微積分 III 演習

－ (6) リーマン積分 －

担当：佐藤 弘康

以下の事柄を確認せよ．

(1) 区間 $I = [a, b]$ の分割 Δ とは何か．また，分割 Δ の細分とは何か．

(2) 有限区間 I で定義された関数 f と I の分割 Δ に関する上限和 $\overline{S}(\Delta; f)$，下限和 $\underline{S}(\Delta; f)$ とは何か．

(3) ダルブー (Darboux) の定理とは何か．

(4) 関数の過剰積分 $\overline{S}(f)$，不足積分 $\underline{S}(f)$ とは何か．リーマン積分とは何か．

問題 6.1. 自然数 n に対して，$x_i^{(n)} = \frac{i}{n^2}$（ただし，$i = 0, 1, \ldots, n^2$）とおき，区間 $[0, 1]$ の分割 $\Delta^{(n)} = \{0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{2^n-1}^{(n)} < x_{2^n}^{(n)} = 1\}$ とおく．

(1) $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}$ を数直線上に図示し，$\Delta^{(j)}$ が $\Delta^{(j+1)}$ の細分になっていることを確認せよ $(j = 1, 2)$.

(2) $f(x) = x^2$ とおく．自然数 n に対して上限和 $\overline{S}(\Delta^{(n)}; f)$，下限和 $\underline{S}(\Delta^{(n)}; f)$ を求めよ．さらに

$$\underline{S}(\Delta^{(n)}; f) < \underline{S}(\Delta^{(n+1)}; f) < \overline{S}(\Delta^{(n+1)}; f) < \overline{S}(\Delta^{(n)}; f)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の式が成り立つことを示せ:

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \underline{S}(\Delta^{(n)}; f) = \inf_{n \in \mathbf{N}} \overline{S}(\Delta^{(n)}; f) = \frac{1}{3}.$$

問題 6.2. 区間 $[0, 1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ は無理数}) \\ 1 & (x \text{ は有理数}) \end{cases}$$

はリーマン積分可能か？

問題 6.3. 区間 $[0,1]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \text{ は無理数，または } x=0) \\ \frac{1}{q} & (x=\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}.\ \text{ただし} \frac{p}{q} \text{は既約}) \end{cases}$$

について以下の問に答えよ．

(1) 勝手な $\varepsilon>0$ に対して，$f(x)>\varepsilon$ を満たす $x\in[0,1]$ は有限個しかないことを示せ（このような x の個数を k_ε とおく）．

(2) $[0,1]$ の分割 $\Delta=\{x_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ を，$f(x)>\varepsilon$ を満たす x が Δ の部分区間の内部に含まれているようにとる．つまり，$f(x_i)\le\varepsilon$ $(i=0,1,\ldots,n)$．このとき，

$$\overline{S}(\Delta;f)<\varepsilon+k_\varepsilon\cdot|\Delta|$$

が成り立つことを示せ．ただし，$|\Delta|=\max_i|x_i-x_{i-1}|$．

(3) $\overline{S}(f)=0$ であることを示せ．

レポート課題 提出期限：3 月 11 日（火）

$\boxed{1}$ これまで配布したプリントの中の次の問題を解いて，レポート用紙にまとめよ．

問題 **3.4**，問題 **4.3**，問題 **5.2**，問題 **6.3**

$\boxed{2}$ 微積分 III の講義と演習で勉強した中で深く印象に残ったこと (概念，定理，方法など) を ひとつ 挙げて，その理由を具体的に述べよ（A4 レポート用紙 1 枚程度）．