数学クォータ科目「数学」第２回 (2/3)

# １変数関数のべき級数展開

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

# テイラーの定理

**テイラーの定理**（p.62, 定理 1.）

関数 $f(x)$ が $a < b$ を含む開区間 $I$ で $n$ 回微分可能ならば,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \boxed{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n} \qquad (1)$$

を満たす $c$ $(a < c < b)$ が存在する. ここで, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

注

1. (1) の最後の項 $R_n := \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$ を剰余項とよぶ.
2. (1) は $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n$ と書ける.

# $n = 1$ の場合のテイラーの定理

**定理（平均値の定理）**

関数 $f(x)$ が $a < b$ を含む開区間 $I$ で 1 回微分可能ならば,

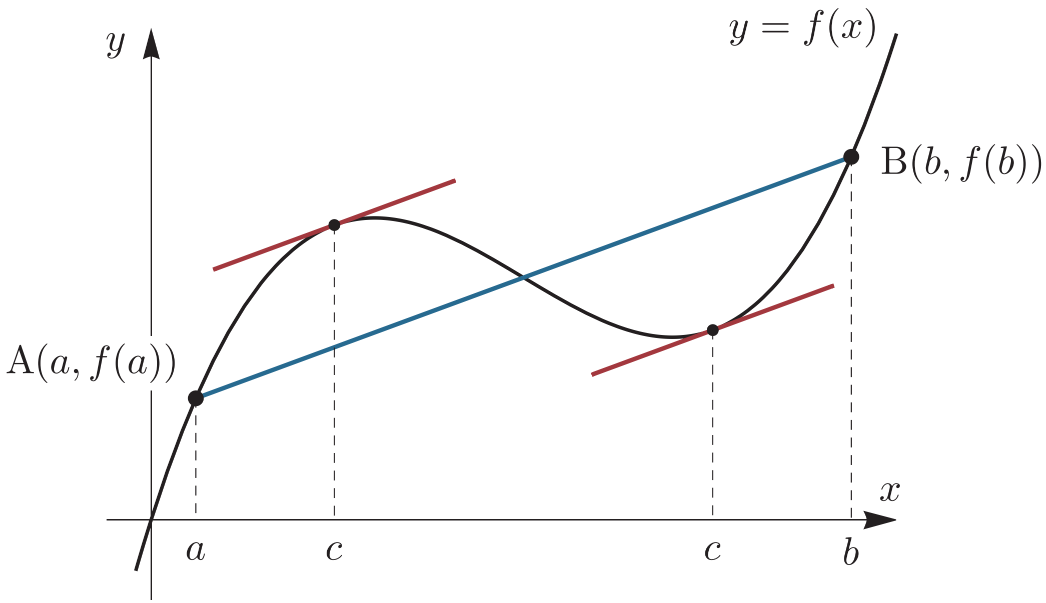
$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a) \tag{2}$$

を満たす $c$ $(a < c < b)$ が存在する.

$$(2) \iff \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} = \boxed{f'(c)}$$

（左辺） 2 点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の傾き

（右辺） $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(c, f(c))$ における接線の傾き



# テイラー展開

テイラーの定理の式 (1) おいて,

- 定数 $b$ を 変数 $x$ にかえると,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \boxed{R_n}$$

- この変数が $a$ に十分近い値のとき（つまり, $a-\rho < x < a+\rho$）, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ であるならば,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

- このべき級数を「$x = a$ における $f(x)$ のテイラー展開」 または「テイラー級数」という.

# マクローリン展開

- 特に, $x = 0$ における $f(x)$ のテイラー展開

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots$$

のことを「$f(x)$ のマクローリン展開」という.

- 「$-\rho < x < \rho$ ならば, 剰余項 $R_n$ が $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$」を満たす最大の $\rho$ のことを,「$f(x)$ の収束半径」という.

- マクローリン展開の式において未知の値は,

$$f(0), f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0), \ldots$$

である. つまり, $f(x)$ のマクローリン展開を求めるためには, $f(x)$ の $x = 0$ における関数値, 微分係数, 高次微分係数を求めれば良い.

