

数学クォータ科目「応用解析」第 5 回 / ベクトル解析 (5)

面積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 空間曲線の弧長と弧長パラメーター
- 曲線に沿ったスカラー場とベクトル場の線積分

今回の授業で理解してほしいこと

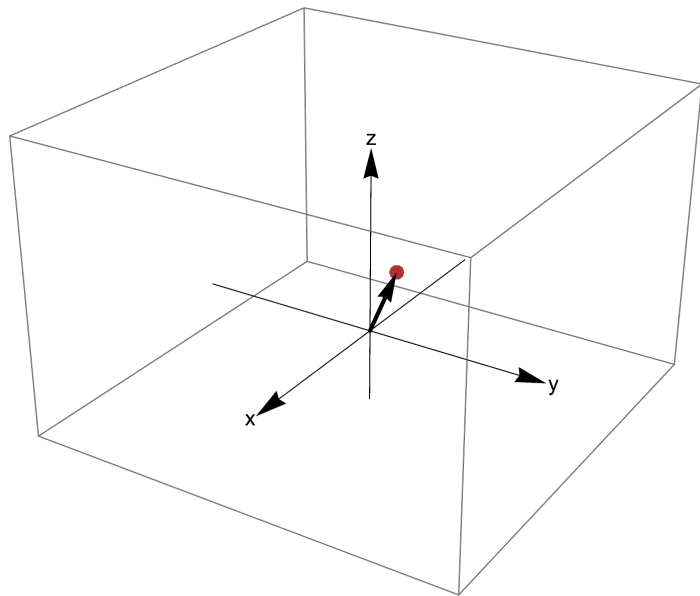
- 曲面の法単位ベクトルと面積素
- スカラー場の面積分
- ベクトル場の面積分

2変数ベクトル関数

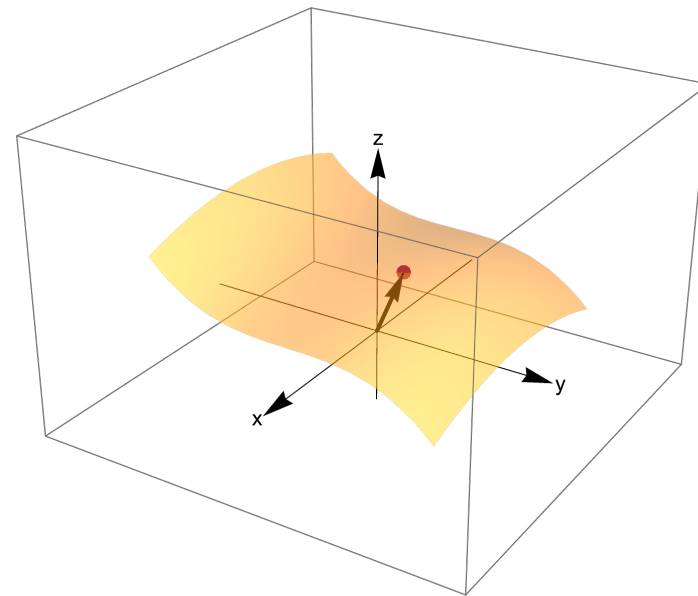
- 変数 u, v の値を決めると、その値に応じてベクトル $r(u, v)$ がただ一つ定まるとき、 $r(u, v)$ を独立変数 u, v の（2変数）ベクトル関数という；

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

- $\mathbf{r}(u, v)$ の始点を定点 O に固定すると、 $\mathbf{r}(u, v)$ の終点 P は一般に1つの曲面を描く（今後は、2変数ベクトル関数と曲面を同一視して扱う）。



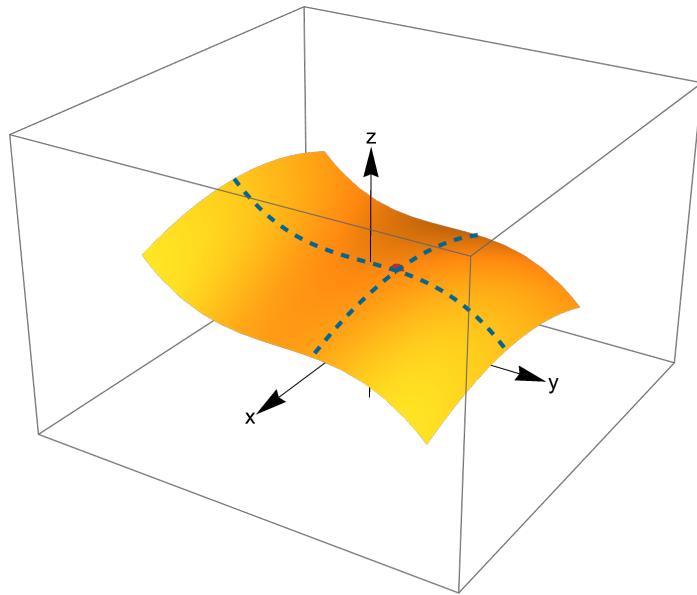
ベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v)$



