数学クォータ科目「数学」第 3 回 (2/2)

２変数関数の極値

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】1 変数関数の極値

定理 1.（教科書 p.68）

(i)「$f(x)$ が $x = a$ で極値をとる」ならば, $f'(a) = 0$ が成り立つ.

(ii) $f'(a) = 0$ かつ $\begin{cases} f''(a) < 0 \\ f''(a) > 0 \end{cases}$ ならば, $f(a)$ は $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$ である.

極値を求める手順

(1) 導関数 $f'(x)$ を求める.

(2) 方程式 $f'(x) = 0$ の解 $x = a$ を求める.

(3) 第２次導関数 $f''(x)$ を求める.

(4) (2) の解 $x = a$ に対して, $f''(a)$ の符号を調べる.

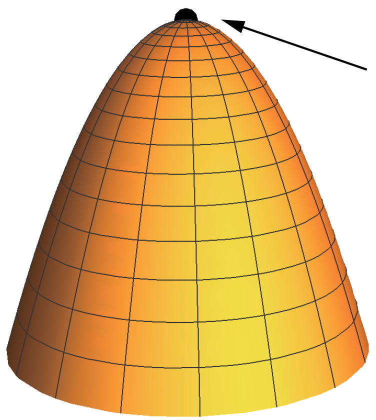
2変数関数の極値

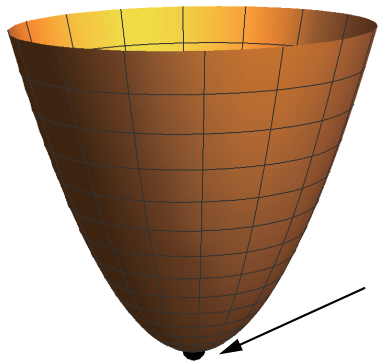
定義（2変数関数の極値）

$f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ 十分小さい h,k※ に対し, $\begin{cases} f(a,b) > f(a+h,b+k) \\ f(a,b) < f(a+h,b+k) \end{cases}$

※十分小さい ε に対し, $0 \leq |h|, |k| < \varepsilon$ かつ h,k のいずれか一方は 0 でない.





2 変数関数の極値

事実

$f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ 任意の h,k に対し, $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ は $t=0$ で $\begin{cases} \text{極大} \\ \text{極小} \end{cases}$

- 合成関数 $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ の意味は,
  関数 $f(x,y)$ を xy-平面の直線 $(x,y) = (a+ht, b+kt)$ に制限すること.
- 直線 $(x,y) = (a+ht, b+kt) = (a,b) + t(h,k)$ は,
  点 (a,b) を通り, ベクトル (h,k) に平行な直線である.

２変数関数の極値（幾何学的な解釈）

事実の幾何学的な解釈

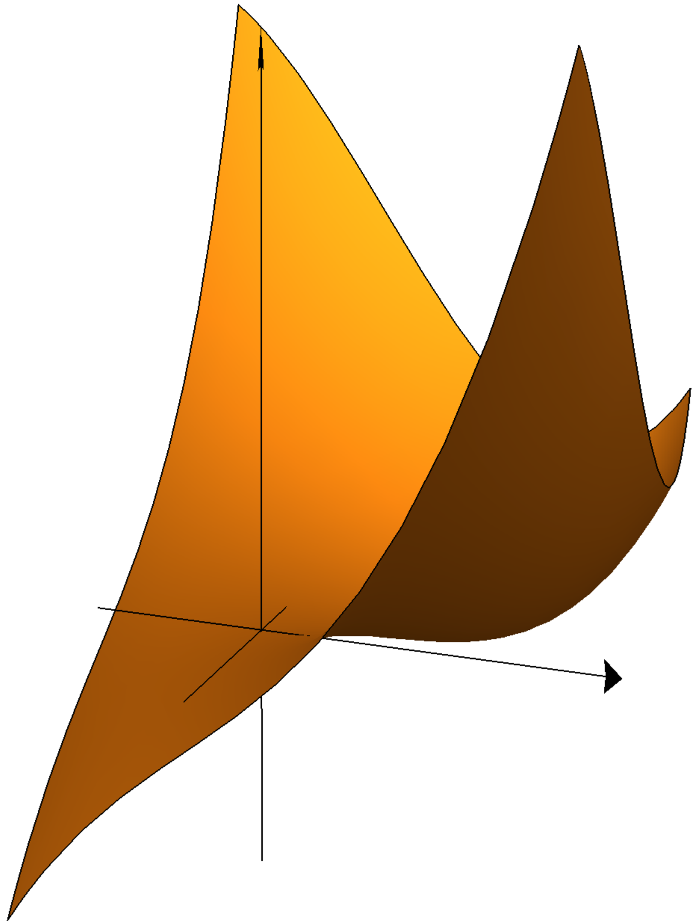
$f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の $\left\{\begin{array}{l}\text{極大値}\\ \text{極小値}\end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow$ 点 (a,b) を通り, xy-平面に垂直な平面 で曲面 $z=f(x,y)$ を

