線形代数 I 演習

― 第 11 回 置換 ―

担当：佐藤 弘康

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ).
(1) 置換とは何か，説明せよ.
(2) 恒等置換，逆置換とはどのような置換か，説明せよ.
(3) 置換の巡回置換，巡回表示とは何か，説明せよ.
(4) 互換とはどのような置換か，説明せよ.
(5) 偶置換，奇置換とはどのような置換か，説明せよ.

問題 11.1. 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して，$\sigma \circ \tau$ および $\tau \circ \sigma$ を計算せよ.

問題 11.2. 次の置換

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，$\sigma_2 \circ \sigma_3$ および $\sigma_1 \circ \sigma_2$ を計算せよ．また，$\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$ および $(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$ を計算せよ.

問題 11.3. 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，$\sigma \circ \tau$, σ^{-1}, および τ^{-1} を計算せよ．また，$(\sigma \circ \tau)^{-1}$ および $\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ を計算せよ.

定義. 巡回置換 $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ に対し，集合 $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ を巡回置換 σ の**巡回域**という.
σ, τ を 2 つの巡回置換とするとき，両者の巡回域が共通の元 (数) を含まないとき，σ, τ は**互いに素**であるという.

問題 11.4. 次の置換を巡回表示せよ (互いの素な巡回置換の積に書き表せ).

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $(1,2,3)(4,5)(1,3,6,7) \in S_7$

(3) $(1,2)(1,2,3,4)(1,2)(2,3,5,6) \in S_6$

問題 11.5. 次の置換を互換の積で表示せよ．また，その置換の符号も求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 6 & 2 & 8 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

問題 11.6 (宿題). 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

を互換の積で表せ．ただし，定理 3.18 (教科書 p.65) の証明にある標準的な方法

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \ldots \circ (i_{k-1}, i_k)$$

を使ったもの以外とする．また，どのようにして求めたか説明せよ.

問題 11.7. $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ とする．このとき，次のことを証明せよ.

(1) $\sigma_1 \circ \tau = \sigma_2 \circ \tau$ を満たす $\tau \in S_n$ が存在するならば，$\sigma_1 = \sigma_2$ が成り立つ.

(2) $\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}$ ならば，$\sigma_1 = \sigma_2$ である.

問題 11.8. $S_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N\}$ とする．このとき，次のことを証明せよ.

(1) 任意の $\sigma_k \in S_n$ に対して，$S_n = \{\sigma_1 \circ \sigma_k,\ \sigma_2 \circ \sigma_k,\ \ldots, \sigma_N \circ \sigma_k\}$ である.

(2) $S_n = \{\sigma_1^{-1},\ \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_N^{-1}\}$ である.