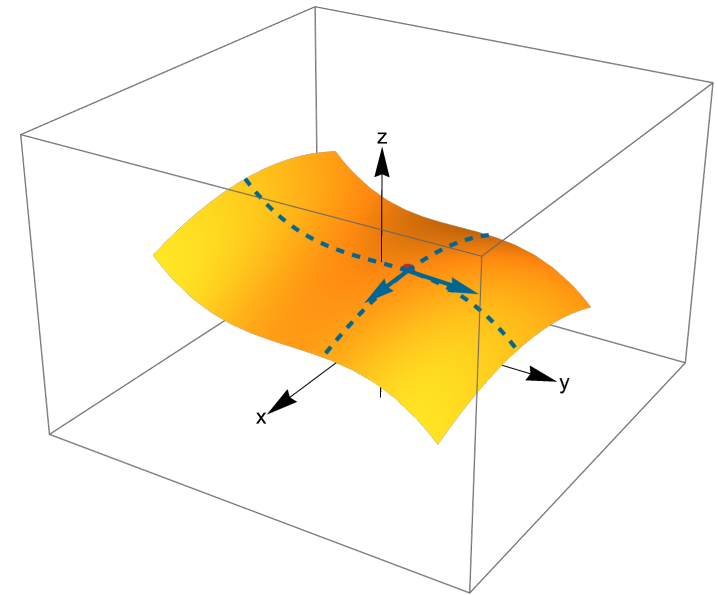
曲面 $\mathbf{r}(u, v)$

曲面の座標曲線

- 曲面 $r(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$ に対し, $v = b$ を固定すると 1 変数ベクトル関数 $u \mapsto r(u, b) = x(u, b) \mathbf{i} + y(u, b) \mathbf{j} + z(u, b) \mathbf{k}$ が定まる. このようにして定まる曲線を u 曲線という.
- 同様に, v 曲線も定まる.
- 各成分を偏微分した $\frac{\partial r}{\partial u}(a, b), \frac{\partial r}{\partial v}(a, b)$ は座標曲線の接ベクトルである.



