数学クォータ科目「基礎数学 I」第 12 回

三角関数の加法定理

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

今回の授業で理解してほしいこと

- 三角関数の加法定理の使い方
- 加法定理から種々の公式（倍角, 半角, 積和, 和積）が得られること
- 三角関数の合成

正弦関数と余弦関数の加法定理

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots (1)$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots (2)$
  - $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \cdots\cdots (3)$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \cdots\cdots (4)$
  - $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

正接関数の加法定理

(1)(3) 式より

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\times\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\times\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

(2)(4) 式より, $\tan(\alpha-\beta)$ も同様に計算すると,

$$\therefore\ \boxed{\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}}$$

倍角の公式

(1) 式において β に α を代入すると,

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\therefore\ \boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

(3) 式において β に α を代入すると,

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \boxed{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \begin{cases} (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = \cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\therefore\ \boxed{\cos(2\alpha) = \begin{cases} 1-2\sin^2\alpha \\ \cos^2\alpha - 1 \end{cases}} \quad \begin{matrix} \cdots\cdots(5) \\ \cdots\cdots(6) \end{matrix}$$

半角の公式

(5) 式 $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ より，$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))}$.

α を $\dfrac{\theta}{2}$ に置き換えると，

$$\therefore\ \boxed{\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)}$$

(6) 式 $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ より，$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))}$.

α を $\dfrac{\theta}{2}$ に置き換えると，

$$\therefore\ \boxed{\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)}$$

積和の公式

$\sin\alpha$ と $\cos\beta$ の積 は, 正弦関数 sin の和（差） として表すことができる.

(1)(2) 式より,

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}} = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta-\alpha)\}$$

$\sin\alpha$ と $\sin\beta$ の積
$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の積
は, 余弦関数 cos の和（差） として表すことができる.

(3)(4) 式より

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

和積の公式

積和の公式の「逆」

- 正弦関数 $\sin$ の和（差）は, $\sin$ と $\cos$ の積として表すことができる.
- 余弦関数 $\cos$ の和は, $\cos$ の積として表すことができる.
- 余弦関数 $\cos$ の差は, $\sin$ の積として表すことができる.

加法定理の応用：三角関数の合成

事実

$\sin x$ と $\cos x$ の線形結合 $a \sin x + b \cos x$ は
ひとつの三角関数 $A \sin(x + \varphi)$ の形で表すことができる.

$a \sin x + b \cos x = A \sin(x + \varphi)$ と表せたとすると, 加法定理より

$$A \sin(x + \varphi) = A\,(\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = A \cos \varphi \ \sin x + A \sin \varphi \ \cos x$$

より, 定数 a, b は連立方程式 $\begin{cases} a = A \cos \varphi \\ b = A \sin \varphi \end{cases}$ の解であることがわかる.

実際には, $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ であり,

φ は $\cos \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を満たす数 である.

まとめと復習（と予習）

- 加法定理とはどのような等式のことですか？
- 加法定理からはどのような等式（公式）が得られますか？

教科書 **p.64, 65**

問題集 **54〜56**