+1)(z^2+1+\sqrt{3}z)(z^2+1-\sqrt{3}z).\end{aligned}$$

したがって，-1 の 6 乗根は $\pm\sqrt{-1},\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}$.

<u>(2) の別解</u>：$\sqrt{-1}$ の 6 乗根を $z=r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\theta)$ とおくと

$$z^6=r^6(\cos 6\theta+\sqrt{-1}\sin 6\theta), \tag{7}$$

$$-1=1\cdot(\cos\pi+\sqrt{-1}\sin\pi). \tag{8}$$

今，$z^6=-1$ だから，(7) と (8) の絶対値，偏角をそれぞれ比較すると

$$r^6=1\ ,\quad 6\theta=\pi+2n\pi\ (n\text{ は整数})$$

を得る．したがって，$\sqrt{-1}$ の 6 乗根は絶対値が 1，偏角が $\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{11\pi}{6}$ の複素数である．

問題 **4.2**

(1) $\sqrt{-1}=\cos\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\sin\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $-5=5\cdot(-1)=5\left(\cos\pi+\sqrt{-1}\sin\pi\right)$.

(3) $\sqrt{3}+3\sqrt{-1}=2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

問題 **4.3** (1) $z=a+b\sqrt{-1}$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{z}{1+z^2}=&\frac{a+b\sqrt{-1}}{1+(a^2-b^2+2ab\sqrt{-1})}\\=&\frac{a+b\sqrt{-1}}{(1+a^2-b^2)+2ab\sqrt{-1}}\cdot\frac{(1+a^2-b^2)-2ab\sqrt{-1}}{(1+a^2-b^2)-2ab\sqrt{-1}}\\=&\frac{a(1+a^2+b^2)+\sqrt{-1}(1-a^2-b^2)b}{(1+a^2-b^2)^2+4a^2b^2}.\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{z}{1+z^2}$ が実数となるためには $(1-a^2-b^2)b=0$ とならなければならない．仮定より，$b \neq 0$ だから $1-a^2-b^2=0$．また，このとき $\dfrac{z}{1+z^2}$ の分母は $4(1-b^2)$ となるので，$b^2 \neq 1$．したがって，求める条件は「$1-a^2-b^2=0$ かつ $b \neq 0,\ \pm 1$」．

(2) z^4 が実数になることと $z^4-\overline{(z^4)}=0$ は同値である．共役複素数の性質

$$\overline{(w_1 w_2)} = \overline{w_1}\cdot\overline{w_2} \quad (w_1, w_2 \in \mathbf{C}) \tag{9}$$

より，

$$0 = z^4 - \overline{(z^4)} = z^4 - (\overline{z})^4 = (z-\overline{z})(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2).$$

仮定より，$z^2+\overline{z}^2 = 2(a^2-b^2) \neq 0$．したがって，$z^4$ が実数になるのは $z \pm \overline{z} = 0$，すなわち,「$a=0$ かつ $b \neq 0$」かまたは「$b=0$ かつ $a \neq 0$」のときである (つまり，0 でない実数かまたは純虚数のどちらかの場合).

問題 **1.** (9) を証明せよ．また，

$$\overline{\left(\frac{w_1}{w_2}\right)} = \frac{(\overline{w_1})}{(\overline{w_2})}$$

を証明せよ．

問題 4.4 証明には偏角の性質

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \tag{10}$$

を用いる (証明は教科書 p.11 を参照).

(1) (10) より，$\arg(cz) = \arg(c) + \arg(z)$．$c \geq 0$ ならば $\arg(c) = 0$ であるから，$\arg(cz) = \arg(z)$．また $c < 0$ ならば，$\arg(c) = \pi$ であるから，$\arg(cz) = \arg(z) + \pi$.

(2) $z\overline{z} = |z|^2 > 0$ であるから，$0 = \arg(z\overline{z}) = \arg(z) + \arg(\overline{z})$.

(3) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{1}{|w|^2}(z\overline{w})$，$\dfrac{1}{|w|^2} > 0$ であるから，問題 4.4(1), (2) を用いると

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z\overline{w}) = \arg z + \arg\overline{w} = \arg z - \arg w$$

となる．

問題 4.5 $\arg(z)=\phi$, $\arg(w)=\psi$ とおくと

$$z=|z|(\cos\phi+\sqrt{-1}\sin\phi),\quad w=|w|(\cos\psi+\sqrt{-1}\sin\psi)$$

と書ける．このとき

$$\begin{aligned} z\overline{w}+\overline{z}w =& |z|\cdot|w|\left\{\big(\cos(\phi-\psi)+\sqrt{-1}\sin(\phi-\psi)\big)\right.\\ &\left.+\ \big(\cos(\psi-\phi)+\sqrt{-1}\sin(\psi-\phi)\big)\right\}\\ =& 2|z|\cdot|w|\cos(\phi-\psi). \end{aligned}$$

したがって，$z\overline{w}+\overline{z}w=0$ と $\phi-\psi=\dfrac{\pi}{2}$ は同値である．

別解その 1：$z\overline{w}=\overline{(\overline{z}w)}$ であるから，

$$\begin{aligned} \overline{z}w+z\overline{w}=0 &\iff \overline{z}w=k\sqrt{-1}\quad (\text{ただし，}k\in\mathbf{R})\\ &\iff \arg(\overline{z}w)=\pm\frac{\pi}{2}\ \big(=\arg(k\sqrt{-1})\big)\\ &\iff \arg z-\arg w=\pm\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

別解その 2：$z=a_1+\sqrt{-1}a_2$，$w=b_1+\sqrt{-1}b_2$ とおき，$z,w\in\mathbf{C}$ をそれぞれ平面ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ と同一視すると

$$\begin{aligned} \overline{z}w+z\overline{w} =& (a_1-\sqrt{-1}a_2)(b_1+\sqrt{-1}b_2)+(a_1+\sqrt{-1}a_2)(b_1-\sqrt{-1}b_2)\\ =& 2(a_1b_1+a_2b_2)\\ =& 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}). \end{aligned}$$

したがって，$\overline{z}w+z\overline{w}=0$ が成り立つことと，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が直交する（つまり z と w の偏角の差が $\pi/2$ になる）ことは同値である．

問題 4.6

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{-1})(3+\sqrt{-1}) &= 6+5\sqrt{-1}+(-1)\\ &= 5(1+\sqrt{-1})\\ &= 5\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

であるから，$\arg(2+\sqrt{-1})+\arg(3+\sqrt{-1})=\dfrac{\pi}{4}$．ここで，$\theta_1=\arg(2+\sqrt{-1})$，$\theta_2=\arg(3+\sqrt{-1})$ とおくと，$\tan\theta_1=\dfrac{1}{2}$，$\tan\theta_2=\dfrac{1}{3}$，すなわち，$\theta_1=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$\theta_2=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$．したがって，$\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ を得る．

□ n 項数ベクトル

問題 **4.7** (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$ が成り立つので線形従属.

(2)

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{11}$$

とおき、この式を満たすスカラー c_1, c_2, c_3 を求める．これは連立方程式

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 + 3c_3 = 0 \\ -c_1 - 2c_3 = 0 \end{cases}$$

の解であるが，この解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみである．したがって，(11) を満たすスカラーは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ だけなので，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ は線形独立である.

問題 **4.8** (1)

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

とおく．このとき，$c_1, \ldots, c_n$ は

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0 \\ \qquad c_2 + \cdots + c_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad c_n = 0 \end{cases}$$

を満たす．しかし，これは $(c_1, \ldots, c_n) = (0, \ldots, 0)$ の場合だけであるから，線形独立である.

