数学クォータ科目「基礎数学 I」第 3 回

指数と指数法則

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

今回の授業で理解してほしいこと

- 自然数 n に対する a^n の定義と指数法則
- 整数 m に対する a^m の定義
- 有理数 $\dfrac{m}{n}$ に対する $a^{\frac{m}{n}}$ の定義（累乗根）
- 指数法則を利用した演算

指数と指数法則

- 数 a の n 個の積を「a の n 乗」といい, $\boxed{a^n}$ と表す;

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}}$$

- $a^{\boxed{n}}$ の n を指数という.
- 「a^n」のような数の表し方を a の累乗またはべき乗という.
- 指数については, 次の指数法則が成り立つ;

指数法則

(1) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

(2) $a^n \div a^m = a^{n-m}$ (ただし, $n > m$ のとき)

(3) $(a^n)^m = a^{nm}$

(4) $(ab)^n = a^n \times b^n$

指数の拡張：指数が整数の場合

- $a \neq 0$ に対し,
  - $\boxed{a^{0} = 1}$
  - $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$ （n は自然数）
- すると, 任意の整数 m, n に対し, 4 つの指数法則がすべて成立する.

指数法則

任意の整数 m, n に対して, 以下が成り立つ.

(1) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

(2) $a^n \div a^m = a^{n-m}$

(3) $(a^n)^m = a^{nm}$

(4) $(ab)^n = a^n \times b^n$

指数の拡張：指数が有理数の場合

- 累乗根

  $a\,(\neq 0)$ と自然数 n に対し，$x^n = a$ を満たす x を「a の n 乗根」という．

例） ◦ $2^2 = (-2)^2 = 4$ より，4 の 2 乗根は 2 と −2 である．

◦ $x^2 \geq 0$ より，−4 の 2 乗根は存在しない．

◦ $(-2)^3 = -8$ より，−8 の 3 乗根は −2 である．

（注意）２乗根のことを平方根，３乗根のことを立方根という．

事実

- n が偶数のとき，
  - $a > 0$ の n 乗根は２つ存在する．その正の数の方を $\sqrt[n]{a}$ と書く．
  - $a < 0$ の n 乗根は存在しない．
- n が奇数のとき，$a \neq$ の n 乗根はただ１つ存在し，それを $\sqrt[n]{a}$ と書く．

指数の拡張：指数が有理数の場合

- $a \neq 0$ に対し,
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$
と定める.
- すると, 任意の有理数 x, y に対し, 4 つの指数法則がすべて成立する.

指数法則

任意の有理数 x, y に対し, 以下が成り立つ.

(1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

(2) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$

(4) $(ab)^x = a^x \times b^x$

指数の拡張：指数が実数の場合

事実　$a\,(>0)$ と, 任意の実数 x に対して, a^x が定義できる.

例）a^{π} など

- 任意の実数 x は, 有理数の極限として得られる.

例）$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ \ldots \longrightarrow \pi$

- べき乗 a^x も極限を利用して定める.

例）$a^3,\ a^{3.1},\ a^{3.14},\ a^{3.141},\ a^{3.1415},\ \ldots \longrightarrow a^{\pi}$

定義

$a>0$ とする.

実数 x に対し, $y=a^x$ を対応させる関数を「底が a の指数関数」という.

まとめと復習（と予習）

- 累乗（べき乗）, 指数, 底とは何ですか？
- 指数法則とはどのような性質ですか？
- 指数関数とはどのような関数ですか？

教科書 **p.28〜30**

問題集 **13〜17**