【復習】１変数関数のべき級数展開

１変数関数のマクローリン展開

関数 $f(x)$ が $x=0$ のまわりで連続かつ微分可能で, 収束半径が ρ であるとする. このとき, $-\rho < x < \rho$ ならば,

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots.$$

これと合成関数の考え方を利用して, ２変数関数をべき級数展開する.

２変数関数のべき級数展開（考え方）

２変数関数 $f(x,y)$ に対し,

1) $x(t) = a + ht$, $y(t) = b + kt$（a,b,h,k は定数）との合成関数を考える;
$F(t) := f(a+ht, b+kt)$

2) $F(t)$ をマクローリン展開すると,
$$F(t) = F(0) + F'(0)\,t + \frac{F''(0)}{2}\,t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}\,t^n + \cdots$$

3) $t=1$ のとき,
$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$
$$\to\ f(a+h, b+k) = f(a,b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

$F^{(n)}(0)$ は, どのように表されるだろうか？

合成関数 $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ の導関数

合成関数の微分

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t)) = f_x(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)$$

$F(t) = f(a+ht, b+kt)$,　　（a,b,h,k は定数）

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(a+ht,b+kt)\cdot(a+ht)' + f_y(a+ht,b+kt)\cdot(b+kt)' \\ &= f_x(a+ht,b+kt)\,h + f_y(a+ht,b+kt)\,k \\ \therefore\ F'(0) &= f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k \end{aligned}$$

合成関数 $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ の２次導関数

合成関数の微分

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t)) = f_x(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)$$

$F(t) = f(a+ht, b+kt)$,　　（a,b,h,k は定数）

$F'(t) = f_x(a+ht,b+kt)\,h + f_y(a+ht,b+kt)\,k$,　 $F'(0) = f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt}\{f_x(a+ht,b+kt)\}\,h + \frac{d}{dt}\{f_y(a+ht,b+kt)\}\,k \\ &= \{f_{xx}(a+ht,b+kt)\,h + f_{xy}(a+ht,b+kt)\,k\}\,h \\ &\quad + \{f_{yx}(a+ht,b+kt)\,h + f_{yy}(a+ht,b+kt)\,k\}\,k \\ &= f_{xx}(a+ht,b+kt)\,h^2 + 2f_{xy}(a+ht,b+kt)\,hk + f_{yy}(a+ht,b+kt)\,k^2 \\ \therefore\ F''(0) &= f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2 \end{aligned}$$

合成関数 $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ の高次導関数

- $F(t) = f(a+ht, b+kt)$,　　（a,b,h,k は定数）
- $F'(t) = f_x(a+ht,b+kt)\,h + f_y(a+ht,b+kt)\,k$
- $F'(0) = f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k$
- $F''(t) = f_{xx}(a+ht,b+kt)\,h^2 + 2f_{xy}(a+ht,b+kt)\,hk + f_{yy}(a+ht,b+kt)\,k^2$
- $F''(0) = f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2$

→ $F''(t)$, および $F''(0)$ の右辺において, ２次の偏導関数の係数に着目すると, $(h+k)^2$ の各項であることに気づく.

⋮

- $F^{(n)}(0) = \left(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)$

２変数関数のテイラー展開, マクローリン展開

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots \\ &= f(a,b) + f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2\right) + \\ &\quad + \cdots \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b) + \cdots \end{aligned}$$

↓（$a+h=x, b+k=y$ とおくと）

テイラー展開：$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-b) + \cdots$

↓（$x=0, y=0$ とおくと）

マクローリン展開：$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y + \cdots$