(2) $n \geq 3$ のとき,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} n(k-1)+1 \\ n(k-1)+2 \\ n(k-1)+3 \\ \vdots \\ kn \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} n(n-1)+1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n^2 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = 2n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = 2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)$．つまり，$\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 0$ が成り立つ．ここで,

$$c_1 = 1,\ c_2 = -2,\ c_3 = 1,\ c_4 = \cdots = c_n = 0$$

は

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = 0$$

を満たすので，$\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ は線形従属である．$n = 1, 2$ のときは線形従属である ($n = 1$ のときは明らか．$n = 2$ のときは問題 1.1(1) で証明した).

問題 4.9

$$\begin{aligned} 0 &= c_1(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) + c_2(2\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}) + c_3(-\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{c}) \\ &= (c_1 + 2c_2 - c_3)\boldsymbol{a} + (2c_1 + 4c_2)\boldsymbol{b} + (3c_2 - 2c_3)\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

とおく．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は線形独立なので,

$$c_1 + 2c_2 - c_3 = 0, \quad 2c_1 + 4c_2 = 0, \quad 3c_2 - 2c_3 = 0$$

が成り立つ．しかし，この連立方程式を満たす (c_1, c_2, c_3) は $(0, 0, 0)$ だけなので (これは連立方程式を解けばわかる)，$\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}, -\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{c}$ は線形独立であることがわかる．

問題 4.10 $(\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b} + 7\boldsymbol{c}) - 2(2\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} + 8\boldsymbol{c}) + (3\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b} + 9\boldsymbol{c}) = 0$ が成り立つので，どんなベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対しても，$\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b} + 7\boldsymbol{c}, 2\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} + 8\boldsymbol{c}, 3\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b} + 9\boldsymbol{c}$ は線形従属である．

問題 5.1 (1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形独立となるための条件を求めるために

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \mathbf{0} \quad (x, y, z \in \mathbf{R}) \tag{12}$$

とおき，これを満たすスカラー x, y, z を調べる．これは連立方程式

$$x + 2y + 3z = 0 \tag{13}$$
$$2x + ky + 3z = 0 \tag{14}$$
$$3x - 2y + z = 0 \tag{15}$$

の解である．(13), (14) と (13), (15) からそれぞれ x を消去すると

$$(k-4)y - 3z = 0 \tag{16}$$
$$y + z = 0 \tag{17}$$

を得る．また，(16), (17) から z を消去すると

$$(k-1)y = 0 \tag{18}$$

を得る．

ここで，$k = 1$ のとき，$y = l$ ($l \in \mathbf{R}$) とおくと (17) から $z = -l$，(13) から $x = l$ を得る．これらは (12) を満たすので，この場合 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は線形従属となる．

$k \neq 1$ ならば，(18) から $y = 0$．(17) から $z = 0$，(13) から $x = 0$．したがって，(12) を満たすスカラーは $x = y = z = 0$ だけなので，この場合 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は線形独立となる．

したがって，解は $\underline{k \neq 1}$.

(2) 上の議論から，線形従属となるのは $\underline{k = 1}$ のとき．

□ 行列の演算・いろいろな行列

問題 **6.1** $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}.$$

A と B が可換ならば，$d = a,\ c = -b$. したがって，$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbf{R})$.

問題 **6.2** $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ とおく.

(1)

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 & 3x_2 + x_4 \\ -6x_1 - 2x_3 & -6x_2 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

$AX = O$ より，$x_3 = -3x_1, x_4 = -3x_2$. したがって，$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -3x_1 & -3x_2 \end{pmatrix} \quad (x_1, x_2 \in \mathbf{R})$. 一方，

$$YA = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 - 6x_2 & 3x_1 - 2x_2 \\ 3x_3 - 6x_4 & x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

であるから，$YA = O$ ならば，$y_1 = 2y_2, y_3 = 2y_4$. したがって，$Y = \begin{pmatrix} 2y_2 & y_2 \\ 2y_4 & y_4 \end{pmatrix} \quad (y_2, y_4 \in \mathbf{R})$.

(2)

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

$AX = O$ より，x_1, x_2, x_3, x_4 は

$$x_1 + 2x_3 = 0, \tag{19}$$
$$3x_1 + 4x_3 = 0, \tag{20}$$
$$x_2 + 2x_4 = 0, \tag{21}$$
$$3x_2 + 4x_4 = 0 \tag{22}$$

を満たす．(19)，(20) より $x_1 = x_3 = 0$．また，(21)，(22) より $x_2 = x_4 = 0$．したがって，$\underline{X = O}$．同様に

$$YA = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 - 6x_2 & 3x_1 - 2x_2 \\ 3x_3 - 6x_4 & x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

より，$YA = O$ を満たす数は $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$．つまり，$\underline{Y = O}$.

問題 6.3 求める行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$．したがって，$A^2 = 0$ のとき，

$$a^2 = d^2 = -bc, \quad b(a+d) = c(a+d) = 0$$

が成り立つ．(i) $b \neq 0$ ならば，$d = -a$，$c = -\dfrac{a^2}{b}$．(ii) $b = 0$ ならば，$a = d = 0$．以上のことから，$A^2 = 0$ を満たす行列は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad (a, b, c \in \mathbf{R},\ \text{ただし } b \neq 0).$$

(2) $A^2 = E_2$ のとき，

$$a^2 = d^2 = 1 - bc, \quad b(a+d) = c(a+d) = 0$$

が成立する．(i) $b \neq 0$ ならば，$d = -a$，$c = \dfrac{1-a^2}{b}$．(ii) $b = 0$ ならば，$a^2 = d^2 = 1$．さらに，$a = d = \pm 1$ ならば $c = 0$，$a = -d = \pm 1$ ならば c は任意の数でよい．以上のことから，$A^2 = E_2$ となる行列は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & \mp 1 \end{pmatrix}. \ \text{(復号同順)}$$

ただし，$a, b, c \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$.

(3) $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおく．

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + cw & bz + dw \end{pmatrix}.$$

したがって，任意の 2 次正方行列 B に対し $AB = BA$ が成り立つことと，任意の $x, y, z, w \in \mathbf{R}$ に対して

$$bz = cy, \tag{23}$$

$$ay + bw = bx + dy,\ cx + dz = az + cw \tag{24}$$

が成り立つことは同値である．(23) より，$b = c = 0$．これを (24) に代入すると $ay = dy, dz = az$．したがって，$a = d$．つまり，任意の 2 次正方行列と可換な行列はスカラー行列に限る．

問題 6.4 証明は帰納法を用いる．

(1) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

問題 6.5 (1) 行列の積の定義より，$A \in M(2, 3; \mathbf{R})$ だから $AX = E_2$，$YA = E_3$ を満たす行列 X, Y は共に 3×2 行列である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} - 2x_{31} & x_{12} - 2x_{32} \\ x_{11} - x_{21} + x_{31} & x_{12} - x_{22} + x_{32} \end{pmatrix}.$$

$AX = E_2$ より，

$$x_{11} - 2x_{31} = 1, \quad x_{11} - x_{21} + x_{31} = 0, \tag{25}$$

$$x_{12} - 2x_{32} = 0, \quad x_{12} - x_{22} + x_{32} = 1. \tag{26}$$

(25) より，$x_{31} = k\ (\in \mathbf{R})$ とおくと $x_{11} = 2k + 1$，$x_{21} = 2k - 1$．同様に (26) より，$x_{32} = l$ とおくと，$x_{12} = 2l$，$x_{22} = 3l - 1\ (l \in \mathbf{R})$．したがって，

$$X = \begin{pmatrix} 2k+1 & 2l \\ 2k-1 & 3l-1 \\ k & l \end{pmatrix} \qquad (k, l \in \mathbf{R}).$$

