線形代数 I 演習

− (1) 平面ベクトルの演算，線形独立・線形従属 −

担当：佐藤 弘康

基本問題. 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 「ベクトルの線形結合」とは何か.

(2) 「$\mathbf{R}^2$ がベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で張られる」とはどういうことか.

(3) 「n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立である」とは?

(4) 「n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形従属である」とは?

(5) 「$\mathbf{R}^2$ の基底」とは，どういうベクトルのことか.

問題 1.1. 次のベクトルは線形従属か，線形独立か調べよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

問題 1.2. 平面ベクトルの組 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底か？もし基底ならば，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をそれらの線形結合で表せ.

問題 1.3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を線形独立なベクトルとする．このとき，

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表されるベクトル $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ と $3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b}$ は線形独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表されるベクトル $-\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ と $2\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$ は線形従属であることを示せ.

問題 1.4. 2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し，「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形独立であること」と「$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$」が同値であることを証明せよ.