0　復習（1 変数関数の微積分）

問題 0.1. 関数 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が

$$f^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

となることを示せ．また，$f^{-1}(x)$ の導関数を計算せよ．

問題 0.2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の k 階導関数 $f^{(k)}(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ を $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ（剰余項の評価は考えなくてよい）．

(3) $(\log(1-x))' = -\dfrac{1}{1-x}$ を利用して，$\log(1-x)$ を $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ．

問題 0.3. 次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

問題 0.4. 次の有理関数の不定積分を求めよ．

$$\frac{x+1}{(x-2)(x-1)}$$

問題 0.5. 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

1　2 変数関数のグラフ，極限

問題 1.1. 関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ のグラフ $z=f(x,y)$ がどのような形をしているか考えよ．

ヒント：平面の極座標表示 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

問題 1.2. 関数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$ について以下の問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の定義域を求めよ（どのような領域で定義可能か）.

(2) 問題 1.1 を参考にして，グラフ $z=f(x,y)$ がどのような形をしているか考えよ．

問題 1.3. 関数 $f(x,y)=x^2-y^2$ の等高線を書いて，グラフ $z=f(x,y)$ がどのような形をしているか考えよ．

問題 1.4. 次の関数 $f(x,y)$ の極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在しないことを示せ．つまり，原点 $(0,0)$ への近づけ方によって，$f(x,y)$ が異なる値に近づくことを示せ．

(1) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

(2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

問題 1.5. 次の関数 $f(x,y)$ に対して，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ であることを示せ．つまり，$\sqrt{x^2+y^2}$ の値が十分小さいとき，$|f(x,y)|$ の値も十分小さくできることを示せ．

(1) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(2) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2+y^4}$

2 偏微分係数，偏導関数

問題 2.1. 関数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ を，x,y に関して偏微分せよ．

問題 2.2. 次の関数に対して，f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} を計算せよ．

(1) $f(x,y)=\sin(x\cos y)$

(2) $f(x,y)=\log(x+e^y)$

(3) $f(x,y)=(x+y)^2+(x-y)^3$

問題 2.3. xy-平面の $x>0$ の領域で定義された関数 $f(x,y)=x^y$ に対して，f_x, f_y, f_{xy} を計算せよ．

問題 2.4. 関数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

に対して，$f_x(0,0), f_y(0,0)$ を計算せよ．

問題 2.5. 関数

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \quad (t>0, x\in\mathbf{R})$$

が $u_t=u_{xx}$ を満たすことを示せ．ただし，$\exp(x)=e^x$．

問題 2.6. 次の関数 $f(x,y)$ が $f_{xx}+f_{yy}=0$ を満たすことを示せ．

(1) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$　　(2) $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$

問題 2.7. 関数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

に対して，$f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$ を計算せよ．

3　1次近似と接平面の方程式

関数の 1 次近似

$f(x,y)$ を 2 変数関数とする．$g(x,y)$ が $f(x,y)$ の点 $(x,y)=(a,b)$ の近傍における **1** 次近似とは以下の 2 条件を満たすときをいう；

(i) $g(x,y)$ は x,y に関する高々 1 次の多項式である．

(ii) $g(x,y)$ と $f(x,y)$ の (a,b) における 0 階，1 階の偏微分係数が等しい．つまり $f(a,b)=g(a,b)$，$f_x(a,b)=g_x(a,b)$，$f_y(a,b)=g_y(a,b)$ が成り立つ．

注意：厳密には正しい定義ではないが，ここではこのように考えることにする．

問題 **3.1.** 上の条件 (i) から $f(x,y)$ の 1 次近似は

$$A(x-a)+B(y-b)+C$$

と書ける．条件 (ii) を用いて定数 A,B,C を決定せよ．

曲面の接平面と法線

関数 $f(x,y)$ に対し，1 次近似 $z=f(a,b)+f_x(a,b)\,(x-a)+f_y(a,b)\,(y-b)$ で与えられる曲面を点 $(a,b,f(a,b))$ における曲面 $z=f(x,y)$ の**接平面**とよぶ．また，

$$(x,y,z)=(a,b,f(a,b))+t(f_x(a,b),f_y(a,b),-1)\quad (t\in\mathbf{R})$$

または t を消去して

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)}=\frac{y-b}{f_y(a,b)}=\frac{z-f(a,b)}{-1}$$

