微積分 III 演習

− (2) 上限・下限，数列の収束・発散 −

担当：佐藤 弘康

例題 2.1. 集合

$$A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$$

の上限，下限，最大値，最小値がどうなっているか考察せよ．

解. 任意の n に対して，$0 \leq \frac{n-1}{n}$（等号成立は $n = 1$ のとき）だから，0 が A の最小値になることは明らか（つまり 0 は下限でもある）．

また，$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$ であり，$\frac{1}{n}$ はいくらでも小さくできるから，A の上限は 1 であると推測される．このことを背理法を使って厳密に証明してみよう．上限が 1 でないと仮定すると，

i) $\exists a \in A : a > 1$ （1 より大きい A の元 a が存在する），または

ii) $\exists \varepsilon > 0\ \forall a \in A : 1 - \varepsilon \geq a$ （任意の $a \in A$ に対して $1 - \varepsilon \geq a$ が成り立つような $\varepsilon > 0$ が存在する）

のうち，少なくともどちらか一方が成り立つ．条件 i) が成立しないことは明らか．条件 ii) は任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $1 - \varepsilon \geq \frac{n-1}{n}$ が成り立つことを意味している．しかし，これを計算すると $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$ となり，これはアルキメデスの原理 (A) に矛盾する．以上のことから，$\sup A = 1$ であることが示された．

任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $\frac{n-1}{n} \neq 1$ だから 1 は最大値にはならない． □

問題 2.1. 次の集合の上限，下限，最大値，最小値がどうなっているか考察せよ．

(1) 円周率の少数第 n 位までの値を a_n とおくとき，$\{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}$

(2) 二乗したものが 2 以下となる有理数全体の集合

(3) $\left\{ \dfrac{n^2+n}{n^2+1} \;\middle|\; n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$

問題 2.2. 集合 A のすべての元 a について $a < b$ ならば，$\sup A \leq b$ となることを示せ．

例題 2.2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ を証明せよ．

数列の収束「$\lim_{n\to\infty} a_n = a$」の定義は「任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ が存在し，$n\geq n_\varepsilon$ ならば $|a_n-a|<\varepsilon$」が成り立つことである．つまり

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in\mathbf{N}: n\geq n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n-a|<\varepsilon.$$

したがって，勝手に与えた ε に対し，$n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ をどう定めたらよいのかを考えればよい．

$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$ を解くと，$n>1/\sqrt{\varepsilon}$ だから，$n_\varepsilon=[1/\sqrt{\varepsilon}\,]+1$ とすればよいことがわかる (ただし，$[k]$ は k を越えない最大の整数)．また，n_ε の選び方は一意的ではないので，「$1/\sqrt{\varepsilon}$ より大きい自然数を 1 つ選び，それを n_ε とおく」としてもよい（このような n_ε の存在性はアルキメデスの原理により保証される)．

証明. 任意の ε に対し，$n_\varepsilon=[1/\sqrt{\varepsilon}\,]+1$ とおくと，$n\geq n_\varepsilon$ を満たす $n\in\mathbf{N}$ に対して $n>1/\sqrt{\varepsilon}$ だから，

$$\left|\frac{1}{n^2}\right|<\varepsilon.$$

したがって，$1/n^2$ は 0 に収束する． $\square$

問題 2.3. 次の数列が収束するか発散するかを調べよ（ε-N 論法を用いて証明せよ)．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n$

問題 2.4. 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対し，

(1) 数列 $\{a_n+b_n\}$ が収束するならば，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は共に収束するか？

(2) 数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ が収束するならば，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は共に収束するか？

注意：この 2 つの主張の逆は常に成り立つ（教科書 p.246, 定理 7.3 参照)．

例題 2.3. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=a$$

を証明せよ．

解. 仮定から，$\varepsilon>0$ が任意に与えられたとき，$n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ を適当にとると，$n\geq n_\varepsilon$ では $|a_n-a|<\varepsilon$ が成り立つので

$$\begin{aligned}A_n=&\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\\=&\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n_\varepsilon-1}}{n}+\frac{a_{n_\varepsilon}+\ldots+a_n}{n}\\=&\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n_\varepsilon-1}}{n}+\frac{(n-n_\varepsilon+1)a}{n}+\frac{(a_{n_\varepsilon}-a)+\ldots+(a_n-a)}{n}\\(=&A_n^{(1)}+A_n^{(3)}+A_n^{(3)}\quad \text{とそれぞれおく}).\end{aligned}$$

ここで，$A_n^{(1)}$ の分子は n に依らないので，$n\to\infty$ のとき 0 に近づく．つまり「$\exists n'_\varepsilon\in\mathbf{N}$: $n\geq n'_\varepsilon\Longrightarrow|A_n^{(1)}|<\varepsilon$」.

$A_n^{(2)}=\frac{(n-n_\varepsilon+1)a}{n}=a-\frac{a(n_\varepsilon-1)}{n}$ より，$n\to\infty$ のとき a に近づく．つまり「$\exists n''_\varepsilon\in\mathbf{N}$: $n\geq n''_\varepsilon\Longrightarrow|A_n^{(2)}-a|<\varepsilon$」.

$A_3^{(3)}$ については

$$|A_3^{(3)}|\leq\frac{(n-n_\varepsilon+1)\varepsilon}{n}\leq\varepsilon.$$

以上のことから，$n\geq\max\{n_\varepsilon,n'_\varepsilon,n''_\varepsilon\}$ に対して

$$|A_n-a|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

となり，A_n が a に収束することが証明された． □

問題 2.5. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{1+2+\ldots+n}$$

は収束するだろうか．収束する場合は極限を求め，例題 2.3 を参考にして証明せよ．

問題 2.6. $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ であるとき，

(1) $r < 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束することを示せ.

(2) $r > 1$ のとき，$\{a_n\}$ の極限はどうなるか考察せよ.

実数の連続性に関する命題

(M) 上（下）に有界な非減少（非増加）数列は極限値を持つ.

(A) 任意の実数 $K > 0$ に対して，$n > K$ となる自然数 n が存在する.

(W) 実数の集合 $A \neq \emptyset$ が上（下）に有界ならばその上限 $\sup A$（下限 $\inf A$）が存在する.

(B-W) 数列 $\{a_n\}$ が有界ならば，その適当な部分列 $\{a_{n_k}\}$ は極限をもつ.

(C) コーシー列は極限をもつ.

(K) $a_n \leq b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を満たす単調増加列 $\{a_n\}$ と単調減少列 $\{b_n\}$ が任意に与えられたとき，すべての閉区間 $[a_n, b_n]$ に含まれる実数 x が存在する.

(D) $\{A, B\}$ がデーデキント切断ならば，「A は最大値を持ち，B は最小値を持たない」かまたは「A は最大値を持たず，B は最小値を持つ」のどちらか一方が成り立つ.