切った切り口の曲線は, 常に 点 (a,b) で $\left\{\begin{array}{l}\text{極大}\\ \text{極小}\end{array}\right.$

２変数関数の極値（幾何学的な解釈）

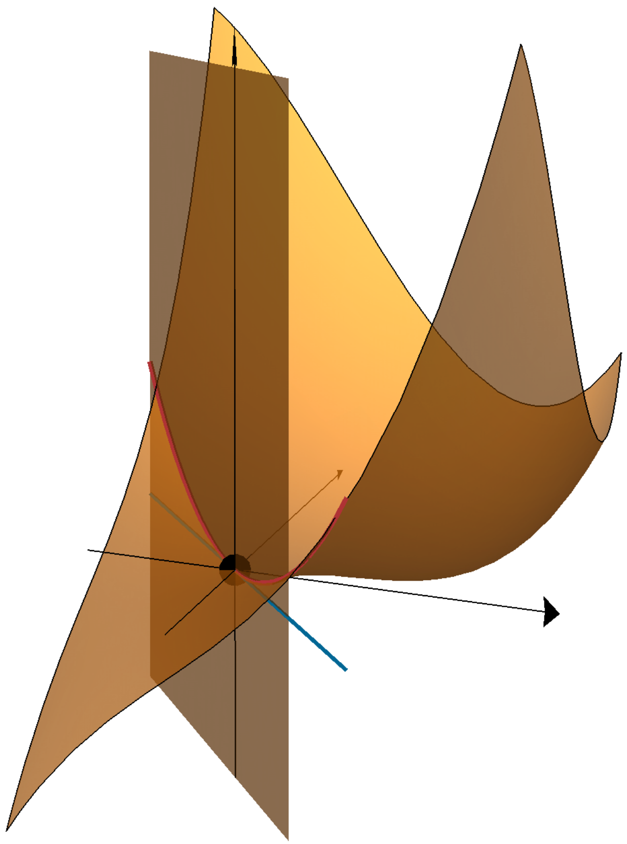
例） $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$（教科書 p.73 例 3. (1)）