一方，

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} + y_{12} & -y_{12} & -2y_{11} + y_{12} \\ y_{21} + y_{22} & -y_{22} & -2y_{21} + y_{22} \\ y_{31} + y_{32} & -y_{32} & -2y_{31} + y_{32} \end{pmatrix}.$$

$YA = E_3$ より，第 1 行に着目すると

$$y_{11} + y_{12} = 1, \quad -y_{12} = 0 \quad -2y_{11} + y_{12} = 0.$$

しかし，この方程式を満たす数 y_{11}, y_{12} は存在しない．第 2，3 行についても同様である．したがって，$YA = E_3$ を満たす Y は存在しない．

(2) (1) と同様，方程式を解けばよい．$X = Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

問題 **2.** A を勝手な 2×3 行列とする．このとき $YA = E_3$ を満たす $Y \in M(3, 2; \mathbf{R})$ が存在しないことを説明せよ．

問題 **7.1** すべての正方行列は対称行列と交代行列の和に一意的に表すことができる (教科書 p.24 例題1.4 を参照)．特に，行列 A に対して，その対称部分は $\dfrac{A + {}^tA}{2}$，その交代部分は $\dfrac{A - {}^tA}{2}$ である．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 4 & 1 & 5 \\ -\frac{5}{2} & 5 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ -\frac{3}{2} & -3 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

問題 **3.** 任意の行列 A に対し，$\dfrac{A + {}^tA}{2}$，$\dfrac{A - {}^tA}{2}$ はそれぞれ対称行列，交代行列になることを証明せよ．

問題 **7.2** 転置行列の性質

$$ {}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA, \quad {}^t({}^tA) = A $$

を用いると

$$ {}^t({}^tA \cdot A) = {}^tA \cdot {}^t({}^tA) = {}^tA \cdot A. $$

以上により，${}^tA \cdot A$ が対称行列であることがわかる．

問題 **7.3** $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ とおく．A, B は上三角行列であるから，その成分は

$$ i > j \implies a_{ij} = 0,\ b_{ij} = 0 \tag{27} $$

を満たす．$A + B$ の (i, j) 成分は $a_{ij} + b_{ij}$ であるから，$i > j$ ならば $a_{ij} + b_{ij} = 0$. したがって，$A + B$ も上三角行列である．また，AB の (i, j) 成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ であ

るから，$i > j$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = (a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{ij}b_{jj}) + (a_{i\ j+1}b_{j+1\ j} + \ldots + a_{ni}b_{nj}) \tag{28}$$

と 2 つの部分に分けると (27) より，(28) の右辺の前半部分は A の成分が 0 で，後半部分は B の成分が 0 である．したがって，AB も上三角行列である．

問題 7.4

$$\begin{aligned} \text{(i) } AB \text{ が対称} &\iff AB = {}^t(AB) \\ &\iff AB = {}^tB \cdot {}^tA = BA \ (A, B \text{ は対称だから}) \\ &\iff \text{(ii) } A \text{ と } B \text{ は可換.} \end{aligned}$$

問題 7.5 (ii)$\Longrightarrow$(i) A を対称行列とする (${}^tA = A$)．このとき任意の交代行列 B に対して

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}\left({}^t(AB)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tB{}^tA\right) = \mathrm{Tr}\,(-BA) = -\,\mathrm{Tr}(BA) = -\,\mathrm{Tr}(AB).$$

したがって，$\mathrm{Tr}(AB) = 0$ となる．

(i)$\Longrightarrow$(ii) A の (i, j) 成分を a_{ij} とおく．交代行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

に対して，

$$AB = \begin{pmatrix} a_{12} & -a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{22} & -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

今，$\mathrm{Tr}(AB) = 0$ だから，$a_{12} - a_{21} = 0$．その他の i, j $(i \neq j)$ に対しても $a_{ij} = a_{ji}$ となることが同様に証明できる．

問題 8.1 (1)

$$AB = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{{}^t\mathbf{0}} & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \multirow{2}{*}{E_2} & 1 \\ & 1 \\ \hline {}^t\mathbf{0} & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \hline {}^t\mathbf{0} & 2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \hline {}^t\mathbf{0} & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{E_2}} \\ 3 & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{E_2}} & 1 & 2 \\ & & 3 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & -6 & 2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & -1 & 2 \\ & & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -11 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & -11 \\ -1 & 2 & 7 & -4 \\ 3 & -1 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

問題 8.2

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と A をブロック分割すると

$$2A^3 - 3A^2 = 2\begin{pmatrix} B^3 & O \\ O & C^3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} B^2 & O \\ O & C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2B^3 - 3B^2 & O \\ O & 2C^3 - 3C^2 \end{pmatrix}.$$

ここで，問題 6.4 の結果を使うと

$$2B^3-3B^2=2\begin{pmatrix}2^3 & 3\cdot 2^2\\ 0 & 2^3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2^2 & 2\cdot 2^1\\ 0 & 2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 12\\ 0 & 4\end{pmatrix},$$

$$2C^3-3C^2=2\begin{pmatrix}3^3 & 3\cdot 3^2 & 3\cdot 3\\ 0 & 3^3 & 3\cdot 3^2\\ 0 & 0 & 3^3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3^2 & 2\cdot 3^1 & 1\\ 0 & 3^2 & 2\cdot 3^1\\ 0 & 0 & 3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27 & 36 & 15\\ 0 & 27 & 36\\ 0 & 0 & 37\end{pmatrix}$$

であるから，

$$2A^3-3A^2=\begin{pmatrix}4 & 12 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 27 & 36 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 27 & 36\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 37\end{pmatrix}.$$

問題 **8.3**

$$\text{「対角成分がすべて }0\text{ の }n\text{ 次上三角行列 }N\text{ に対して, }N^n=O\text{」} \tag{29}$$

を n に関する帰納法で証明する．

$n=1$ のとき，(29) は明らか．

$n=k$ に対して (29) が成り立つと仮定する．N を $(k+1)$ 次正方行列で対角成分が 0 の上三角行列とし，以下のようにブロック分割する：

$$N=\left(\begin{array}{cccc|c}0 & * & \cdots & * & *\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & * & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & *\\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}N' & \boldsymbol{x}\\ {}^t\mathbf{0} & 0\end{pmatrix}.$$

ただし，N' は対角成分が 0 の k 次上三角行列で，$\boldsymbol{x}$ は $(k,1)$ 行列 (k 項数ベクトル) である．ここで N の $(k+1)$ 乗を計算すると，

$$N^{k+1}=\begin{pmatrix}N' & \boldsymbol{x}\\ {}^t\mathbf{0} & 0\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}N'^{k+1} & N'^{k}\boldsymbol{x}\\ {}^t\mathbf{0} & 0\end{pmatrix}$$

となる．帰納法の仮定より，$N'^{k+1}=N'\cdot N'^{k}=N'\cdot O=O$，$N'^{k}\boldsymbol{x}=O\cdot\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$．これで，$N^{k+1}=O$ が示され，任意の自然数 n に対して (29) が証明された．

