

数学クォータ科目「応用解析」第 13 回 / 微分方程式 (3)

定数係数線形同次微分方程式

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 同次形, 線形, ベルヌーイの微分方程式とその一般解

今回の授業で理解してほしいこと

- 定数係数線形同次微分方程式とは何か？
- 定数係数線形同次微分方程式の補助方程式とは何か？
- 2 階定数係数線形同次微分方程式の一般解の求め方は？

2 階線形微分方程式

- 2 階線形微分方程式
 - y, y', y'' に関する 1 次の方程式

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = R(x)$$

2 階線形微分方程式

- 2 階定数係数線形微分方程式
 - y, y', y'' に関する 1 次の方程式
 - y, y', y'' の係数がすべて定数

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = R(x)$$

2 階線形微分方程式

- 2 階定数係数線形同次微分方程式
 - y, y', y'' に関する 1 次の方程式
 - y, y', y'' の係数がすべて定数
 - y に関する 0 次の項が 0

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

注意

- この科目では, 上の微分方程式の一般解について考える.
- n 階線形微分方程式についても, 同様に定義することができる.

線形同次微分方程式の解の性質

定理

$y = u_1(x)$ と $y = u_2(x)$ が線形同次微分方程式

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x) y' + P_0(x) y = 0$$

の解ならば、 $y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ もまた解である（ただし、 c_1, c_2 は任意の定数）。

注意

- この性質を、線形同次微分方程式の解の線形性という。
- 特に、2 階の場合は、2 つの解 $u_1(x), u_2(x)$ が見つければ、 $y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ が一般解であることがわかる。

※ 厳密には、 $u_1(x), u_2(x)$ の線形独立性について考慮する必要がある（教科書 p.34,35）。

微分演算子 $D = \frac{d}{dx}$

- 関数 $F(x)$ と定数 a, b に対し,

- $DF(x) := F'(x)$

- $D^2F(x) := D(DF(x)) = DF'(x) = F''(x)$

- $D^n F(x) = F^{(n)}(x)$

- $(D + a)F(x) := DF(x) + aF(x) = F'(x) + aF(x)$

- $(D^2 + aD + b)F(x) = F''(x) + aF'(x) + bF(x)$

- \vdots

と定める.

- t の実数係数多項式 $f(t)$ に対し, 演算子 $f(D)$ が定まる.

例) $f(t) = t^2 + at + b$ に対し,

$$f(D)F(x) := (D^2 + aD + b)F(x) = F''(x) + aF'(x) + bF(x)$$

定数係数線形微分方程式を微分演算子を用いて表す

事実

定数係数線形微分方程式は、ある多項式 $f(t)$ を利用して、

$$f(D)y = R(x)$$

と表すことができる。

- 例えば, $y'' + 2y' - 3y = R(x)$ は, $f(t) = t^2 + 2t - 3$ とおくことにより, $f(D)y = R(x)$ と表すことができる.
- 定数係数線形同次微分方程式 $f(D)y = 0$ の一般解は, この多項式 $f(t)$ の「形」によって, 完全に決定される.

定数係数線形同次微分方程式の一般解

事実 A : $f(t) = t^n$ のとき

$D^n y = 0$ の一般解は

$$y = c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}$$

定数係数線形同次微分方程式の一般解

事実 B : $f(t) = (t - \alpha)^n$ のとき

$(D - \alpha)^n y = 0$ の一般解は

$$y = e^{\alpha x}(c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1})$$

(証明)

- $D(e^{-\alpha x} F(x)) = -\alpha e^{-\alpha x} F(x) + e^{-\alpha x} F'(x) = e^{-\alpha x} (D - \alpha) F(x)$
- よって, $D^n(e^{-\alpha x} F(x)) = e^{-\alpha x} (D - \alpha)^n F(x)$ が成り立つ.
- つまり, $(D - \alpha)^n y = 0 \iff D^n(e^{-\alpha x} y) = 0$ である.
- 事実 A より, $e^{-\alpha x} y = c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}$

定数係数線形同次微分方程式の一般解

事実 C : $f(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$ (ただし, $\alpha \neq \beta$) のとき —

$(D - \alpha)(D - \beta)y = 0$, つまり, $y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$ の一般解は

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$$

(証明)

- スライド p.5 の定理 より, 2つの解 $u_1(x), u_2(x)$ が求まれば,
 $y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ が一般解であることがわかる.
- $(D - \beta)y = 0$ の解は, $(D - \alpha)(D - \beta)y = 0$ の解でもある.
変数分離形微分方程式 $y' = \beta y$ の解は, $y = e^{\beta x}$
- 同様に, $(D - \alpha)y = 0$ の解 $y = e^{\alpha x}$ は, $(D - \beta)(D - \alpha)y = 0$ の解でもある.
- 以上のことから, 一般解が導かれる.

定数係数線形同次微分方程式の一般解

補助方程式

定数係数線形同次微分方程式 $f(D)y = 0$ に対し、
方程式 $f(t) = 0$ をこの微分方程式の補助方程式という。

2 階定数係数線形同次微分方程式の一般解

微分方程式 $f(D)y = 0$ の補助方程式 $f(t) = 0$ の解が

- (1) 重解 $t = \alpha$ のとき,
一般解は $y = e^{\alpha x}(c_1 + c_2 x)$ である.
- (2) 異なる 2 つの実数解 $t = \alpha, \beta$ のとき,
一般解は $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$ である.
- (3) 実数解を持たない場合は？

定数係数線形同次微分方程式の一般解

(再掲) 事実 C : $f(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$ (ただし, $\alpha \neq \beta$) のとき

$(D - \alpha)(D - \beta)y = 0$, つまり, $y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$ の一般解は

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$$

- 2次方程式の解が実数でない場合, その解は $t = \lambda \pm \mu i$ と表される.
- 上の結果を α, β が実数でない場合についても, 形式的にあてはめると

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{(\lambda + \mu i)x} + c_2 e^{(\lambda - \mu i)x} \\ &= c_1 e^{\lambda x} \{\cos(\mu x) + i \sin(\mu x)\} + c_2 e^{\lambda x} \{\cos(\mu x) - i \sin(\mu x)\} \\ &= i(c_1 - c_2) e^{\lambda x} \sin(\mu x) + (c_1 + c_2) e^{\lambda x} \cos(\mu x) \\ &= C_1 e^{\lambda x} \sin(\mu x) + C_2 e^{\lambda x} \cos(\mu x) \end{aligned}$$

定数係数線形同次微分方程式の一般解

2 階定数係数線形同次微分方程式の一般解（完全版）

微分方程式 $f(D)y = 0$ の補助方程式 $f(t) = 0$ の解が

(1) 重解 $t = \alpha$ のとき,

一般解は $y = e^{\alpha x}(c_1 + c_2 x)$ である.

(2) 異なる 2 つの実数解 $t = \alpha, \beta$ のとき,

一般解は $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$ である.

(3) 虚数解 $t = \lambda \pm i\mu$ のとき,

一般解は $y = C_1 e^{\lambda x} \sin(\mu x) + C_2 e^{\lambda x} \cos(\mu x)$ である.

まとめと復習

- 定数係数線形同次微分方程式 とはどのような微分方程式ですか？
- 定数係数線形同次微分方程式の 補助方程式 とは何ですか？
- 2階定数係数線形同次微分方程式の一般解はどのようにして求めることができますか？

教科書 p.33～43

問題集 250, 251, 252, 253