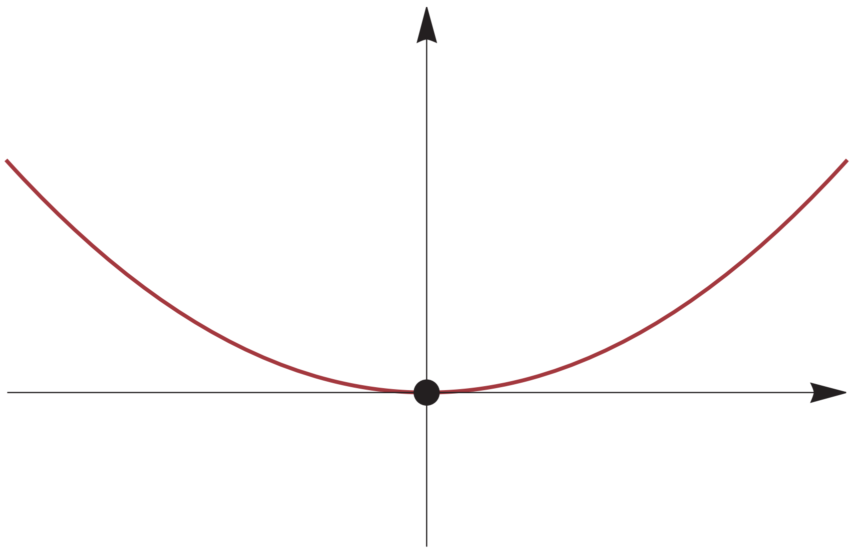


２変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例）$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$（教科書 p.73 例 3. (1)）

○ 点 $(0, 0)$

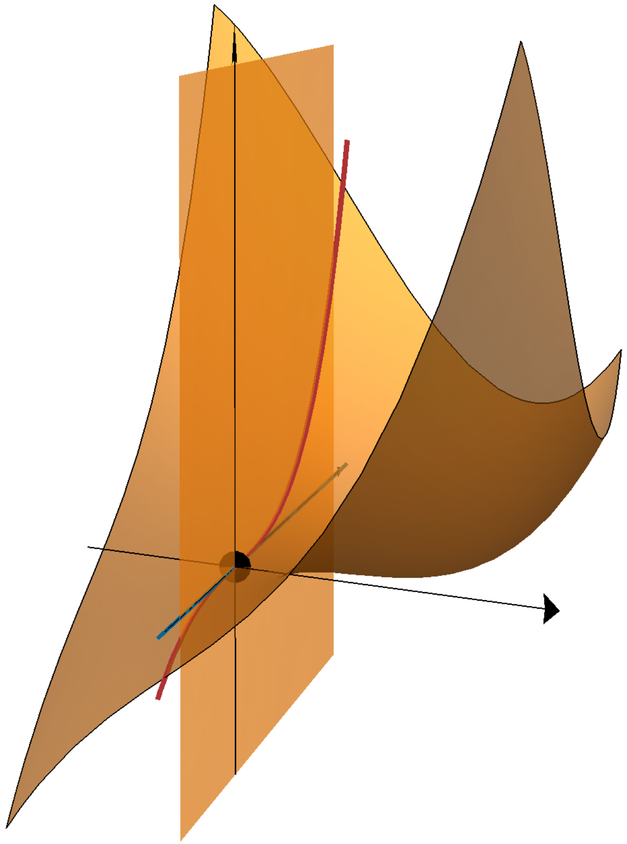


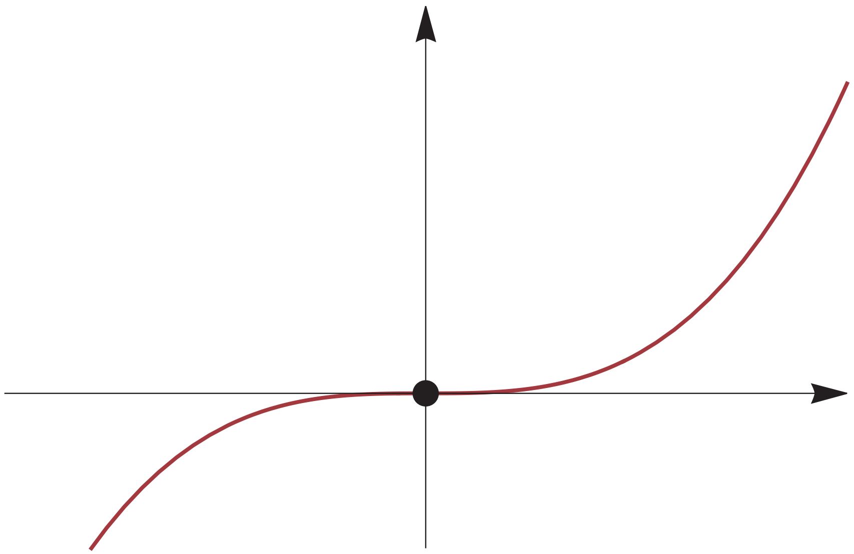


２変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例）$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$（教科書 p.73 例 3. (1)）

