線形代数 I 演習

― 第 18 回 まとめ (解答) ―

担当：佐藤 弘康

■ 第 14 回の解

問題 14.1 (1) -12 (2) 0 (3) -88

問題 14.2 1 列目に関して余因子展開する．

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+(n+1)} a_1 \begin{vmatrix} -1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+(n+1)} \cdot (-1)^n a_1 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix} + a_1
\end{aligned}
$$

以下，同様に 1 列目に関して余因子展開していく．

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix} + a_2 + a_1 \\
&= \cdots = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a_n & 1 \end{vmatrix} + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \\
&= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + 1.
\end{aligned}
$$

問題 14.3 1 行目に関して余因子展開することにより

$$D_n(x) = (x^2+1)D_{n-1} - x\begin{vmatrix} x & x & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & x^2+1 & x & & 0 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & & x & x^2+1 \end{vmatrix} \tag{18.1}$$
$$= (x^2+1)D_{n-1}(x) - x^2 D_{n-2}(x)$$

を得る．ここで，

$$\begin{aligned} D_3(x) &= \begin{vmatrix} x^2+1 & x & 0 \\ x & x^2+1 & x \\ 0 & x & x^2+1 \end{vmatrix} \\ &= (x^2+1)\begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2+1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & 0 \\ x & x^2+1 \end{vmatrix} \\ &= (x^2+1)\begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2+1 \end{vmatrix} - x^2(x^2+1) \\ &\left(= x^6+x^4+x^2+1 \right) \end{aligned}$$

であるから，$D_2(x) = \begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2+1 \end{vmatrix}$，$D_1(x) = x^1+1$ と定めること (このように定めることは自然である) により，(18.1) は $n \geq 3$ に対して成り立つ．

(18.1) は $D_n(x) - x^2D_{n-1}(x) = D_{n-1}(x) - x^2D_{n-2}(x)$ と書けるので

$$\begin{aligned} D_n(x) - x^2D_{n-1}(x) &= D_{n-1}(x) - x^2D_{n-2}(x) = D_{n-2}(x) - x^2D_{n-3}(x) \\ &= \cdots = D_2 - x^2D_1 = (x^2+1)^2 - x^2 - x^2(x^2+1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned} D_n(x) &= x^2D_{n-1}(x) + 1 = x^2(x^2D_{n-2}(x)+1)+1 \\ &= x^4D_{n-2}(x) + x^2 + 1 \\ &= x^6D_{n-3}(x) + x^4 + x^2 + 1 \\ &= \cdots = x^{2(n-1)}D_1(x) + x^{2(n-2)} + x^{2(n-3)} + \cdots + x^4 + x^2 + 1 \\ &= x^{2n} + x^{2(n-1)} + \cdots + x^4 + x^2 + 1. \end{aligned}$$

■ 第 15 回の解

問題 15.1 (1) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $|A| = 1$ (2) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $|A| = 6$

(3) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $|A| = 0$ (4) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = 6$

(5) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 10 \\ 5 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & -8 \end{pmatrix}$, $|A| = 34$

問題 15.2 (1) $A \cdot \widetilde{A} = |A|E_n$ の両辺の行列式をとれば，$|A| \cdot |\widetilde{A}| = |A|^n$．したがって，$|A|\left(|\widetilde{A}| - |A|^{n-1}\right) = 0$ を得る．(i) $|A| \neq 0$(つまり，A が正則) ならば，$|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$．(ii) $|A| = 0$ のとき，$|\widetilde{A}| \neq 0$ と仮定する．このとき，$\widetilde{A}$ は正則行列なので，$A \cdot \widetilde{A} = O$ に右から $\widetilde{A}^{-1}$ をかけると，$A = O$ となる．しかし，$\widetilde{A} = \widetilde{O} = O$ だから，$|\widetilde{A}| \neq 0$ とした仮定と矛盾する．したがって，$|\widetilde{A}| = 0$ を得る (背理法)．(i),(ii) より，$|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$ が成り立つことが証明された．

