微積分 I 演習

－ 第 1 章の補足（その 1），プリント問題の略解 －

担当：佐藤 弘康

問題 1.5. $\cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ を示せ．

解． まず，$f(x) = \cosh x$ とおき，$y = f(x)$ のグラフの概形がどうなっているのか確かめよう．$f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$，$f''(x) = f(x) > 0$ であるから，この関数は下に凸で $x = 0$ で極値をとり，$x > 0$ で増加，$x < 0$ で減少関数である（最小値は $f(0) = 1$）．また，$f(-x) = f(x)$ であるから，y 軸に関して対称である．以上のことから，$y = f(x)$ のグラフの概形は演習書 p.12 の図 1.11 のようになることがわかる．また，関数 $f(x)$ の値域は $[1, \infty)$ である．

図 1.11 を見ればわかるように，関数 f の定義域を $\mathbf{R}$ 全体とするとき，定義域と値域は一対一に対応していない．しかし，f の定義域を $[0, \infty)$ に制限した関数は定義域とその値域の一対一対応を与えるので，逆関数 $g(x)$ を持つ．これを $g(x) = \cosh^{-1} x$ と書く（演習書 p12, 13 を参照）．逆関数と元の関数の定義域，値域は共に逆の関係になるので，$g(x)$ の定義域は $[1, \infty)$，値域は $[0, \infty)$ である．

以上をふまえて，$g(x)$ を求めよう．$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ とおいて x について解き，x と y を入れかえると

$$y = \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$$

を得る．ここで，$g(x)$ の定め方から，x が $[1, \infty)$ の範囲を動くとき，常に $g(x) \geq 0$ でなくてはならない（つまり $x \pm \sqrt{x^2-1} \geq 1$）．$x \geq 1$ のとき

$$x + \sqrt{x^2-1} \geq x \geq 1,$$
$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \leq 1.$$

したがって，$g(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ となる．□

問題 1.6. $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ を微分可能とし，

$$f(x) = g_1(x) \cdots g_n(x) \tag{8.1}$$

とおく．このとき，次が成り立つことを示せ．

$$f'(x) = f(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{g'_k(x)}{g_k(x)}. \tag{8.2}$$

解. 帰納法を使っても示せるが，ここでは対数微分法を用いて証明する．

(8.1) の両辺の log をとる：

$$\log f(x) = \log g_1(x) + \cdots + \log g_n(x). \tag{8.3}$$

(8.3) の両辺を x で微分すると，合成関数の微分の法則より

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{f'(x)}{f(x)}, \\
(\text{右辺}) &= \frac{g'_1(x)}{g_1(x)} + \cdots + \frac{g'_n(x)}{g_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g'_k(x)}{g_k(x)}.
\end{aligned}$$

両辺に $f(x)$ をかけることにより，(8.2) を得る．□

□ プリント問題の略解

問題 1.1. プリント p.9 を参照せよ．

問題 1.2. (1) 有界　(2) 上にも下にも有界でない　(3) 下に有界

問題 1.3. 空集合

問題 2.1. (1) 非減少，上に有界　(2)(3)(4) 非増加，下に有界

問題 2.2. (1) 非減少，上に有界，$\sqrt{2}$ に収束　(2) 非増加，下に有界，$\sqrt{c}$ に収束

問題 2.3. プリント p.10 を参照せよ．

問題 2.4. $\sqrt[n]{n} = 1 + b_n$ とおき，

$$n = (1 + b_n)^n = 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2}(b_n)^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}(b_n)^2$$

を用いる．

問題 2.5. (省略)

問題 2.6. (1) $\frac{1}{2}$　(3) たとえば $n = 12501$

問題 **2.7.** (省略)

問題 **2.8.** (1) 2　(2) たとえば，$n = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$

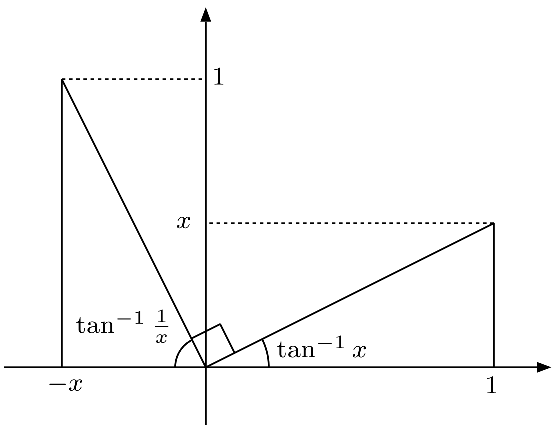
問題 **3.1.** (1) $\dfrac{1}{4}$　(2) 2　(3) 2　(4) $\dfrac{a}{b}$　(5) e^a

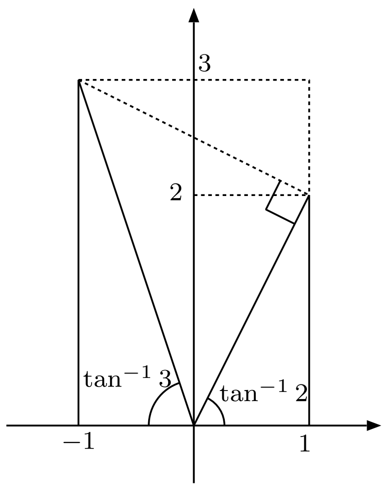
問題 **3.2.** (1) 不連続[*1]　(2) 連続　(3) 不連続

問題 **3.3.** $x = -1, 1, 2$ で不連続.

問題 **3.4.** (1) $f^{-1}(x) = \dfrac{dy - b}{a - cy}$　(2) 演習書 p.13 例題 1.6 参照　(3) プリント p.13 の解説を参照　(4) $\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

問題 **3.5.** (1) $\sin^{-1}$ の値域は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ だから，$\cos(\sin^{-1} x) \geq 0$. したがって，$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)} = \sqrt{1 - x^2}$.　(2) (1) の結果と加法定理を使って $\cos(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x)$ を計算せよ.　(3) (2) と同様.　(4) [*2] 下左図参照　(5) 下右図参照





問題 **3.6.** (省略)

問題 **3.7.** 関数の定義域を区間 $[0, 1]$ に制限して考えると，これは閉区間だから，最大値の存在定理より最大値 A をとる．f の周期性から，f は A より大きい値をとることはない.

問題 **3.8.** (1) $\dfrac{1}{b}\log t$　(3) $\dfrac{1}{b}\log\dfrac{a}{\varepsilon}$ 時間後

[*1] 問題では $x = 0$ での値が与えられていません（出題ミス）．しかし，$f(0)$ の値が何であろうと，この関数は $x = 0$ で不連続である.

[*2] $x < 0$ の場合は $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.