数学クォータ科目「数学」第 6 回 (3/4)

行列式

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

行列式とは

- 行列式とは, 正方行列 A に対して定まる値（数）のこと.
- 行列 A の行列式を, $|A|$（または, $\det(A)$）と表す.

- 定義の仕方は２通りある.

(1) ［明示的定義］順列とその転倒数（符号）を用いる. $A = (a_{ij})$ に対し,

$$|A| = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, a_{1k_1}\, a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$$

※ 教科書 p.128〜131 を参照.

(2) ［抽象的定義］次の 3 つの条件を満たすものとして定める.

（a）行（または列）に関して線形的である

（b）行（または列）に関して交代的である.

（c）単位行列 E に対して, $|E| = 1$ となる.

２次と３次の場合

- ２次正方行列 の行列式は,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

※ これは２次正方行列の逆行列の公式の

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad - bc}_{\text{これ}}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- ３次正方行列 の行列式は,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

３次正方行列の行列式：サラスの方法

- 一般に, n 次正方行列の行列式は, n 個の成分の積に適当に 符号 をつけて和をとったものである.
- ２次の場合：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- ３次の場合も同様に考えることができる.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

正の項

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

負の項

３次正方行列の行列式：サラスの方法

- 正の項

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_1} & b_1 & c_1 \\ a_2 & \boxed{b_2} & c_2 \\ a_3 & b_3 & \boxed{c_3} \end{vmatrix} = \boxed{a_1b_2c_3} + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & c_1 \\ a_2 & b_2 & \boxed{c_2} \\ \boxed{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + \boxed{a_3b_1c_2} + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boxed{c_1} \\ \boxed{a_2} & b_2 & c_2 \\ a_3 & \boxed{b_3} & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + \boxed{a_2b_3c_1} - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

３次正方行列の行列式：サラスの方法

- 負の項

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boxed{c_1} \\ a_2 & \boxed{b_2} & c_2 \\ \boxed{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - \boxed{a_3b_2c_1} - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & c_1 \\ \boxed{a_2} & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \boxed{c_3} \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - \boxed{a_2b_1c_3} - a_1b_3c_2$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_1} & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \boxed{c_2} \\ a_3 & \boxed{b_3} & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - \boxed{a_1b_3c_2}$$

行列式の効用［１］

(1) 逆行列の表現

- ２次正則行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- ３次以上の正則行列 A の逆行列も

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} & & \\ & A_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}$$

と表わされる.

ただし, A_{ij} は A からつくられる $(n-1)$ 次正方行列の行列式.

(2) 正則性の判定

- 正方行列 A が正則 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{|A| \neq 0}$

行列式の効用［２］

(3) ２変数関数 $f(x,y)$ の 極値の判定

- $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ を満たす (a,b) に対し,

$$D(a,b) = \{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b)$$

の符号で, $f(a,b)$ が極値となるか否かを判定した.

- この $D(a,b)$ は, $f(x,y)$ のヘッセ行列の行列式の (-1) 倍である.

$$D(a,b) = -\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

行列式の幾何学的な意味

２次正方行列の行列式の幾何学的解釈

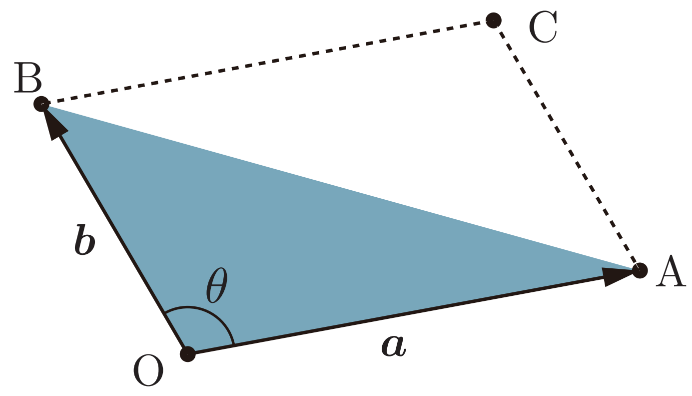
平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し, $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ とおくと,

「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を２辺とする平行四辺形の 面積 」は, $|A|$ の絶対値に等しい.

