数学クォータ科目「応用解析」第 8 回 / 複素関数論（3）

複素積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 複素関数, 正則関数, コーシー・リーマンの方程式
- 有理関数, 指数関数, 三角関数, 対数関数

今回の授業で理解してほしいこと

- 複素数平面内の曲線（実１変数複素数値関数）
- 曲線に沿っての複素積分

複素数平面内の曲線

- 実変数 t の複素数値関数を考える.
  つまり, 実数 t の値に対して, 複素数 $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ が定まるとする.
  これは複素数平面内の曲線を定める.
- t が $a \le t \le b$ の範囲を動くとき, $z(a)$ をこの曲線の始点, $z(b)$ を終点という（２つを合わせて端点という）.

- 曲線 $z(t) = x(t) + i\,y(t),\ a \le t \le b$ に対し,
  - $z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$ を $z(t)$ の微分という.
  - 平面におけるベクトル $(x'(t), y(t))$ は点 $(x(t), y(t))$ で曲線 $z(t)$ に接するベクトルである.
  - $x'(t), y'(t)$ が連続な関数のとき, 「曲線 C は滑らかである」という.
  - $\displaystyle\int_a^b |z'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$ は曲線の長さである.

曲線の演算

- 曲線 $z(t) = x(t) + y(t)\,i,\ a \leq t \leq b$ を記号 C で表すとき, C の終点から始点に向かう曲線 $w(t) = z(a + b - t),\ a \leq t \leq b$ を $-C$ と表す.
- ２つの曲線 $C_1 : z(t)$ と $C_2 : w(t)$ について, C_1 の終点と C_2 の始点が等しいとき, この２つを繋げてできる曲線を $C_1 + C_2$ と表す.
- C_1 と C_2 が滑らかな曲線のとき, $C_1 + C_2$ は「区分的に滑らかである」という.

複素積分

定義

- 滑らかな曲線 $C : z(t) = x(t) + y(t)\,i,\ a \leq t \leq b$ と,
  C を含む領域で定義された関数 $f(z)$ に対し,

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz := \int_b^a f(z(t))\,z'(t)\,dt}$$

  を「$f(z)$ の曲線 C に沿っての複素積分」という.
  また, 曲線 C をその積分路という.
- 区分的に滑らかな曲線 $C_1 + C_2$ については, 以下の式で定める.

$$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

複素積分の計算例

問１）関数 $f(z) = z^2$ を次の曲線 C に沿って積分しなさい.

(1) $C : z(t) = t + t\,i,\ 0 \le t \le 1$

解） 1) 微分 $z'(t)$ を計算する：$z'(t) = 1 + i$

2) $f(z(t))$ を計算する：

$$f(z(t)) = (z(t))^2 = (t + t\,i)^2 = t^2(1+i)^2 = t^2(1 + 2i + i^2) = 2i\,t^2$$

3) 積 $f(z(t))\,z'(t)$ を計算する：$f(z(t))\,z'(t) = 2i(1+i)t^2 = 2(i-1)t^2$

4) 積分 $\displaystyle\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dz$ を計算する：

$$\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dz = \int_0^1 2(i-1)t^2\,dz = 2(i-1)\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{2(i-1)}{3}}.$$

複素積分の計算例

問１）関数 $f(z) = z^2$ を次の曲線 C に沿って積分しなさい.

(2) $C : z(t) = t^2 + t^2\, i,\ 0 \le t \le 1$

解） 1) 微分 $z'(t)$ を計算する：$z'(t) = 2t + 2t\, i = 2t(1+i)$

2) $f(z(t))$ を計算する：

$$f(z(t)) = (z(t))^2 = (t^2 + t^2\, i)^2 = t^4(1+i)^2 = t^4(1+2i+i^2) = 2i\, t^4$$

3) $f(z(t))\, z'(t)$ を計算する：$f(z(t))\, z'(t) = 2i(2t + 2t\, i)t^4 = 4(i-1)t^5$

4) 積分 $\displaystyle\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dz$ を計算する：

$$\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dz = \int_0^1 4(i-1)t^5\, dz = 4(i-1)\left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \boxed{\frac{2(i-1)}{3}}.$$

複素積分の計算例

問１）関数 $f(z) = z^2$ を次の曲線 C に沿って積分しなさい.

(3) $C : z(t) = t + t^2\, i,\ 0 \le t \le 1$

解）　1) 微分 $z'(t)$ を計算する：$z'(t) = 1 + 2t\, i$

2) $f(z(t))$ を計算する：$f(z(t)) = (z(t))^2 = (t + t^2\, i)^2 = t^2 + 2t^3\, i - t^4$

3) $f(z(t))\, z'(t)$ を計算する：

$$f(z(t))\, z'(t) = (t^2 - t^4 + 2t^3\, i)(1 + 2t\, i) = t^2 - 5t^4 + (4t^3 - 2t^5)\, i$$

4) 積分 $\displaystyle\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dz$ を計算する：

$$\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dz = \int_0^1 \{t^2 - 5t^4 + (4t^3 - 2t^5)\, i\}\, dz = \left[\frac{t^3}{3} - t^5 + \left(t^4 - \frac{t^6}{3}\right) i\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) i = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i = \boxed{\frac{2(i-1)}{3}}.$$

複素積分の性質

(a) 複素積分は 積分路 C のパラメーターのとり方に依らない.