# マクローリン展開の求め方

例１） $f(x) = e^x$

$\boxed{1}$ $f(x)$ の導関数 $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ を求める.

指数関数 $f(x) = e^x$ は, 微分しても不変である.

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = e^x.$$

$\boxed{2}$ $x = 0$ における値 $f(0), f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ を求める.

(1) の結果から, それらの $x = 0$ における値はすべて $1$ である.

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

$\boxed{3}$ マクローリン展開の式にあてはめる.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

# マクローリン展開の例

$$(1)\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \boxed{\frac{x^n}{n!}} + \cdots$$

（※右辺のべき級数は微分しても不変）

$$(2)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \boxed{(-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}} + \cdots$$

（※偶関数 $f(-x) = f(x)$）

$$(3)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \boxed{(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}} + \cdots$$

（※奇関数 $f(-x) = -f(x)$）

$$(4)\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + \boxed{x^n} + \cdots$$

$$(5)\quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + \boxed{(-1)^n x^n} + \cdots$$

$$(6)\quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \boxed{(-1)^n \frac{x^n}{n}} + \cdots$$

（※ (6) の右辺を微分すると (5) の右辺に等しいことがわかる）

# 近似多項式

- $x = a$ のおけるテイラー展開の式において, $n$ 次の項までの $n$ 次多項式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

を, $x = a$ における $f(x)$ の $n$ 次近似式という.

- $x = a + h$（$h$ は十分小）とした式は, $f(a+h)$ の近似値と解釈できる;

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)\,h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

