数学クォータ科目「基礎数学 II」第 5 回

不定積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

これまでのまとめ（1）

関数 $y = f(x)$ がある．

- $x = a$ から $x = b\ (= a + h)$ までの平均変化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$\leftarrow$ 2 点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の傾き

- $x = a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

$\leftarrow$ 点 $(a, f(a))$ における接線の傾き

- 導関数 $\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$

これまでのまとめ（2）

- 基本的な関数の微分

(2-1) $(k)' = 0$（すなわち，定数関数の微分は消える）

(2-2) $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ (α は実数)

(2-3) $(\sin x)' = \cos x$

(2-4) $(\cos x)' = -\sin x$

(2-5) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(2-6) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

(2-7) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$　　特に，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(2-8) $(a^x)' = a^x \log a$　　特に，$(e^x)' = e^x$

これまでのまとめ（3）

- **微分公式**

(3-1) **合成関数の微分：** $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$

特に， $\dfrac{d}{dx}f(ax+b) = a\,f'(ax+b)$

(3-2) **積の微分公式：** $\{f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

(3-3) **商の微分公式：** $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

特に， $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$

(3-4) **対数微分法：** $f'(x) = f(x)\cdot(\log f(x))'$

今週のこと

- 原始関数と不定積分
- 基本的な関数の不定積分
- $\dfrac{d}{dx}f(ax+b) = a\,f'(ax+b)$ を利用した不定積分の計算
- 置換積分法（↔ 合成関数の微分の公式）
- 部分積分法（↔ 積の微分の公式）
  - いずれの方法も被積分関数を積分ができる形に直して積分する．

原始関数

- 関数 $f(x)$ に対し, $\boxed{F'(x) = f(x)}$ を満たす関数 $F(x)$ のことを「$f(x)$ の**原始関数**」という.

$$\boxed{F(x)} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \boxed{f'(x)}$$

$f(x)$ の**原始関数**　　　　　　　　　　$f(x)$ の**導関数**

- $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば, 任意の定数 C を加えた関数 $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である.
  - なぜなら, 定数関数の微分は 0 だから, $F'(x) = f(x)$ ならば, $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x)$ である.
  - つまり, $f(x)$ の原始関数は一意には決まらず, **無数に存在する**.

不定積分

- $F(x)+C$ のことを「$f(x)$ の不定積分」とよび，$\displaystyle\int f(x)\,dx$ と書く；

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \qquad \text{（C を積分定数とよぶ）}$$

- $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)+C$
- 不定積分とは「$f(x)$ の原始関数全体を表すもの」と解釈できる．
- 不定積分の性質 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し，
  - $\displaystyle\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
  - $\displaystyle\int \{k\,f(x)\}\,dx = k\int f(x)\,dx$

基本的な関数の不定積分 (I)

- $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C & (\alpha \neq -1) \\ \log|x| + C & (\alpha = -1) \end{cases}$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C = -\cot x + C$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

基本的な関数の不定積分 (II)

- $\dfrac{d}{dx}F(ax+b) = a\,F'(ax+b)$
- $F'(x) = f(x)$ のとき，$\dfrac{d}{dx}F(ax+b) = a\,F'(ax+b) = a\,f(ax+b)$.
- $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$
- よって，

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

基本的な関数の不定積分 (II)

- $$\int (ax+b)^\alpha\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}\cdot\dfrac{1}{a}(ax+b)^{\alpha+1} + C & (\alpha \neq -1) \\ \dfrac{1}{a}\log|ax+b| + C & (\alpha = -1) \end{cases}$$
- $$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$
- $$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$
- $$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$$
- $$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\,dx = -\frac{1}{a\tan(ax+b)} + C = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$$
- $$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

置換積分法

- 積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ において，$x = g(t)$ と置き換えるとき，

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

考え方 $x = g(t)$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$.
この式から形式的に得られる $dx = g'(t)\,dt$ を代入する.

（証明）$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると，合成関数の微分の公式 より

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int F'(g(t))\,g'(t)\,dt = \int \frac{d}{dt}F(g(t))\,dt$$

$$= F(g(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)\,dx$$

置換積分法

- 積分 $\int f(x)\,dx$ において，$\boxed{x = g(t)}$ と置き換えるとき，

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

- x の式を t と置き換えてもよい．

問１）$f(x) = \tan x$ の不定積分を，$\sin x = t$ と置換して求めなさい.

部分積分法

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

- 2 つの関数の積となっている関数を積分するときに有用な方法．
- 一方の関数を ある関数の微分 とみる．
  （つまり，一方の 関数の原始関数 を求める必要がある．）
- 2 つの関数のうち，どちらを $g'(x)$ とみるのか？
  - 微分することにより「簡単な」関数になる方を $f(x)$ とする．

例１）n 次関数は微分すると次数がひとつ下がり，より簡単な関数になる．

例２）三角関数 $\sin x$, $\cos x$ や指数関数 e^x は，微分しても「変わらない」ため，関数として簡単にはならない．

部分積分法

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

問２）$I = \displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めなさい．

- 被積分関数は x と $\cos x$ の積なので，部分積分法が有効である．
- この２つを比較すると，x の方が微分すると簡単な関数となるため，$f(x) = x, g'(x) = \cos x$ として部分積分する．

解）$\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$ より，

$$I = \int x(\sin x)'\,dx = x\ \sin x - \int (x)'\ \sin x\,dx$$

$$= x\ \sin x - \int \sin x\,dx = x\ \sin x - (-\cos x) = \underline{x\ \sin x + \cos x + C}.$$

部分積分法

問３）$I = \int e^x \cos x \, dx$ を求めなさい．

- 被積分関数は e^x と $\cos x$ の積だが，どちらも微分によって「簡単な」関数にはならない．
- このような場合，どちらか一方（のタイプ）を $g'(x)$ と見て部分積分を繰り返すことで，次のようにして I の値が求まる．

部分積分法

問３）$I = \displaystyle\int e^x \cos x \, dx$ を求めなさい．

解）方針：三角関数の方を $g'(x)$ と考える．

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^x (\sin x)' \, dx = e^x \sin x - \int (e^x)' \sin x \, dx \\
&= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x (-\cos x)' \, dx \\
&= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int (e^x)' (-\cos x) \, dx \right) \\
&= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \boxed{\int e^x \cos x \, dx} \right) \\
&= e^x \sin x - (-e^x \cos x + I) = e^x \sin x + e^x \cos x - I. \\
2I &= e^x (\sin x + \cos x) \\
\therefore \ I &= \underline{\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)}
\end{aligned}
$$

部分積分法

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

（証明）積の微分の公式 $\boxed{\dfrac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)}$ より，

$$f(x)\,g(x) = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx.$$

右辺の第 2 項を移項すれば，部分積分の式が得られる．（証明終）

- 特に，$f(x) = f(x)\cdot 1 = f(x)\cdot(x)'$ より，

$$\int f(x)\,dx = x\,f(x) - \int x\,f'(x)\,dx$$

問４）上の公式を利用し，$f(x) = \log x$ の不定積分を求めなさい．