線形代数 I 演習

－ (1) 平面ベクトルの演算，線形独立・線形従属 －

担当：佐藤 弘康

基本問題. 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 「ベクトルの線形結合」とは何か.

(2) 「$\mathbf{R}^2$ がベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で張られる」とはどういうことか.

(3) 「n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立である」とは?

(4) 「n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形従属である」とは?

(5) 「$\mathbf{R}^2$ の基底」とは，どういうベクトルのことか.

問題 1.1. 次のベクトルは線形従属か，線形独立か調べよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

問題 1.2. 平面ベクトルの組 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底か？もし基底ならば，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をそれらの線形結合で表せ.

問題 1.3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を線形独立なベクトルとする. このとき，

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表されるベクトル $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ と $3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b}$ は線形独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表されるベクトル $-\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ と $2\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$ は線形従属であることを示せ.

問題 1.4. 2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し，「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形独立であること」と「$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$」が同値であることを証明せよ.

線形代数 I 演習

－ (2) 平面ベクトルの幾何学的意味，内積，複素数と複素平面 －

担当：佐藤 弘康

基本問題. 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) ベクトルの和，スカラー倍にはどのような幾何学的意味があるか？

(2) 「平面ベクトルの内積」とは?

問題 2.1. 次のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対し，ベクトルの長さ $\|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{v}\|$ および内積 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を計算し，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角を求めよ．

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

問題 2.2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を平面ベクトルとする．もし，$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ ならば，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ は直交することを示せ．

問題 2.3. A, B を平面内の点とし，それぞれの点の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とする (ただし，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形従属でないとする)．このとき，三角形 OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}$$

に等しいことを示せ．

内積の性質

平面ベクトルの内積が以下の性質を満たすことを示せ．

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

(2) $c \in \mathbf{R}$ に対して，$(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$．また，$\|c\boldsymbol{a}\| = |c| \cdot \|\boldsymbol{a}\|$.

(3) $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$.

(4) $\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$．さらに等号が成り立つのは $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ のときのみである．

基本問題. 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 「複素平面」とは?

(2) 「複素数の絶対値，偏角」とは？

(3) 複素数の和と積は，複素平面において幾何学的にどのように解釈できるか.

(4) 「共役複素数」とは?

問題 2.4. 次の複素数を $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ の形[*1]で表せ．ただし，r は正の実数とする.

(1) $\sqrt{-1}$ (2) -5 (3) $\sqrt{3}+3\sqrt{-1}$

問題 2.5. $z = a + \sqrt{-1}b$ (a, b は実数) に対して，z^4 が実数になる条件を求めよ.

問題 2.6. $z, w \in \mathbf{C}$ に対して，$\overline{z}w + z\overline{w} = 0$ と $\arg z - \arg w = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ は同値であることを証明せよ.

問題 2.7. $(2+\sqrt{-1})(3+\sqrt{-1}) = 5(1+\sqrt{-1})$ を確かめ，そのことを使って

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

を示せ (ただし，$\tan^{-1}$ は $f(x) = \tan x$ の逆関数).

複素数の偏角の性質

複素数の偏角が以下の性質を満たすことを示せ.

(1) $z \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{R}(a \neq 0)$ に対して，$\arg(az) = \arg(z)$.

(2) $z \in \mathbf{C}$ に対して，$\arg\overline{z} = -\arg z$.

(3) $z, w \in \mathbf{C}(w \neq 0)$ に対して，$\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$.

[*1] $z = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ $(= re^{\sqrt{-1}\theta})$ を複素数 z の極表示という（教科書 p.12 参照).

問題 2.8. シュワルツの不等式（教科書 p.9 例題 1.2（1））を証明したい．以下の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$ の根（解）の種類と 2 次式の判別式の関係について簡単に説明せよ（復習せよ）．

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を（平面）ベクトル，x をスカラーとする．$f(x) = \|x\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2$ とおくとき，

$$f(x) = \|\boldsymbol{a}\|^2 x^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})x + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

となることを示せ（プリント p.2 の内積の性質を用いてよい）．また，$f(x)$ の判別式を計算せよ．

(3) $f(x)$ の定義から $f(x) \geq 0$ を満たすが，このとき，$f(x)$ の判別式はどのような式を満たすか？

線形代数 I 演習

− (3) 行列の演算 −

担当：佐藤 弘康

基本問題.

(1) 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

に対し，AB および BA を計算せよ.

(2) 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 10 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して，$A+B,\ AC,\ BC$ を計算せよ．また，$(A+B)C,\ AC+BC$ も計算せよ.

問題 3.1. 次の行列

$$I = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

に対して，$I^2, J^2, K^2, IJ, JK, KI$ を計算せよ.

問題 3.2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し，$AB = BA$ を満たす行列 B をすべて求めよ.

問題 3.3. 次の行列 A に対し，$AX = O, YA = O$ を満たす行列 $X, Y \in M(2, \mathbf{R})$ を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

問題 3.4. 次の条件を満たす行列 $A \in M(2, \mathbf{R})$ を求めよ.

(1) $A^2 = O$.

