【復習】1 変数関数の極値の判定

定理 1.

(i)「$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる」 $\Longrightarrow$ $f'(a)=0$

(ii) $f'(a)=0$ かつ $\begin{cases} f''(a)<0 & \Longrightarrow & f(a) \text{ は極大値} \\ f''(a)>0 & \Longrightarrow & f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)=0 \Longrightarrow$?

関数 $f(x)$ の極値を求める手順

(1) 導関数 $f'(x)$ を求める.

(2) 方程式 $f'(x)=0$ の解を求める.

(3) 2 次導関数 $f''(x)$ を求める.

(4) (2) の解 $x=a$ の対し, $f''(a)$ の符号を調べる；
$f''(a)<0$ ならば極大, $f''(a)>0$ ならば極小, $f''(a)=0$ ならば？

【参考】1 変数関数の極値の判定

定理.

- $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(2m-1)}(a)=0$
  かつ $\begin{cases} f^{(2m)}(a)<0 & \Longrightarrow & f(a) \text{ は極大値} \\ f^{(2m)}(a)>0 & \Longrightarrow & f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$
- $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(2m)}(a)=0$
  かつ $f^{(2m+1)}(a)\neq 0 \Longrightarrow f(a)$ は極値ではない

【復習】2 変数関数の極値の判定

定理 2.

[I]「$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとる」 $\Longrightarrow$ $f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$

[II] $D(x,y) := \{f_{xy}(x,y)\}^2 - f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y)$ とおく.
$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ かつ

- $D(a,b)<0$ かつ $\begin{cases} f_{xx}(a,b)<0 & \Longrightarrow & f(a,b) \text{ は極大値} \\ f_{xx}(a,b)>0 & \Longrightarrow & f(a,b) \text{ は極小値} \end{cases}$
- $D(a,b)>0$ のとき, $f(a,b)$ は極値ではない.
- $D(a,b)=0$ のとき, $f(a,b)$ が極値となるときも, そうならないときもある.

2 変数関数 $f(x,y)$ の極値を求める手順

(1) 偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求める.

(2) 連立方程式 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ の解を求める.

(3) 2 次偏導関数 $f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yy}(x,y)$ を求める.
($D(x,y)=\{f_{xy}(x,y)\}^2 - f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y)$ を求める)

(4) (2) の解 $(x,y)=(a,b)$ の対し, $D(a,b)$ と $f_{xx}(a,b)$ の符号を調べる；
（省略）