- 点 $(0, 0)$

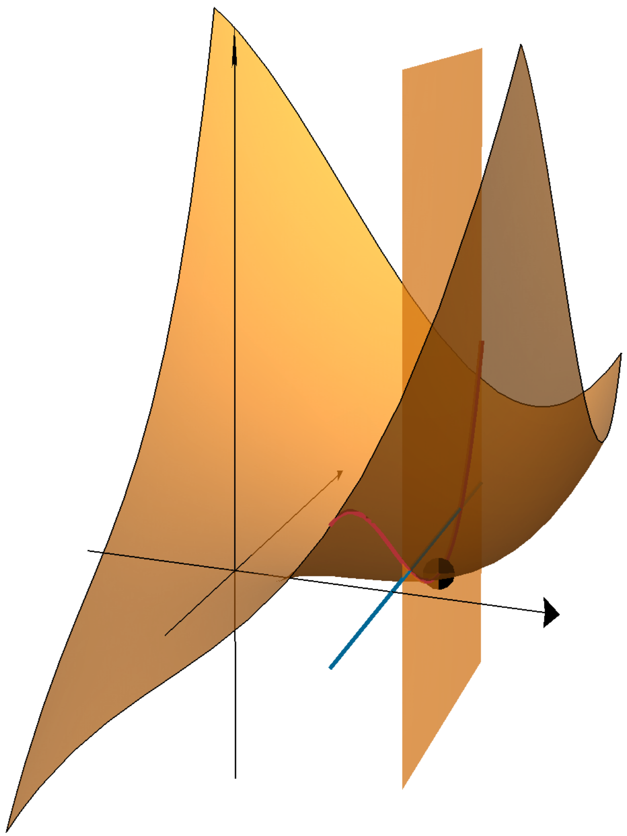


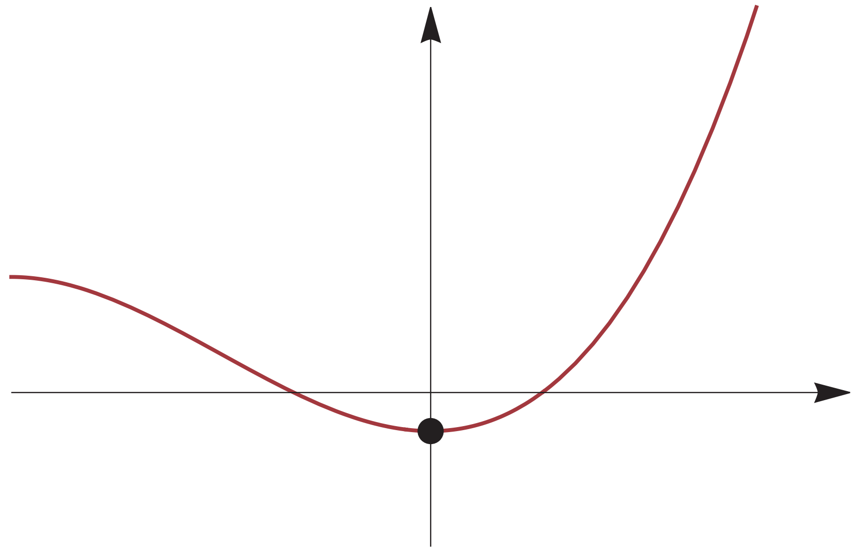


２変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例） $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$（教科書 p.73 例 3. (1)）

