線形代数 I 演習

— 第 2 回 平面ベクトルの幾何学的意味，内積，複素平面 —

担当：佐藤 弘康

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 「平面の点 A の位置ベクトル」とは?

(2) ベクトルの和，スカラー倍はどのような幾何学的意味があるか？

(3) 「平面ベクトルの内積」とは?

(4) 「複素平面」とは?

(5) 「複素数の絶対値，偏角」とは？

(6) 「共役複素数」とは?

問題 2.1. 次のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対し，ベクトルの長さ $\|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{v}\|$ および内積 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を計算し，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角を求めよ．

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$　(2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$　(4) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

問題 2.2. 平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ は，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を用いて

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$$

と表せることを示せ．

問題 2.3 (レポート問題). $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ を $\mathbf{R}^2$ の基底で

$$\|\boldsymbol{f}_1\| = \|\boldsymbol{f}_2\| = 1,\ (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = 0 \tag{2.1}$$

を満たすとする．このとき，任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ は,

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}_1)\boldsymbol{f}_1 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}_2)\boldsymbol{f}_2$$

と表せることを示せ．

Note : (2.1) 式を満たす基底のことを <u>正規直交基底</u> と呼ぶ．

問題 2.4. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を平面ベクトルとする．もし，$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ ならば，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ は直交することを示せ．

問題 2.5. A, B を平面内の点とし，それぞれの点の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とする．このとき，三角形 OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}$$

に等しいことを示せ．

問題 2.6. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を平面ベクトルとするとき，

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2\left(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2\right) \tag{2.2}$$

が成り立つことを示せ．

> **例題**　1 の 3 乗根を求めよ．

解. 1 の 3 乗根とは，つまり，$z^3 = 1$ を満たす z のことである．したがって，

$$0 = z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$$

であるから，1 の 3 乗根は $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$ である．

問題 2.7. 次の複素数を計算せよ．

(1) $\sqrt{-1}$ の 4 乗根　　(2) -1 の 6 乗根

問題 2.8. 次の複素数を $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ $(= re^{\sqrt{-1}\theta})$ の形で表せ．ただし，r は正の実数とする．

(1) $\sqrt{-1}$　　(2) -5　　(3) $\sqrt{3} + 3\sqrt{-1}$

問題 2.9. $z = a + \sqrt{-1}b$ (a, b は実数) に対して，

(1) $\dfrac{z}{1+z^2}$ が実数になる条件を求めよ．ただし，$b \neq 0$ とする．

(2) z^4 が実数になる条件を求めよ．ただし，$a^2 \neq b^2$ とする．

問題 2.10. 次を証明せよ．

(1) $z \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{R}$ に対して，$\arg(az) = \arg(z)$.

(2) $z \in \mathbf{C}$ に対して，$\arg\overline{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$.

(3) $z, w \in \mathbf{C}$ に対して，$\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w \pmod{2\pi}$.

問題 2.11. $z, w \in \mathbf{C}$ に対して，$\overline{z}w + z\overline{w} = 0$ と $\arg z - \arg w = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ は同値であることを証明せよ．

問題 2.12. $(2+\sqrt{-1})(3+\sqrt{-1}) = 5(1+\sqrt{-1})$ を確かめ，そのことを使って $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ (ただし，$\tan^{-1}$ は $y = \tan x$ の逆関数).