解析I演習 (2学期：ベクトル解析)

― 第 9 回 積分公式―

担当：佐藤 弘康

未発表問題： 3,7(3), 4.3(2), 4.7, 4.11, 5.3, 5.4, 6.4(2), 6.6, 7.2(2)(3), 7.3〜7.5, 8.1〜8.4

問題 9.1. 次の $\mathbf{R}^2$ 上で定義された一次微分形式 ω と閉曲線 C に対し，定義に従って線積分 $\int_C \omega$ を計算せよ．また，Stokes の定理を使って $\int_C \omega$ を C の内部の領域 D 上の面積分になおして計算し，前の結果と比較せよ．

(1) $\omega = (e^x y + \cos x)dx + (x^3 + 3xy^2 + e^x)dy, \quad C: x^2 + y^2 = 1$

(2) $\omega = 2xy^2\ dx + 3x^2 y\ dy, \quad C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

問題 9.2. 次の $\mathbf{R}^3$ 上で定義された一次微分形式 ω と滑らかな曲面 S に対し，S の境界 C 上での線積分 $\int_C \omega$ を定義にしたがって計算せよ．また，Stokes の定理を使って $\int_C \omega$ を S 上の面積分になおして計算し，前の結果と比較せよ．

(1) $\omega = (3x^2 - y)dx + 4xy\ dy + (xyz + 2z^2)dz$,
S : 曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ の $z \geq 0$ の部分 (原点の側が裏)

(2) $\omega = x^2 dx + x^3 dy + z\ dz$,
S : 円柱 $x^2 + y^2 = 1$ と平面 $2x + y + z = 1$ との交線で囲まれた円盤 (原点の側が裏)

問題 9.3. 次の $\mathbf{R}^3$ 上で定義された二次微分形式 ω と滑らかな閉曲面 S に対し，面積分 $\int_S \omega$ を定義にしたがって計算せよ．また，Stokes の定理を使って $\int_S \omega$ を S の内部の領域 D 上の体積分になおして計算し，前の結果と比較せよ．

(1) $\omega = 2x\ dy \wedge dz + 3y\ dz \wedge dx + 4z\ dx \wedge dy$,
S : 原点を中心とする半径 1 の球面で表面を表とする曲面

(2) $\omega = x^3\ dy \wedge dz + y^3\ dz \wedge dx + z^3\ dx \wedge dy$,
S : 原点を中心とする半径 a の球面で表面を表とする曲面

問題 9.4. ω を $\mathbf{R}^3$ 上の一次微分形式とする．このとき，向きのついた任意の閉曲面 S に対して

$$\int_S d\omega = 0$$

が成り立つことを示せ．

問題 9.5. 滑らかな閉曲面 S で囲まれた領域の体積を V とするとき

$$\int_S x\ dy \wedge dz = \int_S y\ dz \wedge dx = \int_S z\ dx \wedge dy = V$$

が成り立つことを示せ.

問題 9.6. C_1 を $y = x^2$ に沿って原点から $(1,1)$ までの曲線，C_2 を $y = \sqrt{x}$ に沿って $(1,1)$ から原点までの曲線とする.

(1) $\mathbf{R}^2$ 上の一次微分形式 $\omega = (x^2-y^2)dx+(y-xy)dy$ に対して，線積分 $I_1 = \int_{C_1}\omega$ および $I_2 = \int_{C_2}\omega$ を求めよ.

(2) C_1 と C_2 で囲まれる領域を D とするとき，面積分 $I = \int_D d\omega$ を計算し，$I = I_1 + I_2$ となることを確かめよ.

問題 9.7. 3 点 $\mathrm{A}_1 = (1,0,0)$, $\mathrm{A}_2 = (0,1,0)$, $\mathrm{A}_3 = (0,0,1)$ に対し，A_1 から A_2 までの線分を C_1，A_2 から A_3 までの線分を C_2，A_3 から A_1 までの線分を C_3 とする.

(1) $\mathbf{R}^3$ 上の一次微分形式 $\omega = z\ dx + x\ dy + y\ dz$ に対して，線積分 $I_i = \int_{C_i}\omega$ $(i = 1,2,3)$ を求めよ.

(2) $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ を頂点とする三角形で，原点の無い側を表とする曲面を S とするとき面積分 $I = \int_S d\omega$ を計算し，$I = \sum_{1=1}^{3} I_i$ となることを確かめよ.