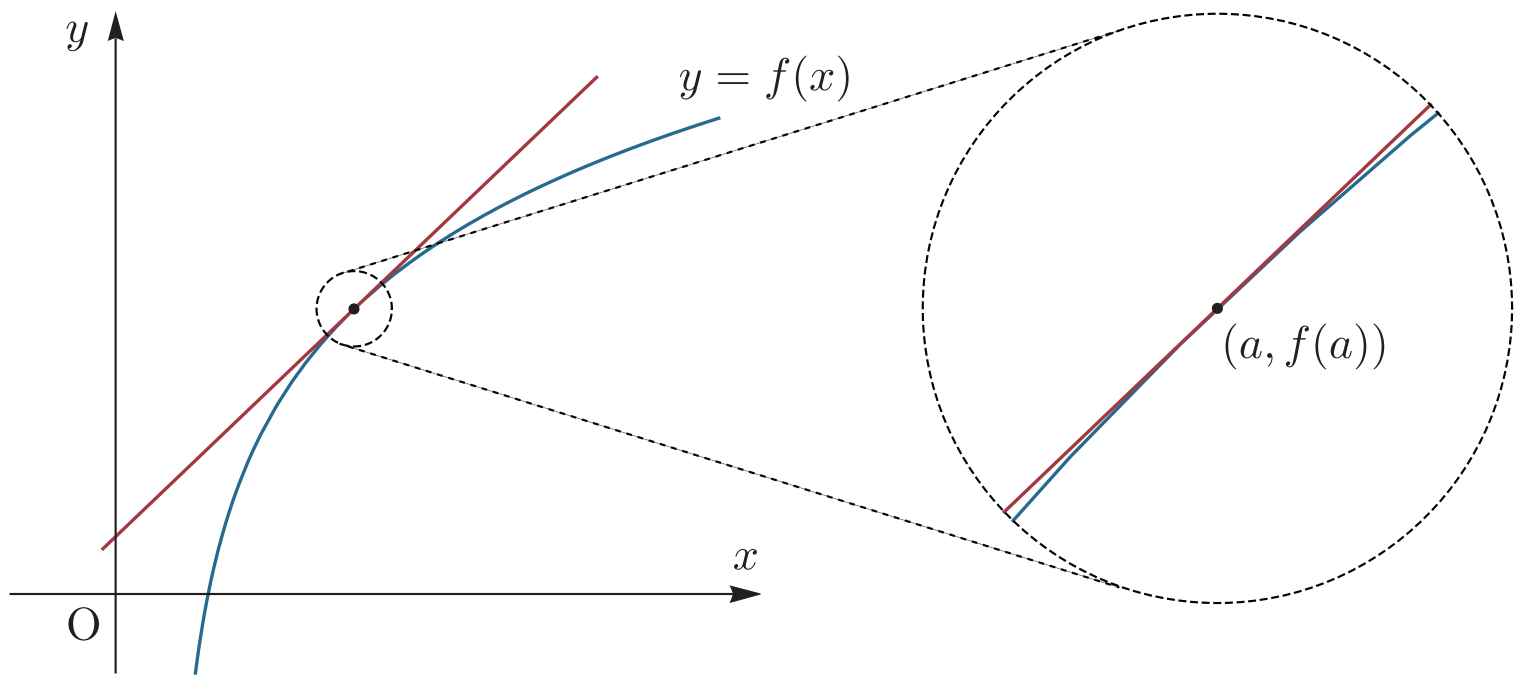
# 近似多項式

- $x = a$ のおけるテイラー展開の式において, $n$ 次の項までの $n$ 次多項式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

を, $x = a$ における $f(x)$ の $n$ 次近似式という.

  - １次近似：$y = f(a) + f'(a)(x-a)$ （※ $x = a$ における接線の方程式）



# 近似多項式

- $x=a$ のおけるテイラー展開の式において, $n$ 次の項までの $n$ 次多項式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

  を, $x=a$ における $f(x)$ の $n$ 次近似式という.

  - １次近似：$y=f(a)+f'(a)(x-a)$　（※ $x=a$ における接線の方程式）
  - ２次近似：$y=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

