線形代数 I 演習

― 第 10 回 一学期末試験の解答，2 次正方行列の行列式 ―

担当：佐藤 弘康

■ 試験問題の解答

問 1. 平面ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に直交する長さ 1 のベクトルを求めよ.

解. 求めるベクトルを $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく. $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交するので,

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -x + 2y = 0. \tag{10.1}$$

さらに，$\boldsymbol{v}$ の長さは 1 だから,

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = x^2 + y^2 = 1. \tag{10.2}$$

(10.1)，(10.2) より，$x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ を得る (復号同順).

問 2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

解.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-2)P_{12}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{32}(3)E_2(-1)P_{23}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{13}(3)E_{23}(4)E_3\left(-\frac{1}{6}\right)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

したがって，$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

問 3. 連立一次方程式

$$x + 2y - 4z = 2 \tag{10.3}$$

$$2x + 3y + 7z = 1 \tag{10.4}$$

$$3x + 5y + 3z = k \tag{10.5}$$

が解を持つための実数 k の条件を求めよ．また，そのときの解と，解の自由度を求めよ．

解.

(行基本変形)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & k \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{21}(-2)E_{31}(-3)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 15 & k-6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{2}(-1)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{12}(-2)E_{32}(-1)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{array}\right)$$

したがって，$k = 3$ のときに限り，上の連立方程式は解を持つ．よって，

(加減法)

(10.3) 式を (-2) 倍，(-3) 倍して (10.4) 式，(10.5) 式にそれぞれ加えると

$$-y + 15z = -3, \tag{10.6}$$

$$-y + 15z = k - 6. \tag{10.7}$$

(10.6), (10.7) から，$k = 3$ を得る．また，$k \neq 3$ ならば，(10.6), (10.7) を満たす y, z は存在しない．

(10.6) 式を 2 倍して (10.3) に加えると

$$x + 26z = -4 \tag{10.8}$$

を得る．

結局，3 つの式から (10.6), (10.8) の 2 つの式が得られたが，これ以上，未知数を消去して簡単な式にすることはできない．そこで，$z = l (l \in \mathbf{R})$ とおくことにより，

解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } l \in \mathbf{R})$$

である．また，解の自由度は 1 である．

問 4. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線形独立のとき，

$$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c},\quad 2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c},\quad 3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \tag{10.9}$$

が線形独立となるための実数 k の条件を求めよ．

解. (10.9) のベクトルが線形独立とは

$$x(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})+y(2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})+z(3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0 \tag{10.10}$$

を満たす実数の組 (x, y, z) は $(0, 0, 0)$ に限ることである．(10.10) 式は

$$(x+2y+3z)\boldsymbol{a}+(2x+ky+3z)\boldsymbol{b}+(3x-2y+z)\boldsymbol{c}=0$$

と表すことができ，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線形独立であることから，x, y, z は

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+ky+3z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases} \tag{10.11}$$

を満たす．したがって，

(10.9) のベクトルが線形独立 $\iff$ (10.11) の解は $x=y=z=0$ のみ

である．つまり，斉次連立一次方程式 (10.11) が非自明解を持たないための k の条件を求めればよい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & k & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-2)E_{31}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k-4 & -3 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{13}(-2)E_{23}(3)E_3\left(-\frac{1}{8}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで，$k=1$ ならば，解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(l \in \mathbf{R})$ となり，非自明解が存在する．$k \neq 1$ のときは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{13}(-1)E_{32}(-1)E_2\left(\frac{1}{k-1}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，解は $x=y=z=0$ のみであることがわかる．したがって，(10.9) のベクトルが線形独立であるための条件は $k \neq 1$ である．

復習問題 1. 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列が存在するための実数 k の条件を求めよ.

復習問題 2. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線形独立のとき,

$$\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \quad 2\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}, \quad 3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c} \tag{10.12}$$

が線形従属となるための実数 k の条件を求めよ.