別解： $A=(a_{ij})$ を対角成分が 0 の上三角行列とすると a_{ij} は

$$i\geq j\Longrightarrow a_{ij}=0 \tag{30}$$

を満たす．

ここで，$n=3$ の場合を考えよう．A を (30) を満たす 3 次正方行列とすると，A^2 の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{kj}$ だから，$A^3 = A^2 \cdot A$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{kl}\right)a_{lj} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ik}a_{kl}a_{lj}$$

である．(30) より，A^3 の成分で 0 にならない項は $\displaystyle\sum_{i<k<l<j} a_{ik}a_{kl}a_{lj}$ だが，どんな i,j $(1 \leq i,j \leq 3)$ の組をもってきても $i<k<l<j$ を満たす k,l は存在しない．したがって，A^3 の成分はすべて 0 になる．

同様に A を (30) を満たす n 次正方行列とすると，A^n の (i,j) 成分は

$$\sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}=1}^{n} a_{ik_1}a_{k_1k_2}\ldots a_{k_{n-1}j}$$

と書ける．しかし，(30) より 0 にならない項は

$$\sum_{i<k_1<k_2<\ldots<k_{n-1}<j} a_{ik_1}a_{k_1k_2}\ldots a_{k_{n-1}j}$$

であるが，任意の i,j に対して $1 \leq i < k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-1} < j \leq n$ を満たす $(n-1)$ 個の自然数 $k_1,\ldots,k_{n-1}$ は存在しない．したがって，(30) を満たす行列 A の n 乗は常に O である．

問題 9.1 2 次正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad-bc \neq 0$ のときに限り正則行列となる．

(1) $a(a-1)-2\cdot 3 = (a-3)(a+2)$ より，$a \neq -2$ かつ $a \neq 3$ のとき正則で，逆行列は $\dfrac{1}{a^2-2-6}\begin{pmatrix} a-1 & -2 \\ -3 & a \end{pmatrix}$.

(2) $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき正則で逆行列は $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

問題 9.2 (1) 正則行列 A と実数 k $(\neq 0)$ に対して，行列 $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & k \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$ である．したがって

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{0} & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) n 次正則行列 A と n 項数ベクトル $\boldsymbol{x}$，実数 k $(\neq 0)$ に対して，行列 $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{x} \\ {}^t\mathbf{0} & k \end{pmatrix}$ の逆行列を $\begin{pmatrix} B & \boldsymbol{y} \\ {}^t\boldsymbol{z} & l \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} E_n & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{x} \\ {}^t\mathbf{0} & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \boldsymbol{y} \\ {}^t\boldsymbol{z} & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB + \boldsymbol{x}\cdot{}^t\boldsymbol{z} & A\boldsymbol{y} + l\boldsymbol{x} \\ k{}^t\boldsymbol{z} & kl \end{pmatrix}.$$

行列の各ブロックを比較すると

$$AB + \boldsymbol{x}\cdot{}^t\boldsymbol{z} = E_n, \quad A\boldsymbol{y} + l\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{z} = \mathbf{0}, \quad kl = 1.$$

これらの条件から，$l = \dfrac{1}{k}$, $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$, $B = A^{-1}$, $\boldsymbol{y} = -\dfrac{1}{k}A^{-1}\boldsymbol{x}$ となることがわかる．したがって，

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} & -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline {}^t\mathbf{0} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) n 次正則行列 $A,\ B$ に対して，$\begin{pmatrix} A & E_n \\ O & B \end{pmatrix}$ の逆行列を $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & E_n \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + Z & AY + W \\ BZ & BW \end{pmatrix}.$$

行列の各ブロックを比較すると

$$AX + Z = BW = E_n, \quad AY + W = BZ = O.$$

この条件より，行列 X, Y, Z, W は $X = A^{-1}$, $Y = -A^{-1}B^{-1}$, $Z = O$, $W = B^{-1}$ を満たす．したがって，

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \hline O & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{array}\right)$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

問題 9.3

(1) 正しい．$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である．実際，

$$ {}^tA \cdot {}^t\left(A^{-1}\right) = {}^t(A^{-1} \cdot A) = {}^tE_n = E_n. $$

(2) 正しい．$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である．実際

$$ \begin{aligned} (AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) &= A\left\{B(B^{-1}A^{-1})\right\} \\ &= A\left\{(B \cdot B^{-1})A^{-1}\right\} \\ &= A(E_n \cdot A^{-1}) \\ &= A \cdot A^{-1} = E_n. \end{aligned} $$

(3) 正しくない．$(E_n)^{-1} = E_n,\ (-E_n)^{-1} = -E_n$ だから，$E_n,\ (-E_n)$ は共に正則行列であるが，$E_n + (-E_n) = O$ より，その和は正則ではない．

問題 9.4 A が正則行列であると仮定する．$AX = O$ $(X \neq O)$ の両辺に左から A^{-1} をかけると，

$$ \begin{aligned} &(\text{左辺}) = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = X, \\ &(\text{右辺}) = A^{-1} \cdot O = O. \end{aligned} $$

よって $X = O$ となり仮定に反する．したがって，A は正則である．

問題 9.5 $A^k = 0$ を満たす冪零行列 A が正則であると仮定する (すなわち，A^{-1} が存在する)．このとき $A^k = O$ の両辺に $(A^{-1})^k$ をかけると右辺は零行列だが，左辺は

$$ A^k(A^{-1})^k = A^{k-1}(AA^{-1})(A^{-1})^{k-1} = A^{k-1}(A^{-1})^{k-1} = \ldots = E_n. $$

よって $E_n = O$ となり矛盾する．したがって，冪零行列は決して正則ではない．

問題 9.6

(1) 方程式を行列で表すと $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$．したがって，

$$ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-6-3}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}. $$

(2) 方程式を行列で表すと $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$．したがって，

$$ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3+2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}. $$

□ 一学期末試験問題の解答と補足

問題 **1** $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. このベクトルに直交する単位ベクトルは, $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ と $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$. 詳細は問題 3.1 (3) の解答 (p.4) を参照せよ.

問題 **2** 転置行列の性質を用いると

$$ {}^t(A-{}^tA)={}^tA-{}^t({}^tA)={}^tA-A=-(A-{}^tA). $$

したがって, $(A-{}^tA)$ は交代行列である.

問題 **3** (1) 正しい. $z=a+\sqrt{-1}b, w=c+\sqrt{-1}d$ とおくと

$$ zw=ac-bd+\sqrt{-1}(ad+bc) $$

であるから, $zw=0$ ならば,

$$ ac-bd=0, \tag{31} $$
$$ ad+bc=0 \tag{32} $$

が成り立つ. (31) に c をかけた式と, (32) に d をかけた式の辺々の和をとると

$$ a(c^2+d^2)=0 $$

を得る. (i) $a\neq 0$ ならば, $c^2+d^2=0$ となり, このとき $c=0$ かつ $d=0$ であるから $w=0$ が得られる. (ii) $a=0$ のとき, (31), (32) から $bd=bc=0$ となる. $b=0$ ならば, $z=0$ となり, $b\neq 0$ ならば, $c=d=0$ つまり $w=0$ となる.

(別解) : $z=|z|e^{\sqrt{-1}\theta}, w=|w|e^{\sqrt{-1}\phi}$ と極表示すると

$$ zw=|z|\cdot|w|\cdot e^{\sqrt{-1}(\theta+\phi)} $$

となる. ここで, 常に $e^{\sqrt{-1}(\theta+\phi)}\neq 0$ であるから, $zw=0$ ならば $|z|=0$ または $|w|=0$, つまり $z=0$ または $w=0$ を得る.

(2) 正しくない. 反例は, たとえば $A=B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ など.