で表される曲線を点 $(a,b,f(a,b))$ を通る $z=f(x,y)$（または接平面）の**法線**とよぶ．

問題 **3.2.** 1 変数関数 $f(x)$ の $x=a$ の近傍の 1 次近似が $x=a$ における接線の方程式であることを確かめよ．

問題 **3.3.** 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $\boldsymbol{p}$ における接平面および $\boldsymbol{p}$ を通る法線の方程式を求めよ．

(1) $f(x,y)=3x^2y+xy$，$\boldsymbol{p}=(1,-1,-4)$

(2) $f(x,y)=xy$，$\boldsymbol{p}=(1,-1,-1)$

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$\boldsymbol{p}=(a,b,\sqrt{1-a^2-b^2})$

4　合成関数の偏微分

合成関数の微分（2 変数から 1 変数）

2 変数関数 $f(x,y)$ と 1 変数関数 $x(t), y(t)$ に対して，

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot\frac{dy}{dt}(t)$$

問題 4.1. $f(x,y)=x^y$，$x(t)=t^2$，$y(t)=t^3$ に対して次の問いに答えよ．

(1) $f(x(t),y(t))$ を計算せよ．

(2) (1) の計算結果から，直接 $\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))$ を計算せよ．

(3) 合成関数の微分の公式を用いて $\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))$ を計算せよ．

合成関数の微分（2 変数から 2 変数）

$f(x,y)$ と $x(u,v), y(u,v)$ に対して，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}f(x(u,v),&y(u,v))\\ &=\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)),\\ \frac{\partial}{\partial v}f(x(u,v),&y(u,v))\\ &=\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\cdot\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)).\end{aligned}$$

問題 4.2. $f(x,y)$ を 2 変数関数とする．$x(r,\theta)=r\cos\theta, y(r,\theta)=r\sin\theta$ と $f(x,y)$ との合成関数を $f^*(r,\theta)$ とおく．つまり $f^*(r,\theta)=f(x(r,\theta),y(r,\theta))$．このとき，以下の式が成り立つことを示せ．

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial f^*}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f^*}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f^*}{\partial \theta^2}.$$

5　2 次近似，テイラー展開

k 次近似，テイラー級数

2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，次の性質を満たす関数 $g(x,y)$ を点 (a,b) における $f(x,y)$ の k 次近似とよぶ；

- $g(x,y)$ は x,y に関する k 次の多項式である．
- $f(x,y)$ と $g(x,y)$ の点 (a,b) における各偏微分係数（0 階から k 階まで）が等しい；

$$
\begin{gathered}
f(a,b) = g(a,b), \\
f_x(a,b) = g_x(a,b), \quad f_x(a,b) = g_y(a,b), \\
f_{xx}(a,b) = g_{xx}(a,b), \quad f_{xy}(a,b) = g_{xy}(a,b), \quad f_{yy}(a,b) = g_{yy}(a,b), \\
\vdots \\
(k \text{ 階偏微分係数まで})
\end{gathered}
$$

問題 **5.1.** 次の関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) における 2 次近似を求めよ．

(1) $f(x,y) = e^{2x+3y}$，$(a,b) = (0,0)$

(2) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$，$(a,b) = (1,1)$

(3) $f(x,y) = \dfrac{y^3}{1-x^2y}$，$(a,b) = (0,0)$

問題 **5.2.** 1 変数関数の極値とは何か答えよ．また，極値の求め方（手順）を答えよ．

問題 **5.3.** 次の行列 A に対して，$h(X,Y) := (X,Y)\,A\,{}^t(X,Y)$ を計算し，X,Y が独立にいろいろな値をとるとき，$h(X,Y)$ の符号は (i) 常に正か，(ii) 常に負か，それとも (iii) 正にも負にもなり得るか答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　(5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

