情報数学 III 第 1 回小テスト問題　　**2010.9.27**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えなさい．

(1) ベクトル $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ を成分表示しなさい．（各 4 点）

(2) 長さ $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ を求めなさい．（各 4 点）

(3) 内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ を求めなさい．（5 点）

(4) ベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を求めなさい．（8 点）

$\boxed{\mathbf{2}}$ ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ に直交するベクトルを <u>ひとつ</u> 答えなさい．ただし，零ベクトル以外とする．（15 点）

$\boxed{\mathbf{3}}$ ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えなさい．（各 12 点）

(1) 外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を求めなさい．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交する長さが 1 のベクトルを <u>ひとつ</u> 答えなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$ に対し，外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ が零ベクトルとなるときの実数 k の値を求めなさい．（20 点）

$\boxed{\mathbf{5}}$ ベクトル $\vec{a}$ に対し，ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \qquad \text{かつ} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$$

を満たしているとする．このとき，$\vec{b} = \vec{c}$ が成り立つかどうか考察し，その理由を説明（証明）しなさい．ただし，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はどれも零ベクトルでないとする．（12 点）

情報数学 **III** 第 **2** 回小テスト問題　　**2010.10.15**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$　ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が 1 次独立か 1 次従属か判定しなさい．（20 点）

$\boxed{\mathbf{2}}$　2 点 $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を通る直線を l とする．以下の問に答えなさい．

(1) 直線 l 上の点を媒介変数 t を用いて表しなさい．（20 点）

(2) 次の（ア）〜（エ）の中から l 上の点をすべて選びなさい．（15 点）

（ア）$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$　（イ）$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$　（ウ）$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$　（エ）$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$　3 点 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ を通る平面を π とする．以下の問に答えなさい．

(1) 平面 π 上の点を媒介変数 s, t を用いて表しなさい．（20 点）

(2) 平面 π の法線ベクトルを求めなさい．（10 点）

(3) 次の（ア）〜（エ）の中から π と平行な平面を表す方程式をすべて選びなさい．（15 点）

（ア）$2x - y - 2z = 1$　（イ）$-2x + y - 2z = 3$

（ウ）$x + \dfrac{y}{2} - z - 3 = 0$　（エ）$-2x - y + 2z = 0$

情報数学 III 第 3 回小テスト問題　　　　**2010.10.25**（担当：佐藤）

1　(1)〜(4) の線形変換を表す行列として適切なものを（ア）〜（ケ）の中からそれぞれすべて選びなさい．（各 10 点）

(1) （横方向または縦方向の）拡大変換
(2) （横方向または縦方向の）縮小変換
(3) 鏡映変換
(4) 回転変換

（ア）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　（イ）$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　（ウ）$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

（エ）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　（オ）$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　（カ）$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$

（キ）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　（ク）$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　（ケ）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2　次の文章は平面 $\mathbf{R}^2$ 内の直線 l に関する鏡映変換 A_l の説明である．空欄 (1)(2) に入る適切な言葉を答えなさい．（各 10 点）

A_l による $\vec{p} \in \mathbf{R}^2$ の像 $A_l\vec{p}$ は，$\vec{p}$ を通り l と $\boxed{(1)\qquad\qquad}$ する直線 l' 上の点であり，l と l' との交点は $\vec{p}$ と $A_l\vec{p}$ を結ぶ線分の $\boxed{(2)\qquad\qquad}$ である．

3　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{R}^3$ 内の点 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えなさい．（各 10 点）

(1) 2 点 $\vec{a}, \vec{b}$ を通る直線 l 上の点を媒介変数 t を用いて表しなさい (<u>成分表示しなさい</u>)．
(2) 直線 l の方向ベクトルをひとつ挙げなさい．
(3) 線形変換 A による 2 点 $\vec{a}$，$\vec{b}$ の像 $A\vec{a}$，$A\vec{b}$ を求めなさい．
(4) l を線形変換 A で移した像を l' とする．l' が直線となることを確かめ，<u>その方向ベクトル</u> をひとつ挙げなさい．

情報数学 III 第 4 回小テスト問題

2010.11.5（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$　次の文章は行列の固有値，固有ベクトルについての説明である．空欄に入る適切な言葉または数式を答えなさい．ただし，E_n を n 次単位行列とする．（各 10 点）

- n 次正方行列 A に対し，$\boxed{(1)\qquad\qquad}$ を満たす数 k を A の固有値とよび，ベクトル $\vec{v}$ を固有値 k に関する固有ベクトルとよぶ．
- 固有値 k に関する固有ベクトルは連立方程式

$$(kE_n - A)\vec{x} = \vec{0}$$

　の $\boxed{(2)\qquad\qquad}$ である．

- この事実から固有値 k に対し，行列 $(kE_n - A)$ の $\boxed{(3)\qquad\qquad}$ は 0 となる．

$\boxed{\mathbf{2}}$　次の（ア）〜（エ）の中から行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルをすべて選びなさい．（20 点）

