【復習】１変数関数の極値の判定

定理 1.

(i)「$f(x)$ が $x = a$ で極値をとる」 $\Longrightarrow$ $f'(a) = 0$

(ii) $f'(a) = 0$ かつ $\begin{cases} f''(a) < 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極大値} \\ f''(a) > 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$

関数 $f(x)$ の極値を求める手順

(1) 導関数 $f'(x)$ を計算し, $f'(x) = 0$ を満たす x を求める.

(2) 2 次導関数 $f''(x)$ を計算し, (1) の $x = a$ に対して, $f''(a)$ の符号を調べる;
$f''(a) < 0$ ならば極大, $f''(a) > 0$ ならば極小, $f''(a) = 0$ ならば？

(3) 極値 $f(a)$ を求める.

問　$f'(a) = 0$ かつ $f''(a) = 0$ のときは？

【参考】１変数関数の極値の判定

定理.

- $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(2m-1)}(a) = 0$
  かつ $\begin{cases} f^{(2m)}(a) < 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極大値} \\ f^{(2m)}(a) > 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$
- $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(2m)}(a) = 0$
  かつ $f^{(2m+1)}(a) \neq 0 \Longrightarrow f(a)$ は極値ではない

例）$f(x) = x^4$ は, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$ より,
$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)} = 24 > 0$ であるから, $f(0)$ は極小値.

例）$f(x) = x^3$ は, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$ より,
$f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$ であるから, $f(0)$ は極値ではない.

【復習】２変数関数の極値の判定

定理 2.

[I]「$f(x, y)$ が点 (a, b) で極値をとる」 $\Longrightarrow$ $f_x(a, b) = 0$ かつ $f_y(a, b) = 0$

[II] $D(x, y) := \{f_{xy}(x, y)\}^2 - f_{xx}(x, y)\, f_{yy}(x, y)$ とおく.

$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ かつ

- $D(a, b) < 0$ かつ $\begin{cases} f_{xx}(a, b) < 0 & \Longrightarrow \quad f(a, b) \text{ は極大値} \\ f_{xx}(a, b) > 0 & \Longrightarrow \quad f(a, b) \text{ は極小値} \end{cases}$
- $D(a, b) > 0$ のとき, $f(a, b)$ は極値ではない.
- $D(a, b) = 0$ のとき, $f(a, b)$ が極値となるときも, そうならないときもある.

２変数関数 $f(x, y)$ の極値を求める手順

(ステップ 1) 偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を計算し, 連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

の解を求める.

(ステップ 2) 2 次偏導関数 $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$, および

$$D(x, y) = \{f_{xy}(x, y)\}^2 - f_{xx}(x, y)\, f_{yy}(x, y)$$

を計算する.

(ステップ 3) (1) の解 $(x, y) = (a, b)$ の対し, $D(a, b)$ と $f_{xx}(a, b)$ の符号を調べる.

(ステップ 4) 極値 $f(a, b)$ を求める.