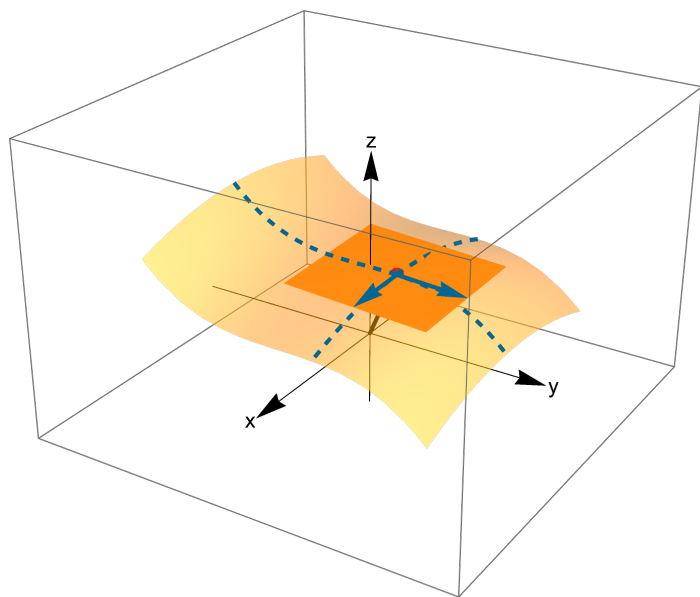
曲面の座標曲線



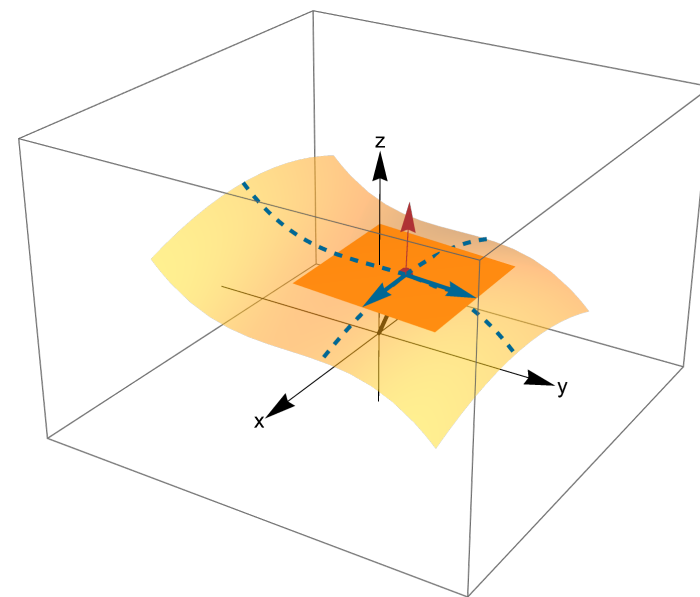
各座標曲線の接ベクトル

曲面の接平面と法単位ベクトル

- 2変数ベクトル関数 $r(u, v)$ を曲面というときは, $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq 0$ を仮定.
- 点 $r(a, b)$ を通り, ベクトル $\frac{\partial r}{\partial u}(a, b)$ と $\frac{\partial r}{\partial v}(a, b)$ に平行な平面を「曲面 $r(u, v)$ の点 $r(a, b)$ における接平面」という.
- $n = \frac{1}{|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}|} \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$ を曲面の法単位ベクトルという.



曲面の接平面



曲面の法単位ベクトル

曲面の例 (1) 球面

例題) $r(u, v) = \cos u \cos v \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}$, ($0 \leq u \leq 2\pi$, $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$)
の法単位ベクトルを求めよ. (答え) $\underline{n = r(u, v)}$

(解)

- $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -\sin u \cos v \mathbf{i} + \cos u \cos v \mathbf{j}$
- $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -\cos u \sin v \mathbf{i} - \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos v \mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u \cos v & \cos u \cos v & 0 \\ -\cos u \sin v & -\sin u \sin v & \cos v \end{vmatrix} \\ &= \cos u \cos^2 v \mathbf{i} - (-\sin u \cos^2 v) \mathbf{j} \\ &\quad + (\sin^2 u \cos v \sin v - (-\cos^2 u \cos v \sin v)) \mathbf{k} \\ &= \cos u \cos^2 v \mathbf{i} + \sin u \cos^2 v \mathbf{j} + \cos v \sin v \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{\cos^2 u \cos^4 v + \sin^2 u \cos^4 v + \cos^2 v \sin^2 v} = \cos v$$

曲面の例 (2) 2変数関数のグラフ曲面 $z = f(x, y)$

- 2変数関数 $f(x, y)$ に対し, 曲面 $\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + f(u, v) \mathbf{k}$ が定まる.
- これは, $z = f(x, y)$ のグラフである.

- $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + f_u(u, v) \mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} + f_v(u, v) \mathbf{k}.$

- $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_u(u, v) \\ 0 & 1 & f_v(u, v) \end{vmatrix} = -f_u(u, v) \mathbf{i} - f_v(u, v) \mathbf{j} + \mathbf{k}$

- $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{f_u(u, v)^2 + f_v(u, v)^2 + 1}$

- 法単位ベクトルは, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{f_u(u, v)^2 + f_v(u, v)^2 + 1}} (-f_u(u, v) \mathbf{i} - f_v(u, v) \mathbf{j} + \mathbf{k}) .$

曲面の例 (3) 平面

例題) $x + y + z = 1, (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ を満たす点の全体が, (1) どのような図形か考察せよ. また, (2) この図形を $z = f(x, y)$ のグラフ曲面とみて, 法単位ベクトルを求めよ.

- (1)
- 前のスライドの議論から, これは法線方向が $i + j + k$ の平面である.
 - 各座標軸との交点は $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ である.
 - $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ なので, 3点を頂点とする三角形領域である.
- (2)
- $z = 1 - x - y$ より, 曲面 $r(u, v) = u i + v j + (1 - u - v) k$ とみると, 定義域は uv 平面における原点, $(1, 0), (0, 1)$ を頂点とする三角形領域である.
 - $\left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1} = \sqrt{3}$
 - 法単位ベクトルは $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$ である.