(2) $A^2 = E_2$.

(3) 任意の行列 $B \in M(2, \mathbf{R})$ に対し，$AB = BA$.

問題 3.5. 次の行列 A に対して A^n を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

計算問題の解

(1) $AB = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -7 \\ 14 & 22 & 70 \\ 0 & -18 & -70 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -18 \\ 13 & 11 & 12 \\ -18 & 16 & -40 \end{pmatrix}$

(2) $A+B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 12 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, AC = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 10 & -28 & -24 \\ 4 & -10 & -6 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$

$$(A+B)C = AC + BC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 12 & -32 & -20 \\ 4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

□ n 項数ベクトル

問題 3.6. 次の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線形独立となるための実数 k の条件を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線形従属となるための実数 k の条件を求めよ.

線形代数 I 演習

− (4) 転置行列，特殊な行列 −

担当：佐藤 弘康

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 行列 A の転置行列 ${}^tA$ とはどのような行列か.

(2) 対称行列，交代行列 (歪対称行列) とはどのような行列か.

(3) 対角行列，スカラー行列とはどのような行列か.

(4) 上三角行列，下三角行列とはどのような行列か.

問題 4.1. 次の行列を対称行列と交代行列の和で表せ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

問題 4.2. 任意の正方行列 A に対して，${}^tA \cdot A$ は対称行列になることを証明せよ.

問題 4.3. $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ が上三角行列ならば，$A + B$ および AB も上三角行列であることを示せ.

問題 4.4. $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ を対称行列とするとき，次の 2 つの条件が同値であることを証明せよ.

(i) AB が対称行列である.

(ii) A と B は可換. つまり $AB = BA$ が成り立つ.

定義 4.1. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，その対角成分の和を行列 A のトレースといい，$\operatorname{tr} A$ で表す (トレースの性質については教科書 p.33 問題 11 参照).

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

問題 4.5. $A \in M(n, \mathbf{R})$ に対し，次の 2 つの条件が同値であることを証明せよ.

(i) 任意の交代行列 $B \in M(n, \mathbf{R})$ に対して，$\operatorname{tr}(AB) = 0$.

(ii) A は対称行列.

線形代数 I 演習

− (5) 行列のブロック分割 −

担当：佐藤 弘康

問題 5.1. 次の行列 A, B を適当にブロック分割して，AB を計算せよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

問題 5.2. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して，$2A^3 - 3A^2$ を計算せよ．

定義 5.1. 正方行列 A が冪零 (べきれい) 行列であるとは，$A^k = O$ となる自然数 k が存在することである．

問題 5.3. 対角成分がすべて 0 の上三角行列

$$N = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

は冪零行列であることを示せ．

線形代数 I 演習

– (6) 行列の基本変形 –

担当：佐藤 弘康

基本問題. 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 基本行列 $P_{ij}, E_{ij}(c), E_i(c)$ の定義を確認せよ.

(2) 行列 A に基本行列を左からかけることにより，A はどのように変化（変形）するか.

(3) 基本行列 $P_{ij}, E_{ij}(c), E_i(c)$ の逆行列を求めよ.

(4) 階段行列とはどのような行列か説明せよ.

(5) 簡約階段行列とはどのような行列か説明せよ.

例題 **6.1.** 行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を行基本変形により，簡約階段行列の形に変形せよ.

解.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{12}\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-2)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{31}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{23}\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{12}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{3}(1/4)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

問題 6.1. 次の行列を行基本変形により簡約階段行列の形に変形せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ **(5) 宿題：** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

例題 6.2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ を基本行列の積で表せ.

解. 行基本変形により，行列 A は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2\left(-\frac{1}{2}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．これから

$$E_2\left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot E_{12}(1) \cdot E_{21}(-3) \cdot A = E_2 \tag{6.1}$$

が成り立つことがわかる．したがって，

$$\begin{aligned} A =& E_{21}(-3)^{-1} \cdot E_{12}(1)^{-1} \cdot E_2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-1} \\ =& E_{21}(3) \cdot E_{12}(-1) \cdot E_2(-2) \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また，(**??**) 式より，$A^{-1} = E_2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot E_{12}(1) \cdot E_{21}(-3)$ となることがわかる.

問題 6.2. 次の行列を基本行列の積で表せ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

線形代数 I 演習

－ (7) 行基本変形の応用（逆行列，連立 1 次方程式） －

担当：佐藤 弘康

□ 逆行列の計算

例題 7.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

解. n 次正則行列 A が行基本変形により単位行列 E_n に変形できたとしよう．つまり，

$$M_1 M_2 \cdots M_k A = E_n \tag{7.1}$$

となるような適当な基本行列 $M_1, \dots, M_k$ が存在するとする．各 M_i に対し，その行列 M_i^{-1} が存在するので，(7.1) の両辺に左から，M_1^{-1} から M_k^{-1} を順番にかけることにより $A = M_k^{-1} M_{k-1}^{-1} \cdots M_1^{-1}$ を得る．つまり，$A^{-1} = M_1 M_2 \cdots M_k$ が成り立つ．

