問題 12.12 (1) $A \cdot \widetilde{A} = |A|E_n$ の両辺の行列式をとると，$|A| \cdot |\widetilde{A}| = |A|^n$．したがって，$|A|\left(|\widetilde{A}| - |A|^{n-1}\right) = 0$ を得る．(i) $|A| \neq 0$（つまり，A が正則）ならば，$|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$．(ii) $|A| = 0$ のときは背理法を用いる．$|\widetilde{A}| \neq 0$ を仮定する．つまり，$\widetilde{A}$ は正則行列なので，逆行列 $\widetilde{A}^{-1}$ が存在する．$A \cdot \widetilde{A} = O$ に右から $\widetilde{A}^{-1}$ をかけると，$A = O$ となる．しかし，$\widetilde{A} = \widetilde{O} = O$ であるから，これは $|\widetilde{A}| \neq 0$ とした仮定に矛盾する．したがって，$|\widetilde{A}| = 0$ を得る．

以上のことから，$|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$ となることが証明された．

(2) $A \cdot \widetilde{A} = |A|E_n$ より，$A = |A|\left(\widetilde{A}\right)^{-1}$ [*1]．また，$A^{-1} \cdot \widetilde{A^{-1}} = |A^{-1}|E_n = |A|^{-1}E_n$ であるから，この式の両辺に左から A をかければ，$\widetilde{A^{-1}} = |A|^{-1}A$ を得る．したがって

$$\widetilde{A^{-1}} = |A|^{-1}A = |A|^{-1} \cdot |A|\left(\widetilde{A}\right)^{-1} = \left(\widetilde{A}\right)^{-1}.$$

(3) $B = {}^t A$ とおくと，小行列の定義より $B_{ji} = A_{ij}$．このとき，

$$\begin{aligned}\left({}^t(\widetilde{A}) \text{ の } (i,j) \text{ 成分}\right) &= \left(\widetilde{A}\text{の } (j,i) \text{ 成分}\right) \\ &= (-1)^{i+j}|A_{ij}| \\ &= (-1)^{i+j}|B_{ji}| \\ &= \left(\widetilde{B}\text{の } (i,j) \text{ 成分}\right).\end{aligned}$$

これで，${}^t(\widetilde{A}) = \widetilde{B} = \widetilde{{}^t A}$ が証明された．

問題 13.1 (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -14$．したがって

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 11 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = -1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix}}{14} = 3.$$

[*1] A が正則ならば，$\widetilde{A}$ も正則であることが (1) の結果からわかる．

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -120$. したがって

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 1 & -3 & -4 \\ -6 & 1 & 5 & 1 \\ -10 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-120} = -2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6 & -3 & -4 \\ 2 & -6 & 5 & 1 \\ 2 & -10 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-120} = 1,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 \\ 2 & 1 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & -10 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-120} = -1, \quad w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & 2 & -10 \\ 3 & 6 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{-120} = 2.$$

(4) ファンデルモンドの公式を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

したがって

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e & b & c & d \\ e^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ e^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)} \\ &= \frac{(e-b)(e-c)(e-d)(b-c)(b-d)(c-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)} \\ &= \frac{(e-b)(e-c)(e-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}. \end{aligned}$$

同様に,

$$y = \frac{(a-e)(e-c)(e-d)}{(a-b)(b-c)(b-d)}, \quad z = \frac{(a-e)(b-e)(e-d)}{(a-c)(b-c)(c-d)}, \quad w = \frac{(a-e)(b-e)(c-e)}{(a-d)(b-d)(c-d)}.$$

問題 13.2 (1) $\Phi_A(x) = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$. 固有値は $1, 4$.

(2) $\Phi_A(x) = x^2 - 4x - 2$. 固有値は $2 \pm \sqrt{6}$.

(3) $\Phi_A(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$. 固有値は $1, 2$.

(4) $\Phi_A(x) = (x-4)(x^2-6x+11)$．固有値は $4, 3\pm\sqrt{-2}$．

(5) $\Phi_A(x) = x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = (x+3)(x-3)(x-9)$．固有値は $-3, 3, 9$．

問題 13.3

$$\begin{aligned}\Phi_{P^{-1}AP}(x) =& |xE_n - P^{-1}AP| \\ =& |P^{-1}(xE_n - A)P| \\ =& |P|^{-1}\cdot|xE_n - A|\cdot|P| = \Phi_A(x).\end{aligned}$$

問題 13.4 A を正則行列とする．A が固有値 0 をもつとすると，

$$0 = \Phi_A(0) = |0\cdot E_n - A| = (-1)^n|A|.$$

これは A を正則行列とした仮定に反する．

問題 13.5 (1)

$$\begin{aligned}\Phi_A(x) &= |xE_n - A| = |{}^t(xE_n - A)| \\ &= |x{}^tE_n - {}^tA| = |xE_n - {}^tA| = \Phi_{{}^tA}(x).\end{aligned}$$

したがって，A と ${}^tA$ は固有多項式が等しく，固有値も等しい．

(2) A を正則行列とし，λ を A の固有値とする．つまり $\Phi_A(\lambda)=0$．このとき，

$$\begin{aligned}\Phi_{A^{-1}}\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \left|\frac{1}{\lambda}E_n - A^{-1}\right| = \left|-\frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda E_n - A)\right| \\ &= \left|-\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right||\lambda E_n - A| = (-\lambda|A|)^{-n}\Phi_A(\lambda) = 0\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{1}{\lambda}$ は A^{-1} の固有値であることがわかる．

(別解) 行列式，正則行列の性質から，以下のことがいえる；

$$\begin{aligned}\lambda\text{が } A \text{ の固有値} &\iff |\lambda E_n - A| = 0 \\ &\iff (\lambda E_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ は非自明解 } \boldsymbol{v} \text{ をもつ．} \\ &\iff A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \text{ を満たす } \boldsymbol{v}\ (\neq \mathbf{0}) \text{ が存在する．}\end{aligned}$$

$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ に左から A^{-1} をかけると $\boldsymbol{v} = A^{-1}(A\boldsymbol{v}) = A^{-1}(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda A^{-1}\boldsymbol{v}$ となり，$A^{-1}\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{v}$ を得る．これは $\dfrac{1}{\lambda}$ が A^{-1} の固有値であることを意味する．

(3)(4)

$$\begin{aligned}\lambda\in\mathbf{C} \text{ が } A \text{ の固有値} &\iff \det(\lambda E_n - A) = 0 \\ &\iff 0 = \overline{\det(\lambda E_n - A)} = \det(\overline{\lambda E_n - A}) = \det(\overline{\lambda}E_n - \overline{A}) \\ &\iff \overline{\lambda}\text{は}\overline{A}\text{の固有値．}\end{aligned}$$

以上により (4) が示された[*2]．A が実正方行列のとき，$\overline{A} = A$ であることから，(3) が成り立つことがわかる．

問題 13.6 P の選び方は一意的ではないが,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．

[*2] 行列と行列式の複素共役については，次のことが成り立つ；(i) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, (ii) $\overline{zA} = \overline{z} \cdot \overline{A}$ ($z \in \mathbf{C}$), (iii) $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, (iv) $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$．いずれも，複素共役の定義，複素共役の性質，行列式の定義を用いて証明できる