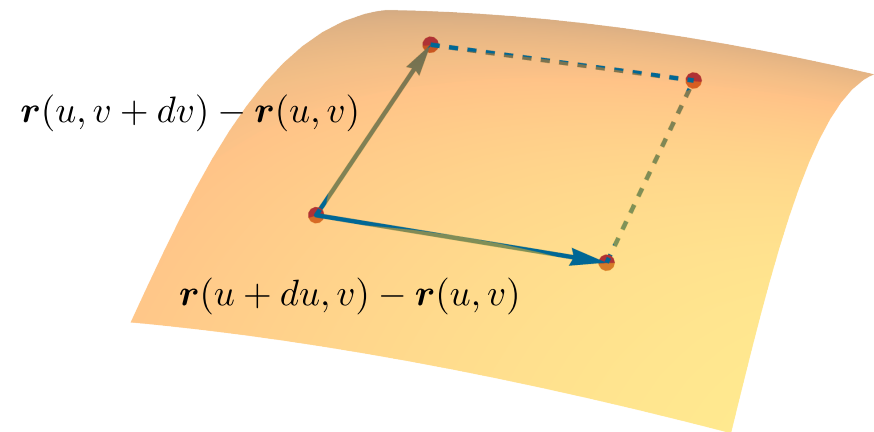
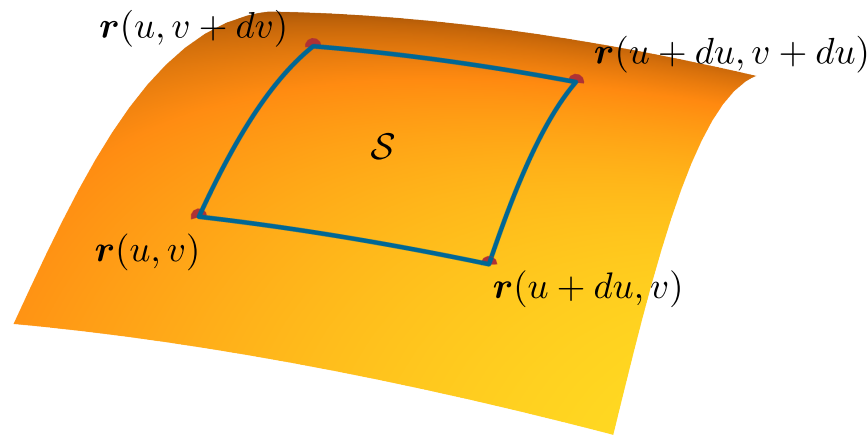
曲面の面積素

- 曲面 $S : \mathbf{r}(u, v)$ に対し, $dS := \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$ を面積素という.

- 面積素の意味：

曲面上の4点 $\mathbf{r}(u, v)$, $\mathbf{r}(u + du, v)$, $\mathbf{r}(u + du, v + dv)$, $\mathbf{r}(u, v + dv)$ を頂点とする矩形領域の面積を S とすると,

$$S \doteq \left(\begin{array}{l} \mathbf{r}(u + du, v) - \mathbf{r}(u, v) \text{ と } \mathbf{r}(u, v + dv) - \mathbf{r}(u, v) \text{ を} \\ 2 \text{ 辺とする平行四辺形の面積} \end{array} \right)$$



曲面の面積素

- 曲面 $S : \mathbf{r}(u, v)$ に対し, $dS := \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$ を面積素という.

- 面積素の意味:

曲面上の4点 $\mathbf{r}(u, v)$, $\mathbf{r}(u + du, v)$, $\mathbf{r}(u + du, v + dv)$, $\mathbf{r}(u, v + dv)$ を頂点とする矩形領域の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &\doteq \left(\begin{array}{l} \mathbf{r}(u + du, v) - \mathbf{r}(u, v) \text{ と } \mathbf{r}(u, v + dv) - \mathbf{r}(u, v) \text{ を} \\ 2 \text{ 辺とする平行四辺形の面積} \end{array} \right) \\ &= |(\mathbf{r}(u + du, v) - \mathbf{r}(u, v)) \times (\mathbf{r}(u, v + dv) - \mathbf{r}(u, v))| \\ &= \left| \frac{\mathbf{r}(u + du, v) - \mathbf{r}(u, v)}{du} \times \frac{\mathbf{r}(u, v + dv) - \mathbf{r}(u, v)}{dv} \right| du dv \\ &\doteq \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \end{aligned}$$

曲面の面積素

- 曲面 $S : \mathbf{r}(u, v)$ に対し, $dS := \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$ を面積素という.
 - $\mathbf{r}(u, v)$ の定義域が uv 平面内の領域 D であるとき,

$$\iint_D dS = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

は曲面の面積を与える.