■ 2 次正方行列の行列式

問題 10.1. 次の連立方程式を，2 つの方法 — 行基本変形と，クラメールの公式 (教科書 p.57, 例題 3.3) — を用いて解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$

例題. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{R}^2$ の一次変換

$$(x, y) \xrightarrow{\varphi_A} (x - y, x)$$

を定める (教科書 p.58 を参照)．方程式 $y = 2x - 1$ が定める直線は φ_A により，どのような直線に移るか調べよ．

解. $y = 2x - 1$ は次のように媒介変数表示することができる;

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

したがって，この直線上の点は変換 φ_A により，

$$(t, 2t - 1) \xrightarrow{\varphi_A} (-t + 1, t)$$

に写る．$x = -t + 1$, $y = t$ とおいて，t を消去すると $y = -x + 1$ を得る．したがって，φ_A により，$y = 2x - 1$ は直線 $y = -x + 1$ に移る．

問題 10.2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ が定める一次変換 φ_A により，次の方程式が定める直線がどのようなものに移るか調べよ．

(1) $y = 2x + 1$　　(2) $y = -3x - 2$

問題 10.3. $\mathrm{A} = (a_1, a_2)$, $\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ を $\mathbf{R}^2$ 上の原点 O 以外の点とする．線分 OA と OB を 2 辺のもつ平行四辺形の面積は，行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \tag{10.13}$$

の行列式の絶対値に等しいことを示せ．ただし，ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ は線形独立であるとする．

□ 行列式の符号について

2 次正方行列 A は平面の一次変換 φ_A を定め，平面内の図形を φ_A で移すと，その面積は $|\det(A)|$ 倍される．一次変換とは，原点を中心とした回転作用や，ある方向へ平面全体を伸ばしたり，縮めたりする作用を何回か施す変換である．伸びたり縮んだりするものの，おおざっぱな形は変わらない．ただし，行列式が負の行列の場合は，その作用により図形は裏返ってしまう (下図参照)．行列式が正の行列が定める一次変換を**向きを保つ変換**といい，行列式が負の行列が定める一次変換を**向きを逆にする変換**という．また，行列式が 0 の場合，平面内の図形は直線か 1 点に縮んでしまう (問題 10.2).

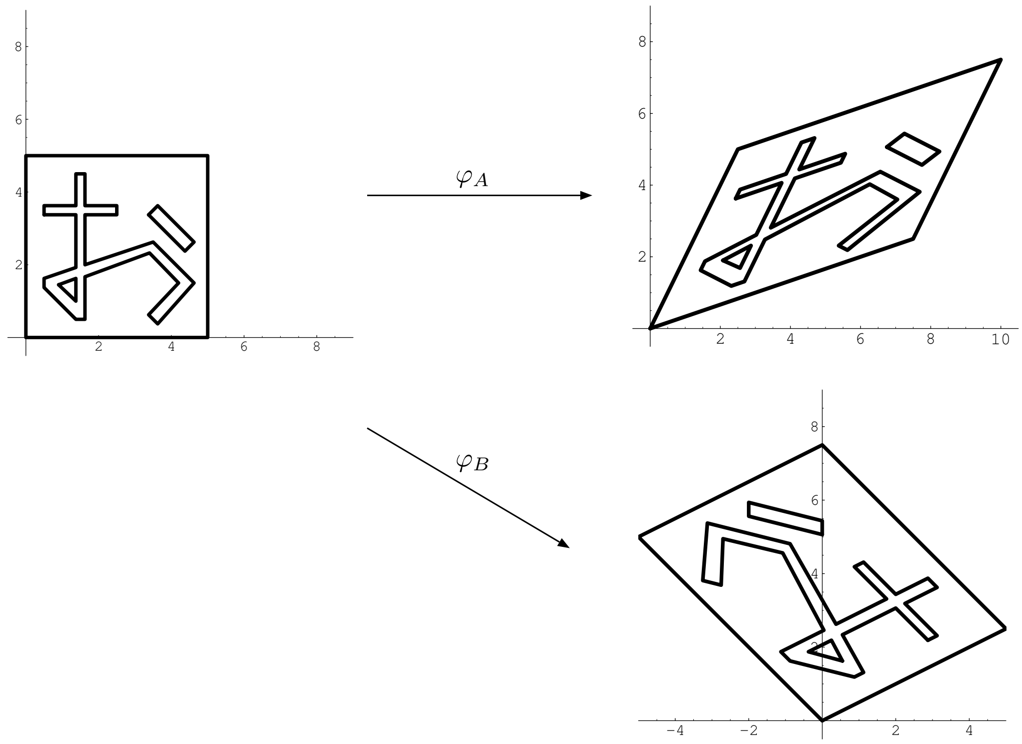

図: 一次変換による像.　$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$