情報数学 III 第 1 回小テスト問題

2010.9.27（担当：佐藤）

1 ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えなさい．

(1) ベクトル $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{v}=3\vec{a}+2\vec{b}$ を成分表示しなさい．（各 4 点） $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-7\end{pmatrix}$

(2) 長さ $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ を求めなさい．（各 4 点） $|\vec{u}|=\sqrt{34}$、$|\vec{v}|=\sqrt{66}$

(3) 内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ を求めなさい．（5 点） $\vec{u}\cdot\vec{v}=37$

(4) ベクトル $\vec{u},\vec{v}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を求めなさい．（8 点） $\cos\theta=\dfrac{37}{2\sqrt{561}}$

2 ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$ に直交するベクトルを <u>ひとつ</u> 答えなさい．ただし，零ベクトル以外とする．（15 点）

$\vec{a}$との内積が 0 になればいいので無数にある。たとえば $\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$

3 ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えなさい．（各 12 点）

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\7\\2\end{pmatrix}$

(1) 外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を求めなさい．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交する長さが 1 のベクトルを <u>ひとつ</u> 答えなさい．

4 ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ と $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\k\\4\end{pmatrix}$ に対し，外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ が零ベクトルとなるときの実数 k の値を求めなさい．（20 点）

$k=0$

5 ベクトル $\vec{a}$ に対し，ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は

$$「\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c} \quad かつ \quad \vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}」 — (*)$$

を満たしているとする．このとき，$\vec{b}=\vec{c}$ が成り立つかどうか考察し，その理由を説明（証明）しなさい．ただし，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ はどれも零ベクトルでないとする．（12 点）

ヒント 内積、外積の線形性より (*) 式は

「$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$ かつ $\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}$」—(*)'

と書きなおすことができる。$\vec{d}=\vec{b}-\vec{c}$ とおくと、(*)' は

「$\vec{a}\cdot\vec{d}=0$ かつ $\vec{a}\times\vec{d}=\vec{0}$」—(*)''

となる。(*)'' を満たす $\vec{d}$ はどのようなベクトルかを考えよ。

情報数学 III 第 2 回小テスト解答 **2010.10.15**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 次独立

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) 媒介変数表示は一意的ではない．配布したプリントに従うと

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) （ア）と（ウ）

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) 媒介変数表示は一意的ではない．配布したプリントに従うと

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$（の実数倍）

(3) （ウ）と（エ）

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/im3.html

情報数学 III 第 3 回小テスト解答

2010.10.25（担当：佐藤）

1 [*1][*2]

(1) 拡大変換：（イ）[*3]
(2) 縮小変換：（エ）
(3) 鏡映変換：（オ）と（カ）
(4) 回転変換：（ウ）と（ク）

2 A_l による $\vec{p} \in \mathbf{R}^2$ の像 $A_l\vec{p}$ は，$\vec{p}$ を通り l と $\boxed{(1)\ \text{直交}}$ する直線 l' 上の点であり，l と l' との交点は $\vec{p}$ と $A_l\vec{p}$ を結ぶ線分の $\boxed{(2)\ \text{中点}}$ である．

3

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -1+3t \\ -t \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ （の実数倍）

(3) $A\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(4) $A \begin{pmatrix} 1-t \\ -1+3t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+5t \\ 2-6t \\ -3+6t \end{pmatrix}$. したがって，$l'$ の 方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ （の実数倍）.

この授業に関する情報　http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/im3.html

[*1] （ア）と（キ）はせん断とよばれる線形変換.

[*2] レポート作成の注意点：(i) （オ）はある直線 l に関する鏡映変換である．その直線 l は何か？ (ii) （ク）が表す回転変換の回転角を求めなさい.

[*3] 厳密な意味での（縦横比を保持する）拡大変換と縮小変換を表す行列は $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ である（k は正の実数）.