- 一方, $d\mathbf{S} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv$ をベクトル面積素という.

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv = \mathbf{n} dS$$

例題) 曲面の面積の計算

(1) 半径 1 の球面

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos u \cos v \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}, \quad (0 \leq u \leq 2\pi, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2)$$

- 面積素は $dS = \cos v \, du \, dv$. よって, 面積の値は

$$\begin{aligned} \int_S dS &= \iint_D \cos v \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, dv \right) du \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin v]_{-\pi/2}^{\pi/2} du = \int_0^{2\pi} 2 \, du = 2[u]_0^{2\pi} = 4\pi. \end{aligned}$$

例題) 曲面の面積の計算

(2) 平面 $x + y + z = 1$

$$\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + (1 - u - v) \mathbf{k}, \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u)$$

- 面積素は $dS = \sqrt{3} du dv$. よって, 面積の値は

$$\begin{aligned} \int_S dS &= \iint_D \sqrt{3} du dv = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \sqrt{3} dv \right) du \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 [v]_0^{1-u} du = \sqrt{3} \int_0^1 (1 - u) du \\ &= \sqrt{3} \left[u - \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

スカラー場の面積分

定義

uv 平面内の領域 D で定義された曲面 $S : \mathbf{r}(u, v)$ と、曲面 S を含む空間内の領域で定義されたスカラー場 $\varphi(x, y, z)$ に対し、

$$\int_S \varphi dS := \iint_D \varphi(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

を「曲面 S 上での φ の面積分」と言う.

スカラー場の面積分の計算手順

$$\int_S \varphi dS := \iint_{\substack{(2) \\ D}} \underbrace{\varphi(\mathbf{r}(u, v))}_{(4)} \underbrace{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}_{(3)} du dv$$

- (1) 曲面 S を表すベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v)$ を定める.
- (2) $\mathbf{r}(u, v)$ の定義域 D を表す不等式を求める (累次積分の式にするため) .
- (3) 偏微分の外積 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ を計算し, その大きさ $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$ を求める.
- (4) スカラー場 φ に \mathbf{r} を代入した式 $\varphi(\mathbf{r}(u, v))$ を求める.
- (5) (3) と (4) の積を D 上で 2重積分 する.

スカラー場の面積分の計算例

- 教科書 p.100 問題 3. (1)

- スカラー場 $\varphi(x, y, z) = x + y + z$

- 曲面 $S : 2x + 2y + z = 4 \ (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$

(1) S の式は $z = 4 - 2x - 2y$ と書けるので, グラフ曲面のベクトル関数

$$\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + (4 - 2u - 2v) \mathbf{k}$$

として考える.

(2) これまでの議論から, この曲面は平面である. 各座標軸との交点 (2つの座標を0としたときの残りの座標の値) を求めると, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 4)$ であるから, S はこれら3点を頂点とする三角形領域である. $\mathbf{r}(u, v)$ の定義域は, uv 平面内の原点, $(2, 0)$, $(0, 2)$ を頂点とする三角形領域なので, $D : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2 - u$ と表すことができる.

スカラー場の面積分の計算例

$$(3) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = i - 2k, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = j - 2k \text{ より, } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2i + 2j + k.$$

$$\text{よって, } \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = \sqrt{9} = 3.$$

$$(4) \quad \varphi(\mathbf{r}(u, v)) = \varphi(u, v, 4 - 2u - 2v) = u + v + (4 - 2u - 2v) = 4 - u - v.$$

(5) 以上のことから, 面積分を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_S \varphi dS &= \iint_D \varphi(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv = \int_0^2 \left(\int_0^{2-u} 3(4 - u - v) dv \right) du \\ &= 3 \int_0^2 \left[(4 - u)v - \frac{v^2}{2} \right]_0^{2-u} du = 3 \int_0^2 \left(6 - 4u + \frac{u^2}{2} \right) du \\ &= 3 \left[6u - 2u^2 + \frac{u^3}{6} \right]_0^2 = 16. \end{aligned}$$

ベクトル場の面積分

定義

uv 平面内の領域 D で定義された曲面 $S : \mathbf{r}(u, v)$ と, 曲面 S を含む空間内の領域で定義されたベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z)$ に対し,

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} := \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$

を「曲面 S 上での \mathbf{A} の面積分」と言う.

