問題

次の連立方程式の解を求めなさい．

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ -x + y - 3z = -1 \\ 3x + y + z = 11 \end{cases} \tag{0.1}$$

連立方程式の解とは何だろうか？ 上の例題でいうと，それは与えられた **3** つの等式を同時に満たす実数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ の組のことである．もしも（なんらかの方法で）解が

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0 \tag{0.2}$$

と計算できたとしよう．これが正しい解ならば, (0.2) を (0.1) に代入したとき, 3 式とも等号が成り立つはずである．1 つでも等号が成立しない式があれば, その解は正しくないことがわかる．つまり，連立方程式の問題は導き出した解が正しいか，そうでないかを確かめることができる.

行列とベクトルの方程式 行列 A, ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

とおくと，連立方程式 (0.1) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{0.3}$$

と表すことができる[*1]．ちなみに，連立方程式 (0.1)，つまり (0.3) の解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{（ただし，}t\text{ は任意の実数）} \tag{0.4}$$

と表すことができるが，これは連立方程式 (0.1) の解の全体[*2]が 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ 内の直線になることを意味している．また，上の問題のように解が (0.4) のような形で表されるとき，定ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であり，解直線の方向ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は斉次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解である（確かめよ）.

[*1] この考え方はとても大事.

[*2] 連立方程式の解は，ただ一つだけ存在するときや，ここの問題のように無限個存在する場合に加え，解が存在しない場合もある.