数学科教育法 レポート③の解答

課題 3-1　（アポロニウスの円）

$A=(a,0), B=(-a,0), P=(x,y)$ とおくと，$AP=\sqrt{(x-a)^2+y^2}, BP=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$．このとき，

$$\begin{aligned}\frac{AP}{BP}=k\ (>0,\ \text{定数}) &\iff (x-a)^2+y^2=k^2\left\{(x+a)^2+y^2\right\}\\ &\iff (1-k^2)x^2-2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2+(1-k^2)y^2=0\\ &\iff x^2-\frac{2a(1+k^2)}{1-k^2}x+a^2+y^2=0\\ &\iff \left(x-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right)^2-a^2\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2+a^2+y^2=0\\ &\iff \left(x-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right)^2+y^2=\frac{4a^2k^2}{(1-k^2)^2}.\end{aligned}$$

したがって，点 P の軌跡は中心が $\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2},0\right)$，半径が $\frac{2ak}{|1-k^2|}$ の円である．

課題 3-2　$y=x^4$ 上の点 (a,a^4) の o 時間後の点を $(a+op, a^4+oq)$ とおくと，これは $y=x^4$ 上の点だから

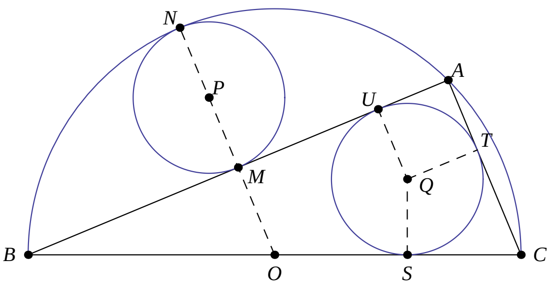
$$\begin{aligned}a^4+oq=(a+op)^4 &\iff a^4+oq=a^4+4a^3op+6a^2o^2p^2+4ao^3p^3+o^4p^4\\ &\iff oq=4a^3op+6a^2o^2p^2+4ao^3p^3+o^4p^4\\ &\iff q=4a^3p+6a^2op^2+4ao^2p^3+o^3p^4\\ &\iff \frac{q}{p}=4a^3+6a^2op+4ao^2p^2+o^3p^3.\end{aligned}$$

右辺の o は無限に小さい値だから無視する（0 とする）と

$$\frac{q}{p}=4a^3$$

を得る．これが点 (a,a^4) における接線の傾きである．

課題 3-3



<u>ヒント</u>：　（半）円の中心を O，その円に内接する三角形を $\triangle ABC$（BC が半円の直径）とする．$\triangle ABC$ に内接する小円の中心を Q，三角形の各辺との接点を S,T,U とする．弓形内の最大の小円の中心を P，半円との接点を N，線分 AB との接点を M とする．

このとき，以下のことがわかる（示しなさい）；

(1) 点 M は線分 AB の中点である．
(2) O,M,P,N は一直線上にある．
(3) $\triangle ABC$ と $\triangle MBO$ は相似である（相似比は $2:1$）．

このような事実から，(i) $OM=R-2r$（(2) より），(ii) $AC=2(R-2r)$（(i) と (3) より），(iii) $CT=2R-5r$（(ii) より），(iv) $BS=5r(=BC-SC=BC-CT)$，(v) $AB=6r(=BU+UA=BS+UA)$ となる．三平方の定理 $AB^2+AC^2=BC^2$ より $4R=13r$ が得られる．

<u>補足</u>：　三角形 ABC は辺の長さが整数比（$5:12:13$）を持つ直角三角形となる．

（**2012.5.2** 担当：佐藤）