注 ベクトル場 \mathbf{A} を流体の速度ベクトルとみるとき, 面積分 $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ の値は「単位時間に曲面 S を通過する流体の量」と解釈することができる.

ベクトル場の面積分の計算手順

$$\int_S A \cdot dS = \iint_{\substack{(2) \\ D}} \underbrace{A(r(u, v))}_{(4)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)}_{(3)} du dv$$

(2) (4) (5) (3)

- (1) 曲面 S を表すベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v)$ を定める.
- (2) $\mathbf{r}(u, v)$ の定義域 D を表す不等式を求める (累次積分の式にするため) .
- (3) 偏微分の外積 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ を計算する.
- (4) ベクトル場 A に r を代入したベクトル $\underline{A(\mathbf{r}(u, v))}$ を求める.
- (5) (3) と (4) の内積を求める.
- (6) (5) を D 上で 2重積分 する.

ベクトル場の面積分の計算例

- 教科書 p.102 演習問題 II-3 [A] 15(1)

- ベクトル場 $A(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

- 曲面 $S : z = 1 - x - y$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$)

(1) S の式より $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1 - u - v)\mathbf{k}$ として考える.

(2) これまでの議論から, この曲面は平面である. 各座標軸との交点 (2つの座標を 0 としたときの残りの座標の値) を求めると, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ であるから, S はこれら 3 点を頂点とする三角形領域である. $\mathbf{r}(u, v)$ の定義域は, uv 平面内の原点, $(1, 0)$, $(0, 1)$ を頂点とする三角形領域なので, $D : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u$ と表すことができる.

$$(3) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} - \mathbf{k} \text{ より, } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

ベクトル場の面積分の計算例

(4) $A(\mathbf{r}(u, v)) = A(u, v, 1 - u - v) = 2u \mathbf{i} - v \mathbf{j} + (1 - u - v) \mathbf{k}.$

(5) (3) と (4) の内積を計算する.

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) &= (2u \mathbf{i} - v \mathbf{j} + (1 - u - v) \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= 2u \times 1 + (-v) \times 1 + (1 - u - v) \times 1 \\ &= 2u - v + 1 - u - v = 1 + u - 2v. \end{aligned}$$

(6) (5) を D 上で 2 重積分する.

$$\begin{aligned} \int_S A \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1 + u - 2v) dv \right) du = \int_0^1 \left([(1 + u)v - v^2]_0^{1-u} \right) du \\ &= \int_0^1 (2u - 2u^2) du = \left[u^2 - \frac{2}{3}u^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

積分公式（１） ガウスの発散定理

定理

V を空間内の閉領域とし、その表面を S とする（ただし、曲面 S の法単位ベクトル n は V の外側を向いているとする）。

このとき、 V を含む領域で定義されたベクトル場 A に対し、

$$\iiint_V \nabla \cdot A \, dx dy dz = \int_S A \cdot n \, dS$$

が成り立つ。

注 ベクトル場 A を流体の速度ベクトルとみるとき、「単位時間に V の中で生じる流体の量」が「単位時間に V の外に流れ出る流体の量」に等しいことを表している。

積分公式（２） ストークスの定理

定理

S を境界をもつ曲面とし、その境界の曲線を C とする（ただし、曲線 C の向きは、 S の法単位ベクトルと右ねじの関係にあるとする）。

このとき、 S を含む空間内の領域で定義されたベクトル場 A に対し、

$$\int_C A \cdot t \, ds = \int_S (\nabla \times A) \cdot n \, dS$$

が成り立つ。

注 ベクトル場 A を流体の速度ベクトルとみるとき、「単位時間に S の表面において発生する渦の量」が「単位時間に S のふちを廻っている流体の量」に等しいことを表している。

まとめと復習（と予習）

- 曲面の法単位ベクトルとは何ですか？
- 曲線の面積素, ベクトル面積素とは何ですか？
- スカラー場の 面積分の定義は？
- ベクトル場の 面積分の定義は？

教科書 p.96～100, 103～113*

問題集 204, 205, 206, 207, 208, 209*, 210*

※ 次回から「**複素関数論**」