6　多変数関数の極値

2 変数関数の極値

$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるとすると，

- $y=b$ で固定した関数 $g(x) := f(x,b)$ も $x=a$ で極値をとる．つまり，$g'(a)=f_x(a,b)=0$ を満たす．
- 同様に $f_y(a,b)=0$ を満たす．

このとき，$f(x,y)$ の点 (a,b) の近傍での 2 次近似は

$$f(x,y) \fallingdotseq f(a,b)+\frac{1}{2}(x-a,y-b)\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

で与えられる．$(x,y)\,(\neq (a,b))$ に対して，上式右辺の第 2 項が常に正のとき，(a,b) は（孤立した）極小値を与える．また，上式右辺の第 2 項が常に負のとき，(a,b) は（孤立した）極大値を与える．

極値の求め方（判定法）

(1) $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たす (a,b) を求める．

(2) 上で求めた (a,b) に対して $H_f(a,b) := \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}$ を計算する．

- $\det(H_f(a,b))>0$ かつ，
  - $f_x(a,b)>0$ のとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極小値をとる．
  - $f_x(a,b)<0$ のとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極大値をとる．
- $\det(H)_f(a,b)<0$ のとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとらない．
- $\det(H)_f(a,b)=0$ のとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとるかどうか判定できない．

問題 **6.1.** 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y)=(x+y)\,e^{-x^2-y^2}$　　(2) $f(x,y)=\dfrac{2}{3}y^3+y^2-x^2y+x^2$

(3) $f(x,y)=xy(1-2x-3y)$　　(4) $f(x,y)=xy\log(x^2+y^2)$

(5) $f(x,y)=2\log x+3\log y+\log(6-x-y)$

7 陰関数

陽関数と陰関数

- $y = f(x)$ によって x と y が関数関係をもつとき，y は x の陽関数 (explicit) であるという．
- ある 2 変数関数 $F(x, y)$ に対し，$F(x, y) = 0$ によって x と y が関係付けられているとする．このとき（ある条件を満たすならば）局所的に $y = f(x)$ と書くことができる．この関数 $f(x)$ を $F(x, y) = 0$ から定まる陰関数 (implicit) という（陰関数の存在定理を参照せよ）．

例題 7.1. $x^2 + y^2 = 1$ から定まる陰関数 $y = y(x)$ の微分 $y' = y'(x)$ を求めよ．

解． $y = y(x)$ と表されているとすると $x^2 + (y(x))^2 = 1$．両辺を x で微分すると

$$2x + 2y(x)\,y'(x) = 0.$$

したがって，

$$y'(x) = -\frac{x}{y}.$$

問題 7.1. 次の関数から定まる陰関数の微分 y' を求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
(2) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$
(3) $x^y = y^x$

問題 7.2. 次の関数から定まる陰関数 y について，y' および y'' を求めよ．

(1) $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$
(2) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

問題 7.3. 次の関数から定まる陰関数 y の極値を求めよ．

(1) $x^3y^3 + y - x = 0$
(2) $x^4 + 2x^2 + y^3 - y = 0$

8　重積分

重積分の意味

2 変数関数 $f(x,y)$ の領域 D 上での積分；

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = (D \text{ の範囲で } z=f(x,y) \text{ と } xy\text{-平面とで囲まれる部分の体積})$$

累次積分

重積分を 1 変数関数の積分の繰り返し帰着させる計算方法.

