

線形代数 II 演習

— 行列式 —

担当：佐藤 弘康

行列式の性質

$$\text{d-1) } \det \left(\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ A \\ \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \cdots 0 \\ \hline * & A \end{array} \right) = a \cdot \det(A)$$

d-2) 列に関する線型性 (定理 3.10) :

$$\begin{aligned} & \det (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j + c\mathbf{b}_j \cdots \mathbf{a}_n) \\ &= \det (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) + c \cdot \det (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b}_j \cdots \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

d-3) 任意の列の入れ換えに対して, (-1) 倍される (定理 3.8) :

$$\det (\cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots) = -\det (\cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i \cdots)$$

d-4) 任意の列をスカラー倍して, 別の列に加えても行列式は変わらない :

$$\det (\cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots) = \det (\cdots \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots)$$

d-5) $|AB| = |A| \cdot |B|$ (定理 3.9)d-6) $|{}^t A| = |A|$ (定理 3.12)

注意 : d-2)~d-4) は行に関しても成り立つ.

問題 10.1. サラスの方法を用いて, 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ. ま

た, 逆行列 A^{-1} を計算し, $|A^{-1}|$ を求めよ.

問題 10.2. 次の行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対し, サラスの

方法を用いて行列式 $|A|$, $|B|$ を求めよ, また, AB, BA を計算し, $|AB|, |BA|$ を求めよ.

例題.(教科書 p.83 例題 3.9.) 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 - \sqrt{2} & -4 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6 + 4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解. 方針: 行列式の性質 d-1), d-3), d-4) を使って行列を変形し, 行列のサイズを小さくしていく.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 - \sqrt{2} & -4 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6 + 4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(4 行目を適当にスカラー倍して 1, 2, 3 行目に加えて, 1 行目と 4 行目を入れ換える)

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 0 & -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \end{vmatrix}$$

(2 行目を (-5) 倍して 3 行目に加える)

$$= - \begin{vmatrix} -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ -8 + 3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

(1 行目と 2 行目を交換し, 1 列目と 3 列目を入れ換える)

$$= \begin{vmatrix} 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -8 + 3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 + \sqrt{3} & 2 - 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -6 + 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -8 + 3\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -6 + 2\sqrt{2} \\ 3 & -8 + 3\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= 2(-8 + 3\sqrt{2}) - 3(-6 + 2\sqrt{2}) = 2.$$

問題 10.3. 次の行列の行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 123 & 234 & 345 \\ 234 & 345 & 456 \\ 345 & 456 & 567 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{pmatrix}$$

例題. 次の行列の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$$

解.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

(2 列目を 1 列目に加える)

$$= \begin{vmatrix} a+b & -c & -b \\ a+b & a+b+c & -a \\ -b-a & -a & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 1 & a+b+c & -a \\ -1 & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

(1 行目を 2 行目から引き, 1 行目を 3 行目に加える)

$$= (a+b) \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 0 & a+b+2c & -a+b \\ 0 & -a-c & a+c \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -a-c & a+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c) \begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c) \{(a+b+2c) + (-a+b)\}$$

$$= 2(a+b)(b+c)(a+c).$$

問題 10.4. 次の行列の行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} m & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{pmatrix}$$

問題 10.5. A を正則行列とする. このとき, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ が成り立つことを証明せよ.

問題 10.6. A, B を n 次正方行列とすると,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$$

を証明せよ.

問題 10.7. 次の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$