解析 I 演習 (2 学期：ベクトル解析)

ー 第 6 回 スカラー場・ベクトル場 (3) ー

担当：佐藤 弘康

未発表問題： 1.4, 3.1, 3,7(2)(3), 4.3, 4.6〜4.9, 4.11, 5.1〜5.4

問題 6.1. ベクトル場 $X(x,y,z) = (6xy + z^3, 3x^2 - z, 3xz^2 - y)$ の発散，および回転を求めよ．

問題 6.2. ベクトル場 $X(x,y,z) = (axy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2)$ が至るところで $\mathrm{rot}\, X = \mathbf{0}$ となるような定数 a を求めよ．

問題 6.3. 定数 $a_i, b_i, c_i (i = 1,2,3)$ に対し，ベクトル場 X を

$$X(x,y,z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z)$$

と定める．このとき，$\mathrm{rot}\, X = \mathbf{0}$ となるための条件，および $\mathrm{div}\, X = 0$ となるための条件を求めよ．

問題 6.4. f をスカラー場，X, Y をベクトル場とする．このとき，以下の等式が成り立つことを示せ．

(1) $\mathrm{div}(fX) = \langle \mathrm{grad}\, f, X \rangle + f\, \mathrm{div}\, X$

(2) $\mathrm{div}(X \times Y) = \langle \mathrm{rot}\, X, Y \rangle - \langle X, \mathrm{rot}\, Y \rangle$

(3) $\mathrm{rot}(fX) = (\mathrm{grad}\, f) \times X + f\, \mathrm{rot}\, X$

問題 6.5. スカラー場 f, g に対し，$\mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g$ には発散がないことを示せ．

問題 6.6. ベクトル場 X, Y に対し，以下の等式が成り立つことを示せ．ただし，$\langle Y, \mathrm{grad} \rangle$ はベクトル場に作用する微分作用素で

$$\langle Y, \mathrm{grad} \rangle X = (\langle Y, \mathrm{grad}\, X_1 \rangle, \langle Y, \mathrm{grad}\, X_2 \rangle, \langle Y, \mathrm{grad}\, X_3 \rangle)$$

と定義する (X_i はベクトル場 X の成分)．

(1) $\mathrm{grad}\langle X, Y \rangle = \langle X, \mathrm{grad} \rangle Y + \langle Y, \mathrm{grad} \rangle X + X \times \mathrm{rot}\, Y + Y \times \mathrm{rot}\, X$

(2) $\mathrm{rot}(X \times Y) = \langle Y, \mathrm{grad} \rangle X - \langle X, \mathrm{grad} \rangle Y + (\mathrm{div}\, Y)X - (\mathrm{div}\, X)Y$

問題 6.7. ベクトル場 X が，$\mathrm{div}\, X = 0, \mathrm{rot}\, X = \mathbf{0}$ を満たすとする．このとき，X の各成分は調和関数であることを示せ．