(3) 正しくない. そもそも A,B が正則だからといって $(A+B)$ が正則とは限らない (問題 9.3 (3), 解答は p.20).

(4) 正しい. A,B が正則ならば, AB も正則で $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ が成り立つ (教科書 p.28, 定理 1.4).

(5) 正しい．AB が正則ならば，その逆行列 C が存在して $(AB)C = E_n$ が成り立つ．このとき，$E_n = (AB)C = A(BC)$ より，BC は A の逆行列であることがわかる．したがって，A は正則である（ように思える．実際にそうである）．B についても同様に示すことができる．

(別の考え方)：2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則ならば，その逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ となることから，A が正則であることと $ad - bc \neq 0$ が成り立つことは同値である．このスカラー $ad - bc$ を行列 A の行列式と呼び，$\det(A)$ や $|A|$ などで表す．行列 AB の行列式を計算すると A の行列式と B の行列式の積になっていることがわかる．このことから

$$\begin{aligned} AB\text{ が正則} &\iff 0 \neq \det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) \\ &\iff \det(A) \neq 0 \text{ かつ } \det(B) \neq 0 \\ &\iff A\text{ が正則かつ }B\text{ も正則} \end{aligned}$$

ということがわかる．

一般の n 次正方行列に対しても行列式が定義でき，上と同様のことが成り立つ（行列式については 2 学期に勉強する）．

問題．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対し AB を計算し，その行列式が

$$\det(AB) = (ad - bc)(xw - yz)\ (= \det(A)\cdot\det(B))$$

となることを確かめよ．

(多かった回答)：「$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ だから，AB が正則ならば，A も B も正則でないとおかしい（矛盾する）」．しかし,「A, B がともに正則ならば，AB も正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成り立つ」というのが正しい命題であり，上の回答は論理的に正しくない．

問題 4 線形独立になるための条件は $k \neq 0$，線形従属になるための条件は $k = 0$．詳しい証明は問題 5.1 の解答 (p.10) を参考にせよ．

□ 行列の基本変形（連立方程式・逆行列・階数）

問題 11.1 (1) E_3 (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$ (4) E_4

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問題 11.2 （表し方は一意的ではないことに注意せよ）

(1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(3)\times]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2\left(\frac{1}{11}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[E_{12}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{12}\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} &= E_{21}(3)^{-1} \cdot E_2\left(\tfrac{1}{11}\right)^{-1} \cdot E_{12}(-3)^{-1} \cdot P_{12}^{-1} \\ &= E_{21}(-3) \cdot E_2(11) \cdot E_{12}(3) \cdot P_{12} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[E_{23}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3\left(\frac{1}{2}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[E_{13}(3)\times]{} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1\left(-\frac{1}{2}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[P_{12}\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} &= E_{12}(-3)^{-1} \cdot E_{21}(1)^{-1} \cdot E_{23}(1)^{-1} \cdot E_3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} \cdot E_{13}(3)^{-1} \cdot E_1\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-1} \cdot P_{12}^{-1} \\
&= E_{12}(3) \cdot E_{21}(-1) \cdot E_{23}(-1) \cdot E_3(2) \cdot E_{13}(-3) \cdot E_1(-2) \cdot P_{12} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

問題 12.1 (1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\dfrac{1}{34}\begin{pmatrix} -10 & 6 & 10 \\ 5 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & -8 \end{pmatrix}$

問題 12.2 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 12.3

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & k & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\xrightarrow[E_{12}(1)E_2\left(\frac{1}{2}\right)E_{32}(1)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & k-1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3k & 1 & k-\frac{1}{2} & k-1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3k & 1 & k-\frac{1}{2} & k-1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

ここで,$k=0$ ならば,上の行列の左半分のブロックが単位行列になることはない

ので，行列 A は正則ではない．$k\neq 0$ ならば，

$$
(\text{上の変形の続き})\xrightarrow[(\text{行基本変形})]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3k} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6k} & -\frac{2}{3}-\frac{1}{3k} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k} & -\frac{1}{2k} & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3k} & \frac{1}{3}-\frac{1}{6k} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3k} \end{array}\right).
$$

したがって，$k\neq 0$ のとき，A は正則で，$A^{-1}=\dfrac{1}{6k}\begin{pmatrix} 2 & -(k+1) & -2(2k+1) \\ 6 & -3 & -6 \\ 2 & 2k-1 & 2(k-1) \end{pmatrix}$.

問題 12.4 $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ で，$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．このとき，$PA^nP^{-1}=(PAP^{-1})^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. したがって，

$$
\begin{aligned}
A^n &= P^{-1}(PA^nP^{-1})P \\
&= \begin{pmatrix} -1+2^{n+2}+2(-1)^{n+1} & -2+5\cdot 2^{n+1}-8(-1)^n & 2 \\ -2+2^{n+1} & -4+5\cdot 2^n & 4-2^{n+2} \\ -3+2^{n+2}+(-1)^{n+1} & -6+5\cdot 2^{n+1}-4(-1)^n & 6-2^{n+3}+3(-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

問題 13.1 (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (3) 解なし

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+l\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(k,l\in\mathbf{R})$

(5) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+l\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $(k,l\in\mathbf{R})$

問題 13.2 (1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 3 \\ 3 & 7 & -6 & a \end{array}\right)\xrightarrow[(\text{行基本変形})]{}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-8 \end{array}\right)$.

したがって，$a=8$ のとき解が存在し，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k\in\mathbf{R})$.

(2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & -1 & 2 & b \\ -3 & 2 & -3 & 5 & c \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right)$. したがって，$a-2b+c=0$ のとき解が存在し，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k, l \in \mathbf{R})$.

(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 10 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & a \\ 5 & -4 & 2 & b \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(行基本変形)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & \frac{2a-1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & \frac{a-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b-\frac{4}{3}a-\frac{1}{3} \end{array}\right)$. したがって，$b-\dfrac{4}{3}a-\dfrac{1}{3}=0$ のとき解が存在し，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a-1}{3} \\ \frac{a-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbf{R})$.

(4) 斉次連立一次方程式は必ず解をもつ．(i) $a \neq 1$ かつ $a+b \neq 0$ ならば，自明な解しかもたない．(ii) $a \neq 1$ かつ $a+b=0$ ならば，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (iii) $a=1$ かつ $b \neq -1$ ならば，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (iv) $a=1$ かつ $b=-1$ ならば，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

問題 13.3 (1) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解とする．仮定から，これらのベクトルは $A\boldsymbol{u}=\mathbf{0}, A\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ を満たす．このとき，

$$A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u}+A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0},$$
$$A(c\boldsymbol{v}) = c\cdot A\boldsymbol{v} = c\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

より，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, c\boldsymbol{v}$ も方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解であることがわかる（斉次連立 1 次方程式の解全体のなす集合はベクトル空間である）．

(2) $\boldsymbol{v}$ を方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解，$\boldsymbol{u}$ を方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解とすると，

$$A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u}+A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

となり，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ が方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解であることがわかる．

問題 **13.4** (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)E_{31}(-a)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{32}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_3\left(\frac{1}{1-a}\right)E_2\left(\frac{1}{a-1}\right)\times]{(a\neq 1\text{ ならば})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_3\left(\frac{1}{a+2}\right)\times]{(a\neq -2\text{ ならば})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{13}(-(a+1))E_{23}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって，(i) $a=1$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k, l \in \mathbf{R})$ で，解の自由度は 2，(ii) $a=-2$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbf{R})$ で，解の自由度は 1，(iii) $a\neq 1$ かつ $a\neq -2$ のとき，非自明解をもたない．

(2) (i) $a\neq b$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(\text{行基本変形})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(\text{行基本変形})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b-c}{b-a} \\ 0 & 1 & \frac{c-a}{b-a} \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{pmatrix}$$

であるから，$a=c$ または $c=b$ のとき，非自明解をもつ (解の自由度は 1)．

(ii) $a=b$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(\text{行基本変形})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

より，常に非自明解をもち，$a=c$ のとき解の自由度は 2 で，$a\neq c$ のとき解の自由度は 1 である．

問題 13.5 (1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ の解は $l\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ の解は $l\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$A\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x}$ の解は $l\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. したがって，例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) 上の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に対して，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，
$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

問題 14.1 (1) 3 　(2) 2 　(3) 2

問題 14.2 (1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)E_{31}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{12}E_{12}(-2)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[E_{32}(-1)E_2\left(\frac{1}{2}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & k-\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\times E_{12}(1)E_{23}\left(-\frac{1}{2}\right)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

したがって，階数が 2 であるための条件は $k = \dfrac{3}{2}$.