（証明）

- $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とおくと, 平行四辺形の 面積 S は

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$$



行列式の幾何学的な意味

- ベクトルの内積

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \cos^2 \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

を利用すると,

$$\begin{aligned}
\boxed{S} =& \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta = \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
=& \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2 \, \|\boldsymbol{b}\|^2 (1 - \cos^2\theta)} = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2 \, \|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2 \, \|\boldsymbol{b}\|^2 \cos^2\theta} \\
=& \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2 \, \|\boldsymbol{b}\|^2 - (\|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta)^2} = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2 \, \|\boldsymbol{b}\|^2 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2} \\
=& \sqrt{\{(a_1)^2 + (a_2)^2\} \{(b_1)^2 + (b_2)^2\} - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\
& \vdots \text{（ルートの中身を展開して整理する）} \\
=& \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = \sqrt{|A|^2}.
\end{aligned}$$

行列式の効用［３］

(4) ２重積分における 変数変換 （置換積分）

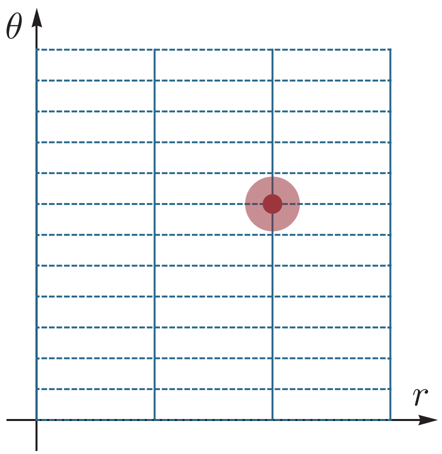
- xy-平面の領域 D が, 変数変換 $(u,v)\mapsto(x,y)=(x(u,v),y(u,v))$ により, uv-平面の領域 Ω と対応するとき, 以下の式が成り立つ.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v))\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} dudv$$

ヤコビ行列式

- ヤコビ行列式は, 局所的な面積の変化率（比） と解釈できる.

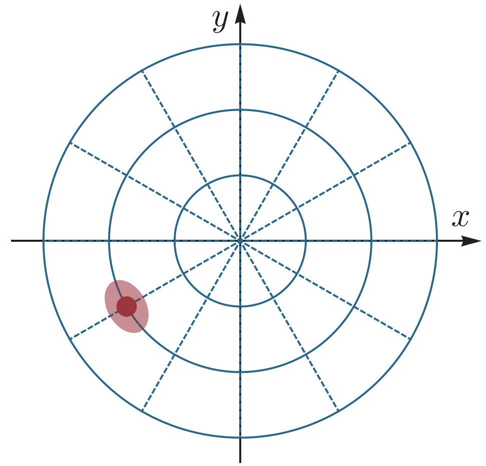
例）



$r\theta$-平面

$$\xrightarrow{(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)}$$

ヤコビ行列式は $\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=r$



xy-平面

行列式の（明示的）定義

定義

行列 $A = (a_{ij})$ に対し,

$$|A| = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} \mathrm{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$$

- $\displaystyle\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ の意味は？
  - 「すべての n-順列 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ に対して和をとる」ということ.
  - n-順列 とは, $(1, 2, \ldots, n)$ の並び替えのこと（全部で $n!$ 個ある）.

例）2-順列は, 全部で２個ある：$(1, 2)$, $(2, 1)$

例）3-順列は, 全部で６個ある：

$(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 3, 2)$

行列式の（明示的）定義

定義

行列 $A = (a_{ij})$ に対し，

$$|A| = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} \mathrm{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, a_{1k_1}\, a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$$

- $\mathrm{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ は？
  - n-順列 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ の 符号 のこと.
  - $\mathrm{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \begin{cases} 1 & （n\text{-順列 } (k_1, k_2, \ldots, k_n) \text{ の転倒数が偶数}） \\ -1 & （n\text{-順列 } (k_1, k_2, \ldots, k_n) \text{ の転倒数が奇数}） \end{cases}$
  - n-順列 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ の 転倒数 とは，２つの数 k_i と k_j の入れ替え操作を繰り返して，$(1, 2, \ldots, n)$ に直したときの入れ替え回数のこと.

2 次正方行列の行列式

- 2-順列の転倒数と符号は？

$(1,2)$： 転倒数は 0. よって, $\mathrm{sgn}(1,2) = (-1)^0 = 1$.

