線形代数 I 演習

― 第 6 回 行列の演算 ―

担当：佐藤 弘康

計算問題 1. 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

に対し，AB および BA を計算せよ．

計算問題 2. 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 10 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して，$A+B,\ AC,\ BC$ を計算せよ．また，$(A+B)C,\ AC+BC$ も計算せよ．

問題 6.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し，$AB = BA$ を満たす行列 B をすべて求めよ．

問題 6.2. 次の行列 A に対し，$AX = O, YA = O$ を満たす行列 $X, Y \in M(2, \mathbf{R})$ を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

問題 6.3. 次の条件を満たす行列 $A \in M(2, \mathbf{R})$ を求めよ．

(1) $A^2 = O$.

(2) $A^2 = E_2$.

(3) 任意の行列 $B \in M(2, \mathbf{R})$ に対し，$AB = BA$.

問題 6.4. 次の行列 A に対して A^n を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

■ レポート問題

問題 6.5. 次の問に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，$AX = E_2,\ YA = E_3$ を満たす行列 $X,\ Y$ を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，$AX = E_2,\ YA = E_2$ を満たす行列 $X,\ Y$ を求めよ.

■ 計算問題の解

1. $AB = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -7 \\ 14 & 22 & 70 \\ 0 & -18 & -70 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -18 \\ 13 & 11 & 12 \\ -18 & 16 & -40 \end{pmatrix}$

2. $A + B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 12 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 10 & -28 & -24 \\ 4 & -10 & -6 \end{pmatrix},$

$BC = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A+B)C = AC + BC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 12 & -32 & -20 \\ 4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$