情報数学 III 第 4 回小テスト解答

2010.11.5（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$

- n 次正方行列 A に対し，$\boxed{(1)\quad \boldsymbol{A\vec{v} = k\vec{v}}}$ を満たす数 k を A の固有値とよび，ベクトル $\vec{v}$ を固有値 k に関する固有ベクトルとよぶ．
- 固有値 k に関する固有ベクトルは連立方程式

$$(kE_n - A)\vec{x} = \vec{0}$$

の $\boxed{\text{(2) 非自明（な）解，または } \boldsymbol{\vec{0}} \text{ でない解}}$ である．

- この事実から固有値 k に対し，行列 $(kE_n - A)$ の $\boxed{\text{(3)\quad 行列式}}$ は 0 となる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 各ベクトル $\vec{v}$ に行列 A をかけて，$A\vec{v} = k\vec{v}$ となるかどうか確かめればよい．答えは<u>（ア）と（エ）</u>．

レポート作成のポイント：すべてのベクトルに A をかけて，固有ベクトルになっているかどうか確かめなさい．（ア）と（エ）については固有値も答えなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $\Phi_A(t) = t^2 + 3t - 4 = (t-1)(t+4)$

(2) -4，1

(3) -4 に関する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$1$ に関する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

（ただし，c は 0 でない実数）

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/im3.html

情報数学 III 第 5 回小テスト解答

2010.11.26（担当：佐藤）

1

- n 次直交行列とは $\boxed{(1)\ {}^tA\cdot A = A\cdot{}^tA}$ $= E_n$ を満たす行列 A のことである．
- 直交変換 A は任意のベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ に対し，$(A\vec{u})\cdot(A\vec{v}) = \boxed{(2)\quad \vec{u}\cdot\vec{v}}$ を満たす．つまり，直交変換とは内積を保存する（内積の値を変えない）変換である．
- 直交行列の行列式の値は $\boxed{(3)\quad \pm 1}$ に等しい．

2

(1) $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $k = 0$

(3) $k = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(4) 任意の実数 k に対して直交行列となる．

3

(1) 平面 $x - y + 3z = 2$ の法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に直交するベクトルならなんでもよい．例えば，$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

4 $2x^2 - y^2 - z^2 = 1$

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/im3.html

情報数学 III 第 6 回小テスト解答

2010.12.10（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 2 次式 $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と表すことができる．2 次の項の係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は 3 と -1 であるから，適当な直交行列 P を用いて

$$3X^2 - Y^2 = 1$$

と変換できる．

(1) 固有ベクトルを長さが 1 になるように正規化し，それらを並べて直交行列 P をつくればよい．固有値 3 の固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，固有値 -1 の固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$．したがって，たとえば，$P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$．[*1]

(2) 上に挙げた行列 P に対して，$a = 3, b = -1$．[*2]

(3) 双曲線

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/im3.html

[*1] 一意的には決まらない．

[*2] 直交行列 P の選び方によっては $a = -1, b = 3$ となることもある．

情報数学 III 第 6 回小テスト解答

2010.12.10（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平面 $x+2y-3z=4$ の法線ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ とし，$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおくと平面の方程式は

$$ {}^t\vec{x}\,\vec{n}=4 \qquad (\vec{x}\cdot\vec{n}=4) \tag{\#}$$

と書ける．$\vec{x}=P\vec{X}+\vec{v}$ と座標変換すると (#) は ${}^t\vec{X}\left({}^tP\,\vec{n}\right)+{}^t\vec{v}\,\vec{n}=4$ となる．したがって，これが方程式 $cZ=0$ となるためには

$$ {}^tP\,\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}, \quad \text{かつ} \quad {}^t\vec{v}\,\vec{n}=4 $$