$(2,1)$： $(2,1) \xrightarrow{2 \leftrightarrow 1} (1,2)$ だから転倒数は 1. よって, $\mathrm{sgn}(2,1) = (-1)^1 = -1$.

- よって, 行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(k_1,k_2)} \mathrm{sgn}(k_1, k_2)\, a_{1k_1}\, a_{2k_2}$$

$$= \mathrm{sgn}(1,2)\, a_{11}\, a_{22} + \mathrm{sgn}(2,1)\, a_{12}\, a_{21}$$

$$= (+1)\, a_{11}\, a_{22} + (-1)\, a_{12}\, a_{21}$$

$$= a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

注 n-順列 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ を $(1, 2, \ldots, n)$ に直すやり方は一意には決まらないが, その回数の奇偶は一意的である.

3 次正方行列の行列式

- 3-順列の転倒数と符号は？

$(1,2,3)$： 転倒数は 0. よって, $\mathrm{sgn}(1,2,3) = 1$.

$(2,3,1)$： $(2,3,1) \xrightarrow{2\leftrightarrow 1} (1,3,2) \xrightarrow{3\leftrightarrow 2} (1,2,3)$ だから転倒数は 2.

よって, $\mathrm{sgn}(2,3,1) = (-1)^2 = 1$.

$(3,1,2)$： $(3,1,2) \xrightarrow{3\leftrightarrow 1} (1,3,2) \xrightarrow{3\leftrightarrow 2} (1,2,3)$ だから転倒数は 2.

よって, $\mathrm{sgn}(3,1,2) = (-1)^2 = 1$.

$(3,2,1)$： $(3,2,1) \xrightarrow{3\leftrightarrow 1} (1,2,3)$ だから転倒数は 1.

よって, $\mathrm{sgn}(3,2,1) = (-1)^1 = -1$.

$(2,1,3)$： $(2,1,3) \xrightarrow{2\leftrightarrow 1} (1,2,3)$ だから転倒数は 1.

よって, $\mathrm{sgn}(2,1,3) = (-1)^1 = -1$.

$(1,3,2)$： $(1,3,2) \xrightarrow{3\leftrightarrow 2} (1,2,3)$ だから転倒数は 1.

よって, $\mathrm{sgn}(1,3,2) = (-1)^1 = -1$.

3 次正方行列の行列式

- よって, 行列式は

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(k_1,k_2,k_3)} \mathrm{sgn}(k_1, k_2, k_3)\, a_{1k_1}\, a_{2k_2}\, a_{3k_3}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{sgn}(1, 2, 3)\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + \mathrm{sgn}(2, 3, 1)\, a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \\
&\quad + \mathrm{sgn}(3, 1, 2)\, a_{13}\, a_{21}\, a_{32} + \mathrm{sgn}(3, 2, 1)\, a_{13}\, a_{22}\, a_{31} \\
&\quad + \mathrm{sgn}(2, 1, 3)\, a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + \mathrm{sgn}(1, 3, 2)\, a_{11}\, a_{23}\, a_{32} \\
&= (+1)\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + (+1)\, a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \\
&\quad + (+1)\, a_{13}\, a_{21}\, a_{32} + (-1)\, a_{13}\, a_{22}\, a_{31} \\
&\quad + (-1)\, a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + (-1)\, a_{11}\, a_{23}\, a_{32} \\
&= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \\
&\quad - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}.
\end{aligned}
$$

n 次正方行列の行列式

- ４次以上の場合は, 定義に従って計算するのは困難.
- 行列式の定義から以下のことがすぐにわかる.

定理

三角行列の行列式は, 対角成分の積に等しい.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- 一般の場合は, 行列式の基本性質（と上の定理）を利用して計算する.

（← 次の講義動画のテーマ）

今回（第６回講義）のまとめ

(1) • 行列の転置（転置行列)

（対称行列, 交代行列, 三角行列, 直交行列）

(2) • ３つの基本行列

• 基本行列の積と 行列の基本変形 の関係

(3) • ２次正方行列の行列式

• ３次正方行列の行列式（サラスの公式）

• 行列 A が正則であることと, $|A| \neq 0$ が同値であること.

(4) • 行列式の基本性質

• 行列の基本変形と行列式の関係