□ 積分領域 D が長方形領域 $[a,b]\times[c,d]$ の場合

問題 **8.1.** 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{y^2}{1+x}\,dy\right)dx$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy, \quad D=[1,3]\times[0,2]$

(3) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy, \quad D=[0,1]\times[0,1]$

(4) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^x e^{x-y}\,dy\right)dx$

□ 一般の領域での重積分

重積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の計算

(1) 積分領域を $\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, \varphi(x)\le y\le \psi(x)\}$ の形に表す.

(2) $I=\displaystyle\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$ の形に表し，括弧の中身から積分の計算をする.

問題 **8.2.** 次の領域 D を図示し，積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を求めよ.

(1) D は原点, (π,π), $(0,\pi)$ を頂点とする三角形の内部，$f(x,y)=\sin(x-y)$.

(2) D は $y=x$, $y=x^2$ によって囲まれる領域，$f(x,y)=2x+5y$.

(3) D は $y=x-2$, $x+y^2=4$ によって囲まれる領域，$f(x,y)=xy$.

□ 積分順序の交換

- $$\int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$
- 積分領域の表現
$$\{(x,y)\,|\,\phi(x) \leq y \leq \psi(x),\, a \leq x \leq b\}$$
を
$$\{(x,y)\,|\,\Phi(y) \leq x \leq \Psi(y),\, \alpha \leq y \leq \beta\}$$
に書き換える．
- 2 つの領域に分解しなければ上のような表現の書き換えができない場合もある．

問題 **8.3.** 次の積分について，積分領域を図示し，積分の順序を交換せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy \right) dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{y} f(x,y)\,dx \right) dy$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{2y-y^2} f(x,y)\,dx \right) dy$

問題 **8.4.** $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2}\,dx \right) dy$ を計算せよ．

変数変換とヤコビアン

- （1 変数関数）$x = \phi(t)$ と変数変換；

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt.$$

ただし，$a = \phi(\alpha)$，$b = \phi(\beta)$.

- （2 変数関数）$(x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ と変数変換；

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(\varphi(u,v), \phi(u,v)) \left| \det \begin{pmatrix} \varphi_u(u,v) & \varphi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{pmatrix} \right| dudv$$

ただし，写像 $E \to D; (u,v) \mapsto (x,y) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ は <u>一対一</u> に対応していなければならない.

□ アフィン変換; φ, ψ が 1 次多項式の場合.

問題 8.5. 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{e^{x-y}}{1+(x+y)^2} dxdy$,　ただし $D = \{(x,y) \,|\, -1 \leq x+y \leq 1,\ -1 \leq x-y \leq 1\}$.

(2) $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{x}{2} + y\right) \log(2x+y+1)\,dxdy$,
ただし $D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x + 2y \leq \pi,\ 1 \leq 2x + y + 1 \leq \pi\}$.

(3) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\, e^{(x+y)^2} dxdy$,　ただし D は原点，$(1,0)$，$(0,1)$ を頂点とする三角形.

□ 極座標変換**;** $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

問題 8.6. 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$,　$D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leq a^2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (px^2+qy^2)\,dxdy$　$(p, q \in \mathbf{R})$,　$D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leq a^2\}$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$,　$D = \left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$

(4) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$,　$D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leq x\}$

(5) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$,　$D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leq 2ax\}$

□ 広義積分

問題 **8.7.** 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad D=\{(x,y)\,|\,0\leq y\leq x\leq 1\}$

(4)

問題 **8.8.** 次の積分

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy, \quad D=\{(x,y)\,|\,x\geq 0, y\geq 0\}$$

を計算することにより，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ を求めよ．

□ 体積の計算

問題 **8.9.** 次の立体の体積を求めよ．

(1) 楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$

(2) 2 つの円柱面 $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$ で囲まれた立体．

(3) 円柱面 $x^2+y^2=a^2$ と 2 平面 $x+z=a$, $z=0$ で囲まれた立体．

(4) 放物面 $x^2+y^2=4z$, 柱面 $x^2+y^2=ax$ および平面 $z=0$ で囲まれた立体．