(2) (i) 基本行列 $E_i(c), P_{ij}, E_{ij}(c)$ に対して，

$$\widetilde{E_i(c)} = c \cdot E_i\left(\frac{1}{c}\right), \qquad \widetilde{P_{ij}} = -P_{ij}, \qquad \widetilde{E_{ij}(c)} = E_{ij}(-c) \tag{18.2}$$

が成り立つ．さらに，(18.2) と簡単な計算から，任意の行列 B に対して

$$\widetilde{E_i(c)B} = \widetilde{B} \cdot \widetilde{E_i(c)}, \qquad \widetilde{P_{ij}B} = \widetilde{B} \cdot \widetilde{P_{ij}}, \qquad \widetilde{E_{ij}(c)B} = \widetilde{B} \cdot \widetilde{E_{ij}(c)} \tag{18.3}$$

が成り立つことがわかる．したがって，A が正則行列ならば，A は有限個の基本行列の積として表すことができるので，(18.3) から $\widetilde{AB} = \widetilde{B} \cdot \widetilde{A}$ が成り立つことがわかる．

(ii) 次に，A が正則でないとする．このとき，

$$A = PE_r^0Q, \qquad E_r^0 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{18.4}$$

となるような $r \in \mathbf{N}$ (ただし，$0 \leq r \leq n-1$．$E_0 = 0$ とおく) と正則行列 P, Q が存在する (教科書 p.46, 定理 2.17)．ここで，行列 E_r^0 の余因子行列に関しては

$$\widetilde{E_r^0} = \begin{cases} \begin{pmatrix} O & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} & (r = n-1 \text{ のとき}) \\ \\ O & (r \neq n-1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{18.5}$$

が成り立つ．また，簡単な計算から，任意の行列 B に対して

$$\widetilde{E_r^0 B} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & (-1)^{1+n}|B_{n1}| \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^n|B_{n2}| \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & |B_{nn}| \end{pmatrix} & (r = n-1 \text{ のとき}) \\ \\ O & (r \neq n-1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{18.6}$$

が成り立つ．(18.5) と (18.6) より，$\widetilde{E_r^0 B} = \widetilde{B} \cdot \widetilde{E_r^0}$．したがって，

$$\begin{aligned} \widetilde{AB} &= (\widetilde{PE_r^0Q})B = P(\widetilde{E_r^0QB}) = \widetilde{E_r^0QB} \cdot \widetilde{P} = \widetilde{E_r^0(QB)} \cdot \widetilde{P} \\ &= \left(\widetilde{QB} \cdot \widetilde{E_r^0}\right)\widetilde{P} = \left(\widetilde{B} \cdot \widetilde{Q} \cdot \widetilde{E_r^0}\right)\widetilde{P} = \widetilde{B}\left(\widetilde{Q} \cdot \widetilde{E_r^0} \cdot \widetilde{P}\right) = \widetilde{B} \cdot \widetilde{A} \end{aligned}$$

を得る．

(3) $B = {}^tA$ とおくと，$B_{ji} = A_{ij}$．このとき，

$$\begin{aligned}\left({}^t(\widetilde{A}) \text{ の } (i,j) \text{ 成分}\right) &= \left(\widetilde{A}\text{の } (j,i) \text{ 成分}\right)\\ &= (-1)^{i+j}|A_{ij}|\\ &= (-1)^{i+j}|B_{ji}|\\ &= \left(\widetilde{B}\text{の } (i,j) \text{ 成分}\right).\end{aligned}$$

これで，${}^t(\widetilde{A}) = \widetilde{B} = \widetilde{{}^tA}$ が証明された．

(4) $A \cdot \widetilde{A} = |A|E_n$ より，$A = |A|(\widetilde{A})^{-1}$．また，$A^{-1} \cdot \widetilde{A^{-1}} = |A^{-1}|E_n$ であるから，この式の両辺に左から A をかければ，$\widetilde{A^{-1}} = |A^{-1}|A$ を得る．したがって

$$\widetilde{A^{-1}} = |A^{-1}|A = |A^{-1}| \cdot |A|(\widetilde{A})^{-1} = (\widetilde{A})^{-1}.$$

