線形代数（再履修）第 2 回小テスト問題　　　　　　2010.10.1（担当：佐藤）

1　次の式を計算し，$a+bi$（ただし，a, b は実数）の形に直しなさい．（各 8 点）

(1) $(2+3i)(1-2i)$ $= 8 - i$

(2) $\dfrac{i+2}{2-3i}$ $= \dfrac{1}{13} + \dfrac{8}{13}i = \dfrac{1}{13}(1+8i)$

(3) $(i)^7$ $= -i$

2　$z = 2 - i$ のに対し，以下の問に答えなさい．（8 点）

(1) z の絶対値を求めなさい．　$|z| = \sqrt{5}$

(2) z の偏角を θ とするとき，$\tan\theta$ の値を求めなさい．　$\tan\theta = -\dfrac{1}{2}$

3　次の問に答えなさい．（各 9 点）

(1) $z = a + bi$, $w = c + di$（a, b, c, d は実数）に対し，

$$\frac{1}{2}(z\overline{w} + \overline{z}w) = ac + bd$$

を計算しなさい[*1]．

(2) 複素数を複素数平面のベクトルとみるとき，$\frac{1}{2}(z\overline{w} + \overline{z}w) = 0$ ならば，z と w は直交することを説明（証明）しなさい．

ヒント　$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，$\vec{c} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とおくと

$\frac{1}{2}(z\overline{w} + \overline{z}w) = \vec{a} \cdot \vec{c}$

となる.

4　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ に対し，以下を計算しなさい．((3) のみ 9 点，他各 8 点)

(1) $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $(A+B)(A+B) = \begin{pmatrix} 22 & 9 \\ 21 & 37 \end{pmatrix}$

(3) $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 27 & 10 \\ 27 & 32 \end{pmatrix}$

5　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい．（9 点）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

6　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ に対し，$AB = O$ を満たす 2 次正方行列 B を ひとつ 答えなさい．（8 点）

たくさんある

たとえば $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

[*1] $\overline{z}$ は z の共役複素数 $\overline{z} = a - bi$.

$\boxed{3}$ (2)

$z = a + bi$　$w = c + di$ に対し,

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

とおく. $\frac{1}{2}(z\bar{w} + \bar{z}w) = \vec{z}\cdot\vec{w}$ となる.

したがって

$$\frac{1}{2}(z\bar{w} + \bar{z}w) = 0 \iff \vec{z}\cdot\vec{w} = 0$$

$\iff$ $\vec{z}$ と $\vec{w}$ は直交する

(証明終)