となるように P と $\vec{v}$ を定めればよい．

(1) $P=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ とおくと P に関する条件は

$$\vec{p}_1\cdot\vec{n}=0,\ \vec{p}_2\cdot\vec{n}=0,\ \vec{p}_3\cdot\vec{n}=c$$

と同値である．直交行列 P の列ベクトル $\vec{p}_i$ 達 $(i=1,2,3)$ は互いに直交するので，$\vec{p}_3$ と $\vec{n}$ は平行でなければならない．したがって，たとえば，

$$p_3=\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}.$$

(2) P の各列ベクトルは互いに直交してなければならないので，たとえば，

$$\vec{p}_1=\vec{p}_2\times\vec{p}_3=\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}.^{*3}$$

(3) $\vec{v}$ に関する条件は「$\vec{v}$ と $\vec{n}$ の内積の値が 4」であることと同値．したがって，$v_2=-\dfrac{3}{2}$

---

*3 直交行列 P の選び方は一意的ではない．(1)(2) の解はこれらの (-1) 倍でもよい．

情報数学 III 第 7 回小テスト解答　　　　2010.12.22（担当：佐藤）

$\boxed{1}$ $P_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

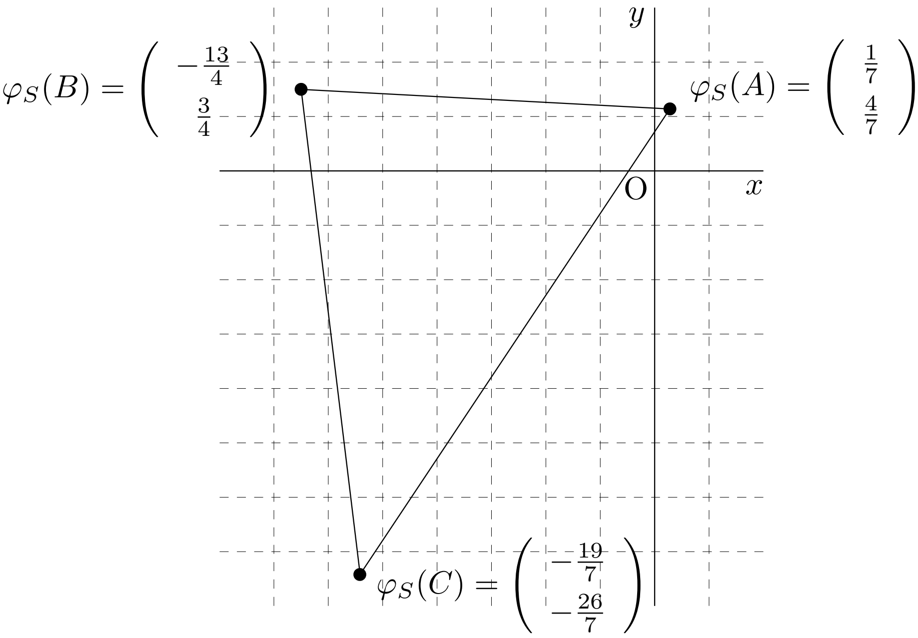
$\boxed{2}$ 視点を同次座標で $S = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表すと，φ_S は $P_S = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$ の積として表すことができる．3 点 A, B, C をそれぞれ同次座標で

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表し，行列 P_S の積を計算し，それを直交座標に書き直すと

$$\varphi_S(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_S(B) = \begin{pmatrix} -\frac{13}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_S(C) = \begin{pmatrix} -\frac{19}{7} \\ -\frac{26}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．これを xy-平面にプロットし，ワイヤーフレームを描くと以下の図のようになる．



情報数学 III 第 7 回小テスト解答 **2010.12.22**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{3}}$ 視点を同次座標で $S = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表すと，φ_S は $P_S = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ の積として表すことができる．点 A は平面 $z = 1$ 上の点だから直交座標で $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表すことができる．これをさらに同次座標で $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表し，P_S をかけると

$$\begin{bmatrix} -8a_1 + 2 \\ -8a_2 - 1 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

となる．これが原点となるための a_1, a_2 の条件は

$$a_1 = \frac{1}{4}, \qquad a_2 = -\frac{1}{8}$$

となる．つまり，$\underline{A \text{ の座標は} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix}}$ である．

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2010/im3.html