◦ 点 $(1,1)$

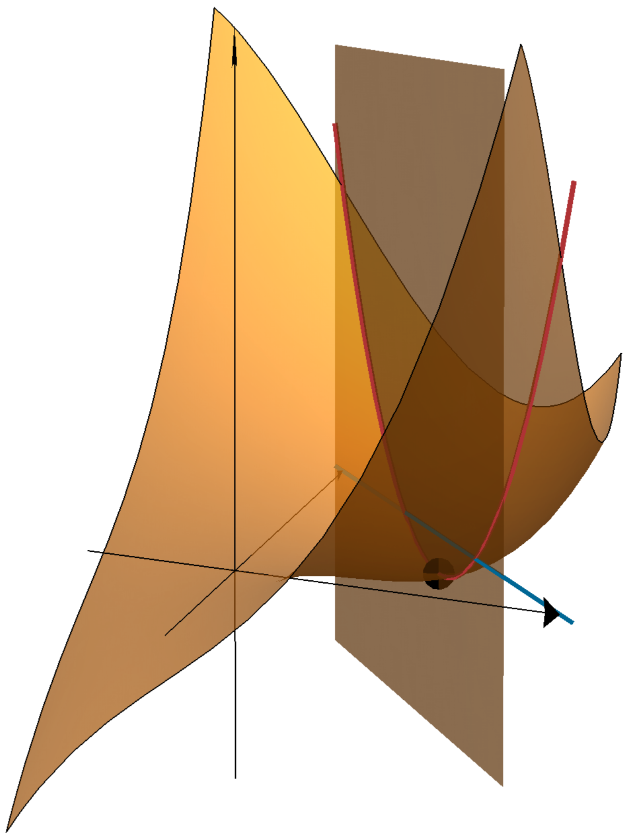


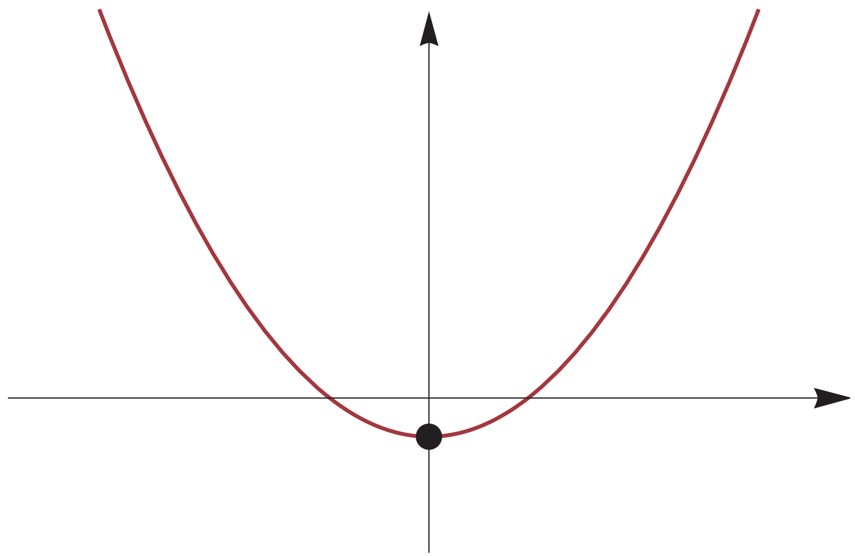


２変数関数の極値（幾何学的な解釈）

例）$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$（教科書 p.73 例 3. (1)）

○ 点 $(1, 1)$





2 変数関数の極値を求める（考え方）

事実

$f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ $\underline{\text{任意の } h,k}$ に対し, $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ は $t=0$ で $\begin{cases} \text{極大} \\ \text{極小} \end{cases}$

に

定理 1.（教科書 p.68）

(i)「$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる」ならば, $f'(a)=0$ が成り立つ.

(ii) $f'(a)=0$ かつ $\begin{cases} f''(a)<0 \\ f''(a)>0 \end{cases}$ ならば, $f(a)$ は $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$ である.

を適用する.

2 変数関数の極値を求める（考え方）

定理 1. を【事実】に適用

(I)「$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で極値をとる」,

つまり, 任意の h,k に対し, $F(t)$ が $t=0$ で極値をとるならば,

任意の h,k に対し $F'(0)=0$ が成り立つ.

(II) 任意の h,k に対し $F'(0)=0$ かつ $\begin{cases} F''(0)<0 \\ F''(0)>0 \end{cases}$ ならば,

$f(a,b)$ は $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$ である.

