線形代数 II 演習

－ (8) 2 次正方行列の行列式（クラメールの公式，一次変換） －

担当：佐藤 弘康

行列式

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，スカラー

$$\det(A) = ad - bc$$

を行列 A の行列式と呼ぶ.

クラメールの公式

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

の解は

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

で与えられる．ただし，$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ とする.

問題 8.1. クラメールの公式を用いて次の連立方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$

一次変換

2 次正方行列 A に対し，平面 $\mathbf{R}^2$ の点（ベクトル）を $\mathbf{R}^2$ の点に移す写像 $\varphi_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $\varphi_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定義することができる ($\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$)．この写像 φ_A を行列 A から定まる一次変換（または線形変換）と呼ぶ（教科書 p.60 を参照）．

問題 8.2. 次の 2 次正方行列に対して，それが定める一次変換がどのような写像か説明せよ（平面内の点をどのように移すか調べよ）．

(1) $E_1(k) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

例題 8.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が定める $\mathbf{R}^2$ の一次変換 φ_A により，方程式 $y = 2x - 1$ が定める直線がどのような直線に移るか調べよ．

解. $y = 2x - 1$ は次のように媒介変数表示することができる;

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

したがって，この直線上の点は $(t, 2t-1)$ $(t \in \mathbf{R})$ と書くことができ，変換 φ_A により

$$(t, 2t-1) \xrightarrow{\varphi_A} (-t+1, t)$$

に移る．$x = -t+1$, $y = t$ とおいて，t を消去すると $y = -x + 1$ を得る．したがって，φ_A により，$y = 2x - 1$ は直線 $y = -x + 1$ に移る．

問題 8.3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ が定める一次変換 φ_A により，次の方程式が定める直線がどのようなものに移るか調べよ．

(1) $y = 2x + 1$　　(2) $y = -3x - 2$

問題 8.4. 平面 $\mathbf{R}^2$ 上の 4 点 $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ を頂点とする正方形の領域は行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ が定める一次変換でどのような領域に移るか（$\det(A) \neq 0$ を仮定）．

□ 行列式の符号について

2 次正方行列 A は平面の一次変換 φ_A を定め，平面内の図形を φ_A で移すと，その面積は $|\det(A)|$ 倍される．一次変換とは，原点を中心とした回転作用や，ある方向へ平面全体を伸ばしたり，縮めたりする作用を何回か施す変換である．$\det(A) \neq 0$ のとき，変換 φ_A を施すことにより，平面内の図形は伸びたり縮んだりするものの，だいたいの形は変わらない．ただし，行列式が負の行列の場合は，その作用により図形は裏返ってしまう (下図参照)．また，行列式が 0 の場合，平面内の図形は直線か 1 点に縮んでしまう．

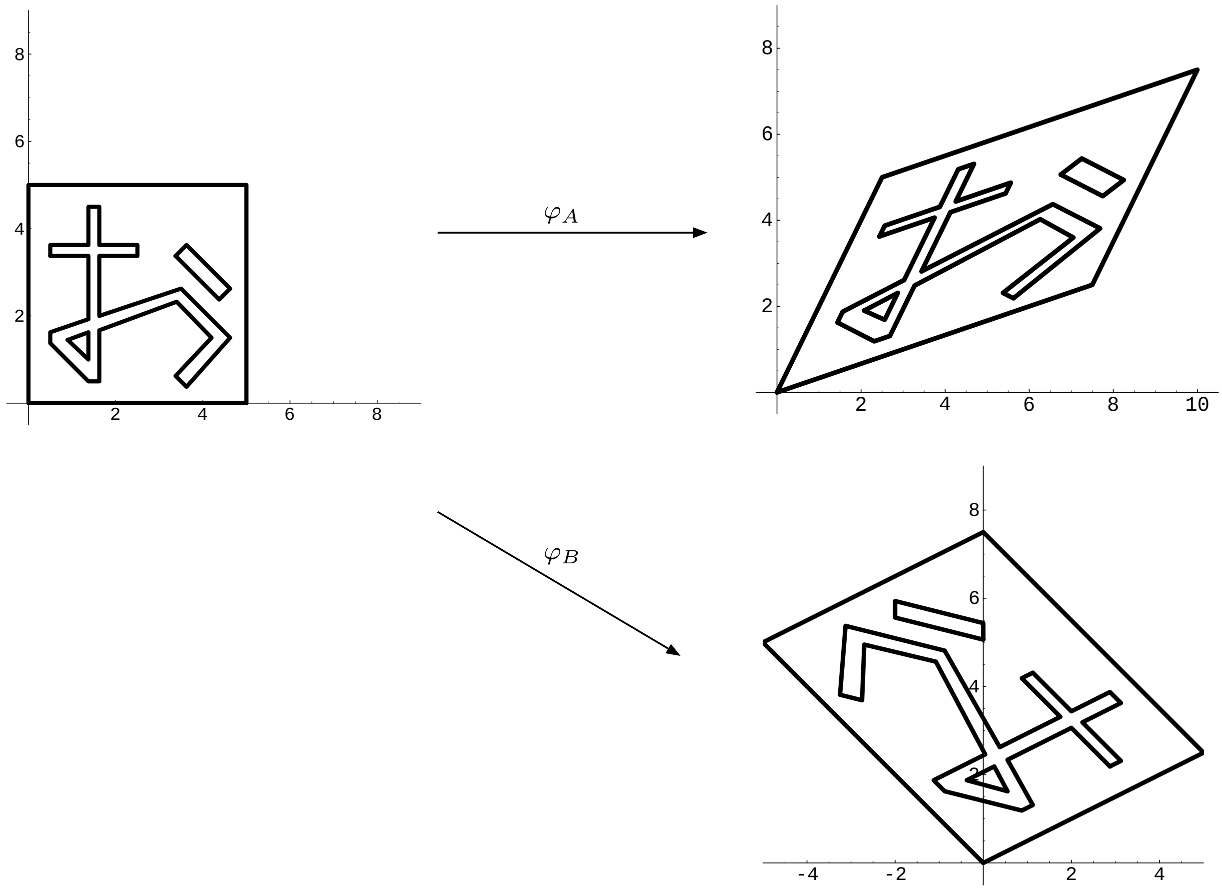

図: 一次変換による像． $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$