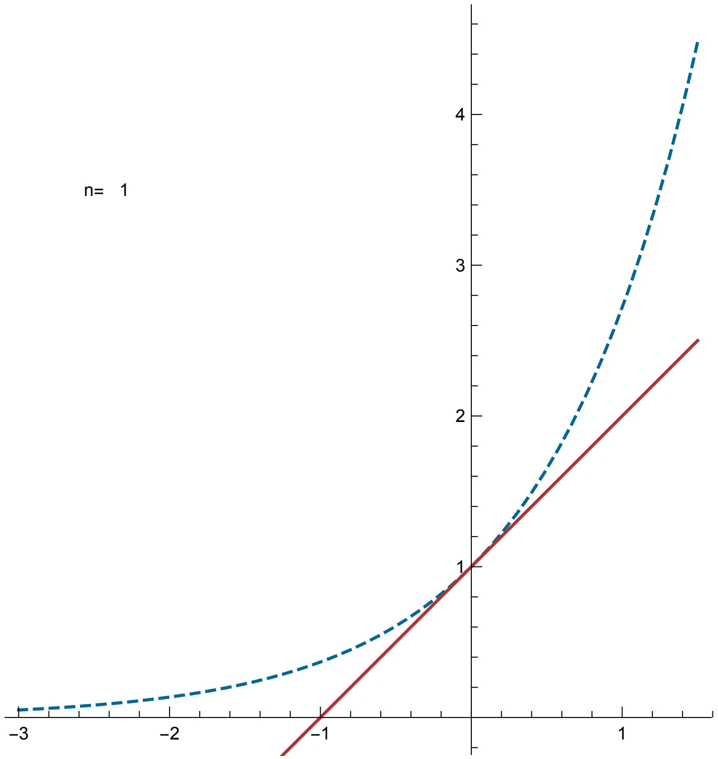
    $\vdots$

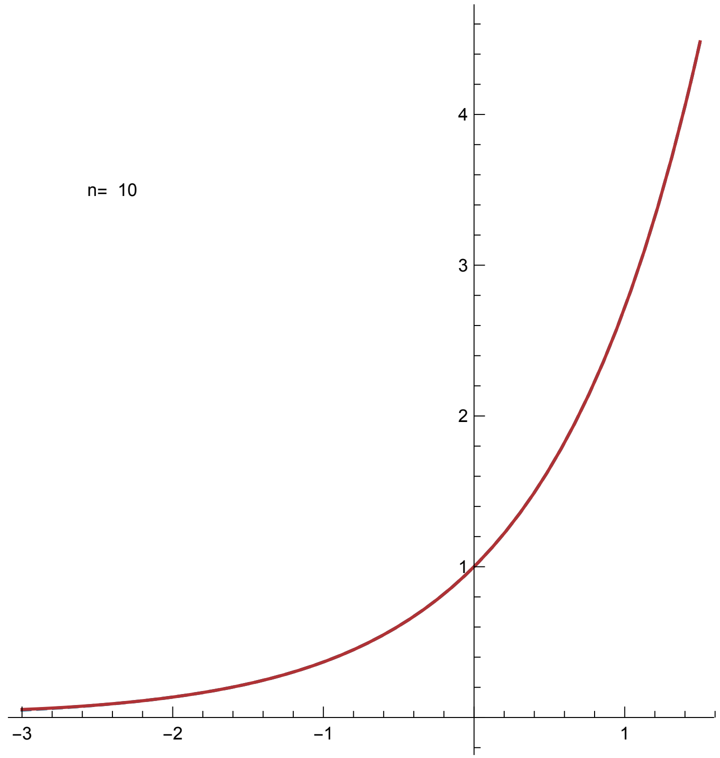
- 近似多項式を利用して, 近似値を求めることができる.

# マクローリン展開の例（1）指数関数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \boxed{\frac{x^n}{n!}} + \cdots$$

- $n$ 次近似多項式のグラフ



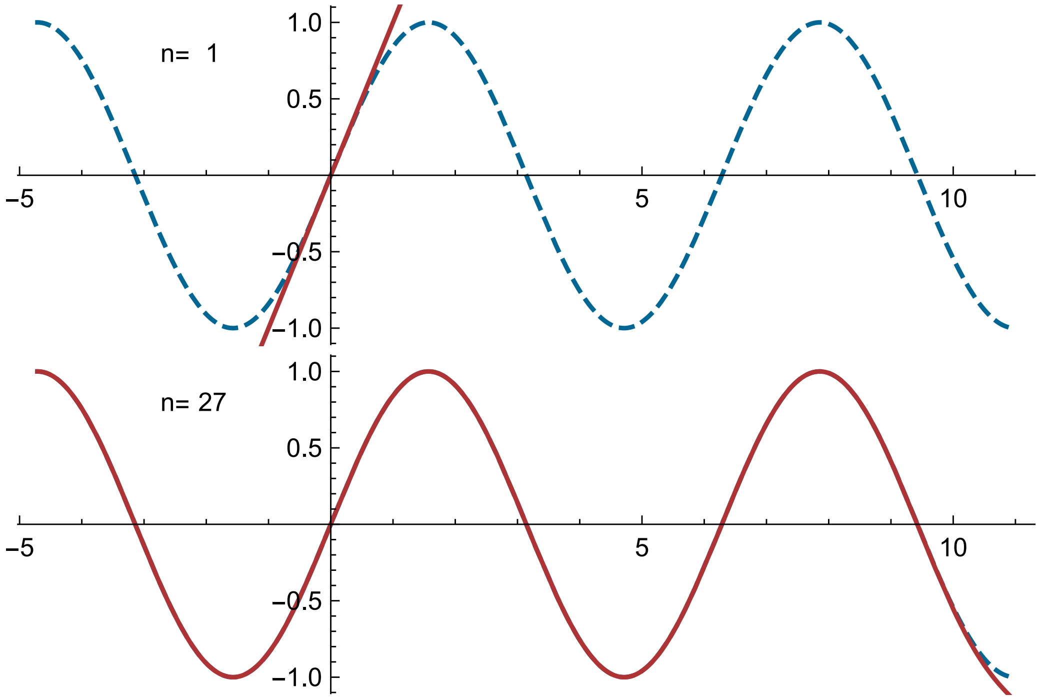




- $n$ を十分大きくとることで, 任意の範囲で近似できる（収束半径は $\infty$）.

