数学クォータ科目「基礎数学 II」第 3 回

微分の計算（２）

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

これまでのまとめ（1）

関数 $y = f(x)$ がある．

- $x = a$ から $x = b\ (= a + h)$ までの**平均変化率**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$\leftarrow$ ２点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の傾き

- $x = a$ における**微分係数**

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

$\leftarrow$ 点 $(a, f(a))$ における**接線**の傾き

- **導関数** $\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$

これまでのまとめ（２）

- **微分の性質** 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し，

(1-1) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(t)$

(1-2) $\{k\,f(x)\}' = k\,f'(x)$

- **基本的な関数の微分（１）**

(2-1) $(k)' = 0$（すなわち，定数関数の微分は消える）

(2-2) $(x^{\alpha})' = \alpha\,x^{\alpha-1}$ (α は実数)

- **微分公式（１）**

(3-1) 合成関数の微分 (I)：$\{f(ax+b)\}' = a\,f'(ax+b)$

(3-2) 積の微分公式：$\{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(3-3) 商の微分公式：$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

今週のこと

- 微分公式（２）

(3-1)′ 合成関数の微分 (II)：$\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$

- 基本的な関数の微分（３） 三角関数の微分

(2-3) $(\sin x)' = \cos x$

(2-4) $(\cos x)' = -\sin x$

(2-5) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

合成関数とその微分

- ２つの関数 $y = f(t)$ と $t = g(x)$ がある．
- このとき, $x = a$ に対して $\underline{t = g(a)}$ が定まり，さらに，この $\underline{t = g(a)}$ の対し, $y = f(g(a))$ が定まる．$\rightarrow$ $x = a$ の対して, $y = f(g(a))$ が定まるため, y は x の関数 となる．
- このようにして定まる関数を，「f と g の 合成関数 」といい，
  $y = f \circ g(x)$ と書く.
- 合成関数 $y = f \circ g(x)$ の導関数は, それぞれの導関数の積となる；

$$\boxed{y' = f'(g(x))\, g'(x)} \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} \right)$$

- 複雑に見える関数も, いくつかの単純な関数の合成関数と見ることにより, 微分計算が容易にできる.

合成関数の微分公式 $y' = f'(g(x))\,g'(x)$ の証明

（証明）

$$
\begin{aligned}
y' = \{f \circ g(x)\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{f \circ g(x+h) - f \circ g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}
\end{aligned}
$$

ここで, $g(x+h) - g(x) = H$ とおくと, $h \to 0$ のとき，$H \to 0$ である．

よって，

$$
y' = \lim_{H \to 0} \frac{f(g(x)+H) - f(g(x))}{H} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x).
$$

$x^{\frac{1}{n}}$ の微分（n は自然数）

問題 「合成関数の微分の公式」を利用して，$g(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ を微分せよ．

（解）$y = f(t) = t^n$ とおき，$t = g(x)$ との合成関数

$$y = f \circ g(x) = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$

を考え，これを x で微分すると，

$y' = (x)' = 1.$

一方，合成関数の微分の公式より，

$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = n\{g(x)\}^{n-1} \cdot g'(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \cdot g'(x) = nx^{1-\frac{1}{n}} \cdot g'(x).$

よって，

$$g'(x) = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$x^{\frac{m}{n}}$ の微分（n は自然数，m は整数）

問題 「合成関数の微分の公式」を利用して，$g(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ を微分せよ．

（解） $y = f(t) = t^n$ とおき，$t = g(x)$ との合成関数

$$y = f \circ g(x) = \left(\sqrt[n]{x^m}\right)^n = x^m$$

を考え，これを x で微分すると，

$y' = (x)' = mx^{m-1}$.

一方，合成関数の微分の公式より，

$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = n\left\{g(x)\right\}^{n-1} \cdot g'(x) = n\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1} \cdot g'(x) = nx^{m-\frac{m}{n}} \cdot g'(x)$.

よって,

$$g'(x) = \frac{mx^{m-1}}{nx^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n}x^{m-1-\left(m-\frac{m}{n}\right)} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

三角関数 の導関数（1） $\sin x$ の微分

問１） $f(x) = \sin x$ を微分しなさい．

（解）

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

※ $\sin A - \sin B = 2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$ を利用する．

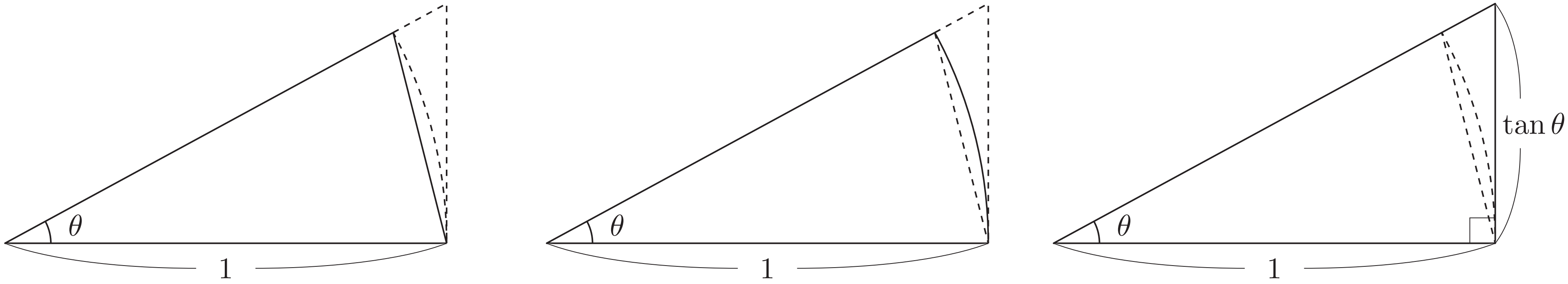
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{H\to 0}\frac{\sin H\cdot\cos(x+H)}{H} = \lim_{H\to 0}\frac{\sin H}{H}\cdot\cos(x+H)$$

$$= 1\cdot\cos(x+0) = \boxed{\cos x}$$

極限 $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ の証明

- $\underline{\theta>0}$ のとき，下図の三角形と扇型の面積の対象関係より



$$\frac{1}{2}\sin\theta \quad < \quad \frac{\theta}{2} \quad < \quad \frac{1}{2}\tan\theta$$

$$\therefore\ 1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta$$

$$1\geq\lim_{\theta\to 0}\boxed{\frac{\sin\theta}{\theta}}\geq\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$$

- $\underline{\theta<0}$ のときは，$\dfrac{\sin\theta}{\theta}=\dfrac{-\sin\theta}{-\theta}=\dfrac{\sin(-\theta)}{-\theta}$ より，$-\theta>0$ の対して上の議論を適用すればよい．

三角関数 の導関数（２）$\cos x$ の微分

問２） $f(x) = \cos x$ を微分しなさい．

（解） $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ より，合成関数の微分公式を利用する．

$g(t) = \sin t$ とおくと, $f(x) = g\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ である．よって，

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) \\ &= -\left\{\cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin x\right\} = -\{0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x\} \\ &= = \boxed{-\sin x} \end{aligned}$$

三角関数 の導関数（３） $\tan x$ の微分

問３） $f(x) = \tan x$ を微分しなさい．

（解） $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ より，商の微分公式を利用する．

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

三角関数 の導関数（４）その他の三角関数

- $\cot x := \dfrac{1}{\tan x}$
- $\sec x := \dfrac{1}{\cos x}$
- $\csc x := \dfrac{1}{\sin x}$ （または，$\operatorname{cosec} x$ ）

問４）上の３つの関数を微分しなさい．