

べき級数とは

- 級数とは？
→ 数列 $\{a_n\}$ の各項を順に加えた式のこと. (p.15 を参照)
- べき級数とは？
→ 級数の各項が x のべき関数 $c_n x^n$ である級数のこと (c_n は定数) .

事実 (今回のテーマ)

どんな関数も、べき級数 (無限次の多項式関数) として表すことができる.

関数のべき級数展開

テイラーの定理

関数 $f(x)$ が $a < b$ を含む区間で n 回微分可能ならば,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n.$$

関数のべき級数展開

関数 $f(x)$ が $x = a$ を含む、ある区間で何回でも微分可能であるならば,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

となる. つまり, $a - \rho < x < a + \rho$ において, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(x)$.

テイラー展開, マクローリン展開

- テイラーの定理 (p.62 定理 1.)
 - R_n を剰余項という (他の表し方もある) .
 - $n = 1$ のときは, 平均値の定理 (p.46 定理 8.)
 - 定理の証明には, ロルの定理 (p.45 定理 7.) が使われる.
ロルの定理は, 「 $f(a) = f(b)$ を満たす関数に対する平均値の定理」
↓ $a = 0$ の場合
- マクローリンの定理 (p.63 定理 1.)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ならば...
 - $f(x)$ は無限級数として表すことができる.
 - これを満たす x の最大範囲が $a - \rho < x < a + \rho$ のとき, ρ のことを $f(x)$ の収束半径という.

マクローリン級数を求めるには？

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

- 上の式中で未知なのは, $x = 0$ における $f(x)$ の値, および微分係数たち.
- 一般の n の対して, $f^{(n)}(0)$ がわかればよい. (例 1, 2, 3)

$$\text{例)} \begin{cases} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots & (\rho = \infty) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots & (\rho = \infty) \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots & (\rho = \infty) \\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots & (\rho = 1) \\ \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots & (\rho = 1) \end{cases}$$

べき級数展開の応用: 近似値の計算

- テイラー級数における有限の n までの式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

を, $f(x)$ の n 次近似式という.

- 1 次近似: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ ($x = a$ における接線)
- 2 次近似: $y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$
- ...

- $x = a + h$ とした式

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

は, h が十分小さければ, $f(a+h)$ の近似値と解釈できる. (p.64 注意)

2 変数関数のべき級数展開 (次回のテーマ)

2 変数関数 $f(x, y)$ に対し,

- $x(t) = a + ht, y(t) = b + kt$ (a, b, h, k は定数) との合成関数を考える;
 $F(t) := f(a + ht, b + kt)$

- $F(t)$ をマクローリン展開すると,
 $F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \cdots$

- $t = 1$ のとき,
 $F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$
→ $f(a+h, b+k) = f(a, b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$
 - $F^{(n)}(0)$ は, h, k の n 次多項式として表すことができる.
 - その係数は $f(x, y)$ の点 (a, b) における偏微分係数.