

線形代数 II 演習

－ (9) 置換 －

担当: 佐藤 弘康

基本問題 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

- (1) 置換とは何か, 説明せよ.
- (2) 恒等置換, 逆置換とはどのような置換か, 説明せよ.
- (3) 置換の巡回置換, 巡回表示とは何か, 説明せよ.
- (4) 互換とはどのような置換か, 説明せよ.
- (5) 偶置換, 奇置換とはどのような置換か, 説明せよ.

問題 9.1. 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して, $\sigma \circ \tau$ および $\tau \circ \sigma$ を計算せよ.

問題 9.2. 次の置換

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して, $\sigma_2 \circ \sigma_3$ および $\sigma_1 \circ \sigma_2$ を計算せよ. また, $\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$ および $(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$ を計算せよ.

問題 9.3. 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して, $\sigma \circ \tau$, σ^{-1} , および τ^{-1} を計算せよ. また, $(\sigma \circ \tau)^{-1}$ および $\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ を計算せよ.

互いに素な置換

巡回置換 $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ に対し, 集合 $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ を巡回置換 σ の巡回域という.

σ, τ を 2 つの巡回置換とすると, 両者の巡回域が共通の元 (数) を含まないとき, σ, τ は互いに素であるという.

問題 9.4. 次の置換を巡回表示せよ (互いの素な巡回置換の積に書き表せ).

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(2) (1, 2, 3)(4, 5)(1, 3, 6, 7) \in S_7$$

$$(3) (1, 2)(1, 2, 3, 4)(1, 2)(2, 3, 5, 6) \in S_6$$

問題 9.5. 次の置換を互換の積で表示せよ. また, その置換の符号も求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 6 & 2 & 8 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 9.6. 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

を互換の積で表せ. ただし, 定理 3.3 (教科書 p.68) の証明にある標準的な方法

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \dots \circ (i_{k-1}, i_k)$$

を使ったもの以外とする. また, どのようにして求めたか説明せよ.