

微積分 I 演習

－ 第 2 回 実数上の関数 －

担当：佐藤 弘康

基本問題. 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

- (1) 関数とは何か. 関数の定義域, 値域とは何か.
- (2) 関数 f の逆関数とはどのような関数か.
- (3) 逆三角関数 ($\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$) とはどのような関数か.

問題 2.1. 実数全体で定義された次の関数^{*1}の値域がどのような集合 (区間) になるか調べよ (また, 定義域と値域が一一に対応しているか調べよ).

$$(1) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (3) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

例題 2.1. 関数 $f(x) = x^2 - 4x + 1$ の逆関数を求めよ.

解. 関数 $f(x)$ の逆関数の求め方は, $y = f(x)$ とおいた式を x について解き, その式の y と x を入れ替えたものを $y = g(x)$ とするとき, $g(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ である^{*2}.

$y = x^2 - 4x + 1$ とおいて, x について平方完成すると $(x - 2)^2 - y - 3 = 0$. したがって,

$$x - 2 = \pm \sqrt{y + 3}.$$

ここで, $x \geq 2$ のとき $x = 2 + \sqrt{y + 3}$, $x < 2$ のとき $x = 2 - \sqrt{y + 3}$. したがって, $f(x)$ の定義域を $\{x \mid x \geq 2\}$ に制限したときの関数 $f(x)$ の逆関数は

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x + 3}$$

^{*1} これらの関数を双曲線関数と呼び, それぞれ $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ と書く. 双曲線関数の性質については教科書 p.34 の演習問題を参照せよ (計算せよ).

^{*2} この説明は大雑把. 厳密には定義域と値域が一一に対応しているか調べなければならない. 一一に対応してなくても定義域を制限する (小さくする) ことで, 逆関数を定義することができる

で, $f(x)$ の定義域を $\{x \mid x < 2\}$ に制限したときの $f(x)$ の逆関数は

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+3}$$

である. また, どちらの場合も f^{-1} の定義域は $\{x \mid x \geq -3\}$ である.

問題 2.2. 次の関数の逆関数を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0) & (2) f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ (3) f(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & (4) f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

例題 2.2. 次の値を求めよ.

$$\sin^{-1} \frac{5}{13} + \sin^{-1} \frac{12}{13}$$

解. $\theta = \sin^{-1} \frac{5}{13}$, $\varphi = \sin^{-1} \frac{12}{13}$ とおくと, \sin^{-1} の定義から $\theta, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. また, $\sin \theta = \frac{5}{13}$, $\sin \varphi = \frac{12}{13}$ であるから,

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

ここで,

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta = \left(\frac{5}{13}\right) \left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{12}{13}\right) \left(\frac{12}{13}\right) = 1.$$

したがって, $-\pi \leq \theta + \varphi \leq \pi$ より, $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$.

問題 2.3. 次の問に答えよ.

- (1) $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$ を示せ.
- (2) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin^{-1} x$ とおく. このとき, $f(g(x)) = x$ であることを確かめよ. また, $g(f(x))$ はどのような値をとるか考察せよ.
- (3) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$ の値を求めよ.
- (4) $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3$ の値を求めよ