# マクローリン展開の例（２）正弦関数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \boxed{(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}} + \cdots$$

- $n$ 次近似多項式のグラフ

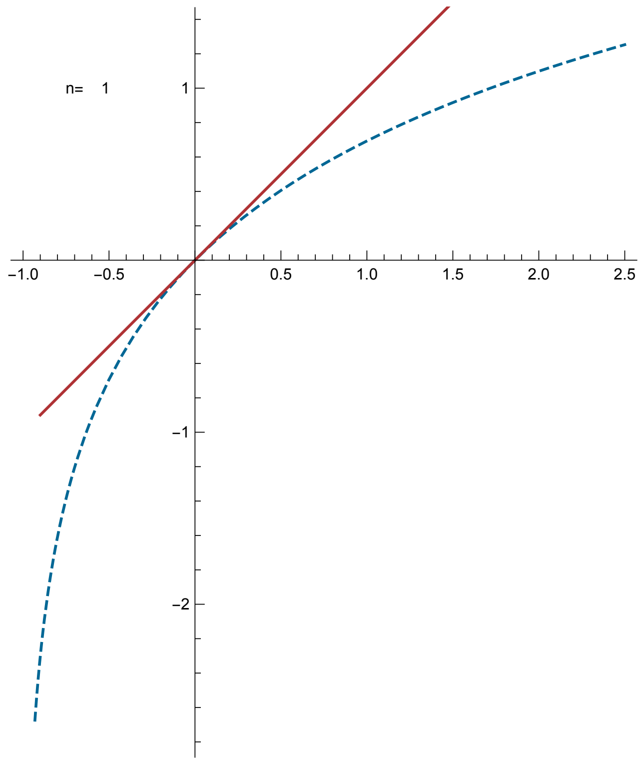


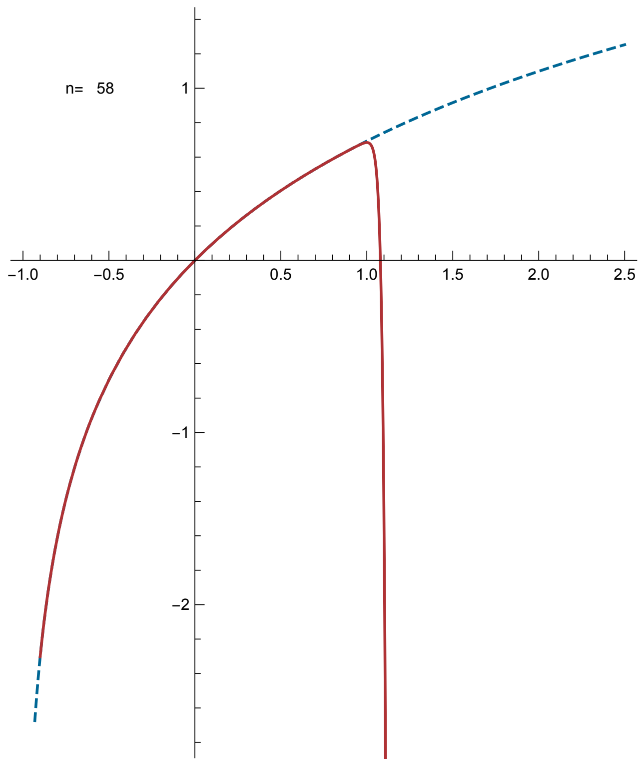

- $n$ を十分大きくとることで, 任意の範囲で近似できる（収束半径は $\infty$）.

# マクローリン展開の例（３）対数関数

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \boxed{(-1)^n \frac{x^n}{n}} + \cdots$$

- $n$ 次近似多項式のグラフ






- $n$ をいくら大きくとっても, $|x| \geq 1$ では近似できない（収束半径は 1）．

# マクローリン展開を利用して近似値の計算する

**マクローリン展開の近似多項式**

$$f(h) \fallingdotseq f(0) + f'(0)\,h + \frac{f''(0)}{2}\,h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,h^n$$

例） $\sqrt{1.3}$ の近似値を求めなさい.

$f(x) = \sqrt{x+1}$ とおくと, $\sqrt{1.3} = f(0.3)$ である. $0.3$ を十分小さい値と考えて, 上の近似式を利用する.

注 近似の精度は, $h$ と $n$ の大きさに依存する.

- 問題集の **144** について, 求めた近似値と真の値との誤差を調べてみよう.
- また, $3$ 次の近似多項式を用いて求めた近似値だと, どの程度精度が向上するか調べてみよう（教科書 p.64［注意］を参照）.