(5) (i) A を正則行列とする．$\widetilde{A} \cdot \widetilde{(\widetilde{A})} = |\widetilde{A}|E_n$ の両辺に左から A をかけると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= A \cdot \left(\widetilde{A} \cdot \widetilde{(\widetilde{A})}\right) = \left(A \cdot \widetilde{A}\right)\widetilde{(\widetilde{A})} = |A|\widetilde{(\widetilde{A})},\\ (\text{右辺}) &= |\widetilde{A}|A = |A|^{n-1}A,\end{aligned}$$

したがって，$\widetilde{(\widetilde{A})} = |A|^{n-2}A$ を得る．

(ii) A が正則でないとき，ある正則行列 P, Q を使って $A = PE_r^0Q$ と書ける ((18.4) を参照)．問題 15.2(2) の性質を使うと

$$\widetilde{A} = \widetilde{PE_r^0Q} = \widetilde{Q} \cdot \widetilde{E_r^0} \cdot \widetilde{P}.$$

さらに，

$$\widetilde{(\widetilde{A})} = \widetilde{\widetilde{Q} \cdot \widetilde{E_r^0} \cdot \widetilde{P}} = \widetilde{(\widetilde{P})} \cdot \widetilde{(\widetilde{E_r^0})} \cdot \widetilde{(\widetilde{Q})}.$$

ここで，(18.6) より，

$$\widetilde{(\widetilde{E_r^0})} = O \qquad (1 \leq r \leq n-1) \tag{18.7}$$

が成り立つので，$\widetilde{(\widetilde{A})} = O$ を得る．

> **問題．**
> (1) 基本行列 $E_i(c), P_{ij}, E_{ij}(c)$ について，(18.2), (18.3) が成り立つことを証明せよ．
> (2) n 次正方行列 E_r^0 $(1 \leq r \leq n-1)$ について，(18.5), (18.6), (18.7) が成り立つことを証明せよ．

問題 15.3 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -26$．したがって

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{-26} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{-26} = -1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-26} = 2.$$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -14$. したがって

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 11 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = -1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix}}{14} = 3.$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -120$. したがって

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 1 & -3 & -4 \\ -6 & 1 & 5 & 1 \\ -10 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-120} = -2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6 & -3 & -4 \\ 2 & -6 & 5 & 1 \\ 2 & -10 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-120} = 1,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 \\ 2 & 1 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & -10 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-120} = -1, \quad w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & 2 & -10 \\ 3 & 6 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{-120} = 2.$$

(4) ファンデルモンドの公式を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

したがって

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e & b & c & d \\ e^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ e^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)} \\ &= \frac{(e-b)(e-c)(e-d)(b-c)(b-d)(c-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)} \\ &= \frac{(e-b)(e-c)(e-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}. \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} y &= \frac{(a-e)(e-c)(e-d)}{(a-b)(b-c)(b-d)}, \\ z &= \frac{(a-e)(b-e)(e-d)}{(a-c)(b-c)(c-d)}, \\ w &= \frac{(a-e)(b-e)(c-e)}{(a-d)(b-d)(c-d)}. \end{aligned}$$

■ 第 16 回の解

問題 16.1 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (1+x)^2 \\ 1 & 1 & (1-x)^2 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & x & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 2x+x^2 \\ 0 & 0 & -2x+x^2 & 0 \end{array}\right|$$

$$= x^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 2+x \\ 0 & -2+x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -x^3(x-2)(x+2)$$

(2) 1 列目以外の列を 1 列目に加える.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1+x \\ 2+x & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3+x & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4+x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10+x & 3 & 4 & 1+x \\ 10+x & 3 & 4 & 1 \\ 10+x & 3+x & 4 & 1 \\ 10+x & 3 & 4+x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+10) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1+x \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3+x & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4+x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+10) \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & 4 & 1+x \\ \hline 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & -x \end{array}\right|$$

$$= -x^3(x+10).$$

問題 16.2 (1) $f_A(x) = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$. 固有値は $1, 4$.
(2) $f_A(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$. 固有値は $1, 2$.
(3) $f_A(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)(x-4)^2$. 固有値は $1, 4$.
(4) $f_A(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. 固有値は $1, \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.
(5) $f_A(x) = x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = (x+3)(x-3)(x-9)$. 固有値は $-3, 3, 9$.