- 問 (1), (2) の積分路はそれぞれ, $z(t) = (1+i)t$, $z(t) = (1+i)t^2$ であり, これは始点が原点 0 で終点が $1+i$ の線分である.
- 曲線の表記（パラメーター）は異なるが, 曲線としては同じである.

(b) $f(z)$ が正則で, 原始関数 $F(z)$ をもてば,

$$\int_C f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

- (3) の積分路は始点と終点が (1)(2) のそれと一致する.
- $F(z) = \dfrac{z^3}{3}$ とおくと, $F'(z) = f(z)$ である. よって,

$$\int_C f(z)\,dz = F(1+i) - F(0) = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{1+3i+3i^2+i^3}{3} = \frac{2(i-1)}{3}.$$

複素積分の性質

(c) 滑らかな曲線 C を滑らかな曲線の和 $C_1 + C_2$ とみると

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つ.

(d) 滑らかな曲線 C の逆向きの曲線 $-C$ については

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$$

が成り立つ.

閉路に沿った複素積分

問２）曲線 C を点 a を中心とする半径 r の円とする（ただし反時計回りの向きをもとする）．このとき, 次の関数 $f(z)$ を C に沿って積分しなさい.

円の方程式とパラメーター表示について

- 「点 a を中心とする半径 r の円」とは, a との距離が r である点 z の全体.
- よって, 方程式 $|z-a|=r$ を満たす z の全体と考えられる.
- 「$z-a$ は絶対値が r」なので, $z-a=r\,e^{it}=r(\cos t+i\ \sin t)$ と書ける.
- 以上のことから,

$$C:\ z(t)=a+r\,e^{it}=a+r(\cos t+i\ \sin t),\quad 0\le t\le 2\pi$$

と表せることがわかる.

閉路に沿った複素積分

問２）次の関数 $f(z)$ を 円 $C: z(t) = a + re^{it}, 0 \le t \le 2\pi$ に沿って積分しなさい.

(1) $f(z) = z$

解） 1) 微分 $z'(t)$ を計算する：$z'(t) = ir\,e^{it}$

2) $f(z(t))$ を計算する：$f(z(t)) = a + r\,e^{it}$

3) $f(z(t))\,z'(t)$ を計算する：

$$f(z(t))\,z'(t) = (a + r\,e^{it})(ir\,e^{it}) = ir(ae^{it} + r\,e^{2it})$$

4) 積分 $\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dz$ を計算する：

$$\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dz = \int_0^{2\pi} \{a(\cos t + i\ \sin t) + r(\cos 2t + i\ \sin 2t)\}\,dz$$

$$= ir\left[a(-\sin t + i\ \cos t) + r\left(-\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{i}{2}\ \cos 2t\right)\right]_0^{2\pi} = \boxed{0}.$$

閉路に沿った複素積分

問２）次の関数 $f(z)$ を 円 $C: z(t) = a + re^{it}, 0 \le t \le 2\pi$ に沿って積分しなさい.

(2) $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$

解） 1) 微分 $z'(t)$ を計算する：$z'(t) = ir\,e^{it}$

2) $f(z(t))$ を計算する：$f(z(t)) = \dfrac{1}{r\,e^{it}}$

3) $f(z(t))\,z'(t)$ を計算する：$f(z(t))\,z'(t) = \dfrac{1}{r\,e^{it}} \cdot ir\,e^{it} = i$

4) 積分 $\displaystyle\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dz$ を計算する：

$$\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dz = \int_0^{2\pi} i\,dz = 2\pi i.$$

閉路に沿った複素積分

問２）次の関数 $f(z)$ を 円 $C: z(t) = a + re^{it}, 0 \le t \le 2\pi$ に沿って積分しなさい.

(3) $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n} \ (n \ge 0)$

解） 1) 微分 $z'(t)$ を計算する：$z'(t) = ir\,e^{it}$

2) $f(z(t))$ を計算する：$f(z(t)) = \dfrac{1}{r^n\,e^{int}}$

3) $f(z(t))\,z'(t)$ を計算する：$f(z(t))\,z'(t) = \dfrac{1}{r^n\,e^{int}} \cdot ir\,e^{it} = ir^{1-n}\,e^{i(1-n)t}$

4) 積分 $\displaystyle\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dz$ を計算する：

$$\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dz = ir^{1-n}\int_0^{2\pi}\{\cos(1-n)t + i\,\sin(1-n)t\}\,dz$$

$$= ir^{1-n}\left[-\frac{1}{1-n}\sin(1-n)t + \frac{i}{1-n}\cos(1-n)t\right]_0^{2\pi} = 0.$$

まとめと復習（と予習）

- 複素積分の定義（計算方法）は？
- 原始関数をもつ正則関数の複素積分はどのようにして計算できるか？

教科書 **p.153〜158**

問題集 **228 〜 230**

予 習 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-a}$ の計算の見直し（ただし, C は中心 a の円）「応用解析」