線形代数 I 演習

― 第 3 回 n 項数ベクトル，行列の演算 ―

担当：佐藤 弘康

問題 3.1. 次のベクトルは線形従属か？線形独立か？

$$(1)\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

問題 3.2. 次の n 個の n 項数ベクトルは線形従属か？線形独立か？

$$(1)\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$(2)\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}n+1\\n+2\\n+3\\\vdots\\2n\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}n(k-1)+1\\n(k-1)+2\\n(k-1)+3\\\vdots\\kn\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}n(n-1)+1\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\n^2\end{pmatrix}$$

問題 3.3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$ も線形独立であることを示せ.

問題 3.4. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n$ をどのようにとっても，$\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$, $2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{c}$, $3\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{c}$ は線形従属であることを示せ.

□ **計算問題 1.** 次の行列

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\5&1&8\\-4&2&-8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&1&-1\\0&2&7\end{pmatrix}$$

に対し，AB および BA を計算せよ.

□ **計算問題 2.** 次の行列

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\10&1&-1\\4&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&1&3\\0&2&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

に対して，$A+B, AC, BC$ を計算せよ．また，$(A+B)C, AC+BC$ も計算せよ.

問題 3.5.

$$\begin{pmatrix} 2x-4y & x \\ 0 & 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6z & z-3y \\ 0 & z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

を満たす $a, x, y, z \in \mathbf{R}$ を求めよ．ただし，x, y, z の少なくとも 1 つは 0 でないとする．

問題 3.6. 次の行列

$$I = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

に対して，$I^2, J^2, K^2, IJ, JK, KI$ を計算せよ．

問題 3.7 (レポート問題). 次の問に答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ に対して，$AX = O, YA = O$ を満たす行列 $X, Y \in M(2, \mathbf{R})$ を求めよ．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と可換な行列をすべて求めよ．

問題 3.8. 次の条件を満たす行列 $A \in M(2, \mathbf{R})$ を求めよ．

(1) $A^2 = O$.

(2) $A^2 = E_2$.

(3) 任意の $B \in M(2, \mathbf{R})$ に対し，$AB = BA$.

問題 3.9. 次の行列 A に対して A^n を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

■ 計算問題の解

1. $AB = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -7 \\ 14 & 22 & 70 \\ 0 & -18 & -70 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -18 \\ 13 & 11 & 12 \\ -18 & 16 & -40 \end{pmatrix}$

2. $A+B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 12 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ AC = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 10 & -28 & -24 \\ 4 & -10 & -6 \end{pmatrix},\ BC = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$

$$(A+B)C = AC + BC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 12 & -32 & -20 \\ 4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$