

## (1変数) 関数とは

- 2つの変数  $x, y$  がある。  
(変数とは、いろいろな値をとる文字のこと)
- 変数  $x$  の値を決めると、それに応じて  $y$  の値が決まるとき、

「 $y$  は  $x$  の (1変数) 関数である」

という. このとき,  $\begin{cases} x & \text{を独立変数} \\ y & \text{を従属変数} \end{cases}$  という.

- 変数  $y$  が独立変数  $x$  の関数であることを, 一般的に  $y = f(x)$  と書く.
  - $f$  は「 $x$  に対して,  $y (= f(x))$  を対応させる規則」と解釈できる.
  - 「 $x$  の関数」とは「 $x$  で記述される式  $f(x)$ 」と考えてよい.

## (2変数) 関数とは

- 3つの変数  $x, y, z$  がある.
- 変数  $x$  と  $y$  の値を決めると、それに応じて  $z$  の値が決まるとき、

「 $z$  は  $x, y$  の 2変数関数である」

という. このとき,  $\begin{cases} x, y & \text{を独立変数} \\ z & \text{を従属変数} \end{cases}$  という.

- 変数  $z$  が独立変数  $x, y$  の関数であることを, 一般的に  $z = f(x, y)$  と書く.
  - $f$  は「 $x, y$  に対して,  $z (= f(x, y))$  を対応させる規則」.
  - 「 $x, y$  の関数」とは「 $x, y$  で記述される式  $f(x, y)$ 」.
- ★  $x, y$  を  $xy$ -平面内の点の座標  $(x, y)$  と思うと, 2変数関数とは,

「平面の点  $P(x, y)$  に対して, 数  $f(x, y)$  を対応させること」

と考えることができる ( $z = f(P)$ ) と書くこともある.

## 定義域と値域

関数  $z = f(x, y)$  に対し,

- $f(x, y)$  に代入してよい点  $P(x, y)$  全体からなる領域のことを,  
「関数  $f(x, y)$  の定義域」という.
- 点  $P(x, y)$  を関数  $f(x, y)$  の定義域内の点とすると,  $z$  がとる値の範囲のことを「関数  $f(x, y)$  の値域」という.

関数  $f(x, y)$  の  $\begin{cases} \text{定義域は} & \text{平面内の領域} \\ \text{値域は} & \text{数直線上の区間} \end{cases}$

## 2変数関数の可視化(グラフと等高線)

- 2変数関数  $z = f(x, y)$  のグラフとは,  $(a, b, f(a, b))$  と表される空間内の点全体のこと (ただし,  $(a, b)$  は関数  $f$  の定義域内の点).
  - $f(a, b)$  は  $(a, b)$  地点における「標高」と解釈できる.
  - $z = f(x, y)$  のグラフは「曲面」となる.
  - 点  $(a, b, c)$  が  $z = f(x, y)$  のグラフ上の点である.  
(または,  $z = f(x, y)$  のグラフが点  $(a, b, c)$  を通る)  
 $\iff (a, b, c)$  が関係式  $c = f(a, b)$  を満たす.
- 2変数関数  $z = f(x, y)$  の等高線とは, 同じ高さの点の集まりでできる曲線のこと.
  - 方程式  $f(x, y) = h$  を満たす平面内の点  $(x, y)$  の全体 ( $h$  は定数).

## 1変数関数の微分

- 関数  $y = f(x)$  の  $x = a$  における微分係数とは, 数

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

のこと.

- 上の極限が存在するとき, 「 $y = f(x)$  は  $x = a$  で微分可能である」という.
- 関数  $y = f(x)$  の導関数とは,  $x$  に対して  $f'(x)$  を対応させる関数のこと;

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- 記号:  $f'(x)$ ,  $y'$ ,  $\frac{df}{dx}(x)$ ,  $\frac{dy}{dx}$
- 導関数を求めることを関数を「微分する」という.

## 2変数関数の偏微分

- 2変数関数  $z = f(x, y)$  の偏導関数とは, 2つの変数のうち一方を定数と見なして, もう一方の変数に関して微分した関数のこと.
  - 「 $x$  に関する偏導関数」とは,  $y$  を定数とみなして,  $x$  で微分した関数  
記号:  $f_x(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $z_x$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x}$
  - 「 $y$  に関する偏導関数」とは,  $x$  を定数とみなして,  $y$  で微分した関数  
記号:  $f_y(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ,  $z_y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$
  - 偏導関数を求めることを「関数を偏微分する」という.
- 【注意】
  - 2変数関数についても, 「偏微分係数」「偏微分可能性」の概念が定義できる.
  - $f(x, y)$  がある領域で偏微分可能であるとき, 偏導関数が定義される.