問題 16.3 $f_{P^{-1}AP}(x) = |xE_n - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xE_n - A)P| = |xE_n - A| = f_A(x)$.

問題 16.4

$$f_A(x) = \left| xE_n - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x-\lambda_1 & & & * \\ & x-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x-\lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n).$$

問題 16.5 A_{ii} が k_i 次正方行列であるとする．

$$
\begin{aligned}
f_A(x) = |xE_n - A| &= \left| x \begin{pmatrix} E_{k_1} & O & \dots & O \\ O & E_{k_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & E_{k_m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ O & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & A_{mm} \end{pmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} xE_{k_1} - A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1m} \\ & xE_{k_2} - A_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -A_{2m} \\ O & & & xE_{k_m} - A_{mm} \end{vmatrix} \\
&= |xE_{k_1} - A_{11}||xE_{k_2} - A_{22}| \cdots |xE_{k_m} - A_{mm}| \\
&= f_{A_{11}}(x) f_{A_{22}}(x) \cdots f_{A_{mm}}(x).
\end{aligned}
$$

■ 第 17 回の解

問題 17.1 (2) 問題 16.2(3) より，固有値は $1, 4$.

$$
E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1(-1)E_{21}(-1)E_{31}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
4E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(2)E_1(-1)E_2\left(\frac{1}{3}\right)E_{32}(1)P_{12}E_{12}(2)E_{32}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

であるから，固有値 1 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，固有値 4 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$．$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる．

(3) 問題 16.2(5) より，固有値は $-3, 3, 9$.

$$
-3E_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & -4 \\ 4 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(2)E_2\left(-\frac{1}{4}\right)E_1\left(-\frac{1}{4}\right)E_{31}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
3E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-4)E_{32}(2)E_2\left(-\frac{1}{2}\right)E_1\left(\frac{1}{2}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
9E_3 - A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-2)E_{32}(4)E_2\left(\frac{1}{4}\right)E_1\left(\frac{1}{4}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

であるから，固有値 -3 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，固有値 3 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，

固有値 9 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$．したがって，$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ となる．

問題 17.2 A を固有値の 1 つが 0 である正方行列とする．

A が正則と仮定する (つまり $|A| \neq 0$)．固有値は固有多項式 $f_A(x) = 0$ の解だから，$f_A(0) = 0$．固有多項式の定義より，$f_A(0) = |0 \cdot E_n - A| = |-A| = (-1)^n|A|$．以上のことから，$|A| = 0$ となり仮定に矛盾する．

問題 17.3 (1) $f_A(x) = |xE_n - A| = |{}^t(xE_n - A)| = |x{}^tE_n - {}^tA| = |xE_n - {}^tA| = f_{{}^tA}(x)$．したがって，$A$ と ${}^tA$ は固有多項式が等しく，固有値も等しい．

(2) A を正則行列とし，λ を A の固有値とする (問題 17.2 より $\lambda \neq 0$)．つまり $f_A(\lambda) = |\lambda E_n - A| = 0$．このとき，

$$
\begin{aligned}
f_{A^{-1}}\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \left|\frac{1}{\lambda}E_n - A^{-1}\right| = \left|\frac{1}{\lambda}(E_n - \lambda A^{-1})\right| \\
&= \left|-\frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda E_n - A)\right| = \left|-\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right| |\lambda E_n - A| = 0
\end{aligned}
$$

したがって，$\dfrac{1}{\lambda}$ は A^{-1} の固有値である．

(別解)

