線形代数 I 演習 一学期末試験

担当：佐藤 弘康

(1) すべての答案用紙に，名前，学籍番号を忘れずに記入してください．

(2) すべての答案用紙の右上に，全体の中で何枚目かを記入してください (例えば，1/2 のように)．答案用紙は裏を使用しても構いません．解答が表裏にまたがる場合は「裏へ続く」と書くなどしてください．

(3) 解答は結果だけでなく，計算のプロセス，思考の過程など，できるだけ丁寧に記述するようにしてください．

問 1. 平面ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に直交する長さ 1 のベクトルを求めよ．

問 2. 次の行列 A の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

問 3. 連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 2 \\ 2x + 3y + 7z = 1 \\ 3x + 5y + 3z = k \end{cases} \tag{1}$$

が解を持つための実数 k の条件を求めよ．また，そのときの解と，解の自由度を求めよ．

問 4. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線形独立のとき，

$$\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}, \quad 2\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}, \quad 3\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \tag{2}$$

が線形独立となるための実数 k の条件を求めよ．

問 5. 線形代数 I の講義と演習の内容に関して，深く印象に残ったこと (概念，定理，方法など何でもよい) をひとつあげて，その理由を具体的に述べよ．

■ 試験問題の解

問 1. $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が直交するとき，内積 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ は消える．つまり $-x+2y=0$. したがって，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2l \\ l \end{pmatrix}$ と書ける ($l \in \mathbf{R}$)．さらに，$\|\boldsymbol{v}\| = 1$ だから，$1 = 4l^2 + l^2 = 5l^2$ より，$l = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$．以上のことから，$\boldsymbol{u}$ と直交する長さ 1 のベクトルは $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

問 2.

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[E_{21}(-2)P_{12}\times]{}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow[E_{32}(3)E_2(-1)P_{23}\times]{}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow[E_{13}(3)E_{23}(4)E_3\left(-\frac{1}{6}\right)\times]{}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right).
$$

したがって，$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

問 3.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & k \end{array}\right)
\xrightarrow[E_{21}(-2)E_{31}(-3)\times]{}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 15 & k-6 \end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow[E_{12}(-2)E_2(-1)E_{32}(-1)\times]{}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{array}\right)
$$

したがって，$k=3$ のときに限り，方程式 (1) は解を持つ．このとき，解は

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } l \in \mathbf{R})
$$

であり，解の自由度は 1 である．

問 4. (2) 式のベクトルが線形独立とは

$$x(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})+y(2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})+z(3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0 \tag{3}$$

を満たす実数の組 (x,y,z) は $(0,0,0)$ に限ることである．(3) 式は

$$(x+2y+3z)\boldsymbol{a}+(2x+ky+3z)\boldsymbol{b}+(3x-2y+z)\boldsymbol{c}=0$$

と表すことができ，ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が線形独立であることから，x,y,z は

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+ky+3z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases} \tag{4}$$

を満たす．したがって，

$$\text{(2) 式のベクトルが線形独立} \iff \text{(4) の解は } x=y=z=0 \text{ のみ}$$

である．つまり，斉次連立一次方程式 (4) が非自明解を持たないための k の条件を求めればよい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & k & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-2)E_{31}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k-4 & -3 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[E_{13}(-2)E_{23}(3)E_3\left(-\frac{1}{8}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで，$k=1$ ならば，解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(l \in \mathbf{R})$ となり，非自明解が存在する．

$k \neq 1$ のときは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{13}(-1)E_{32}(-1)E_2\left(\frac{1}{k-1}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，解は $x=y=z=0$ のみである．したがって，(2) 式のベクトルが線形独立であるための条件は $k \neq 1$ である．