(2)

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 2 & k-2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{13}E_{13}(-k)E_{23}(-2)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[E_{32}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[P_{23}E_{23}(-k)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 \\ 0 & 0 & -k(k+2) \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\times E_{12}(1)E_{13}(-1)E_{23}(-(k+2))]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k(k+2) \end{pmatrix}.$$

したがって，階数が 2 であるための条件は $k(k+2)=0$，すなわち $k=0$ かまたは $k=-2$ である．

問題 14.3 (1) i) $a \neq 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1\left(\frac{1}{a}\right)E_3\left(\frac{1}{a}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ b & 0 & a \\ 1 & \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{13}E_{23}(-b)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{b^2}{a} & a \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[P_{23}E_{23}\left(\frac{b^2}{a}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & a+\frac{b^3}{a^2} \end{pmatrix}.$$

したがって，$a+\frac{b^3}{a^2} \neq 0$，つまり $a+b \neq 0$ のとき階数は 3 で，$a+b=0$ のとき階数は 2 である．

ii) $a=0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

だから，$b \neq 0$ のとき階数は 3 で，$b=0$ のとき階数は 0 である．

(2) i) $b=0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

だから，i-1) $a \neq 0$ のときは階数が 3 で，i-2) $a=0$ のとき階数は 0 である．

ii) $b \neq 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1\left(\frac{1}{b}\right)E_2\left(\frac{1}{b}\right)\times]{} \begin{pmatrix} a & b & b \\ 1 & \frac{a}{b} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{13}E_{13}(-a)E_{23}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{a}{b} \\ 0 & \frac{a-b}{b} & \frac{b-a}{b} \\ 0 & b-a & \frac{b^2-a^2}{b} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[E_2\left(\frac{b}{a-b}\right)E_3\left(\frac{1}{b-a}\right)\times]{(a\neq b\ \text{ならば})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{a}{b} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{a+b}{b} \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{a}{b} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{a+2b}{b} \end{pmatrix}.$$

したがって，ii-1) $a \neq b$ かつ $a \neq -2b$ のときは階数 3，ii-2) $a=-2b$ のときは階数 2，ii-3) $a=b$ のときは階数 1 である．

問題 14.4 $\operatorname{rank} A = s, \operatorname{rank} B = t$ とおく．階数の定義から

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} E_t & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

を満たす正則行列 P_i, Q_i $(i = 1, 2)$ が存在する．

(1)

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1AQ_1 & O \\ O & P_2BQ_2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} E_s & O & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ O & O & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & E_t & O \\ & & O & O \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行・列基本変形}]{} \left(\begin{array}{cc|c} E_s & O & \multirow{2}{*}{O} \\ O & E_t & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & O \end{array}\right).$$

したがって，$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = s + t = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$ である．

(2)

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1AQ_1 & P_1CQ_2 \\ O & P_2BQ_2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} E_s & O & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C'}} \\ O & O & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & E_t & O \\ & & O & O \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} E_s & O & O & C_1' \\ O & O & O & C_2' \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & E_t & O \\ & & O & O \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{列基本変形}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} E_s & O & O & O \\ O & O & O & C_2' \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & E_t & O \\ & & O & O \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行・列基本変形}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} E_s & O & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ O & E_t & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & O & C_2' \\ & & O & O \end{array}\right)$$

したがって，

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{cc|cc} E_s & O & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ O & E_t & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & O & C_2' \\ & & O & O \end{array}\right) \geq \operatorname{rank}\left(\begin{array}{cc|cc} E_s & O & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ O & E_t & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & O & O \\ & & O & O \end{array}\right)$$
$$= \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

問題 14.5 系 2.11（教科書 p.51）より，$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A (\leq n)$ かつ $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B (\leq n)$ が成り立つ．一方，仮定より AB は正則だから $\operatorname{rank} AB = n$．したがって，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$ であり，A, B は共に正則である．

問題 14.6

$$\begin{pmatrix} A \,|\, \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

したがって，$\operatorname{rank} A = 3$ で，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (r, s, t \in \mathbf{R}),$$

解の自由度は 3 である．A は 4×6 行列であるから，

$$(\text{解の自由度}) = 3 = 6 - 3 = (\text{列の数}) - (\text{階数})$$

を満たしている．

□ 2 次正方行列の行列式，平面の一次変換

問題 16.1 (1) $x = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} = \dfrac{7}{7} = 1,\ y = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} = \dfrac{7}{7} = 1$

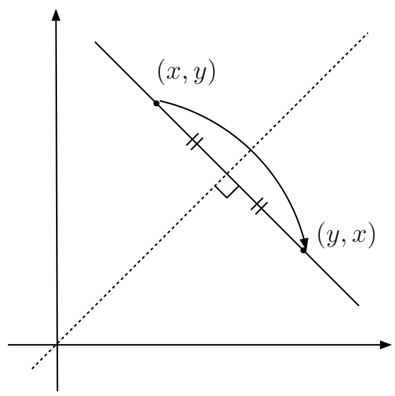
(2) $x = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}} = \dfrac{-11}{-11} = 1,\ y = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}} = \dfrac{-11}{-11} = 1$

問題 16.2 (1) 原点を中心として，反時計周りに θ 回転させる写像である：平面 $\mathbf{R}^2$ $(= \mathbf{C})$ 上の点は原点からの距離（ノルム）と偏角により $(r\cos t, r\sin t)$ と表すことができる．このとき，

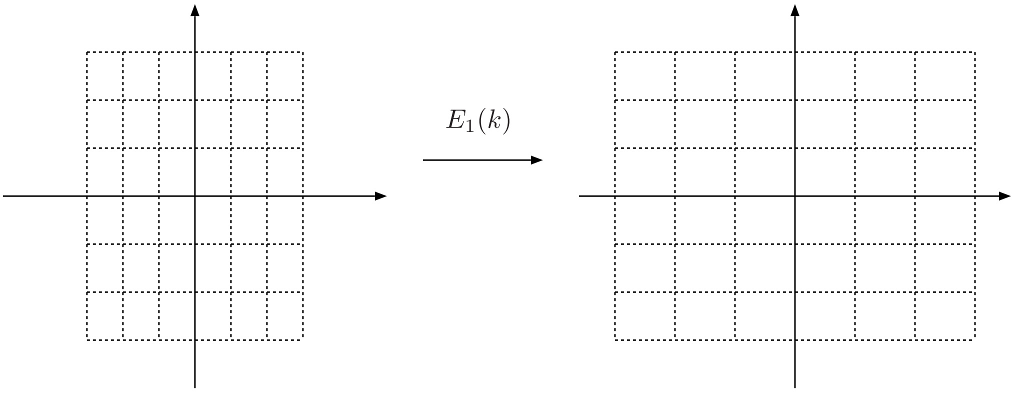
$$\varphi_A \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta + t) \\ r\sin(\theta + t) \end{pmatrix}$$