問題 9.8. 次の $\mathbf{R}^3$ 上の二次微分形式 ω と閉曲面 S(表面が表) に対して，(i) S を有限個の滑らかな曲面 S_i に分解し，各曲面上で ω の面積分 $I_i = \int_{S_i}\omega$ を求めよ．また，(ii) S の内部の領域を D とするとき，$I = \int_D dw$ を計算し $I = \sum_i I_i$ となることを確かめよ.

(1) $\omega = yz^2\ dy \wedge dz + 3xy^2\ dz \wedge dx + x^2y\ dx \wedge dy$,
S : 直方体 $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3$ の表面

(2) $\omega = e^x\ dy \wedge dz - ye^x\ dz \wedge dx + 3z\ dx \wedge dy$,
S : 円柱 $x^2 + y^2 = 4$ と平面 $z = 0$, $z = 2$ に囲まれた領域の表面

□ 未発表問題の解

問題 3.7(3) $\frac{\pi}{16}$

問題 4.3(2) $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{a}-\frac{t}{\|a\|^2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ ($f(t)$ は滑らかな関数．$\boldsymbol{c}$ は定ベクトル)

問題 4.7 $\boldsymbol{x}=(x(t),y(t),z(t))$ を等位面 $f(x,y,z)=c$ 内の任意の曲線とする．すなわち，

$$f(x(t),y(t),z(t))=c.$$

上式の両辺を t で微分すると

$$0=\frac{d}{dt}c=\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{x})=\langle \mathrm{grad}\, f_{\boldsymbol{x}(t)},\boldsymbol{x}'(t)\rangle$$

となり，このことからベクトル grad f は等位面内の曲線の接ベクトルと常に直交していることがわかる．すなわち，grad f は等位面の法線ベクトルである．

問題 4.11 (1) $\boldsymbol{x}(t)=(c_1e^t,c_2e^{-t},c_3e^{2t})$, ($c_i$ は定数)

(2) $\boldsymbol{x}(t)=\left(-\frac{c_1}{c_1t+c_2},c_1t+c_2,-\frac{(c_1)^2}{3}t^3-c_1c_2t^2-(c_2)^2t+c_3\right)$, ($c_i$ は定数)

問題 5.3 保存ベクトル場である．ポテンシャルはそれぞれ

(1) $f(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle+c$, (2) $f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2+c$. ($c$ は定数)

問題 5.4 X_A のポテンシャルは $f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^t+c$. ($c$ は定数)

問題 7.2 (2) $\frac{15\pi}{4}$ (2) $-\frac{a^4}{4}$

問題 7.3 $(2xy+z^3)dx+x^2dy+3xz^2dz=d(x^2y+xz^3+c)$ (c は定数) と書けるので，命題 2.3.6 より

$$\int_C\left((2xy+z^3)dx+x^2dy+3xz^2dz\right)=(9+192+c)-(-1+1+c)=201.$$

問題 7.4 $\mathbf{R}^3$ の点 p を固定し，スカラー場 f を

$$f(x)=\int_{C_{p,x}}\omega,\ (\text{ただし，}C_{p,x}\text{ は点 }p\text{ から }x\text{ までを結ぶ滑らかな曲線})$$

と定義する．ω が満たす条件 (仮定) から，上式の右辺は曲線 C の選び方に依らない．このとき，a,b を結ぶ任意の曲線 $C_{a,b}$ に対し，

$$\int_{C_{a,b}}df=f(b)-f(a)=\int_{C_{p,b}}\omega-\int_{C_{p,a}}\omega=\int_{C_{p,b}}\omega+\int_{C_{a,p}}\omega=\int_{C_{a,b}}\omega$$

となり，この f が求めたいスカラー場であることがわかる．

問題 7.5 (1) 3 (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ **問題 8.1** (1) π (2) 0 (3) $-\frac{99}{2}$ (4) $\frac{2\pi}{5}$

問題 8.4 -4π **問題 9.1** (1) $\frac{3}{2}\pi$ (2) 0 **問題 9.2** (1) 4π (2) $\frac{3}{4}\pi$

問題 9.3 (1) 12π (2) $\frac{12}{5}a^5\pi$ **問題 9.6** $\frac{3}{20}$ **問題 9.7** $\frac{3}{2}$

問題 9.8 (1) 18 (2) 24π