問　条件：「任意の h,k に対し, $F'(0)=0$　$F''(0)<0$　$F''(0)>0$」は,
$f(x,y)$ を用いて, それぞれどのように記述されるか？

2変数関数の極値を求める (I)

(I)

「$f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で極値をとる」,
つまり, 任意の h, k に対し, $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ が $t = 0$ で極値をとるならば,
任意の h, k に対し $F'(0) = 0$ が成り立つ.

- 合成関数の微分の公式より,

$$F'(t) = f_x(a + ht, b + kt)\, h + f_y(a + ht, b + kt)\, k$$

$\Longleftrightarrow$ 任意の h, k に対し, $f_x(a, b)\, h + f_y(a, b)\, k = 0$
$\Longleftrightarrow$ $f_x(a, b) = 0$, かつ $f_y(a, b) = 0$

2変数関数の極値を求める (II)

(II)

任意の h, k に対し $F'(0) = 0$ かつ $\begin{cases} F''(0) < 0 \\ F''(0) > 0 \end{cases}$ ならば, $f(a,b)$ は $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$

- 合成関数の微分の公式より,

$$F''(t) = f_{xx}(a+ht, b+kt)h^2 + 2f_{xy}(a+ht, b+kt)hk + f_{yy}(a+ht, b+kt)k^2$$

- よって,

$$\begin{aligned} F''(0) &= f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2 \quad (\leftarrow \text{平方完成する}) \\ &= f_{xx}(a,b)\left\{\left(h + \frac{f_{xy}(a,b)}{f_{xx}(a,b)} \cdot k\right)^2 - \frac{\{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b)}{\{f_{xx}(a,b)\}^2} \cdot k^2\right\} \end{aligned}$$

２変数関数の極値を求める (II)

- $D(x, y) = \{f_{xy}(x, y)\}^2 - f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y)$ とおくと,

$$F''(0) = f_{xx}(a, b) \left\{ \left(h + \frac{f_{xy}(a, b)}{f_{xx}(a, b)} \cdot k \right)^2 - \frac{\boxed{\{f_{xy}(a, b)\}^2 - f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b)}}{\{f_{xx}(a, b)\}^2} \cdot k^2 \right\}$$

$$= f_{xx}(a, b) \left\{ (h \text{ と } k \text{ の式})^2 - \boxed{D(a, b)} \cdot (k \text{ の式})^2 \right\}$$

- 条件 (II) 「 任意の h, k に対し, $F''(0)$ が定符号 ならば, $f(a, b)$ は極値」
- $\boxed{} \iff D(x, y) < 0$
- さらに, このときの $F''(0)$ の符号は, $f_{xx}(a, b)$ の符号と一致.

※ $D(a, b) > 0$ のときは, h, k を適当にとることにより, $F''(0)$ の値を正にも負にもできる.

２変数関数の極値の判定

定理 2.（教科書 p.71,72）

I「 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとる」ならば,

$f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$ が成り立つ.

II $D(x,y)=\{f_{xy}(x,y)\}^2-f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$

$f_x(a,b)=0 f_y(a,b)=0$ かつ

- $D(a,b)<0$ のとき,

$$\begin{cases} f_{xx}(a,b)<0 \\ f_{xx}(a,b)>0 \end{cases} \text{ならば, } f(a,b) \text{ は } \begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases} \text{である.}$$

- $D(a,b)>0$ のとき, $f(a,b)$ は極値ではない.

２変数関数の極値の求め方

関数 $f(x,y)$ の極値を求めるには

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求める.

(2) 連立方程式 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ の解 $(x,y)=(a,b)$ を求める.

(3) 第２次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ を求める.

(4) $D(x,y)=\{f_{xy}(x,y)\}^2 - f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$ を求める.

(5) (2) の解 $(x,y)=(a,b)$ に対して, $D(a,b)$ および $f_{xx}(a,b)$ の符号を調べる.

- $D(a,b)<0$ かつ $\begin{cases} \boxed{f_{xx}(a,b)<0} \implies f(a,b) \text{ は 極大値} \\ \boxed{f_{xx}(a,b)>0} \implies f(a,b) \text{ は 極小値} \end{cases}$
- $D(a,b)>0 \implies f(a,b)$ は極値ではない.