となり，このことから，ちょうど θ だけ反時計まわりに回転していることがわかる．

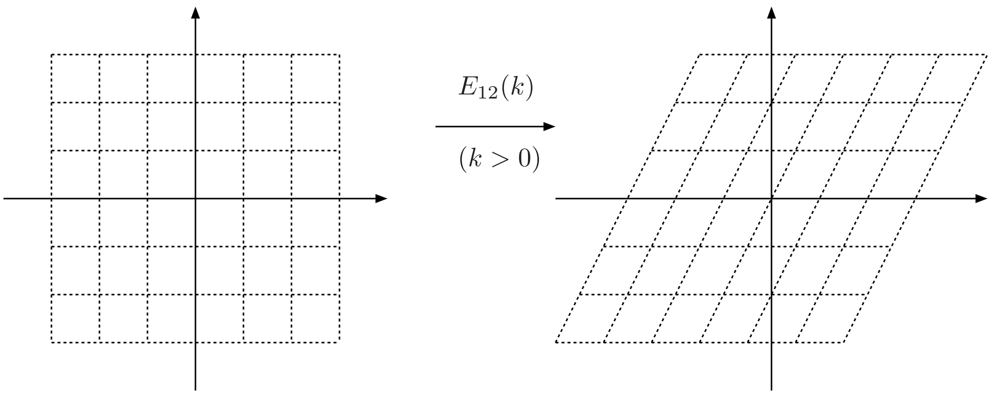
(2) P_{12} により，点 (a, b) は (b, a) に移る．これは，点 (a, b) から直線 $y = x$ への垂線をのばし，その交点から (a, b) の距離と等距離にある垂線上の点である．このような変換を直線 $y = x$ に関する鏡映（または鏡像，対象変換）と呼ぶ．



(3)



(4)



問題 16.3 (1)　直線 $y = 2x + 1$ 上の点を媒介変数 t を用いて $(t, 2t + 1)$ とおくと，この点は行列 A から定まる変換 φ_A により，

$$(t, 2t+1) \mapsto (5t+1, -10t-2)$$
$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t+1 \\ -10t-2 \end{pmatrix} \right)$$

に移る．$X = 5t + 1, Y = -10t - 2$ とおいて，t を消去すると $Y = -2X$ であるから，$(5t + 1, -10t - 2)$ は直線 $y = -2x$ 上の点である．したがって，φ_A により直線 $y = 2x + 1$ は直線 $y = -2x$ に移る．

(2) (1) 同様に，媒介変数 t を用いて直線 $y = -3x - 2$ 上の点を $(t, -3t - 2)$ と表し，φ で移すと

$$(t, -3t-2) \mapsto (-2, 4)$$

となる．上は任意の $t \in \mathbf{R}$ で成り立つから，直線 $y=-3x-2$ 上の点は φ_A により，1 点 $(-2,4)$ に移る (直線が点につぶれてしまう)．

> 問題． 問題 16.3 の行列 A から定まる一次変換 φ_A に対し，傾きが -3 以外の直線はすべて $y=-2x$ に移り，傾きが -3 の直線はすべて 1 点につぶれることを証明せよ．

問題 16.4 第 2 回の問題 2.3 より，ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を 2 辺にもつ三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}$$

に等しい．したがって，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を 2 辺に持つ平行四辺形の面積は

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}\\
=&\sqrt{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}\\
=&\sqrt{({a_1}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_2}^2)-({a_1}^2{b_1}^2+2a_1a_2b_1b_2+{a_2}^2{b_2}^2)}\\
=&\sqrt{{a_2}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2-2a_1a_2b_1b_2}\\
=&\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}\\
=&|a_1b_2-a_2b_1|=\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□ 置換

問題 17.4 (1) (1 5 7)(2 3 9 6) (2) (2 3 6 7 2)(4 5) (3) (1 3 5 6)(2 4)

問題 17.5 (1) (1 5)(2 3)(3 4) など．符号は (-1)
(2) (1 6)(6 5)(2 7)(7 4)(4 3) など．符号は (-1)
(3) (1 7)(7 5)(5 8)(2 4)(3 6) など．符号は (-1)

問題 17.6 例えば，(5 3)(4 3)(1 3)(3 2) や，(4 5)(1 4)(2 3)(4 5)(1 4)(2 5) など

問題 17.7 (1) $\sigma_1\circ\tau=\sigma_2\circ\tau$ の両辺に右から τ^{-1} をかけると，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})&=(\sigma_1\circ\tau)\circ\tau^{-1}=\sigma_1\circ(\tau\circ\tau^{-1})=\sigma_1,\\
(\text{右辺})&=(\sigma_2\circ\tau)\circ\tau^{-1}=\sigma_2\circ(\tau\circ\tau^{-1})=\sigma_2
\end{aligned}$$

となり，$\sigma_1=\sigma_2$ を得る．

(2) $\sigma_1^{-1}=\sigma_2^{-1}$ の両辺に左から σ_1 をかけ，右から σ_2 をかけると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})&=(\sigma_1\circ\sigma_1^{-1})\circ\sigma_2=\sigma_2,\\
(\text{右辺})&=(\sigma_1\circ\sigma_2^{-1})\circ\sigma_2=\sigma_1\circ(\sigma_2^{-1}\circ\sigma_2)=\sigma_1
\end{aligned}$$

となり，$\sigma_1=\sigma_2$ を得る．

□ 行列式

問題 18.1 $|A| = 2,\ \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \ |A^{-1}| = \dfrac{1}{2}$

問題 18.2 $|A| = 2, |B| = 6,\ AB = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} -7 & -6 & -10 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix},$
$|AB| = |BA| = 12$

問題 18.3 (1) -12　　(2) 0　　(3) 0　　(4) $(a-b)(b-c)(c-a)$

(5) $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(c-d)$　　(6) $\dfrac{a+b+c+d+1}{abcd}$

問題 18.4 (1) まず，2 列目と 3 列目を 1 列目に加える．

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & 2a+b+c & b \\ 2(a+b+c) & a & a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2a+b+c & b \\ 1 & a & a+2b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)^3$$

(2) 各列が 1 個の m と $(n-1)$ 個の 1 を成分に持つことに着目し，2 列目から n 列目を 1 列目に加える．

$$\begin{vmatrix} m & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+(n-1) & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ m+(n-1) & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ m+(n-1) & 1 & \cdots & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$=(m+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{vmatrix} = (m+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & m-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$=(m+n-1)(m-1)^{n-1}$$

(3) 各列が 1 から n までの自然数をそれぞれ 1 個ずつ成分に持つことに着目し，

2 列目から n 列目を 1 列目に加える.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

「i 行目に $(i-1)$ 行目を (-1) 倍して加える」という操作を $i=n$ から $i=2$ まで (下の行から順番に) 行っていくと

$$= \frac{n(n+1)}{2} \left|\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 0 & 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right|$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

ここで,

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \tag{33}$$

であるから，問題 13.2(2) の結果を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-1}(n+1)$$

を得る．

(33) の証明 $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,\dots,k)$ を k 項数ベクトルとする．

