【復習】１変数関数の極値の判定

定理 1.

(i)「$f(x)$ が $x = a$ で極値をとる」 $\Longrightarrow$ $f'(a) = 0$

(ii) $f'(a) = 0$ かつ $\begin{cases} f''(a) < 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極大値} \\ f''(a) > 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$

$f'(a) = 0$ かつ $f''(a) = 0 \Longrightarrow$ ？

関数 $f(x)$ の極値を求める手順

(1) 導関数 $f'(x)$ を求める.

(2) 方程式 $f'(x) = 0$ の解を求める.

(3) 2 次導関数 $f''(x)$ を求める.

(4) (2) の解 $x = a$ の対し, $f''(a)$ の符号を調べる；

$f''(a) < 0$ ならば極大, $f''(a) > 0$ ならば極小, $f''(a) = 0$ ならば？

【参考】１変数関数の極値の判定

定理.

- $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(2m-1)}(a) = 0$

  かつ $\begin{cases} f^{(2m)}(a) < 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極大値} \\ f^{(2m)}(a) > 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$
- $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(2m)}(a) = 0$

  かつ $f^{(2m+1)}(a) \neq 0 \Longrightarrow f(a)$ は極値ではない

【復習】２変数関数の極値の判定

定理 2.

[I]「$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとる」 $\Longrightarrow f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$

[II] $D(x,y) := \{f_{xy}(x,y)\}^2 - f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y)$ とおく.

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ かつ

- $D(a,b) < 0$ かつ $\begin{cases} f_{xx}(a,b) < 0 & \Longrightarrow \quad f(a,b) \text{ は極大値} \\ f_{xx}(a,b) > 0 & \Longrightarrow \quad f(a,b) \text{ は極小値} \end{cases}$
- $D(a,b) > 0$ のとき, $f(a,b)$ は極値ではない.
- $D(a,b) = 0$ のとき, $f(a,b)$ が極値となるときも, そうならないときもある.

２変数関数 $f(x,y)$ の極値を求める手順

(ステップ 1) 偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求める.

(ステップ 2) 連立方程式 $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ の解を求める.

(ステップ 3) 2 次偏導関数 $f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yy}(x,y)$ を求める.

(ステップ 4) $D(x,y) = \{f_{xy}(x,y)\}^2 - f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y)$ を求める.

(ステップ 5) (2) の解 $(x,y) = (a,b)$ の対し,

$D(a,b)$ と $f_{xx}(a,b)$ の符号を調べる；（省略）