そこで，$n \times 2n$ 行列 $\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix}$ に (7.1) と同じ行基本変形を施すと

$$\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[M_1 M_2 \cdots M_k \times]{} \begin{pmatrix} M_1 M_2 \cdots M_k A & M_1 M_2 \cdots M_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & A^{-1} \end{pmatrix}$$

となる．

以上のことから，$\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix}$ を行基本変形により $\begin{pmatrix} E_n & P \end{pmatrix}$ の形に変形したとき，P が A の逆行列 A^{-1} である（教科書 p.41）．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-4)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{13}(1)E_{23}(-7)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2(-\frac{1}{6})\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{12}(-1)E_{32}(-2)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[P_{23}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{array}\right).$$

したがって，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

問題 7.1. 次の行列の逆行列を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 7.2. 次の行列の逆行列を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -abc & bc & -c & 1 \\ ab & -b & 1 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 7.3. 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が正則行列になるための k の条件を求めよ．また，そのときの A の逆行列を求めよ．

問題 7.4. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 26 & -20 \\ 2 & 6 & -4 \\ 6 & 18 & -13 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して，PAP^{-1} を計算せよ．また，A^n (n は自然数) を求めよ．

□ **連立 1 次方程式の解法**

例題 7.2. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = -4 \\ -x - y + 3z = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \tag{7.2}$$

の解を求めよ．

解． $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，連立一次方程式 (7.2) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表すことができる (行列表示)．ここで，行列 $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[E_1(-1)P_{12}E_{12}(3)E_{32}(-2)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 11 & 11 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_2\left(\frac{1}{3}\right)E_{13}(-1)E_{23}(4)E_3\left(\frac{1}{3}\right)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[P_{23}E_{13}(1)E_{32}(2)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

と変形できる．これより，(7.2) の解が $x = -2, y = 0, z = 1$ であることがわかる．

<u>(別解)</u> 行列 A の逆行列が存在し，$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ であるから，

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例題 7.3. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+2y-4z=2 \\ 2x+3y+7z=1 \\ 3x+5y+3z=3 \end{cases} \tag{7.3}$$

の解を求めよ．

解． $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，連立一次方程式 (7.3) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と行列表示することができる．ここで，行列 $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-2)E_{31}(-3)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[E_2(-1)E_{12}(2)E_{32}(-1)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と簡約階段行列に変形できる．これは (7.3) が方程式

$$\begin{cases} x+26z=-4 \\ y-15z=3 \end{cases} \tag{7.4}$$

に簡約化できることを意味する．つまり，(7.3) の解（全体の集合）と (7.4) の解（全体の集合）は等しい．$z=k$ とおくと $x=-4-26k$，$y=3+15k$，つまり方程式 (7.3) の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } k \in \mathbf{R})$$

である．

問題 7.5. 次の方程式が解をもつかどうか調べ，解が存在するなら解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ -3x+2y+2z=-1 \\ 5x+y-3z=-2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y-3z-4w=-6 \\ 2x+y+5z+w=-6 \\ 2x+2y+2z-3w=-10 \\ 3x+6y-2z+w=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=4 \\ 3x-2y+z=1 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x+2y+3z+4w=0 \\ 5x+6y+7z+8w=0 \\ 9x+10y+11z+12w=0 \\ 13x+14y+15z+16w=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x-2y-3z+w=3 \\ 2x+y-z=1 \\ -x-3y-2z+w=2 \\ 4x+7y+3z-2w=-3 \end{cases}$

問題 7.6. 次の方程式が解をもつための条件と，そのときの解を求めよ．

(1) $\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 2x+7y-4z=3 \\ 3x+7y-6z=a \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+z-w=a \\ -x+y-z+2w=b \\ -3x+2y-3z+5w=c \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-4y+10z=1 \\ 3x-2y-z=a \\ 5x-4y+2z=b \end{cases}$　(4) $\begin{cases} ax-by-z=0 \\ x+y-az=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

問題 7.7. 次のことを証明せよ．

(1) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解ならば，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$，$c\boldsymbol{v} (c \in \mathbf{R})$ も $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}$ が $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解，$\boldsymbol{u}$ が $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解ならば，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解であることを示せ．

基本問題. 以下のことを確認せよ.

(1) 斉次連立 1 次方程式の自明解，非自明解（自明でない解）とは何か説明せよ.

(2) 斉次連立 1 次方程式の基本解とは何か説明せよ.

(3) 連立 1 次方程式の解の自由度とは何か説明せよ.

問題 7.8. 次の方程式が自明でない解をもつための条件を求めよ.

(1) $\begin{cases} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \end{cases}$

問題 7.9. 問題 7.5 の連立方程式の階の自由度をそれぞれ求めよ.

問題 7.10. 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ.

(1) $k=1,2,3$ とするとき，各 k に対して方程式 $A\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}$ の自明でない解 $\boldsymbol{v}_k$ を一つ求めよ.

(2) (1) で求めたベクトル $\boldsymbol{v}_k$ を並べてできる 3 次正方行列 $P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP$ を求めよ.