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k-1} & \boldsymbol{a}_k \end{vmatrix} &= (-1)\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k-2} & \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_{k-1} \end{vmatrix} \\
&= \cdots = (-1)^{k-1}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{(k-1)+(k-2)}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_{k-1} & \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k-2} \end{vmatrix} \\
&= \cdots = (-1)^{(k-1)+\cdots+2+1}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_{k-1} & \cdots & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_{k-1} & \cdots & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

□

問題. (33) 式は

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \tag{34}$$

と表すこともできる．n が奇数と偶数の両方の場合に (33) と (34) の符号が等しくなることを確かめ，(34) 式が成り立つことを証明せよ（(34) の行列は $(n-1)$ 次正方行列であることに注意せよ）．ただし，$[k]$ は k を越えない最大の整数を表す（例えば，$\left[\frac{13}{4}\right]=3$，$[6.73]=6$，$[\pi]=3$）．

問題 18.5 列に関する線形性 d-2) から

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix} \\
&\quad + c\cdot\det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

列に関する歪対称性 d-3) から，上式右辺の第 2 項の i 列目と j 列目を入れ替えると

$$\det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix},$$

つまり

$$\det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix} = 0$$

を得る．以上のことから d-4) が成り立つことがわかる．

問題 18.6 $A^{-1}\cdot A = E_n$ より，$1 = |E_n| = |A^{-1}\cdot A|$．行列式の性質より，$|A^{-1}\cdot A| = |A^{-1}|\cdot|A|$．以上のことから，$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ を得る．

問題 18.7

$$\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -E_n \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}, \tag{35}$$

かつ，$\begin{vmatrix} E_n & E_n \\ O & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & -E_n \\ O & E_n \end{vmatrix} = 1$ であるから，(35) の両辺の行列式をとれば，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B|\cdot|A-B|$$

を得る．

問題 18.8 A を n 次交代行列とする．このとき，

$$|A| = |{}^tA| = |-A| = (-1)^n|A|$$

であるから，n が奇数なら $|A| = -|A|$ となり，$|A| = 0$ を得る．

問題 18.9 A を直交行列とすると，${}^tA\cdot A = E_n$ より，$1 = |E_n| = |{}^tA\cdot A| = |{}^tA|\cdot|A|$．$|{}^tA| = |A|$ より，$|A|^2 = 1$ を得る．

問題 18.10 (問題 18.4(3) を用いる) $n = 4$ の場合だから，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}}4^{(4-1)}\cdot(4-1) = 160.$$

(問題 18.7 を用いる) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B|\cdot|A-B| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=(16-36)\cdot(-4-4) = (-20)\cdot(-8) = 160.$$

問題 19.1 (1) -12 (2) 0 (3) -88

問題 19.2 1 列目に関して余因子展開する.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+(n+1)}a_1 \begin{vmatrix} -1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+(n+1)} \cdot (-1)^n a_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix} + a_1$$

以下, 同様に 1 列目に関して余因子展開していく.

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix} + a_2 + a_1$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a_n & 1 \end{vmatrix} + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + 1.$$

問題 19.3 1 行目に関して余因子展開することにより

$$D_n(x) = (x^2+1)D_{n-1} - x \left|\begin{array}{c|cccc} x & x & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & x^2+1 & x & & 0 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & & x & x^2+1 \end{array}\right| \tag{36}$$

$$= (x^2+1)D_{n-1}(x) - x^2 D_{n-2}(x)$$

を得る．ここで，

$$\begin{aligned} D_3(x) &= \begin{vmatrix} x^2+1 & x & 0 \\ x & x^2+1 & x \\ 0 & x & x^2+1 \end{vmatrix} \\ &= (x^2+1)\begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2+1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & 0 \\ x & x^2+1 \end{vmatrix} \\ &= (x^2+1)\begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2+1 \end{vmatrix} - x^2(x^2+1) \\ \Big(&= x^6+x^4+x^2+1 \Big) \end{aligned}$$

であるから，$D_2(x) = \begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2+1 \end{vmatrix}$，$D_1(x) = x^1+1$ と定めること (このように定めることは自然である) により，(36) は $n \geq 3$ に対して成り立つ．

(36) は $D_n(x) - x^2 D_{n-1}(x) = D_{n-1}(x) - x^2 D_{n-2}(x)$ と書けるので

$$\begin{aligned} D_n(x) - x^2 D_{n-1}(x) &= D_{n-1}(x) - x^2 D_{n-2}(x) = D_{n-2}(x) - x^2 D_{n-3}(x) \\ &= \cdots = D_2 - x^2 D_1 = (x^2+1)^2 - x^2 - x^2(x^2+1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned} D_n(x) &= x^2 D_{n-1}(x) + 1 \\ &= x^2(x^2 D_{n-2}(x) + 1) + 1 \\ &= x^4 D_{n-2}(x) + x^2 + 1 \\ &= x^6 D_{n-3}(x) + x^4 + x^2 + 1 \\ &= \cdots = x^{2(n-1)} D_1(x) + x^{2(n-2)} + x^{2(n-3)} + \cdots + x^4 + x^2 + 1 \\ &= x^{2n} + x^{2(n-1)} + \cdots + x^4 + x^2 + 1. \end{aligned}$$

□ 二学期末試験問題の解答

問題 1 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

問題 2 解答プリントの p.25（問題 13.1 (5)）を参照せよ.

問題 3

$$\begin{aligned} n\text{ 次正方行列 } A \text{ が正則} &\Longleftrightarrow A \text{ の逆行列 } A^{-1} \text{ が存在する} \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{rank} A = n \\ &\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

<u>（階数を計算する）</u>：

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -k & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ k & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{13}E_{13}(3)E_{23}(1)E_{43}(-k)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2k & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-2)E_{42}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & 2 \\ 0 & 0 & 2k-1 & 1 \\ 0 & 0 & -2-k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{43}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & 2 \\ 0 & 0 & 2k-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1-3k & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\times P_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2-k \\ 0 & 0 & 1 & 2k-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1-3k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{列基本変形}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-3k \end{pmatrix}.$$

したがって，正則（階数が 4）になるための条件は $k \neq -\dfrac{1}{3}$ である.

<u>（行列式を計算する）</u>：3 行目に関して余因子展開する.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -k & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ k & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -k & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ k & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -6k - 6 - (-5k - 9) + 2\{-9 - 5 + 4k - (5k - 6 - 6)\} \\ &= -3k - 1. \end{aligned}$$

したがって，正則（行列式が非零）になるための条件は $k \neq -\dfrac{1}{3}$ である．

問題 4 (1) 正しい．解答プリントの p.34（問題 17.7 (2)）を参照せよ．

(2) 正しい．斉次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解に持つ．これを自明解と呼んだ．

(3) 正しくない．連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための条件は

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A)$$

が成り立つことである．例えば，

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = 1 \end{cases}$$

の解は存在しない．

(4) 正しくない．

$$\det(-A) = \det\left((-E_n)A\right) = \det(-E_n) \cdot \det(A) = (-1)^n \det(A)$$

であるから，偶数次の正則な行列 A に対して $\det(-A) = -\det(A)$ は成立しない．

(5) 正しい．AB は正則だから $\det(AB) \neq 0$．ここで，行列式の性質より $0 \neq \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$．したがって，$\det(A) \neq 0$ かつ $\det(B) \neq 0$ が成り立つ．つまり，A も B も共に正則である．

階数の性質を使った証明は解答プリント p.30（問題 14.5）を参照せよ．