例題 3.1. 方程式 $y = x + 1$ で表される $\mathbf{R}^2$ 内の直線を l とする．線形変換 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ による l の像がどのような図形か答えなさい．

解. l の定義式において $x = t$ とすると $y = t + 1$ であるから，l 上の点は媒介変数 t を用いて $\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$ と表すことができる（直線 l の媒介変数表示）．この点を A で線形変換すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に移る．これは点 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を通り，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線を表す（これを l' とおく）．ここで，l' の方程式を求めてみよう．l' 上の点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ t-1 \end{pmatrix},$$

つまり $x = 3t + 2$, $y = t - 1$ と書ける．この 2 式から t を消去すると $x - 3y = 5$ を得る．

以上のことから，<u>直線 $\boldsymbol{y = x + 1}$ は線形変換 $\boldsymbol{A}$ により直線 $\boldsymbol{x - 3y = 5}$ に移る</u>．

問題 3.2. 線形変換 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えなさい．

(1) 点 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と点 $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ の A による像 $A\vec{a}$, $A\vec{b}$ を求めなさい．

(2) 2 点 $\vec{a}$, $\vec{b}$ を通る直線を l とし，l の A による像を l' とする．l' がどのような図形か答えなさい．l' が直線の場合は，直線の（x, y に関する）方程式を求めなさい．

(3) 2 点 $A\vec{a}$, $A\vec{b}$ を通る直線の方程式を求めなさい．

問題 3.3. 2 点 $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を通る直線を l とおく．線形変換 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ による l の像がどのような図形になるか答えなさい．