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{が } A \text{ の固有値} &\iff |\lambda E_n - A| = 0 \\
&\iff (\lambda E_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ は非自明解 } \boldsymbol{v} \text{ をもつ} \\
&\iff A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \text{ を満たす } \boldsymbol{v}\ (\neq \boldsymbol{0}) \text{ が存在する}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ に左から A^{-1} をかけると $\boldsymbol{v} = A^{-1}(A\boldsymbol{v}) = A^{-1}(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda A^{-1}\boldsymbol{v}$ となり，$A^{-1}\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{v}$ を得る．これは $\dfrac{1}{\lambda}$ が A^{-1} の固有値であることを意味する．

問題 17.4 λ を A の固有値とする．A は直交行列だから，${}^tA = A^{-1}$ である．このとき，問題 17.3(2) より，$\dfrac{1}{\lambda}$ は $A^{-1} = {}^tA$ の固有値である．さらに，問題 17.3(1) より，$\dfrac{1}{\lambda}$ は ${}^t({}^tA) = A$ の固有値である．

問題 17.5 A を交代行列とする．すなわち，${}^tA = -A$．このとき，

$$
\begin{aligned}
f_A(-\lambda) &= |-\lambda E_n - A| = |{}^t(-\lambda E_n - A)| = |-\lambda{}^tE_n - {}^tA| \\
&= |-\lambda E_n + A| = |-(\lambda E_n - A)| = (-1)^n f_A(\lambda).
\end{aligned}
$$

したがって，λ が A の固有値ならば，$-\lambda$ も A の固有値である．

問題 17.6 (1) $f_A(x) = x^3 - x^2 - 7x - 3$ であるから，ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^3 - A^2 - 7A - 3E_3 = O$．したがって，

$$
\begin{aligned}
&A^5 - 2A^4 - 4A^3 + 2A^2 - 2A - 3E_3 \\
=&(A^2 - A + 2E_3)(A^3 - A^2 - 7A - 3E_3) + 9A + 3E_3 \\
=&9A + 3E_3 \\
=&9\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} 21 & -9 & -27 \\ 9 & 3 & 18 \\ -18 & 0 & -6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(2) $f_A(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$．例題 3 と問題 17.6 の議論から，$x^{100}$ を $(x-1)(x-5)$ で割った余りの多項式がわかればよい．余りの多項式は $f_A(x)$ の次数より低いので，余りを $ax + b$ としてよい $(a, b \in \mathbf{R})$．このとき，

$$
x^{100} = (x-1)(x-5) \cdot g(x) + ax + b \tag{18.8}
$$

と表すことができる．$f_A(x) = 0$ の解を (18.8) に代入すると，右辺の第一項は 0 になるので

$$
\begin{aligned}
1 &= a + b \\
5^{100} &= 5a + b
\end{aligned} \tag{18.9}
$$

を得る．(18.9) から，$a = \frac{1}{4}\left(5^{100} - 1\right)$，$b = -\frac{1}{4}\left(5^{100} - 5\right)$．したがって，

$$
\begin{aligned}
A^{100} &= \frac{1}{4}\left(5^{100} - 1\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\left(5^{100} - 5\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5^{100} + 3 & 5^{100} - 1 \\ 3 \cdot 5^{100} - 3 & 3 \cdot 5^{100} + 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

問題． 対角化の方法 (問題 7.3 を参照) を使って，問題 17.6(2) を解け．また，ケーリー・ハミルトンの定理 (上の議論) を使って，問題 7.3 を解け．

問題 17.7 (1) $f_A(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 1$ であるから，ケーリー・ハミルトンの定理より $A^3 - 5A^2 + 9A - E_3 = O$．この式より，$E_3 = A^3 - 5A^2 + 9A = A(A^2 - 5A + 9E_3)$．したがって，$A^{-1} = A^2 - 5A + 9E_3$ と書ける．

(2) 固有多項式は $f_A(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$．したがって $A^{-1} = \frac{1}{6}A^2 + \frac{1}{3}A - \frac{1}{2}E_3$.

(3) 固有多項式は $f_A = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$．したがって，$A^{-1} = \frac{1}{6}A^2 - A + \frac{11}{6}E_3$.

問題． 問題 17.7 の行列 A の逆行列を行基本変形を用いて求めよ．また，上で求めた A の多項式で表された A^{-1} を計算し，正しいことを確かめよ．