微積分 I 演習

－ 第 1〜3 回の補足 －

担当：佐藤 弘康

問題 1.1. 以下のことを示せ．

(1) 有理数 a, b (ただし $a < b$) に対して $a < c < b$ を満たす有理数 c が存在する．

(2) 有理数 a, b (ただし $b \neq 0$) に対して $a + b\sqrt{2}$ は有理数ではない．

(3) 有理数 a, b (ただし $a < b$) に対して $a < c < b$ を満たす無理数 c が存在する．

解. (1) $c = \dfrac{a+b}{2}$ とおけば，c は有理数で $a < c < b$ を満たす．□

(2)

$$A = a + b\sqrt{2} \tag{6.1}$$

とおく．「A が有理数である」と仮定して矛盾を導く（背理法）．

(6.1) 式から，

$$\sqrt{2} = \frac{A - a}{b} \tag{6.2}$$

と書けるが，有理数の集合は四則演算で閉じているから，(6.2) の右辺は有理数である．しかし，これは $\sqrt{2}$ が無理数であるという事実に反する．したがって，$a + b\sqrt{2}$ は有理数でないことがわかる．□

(3) 次の事実

$$a < b \text{ かつ } 0 < \theta < 1 \Longrightarrow a < a + \theta(b - a) < b \tag{6.3}$$

を用いて証明しよう．(6.3) と (2) の結果から，$0 < p\sqrt{2} < 1$ を満たす $p \in \mathbf{Q}$ が存在すれば，$c = a + (b - a)p\sqrt{2}$ は $a < c < b$ を満たす無理数である．例えば，$p = \dfrac{1}{2}$ はこれを満たす．□

<u>(3) の別解</u>　$x, y \in \mathbf{Q}$ を

$$a < x < b \tag{6.4}$$
$$a < y < b \tag{6.5}$$

を満たす数とする．(6.4) に $\sqrt{2}$ をかけて，(6.5) との和をとると

$$(1 + \sqrt{2})a < x\sqrt{2} + y < (1 + \sqrt{2})b$$

を得る．各辺に $(\sqrt{2}-1)$ をかけると

$$a < (2x-y)+(x-y)\sqrt{2} < b$$

を得る．したがって，(6.4), (6.5) かつ $x \neq y$ を満たす $x, y \in \mathbf{Q}$ に対して，$c = (2x-y)+(x-y)\sqrt{2}$ とおけば，c は $a < c < b$ を満たす無理数である．(1) の議論を使うことにより，例えば $x = \dfrac{a+b}{2}, y = \dfrac{a+x}{2} = \dfrac{3a+b}{4}$ は上の条件を満たす．□

問題 1.1 の補足問題.

(6.3) が成立することを確かめよ．また，(6.3) を用いて，次のことを証明せよ．

(1) $a, b \in \mathbf{Q}$ に対して，開区間 (a, b) の中には無限個の有理数が存在する．

(2) $a, b \in \mathbf{Q}$ に対して，開区間 (a, b) の中には無限個の無理数が存在する．

問題 2.3. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$， $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ は下に有界な減少列であることを示せ．また，その極限はどのような値か？

(2) 数列 $\{b_n\}$ は下に有界な減少列であることを示せ．

解を述べる前に，次の例題を考える．

例題 6.1. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ は増加列であることを示せ．

解. この事実は教科書 (p.12〜) で証明されているが，ここでは相加平均と相乗平均の関係

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k} \tag{6.6}$$

(ただし，等号成立は $x_1 = \cdots = x_k$ のとき)

を用いた別証明を与える．n を $\dfrac{n}{n-1}$ に $(n-1)$ 等分して (6.6) を適用すると

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{n} = \frac{\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{n-1}+1}{n} > \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \sqrt[n]{a_{n-1}}.$$

したがって，$a_n > a_{n-1}$ となり，数列 $\{a_n\}$ は増加列であることがわかる．□

<u>**問題 2.3** の解</u> (1) 例題 6.1 の解を参考に証明する．$\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n-1)+1}{n+1}$ であるから，

$$\frac{n}{n+1} = \frac{\frac{n-1}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} + 1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}$$

が成り立つ．この不等式の両辺を $(n+1)$ 乗して逆数をとれば

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = a_{n-1}.$$

したがって，a_n は減少列である．また，$a_n > 0$ より，下に有界であるから，極限が存在する．

定理 1.1 を用いることにより

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= e \cdot 1 = e
\end{aligned}$$

を得る．□

(2)

$$\begin{aligned}
b_n - b_{n+1} &= \log\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - 1\right).
\end{aligned}$$

ここで, (1) の結果から $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1} > e$ が成り立つから, $\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \log e = 1$.
したがって，$b_n > b_{n+1}$ となり，数列 $\{b_n\}$ は減少列である.

また，b_n は

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \left(\log 2 + \log\frac{3}{2} + \cdots + \frac{n}{n-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(1 - \log\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right) + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

と書けるが，数列 $\left\{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\right\}$ が上に有界な増加列で，その極限が e であることから，$\log\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k < \log e = 1$．したがって，$b_n > 0$ となり $\{b_n\}$ は下に有界である[*1]．□

問題 2.8. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+1}$$

によって定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 高校までに習った知識を使ってこの数列の極限を求めよ．

(2) 正の実数 ε が与えられたとき，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つためには自然数 n をどのくらい大きくとればよいか？

ヒント．(2) $|a_n - \alpha| < \dfrac{1}{n}$ が成り立つことを示し，後は問題 2.6 の解法を参考にせよ．

問題 3.4(1) の補足問題．

関数 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ に関して，次の問いに答えよ．

(1) $ad - bc = 0$ のとき，関数 f は定数関数であることを示せ（つまり，ある定数 C が存在し，任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して $f(x) = C$）．

(2) $ad - bc \neq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフはどのような形になるか考察せよ．

ヒント．$f(x) = a' + \dfrac{b'}{c'x + d'}$ の形に変形せよ（ただし $a', b', c', d' \in \mathbf{R}$）．

[*1] 実際に，$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n\right) = 0.577215664901532\cdots$ で，この数はオイラーの定数と呼ばれている．ちなみに，オイラーの定数が有理数なのか無理数なのか，未だにわかっていない．