線形代数 I 演習

－ 第 17 回 置換 －

担当：佐藤 弘康

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 置換とは何か，説明せよ.

(2) 恒等置換，逆置換とはどのような置換か，説明せよ.

(3) 置換の巡回置換，巡回表示とは何か，説明せよ.

(4) 互換とはどのような置換か，説明せよ.

(5) 偶置換，奇置換とはどのような置換か，説明せよ.

計算演習 **17.1.** 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して，$\sigma \circ \tau$ および $\tau \circ \sigma$ を計算せよ.

計算演習 **17.2.** 次の置換

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，$\sigma_2 \circ \sigma_3$ および $\sigma_1 \circ \sigma_2$ を計算せよ．また，$\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$ および $(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$ を計算せよ.

計算演習 **17.3.** 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，$\sigma \circ \tau$, σ^{-1}, および τ^{-1} を計算せよ．また，$(\sigma \circ \tau)^{-1}$ および $\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ を計算せよ.

定義. 巡回置換 $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ に対し，集合 $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ を巡回置換 σ の巡回域という．
σ, τ を 2 つの巡回置換とするとき，両者の巡回域が共通の元（数）を含まないとき，σ, τ は互いに素であるという．

問題 17.4. 次の置換を巡回表示せよ（互いの素な巡回置換の積に書き表せ）．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $(1,2,3)(4,5)(1,3,6,7) \in S_7$

(3) $(1,2)(1,2,3,4)(1,2)(2,3,5,6) \in S_6$

問題 17.5. 次の置換を互換の積で表示せよ．また，その置換の符号も求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 6 & 2 & 8 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

問題 17.6. 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

を互換の積で表せ．ただし，定理 3.18 (教科書 p.65) の証明にある標準的な方法

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \ldots \circ (i_{k-1}, i_k)$$

を使ったもの以外とする．また，どのようにして求めたか説明せよ．

問題 17.7. $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1) $\sigma_1 \circ \tau = \sigma_2 \circ \tau$ を満たす $\tau \in S_n$ が存在するならば，$\sigma_1 = \sigma_2$ が成り立つ．

(2) $\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}$ ならば，$\sigma_1 = \sigma_2$ である．

■ 計算演習の解

17.1 $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

17.2 $\sigma_2 \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$

$$\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

17.3 $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix},$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\sigma \circ \tau) = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$