（ア）$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　（イ）$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　（ウ）$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$　（エ）$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ に対して以下の問に答えなさい．

(1) A の固有多項式を求めなさい．（10 点）

(2) A の固有値を求めなさい．（10 点）

(3) (2) で求めた各固有値に関する固有ベクトルを求めなさい（どのベクトルがどの固有値に対応しているか明記すること）．（30 点）

情報数学 III 第 5 回小テスト問題　　**2010.11.26**（担当：佐藤）

1　次の文章は直交行列・直交変換についての説明である．空欄に入る適切な言葉または数式を答えなさい．（各 5 点）

- n 次直交行列とは $\boxed{(1)\quad\quad\quad} = E_n$ を満たす行列 A のことである．
- 直交変換 A は任意のベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ に対し，$(A\vec{u})\cdot(A\vec{v}) = \boxed{(2)\quad\quad\quad}$ を満たす．つまり，直交変換とは内積を保存する（内積の値を変えない）変換である．
- 直交行列の行列式の値は $\boxed{(3)\quad\quad\quad}$ に等しい．

2　次の行列が直交行列になるための <u>k の条件</u> を答えなさい．（各 10 点）

(1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & k \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} \cos k & -\sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix}$

3　次の各条件を満たす空間ベクトル $\vec{v}\,(\neq \vec{0})$ をひとつずつ答えなさい．（各 15 点）

(1) 空間 $\mathbf{R}^3$ 内の平面 $x - y + 3z = 2$ を $\vec{v}$ 方向に平行移動したら同じ平面に移った．

(2) 2 次曲面 $x^2 - 3y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2z = 3$ を $\vec{v}$ 方向に平行移動したら，2 次曲面 $x^2 - 3y^2 + z^2 = c$ に移った（c は定数）．

4　方程式

$$2xy + 2yz + 2zx = 1$$

が定める空間 $\mathbf{R}^3$ 内の図形を C とおく．C を直交行列

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

で直交変換した図形 C' の方程式を求めなさい．（15 点）

情報数学 III 第 6 回小テスト問題　　　　**2010.12.10**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$　2 次式 $x^2+4xy+y^2=1$ を直交行列 P を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と座標変換したら，2 次式

$$aX^2+bY^2=1 \tag{$*$}$$

となったとする．以下の問の答えなさい．

(1) 直交行列 P を求めなさい．（30 点）

(2) $(*)$ 式の係数 a,b を求めなさい．（10 点）

(3) 2 次曲線 $(*)$ がどのような図形（楕円，双曲線，放物線）か答えなさい．（10 点）

$\boxed{\mathbf{2}}$　空間 $\mathbf{R}^3$ 内の平面 $x+2y-3z=4$ を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \vec{v}$$

と座標変換したら，$Z=0$ という方程式になった．ただし，P は直交行列，$\vec{v}$ は空間ベクトルで

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \frac{1}{\sqrt{3}} & p_{13} \\ p_{21} & \frac{1}{\sqrt{3}} & p_{23} \\ p_{31} & \frac{1}{\sqrt{3}} & p_{33} \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であるとする．以下の問の答えなさい．

(1) P の成分 p_{13},p_{23},p_{33} を求めなさい．（20 点）

(2) P の成分 p_{11},p_{21},p_{31} を求めなさい．（20 点）

(3) $\vec{v}$ の第 2 成分 v_2 を求めなさい．（10 点）

情報数学 III 第 7 回小テスト問題 **2010.12.22**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 空間 $\mathbf{R}^3$ 内の点の平行移動を同次座標で表すと行列の積として書くことができる．つまり，点 $\vec{x}$ をベクトル $\vec{v}$ 方向に平行移動した点 $\vec{x}+\vec{v}$ を同次座標で表すと

$$P_{\vec{v}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{bmatrix} \qquad \text{（ただし，} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{bmatrix} \text{ は } \vec{x} \text{ の同次座標表示）}$$

となる．ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ に対し，<u>4 次正方行列 $P_{\vec{v}}$ を書きなさい</u>．ただし，成分は省略せずに 16 個すべて書くこと．（15 点）

$\boxed{\mathbf{2}}$ 視点が $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$，投影面が平面 $z=0$ の透視投影を φ_S とする．次の 3 点

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を頂点とする <u>三角形 $\triangle ABC$ を φ_S で移した像（図形）のワイヤーフレームを xy-平面に書きなさい</u>．ただし，φ_S で移した各点の座標を明記すること．（55 点）

$\boxed{\mathbf{3}}$ 視点が $S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$，投影面が平面 $z=0$ の透視投影を φ_S とする．空間 $\mathbf{R}^3$ 内の点 A を以下の 2 つの条件を満たす点とする；

- A は平面 $z=1$ 上の点.
- φ_S による A の像は原点となる.

このとき，<u>A の座標を直交座標で表しなさい</u>．（30 点）