

採点欄	評価

1 次の累次積分を求めなさい.

$$(1) \int_1^2 \int_1^3 (2x - y) dx dy$$

$$(2) \int_0^1 \int_{-x}^{2x} x^2 y^2 dy dx$$

$$(3) \int_0^2 \int_0^{2x} e^{x-y} dy dx$$

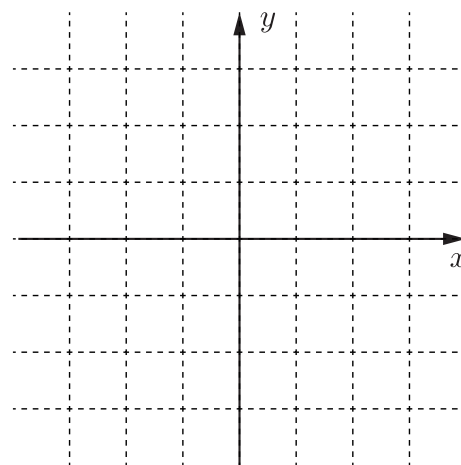
2 次の2重積分を累次積分の形に直しなさい.

$$(1) \iint_D f(x, y) dx dy \quad D : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$$

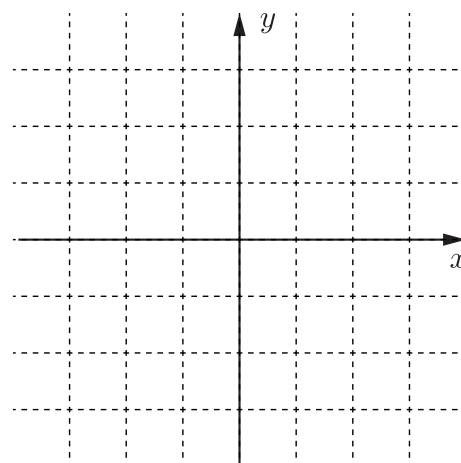
$$(2) \iint_D f(x, y) dx dy \quad D : y \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2$$

3 次の2つの不等式が表す領域  $D$  を  $xy$ -平面に図示しなさい.

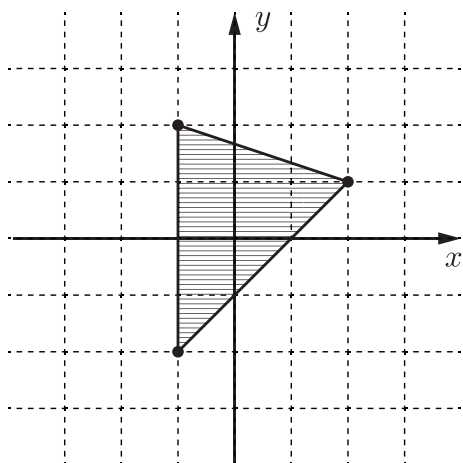
$$(1) D : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq 2x$$



$$(2) D : 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1$$



- 4 3点  $(-1, 2)$ ,  $(-1, -2)$ ,  $(2, 1)$  を頂点とする三角形の領域（下図参照）を  $x, y$  の不等式で表しなさい.



- 5 次の累次積分の積分順序を変更しなさい.

$$(1) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx$$

$$(2) \int_0^2 \int_x^{3-\frac{x}{2}} f(x, y) dy dx$$

- 6 次の不等式で表される空間の領域の体積  $V$  を求めなさい.

$$(1) V : 1 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq 3, \quad 0 \leq z \leq 2x + y^2$$

$$(2) V : 0 \leq x \leq 1, \quad -x \leq y \leq 0, \quad 0 \leq z \leq (x + y)e^y$$



採点欄	評価

1 次の累次積分を求めなさい.

【各 4 点】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int_1^2 \int_1^3 (2x - y) dx dy \\
 &= \int_1^2 \int_1^3 (2x - y) dx dy \\
 &= \int_1^2 [x^2 - xy]_{x=1}^{x=3} dy \\
 &= \int_1^2 \{(9 - 3y) - (1 - y)\} dy \\
 &= \int_1^2 (8 - 2y) dy \\
 &= [8y - y^2]_1^2 \\
 &= 16 - 4 - (8 - 1) \\
 &= 5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \int_0^1 \int_{-x}^{2x} x^2 y^2 dy dx \\
 &= \int_0^1 x^2 \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{y=-x}^{y=2x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2}{3} \{8x^3 - (-x)^3\} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2}{3} \cdot 9x^3 dx \\
 &= \int_0^1 3x^5 dx \\
 &= 3 \left[ \frac{x^6}{6} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \int_0^2 \int_0^{2x} e^{x-y} dy dx \\
 &= \int_0^2 e^x \int_0^{2x} e^{-y} dy dx \\
 &= \int_0^2 e^x [-e^{-y}]_{y=0}^{y=2x} dx \\
 &= \int_0^2 e^x (-e^{-2x} + 1) dx \\
 &= \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx \\
 &= [e^x + e^{-x}]_0^2 \\
 &= e^2 + e^{-2} - (1 + 1) \\
 &= e^2 + e^{-2} - 2 = (e - e^{-1})^2.
 \end{aligned}$$

2 次の 2 重積分を累次積分の形に直しなさい.

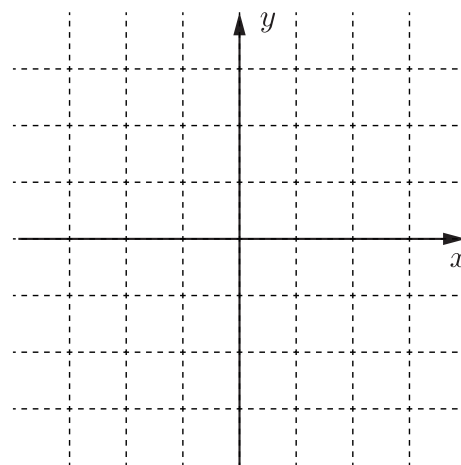
【各 4 点】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \iint_D f(x, y) dx dy \quad D : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2 \\
 &= \int_1^2 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_1^2 f(x, y) dy dx. \\
 (2) \quad & \iint_D f(x, y) dx dy \quad D : y \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2 \\
 &= \int_0^2 \int_y^{2y} f(x, y) dx dy.
 \end{aligned}$$

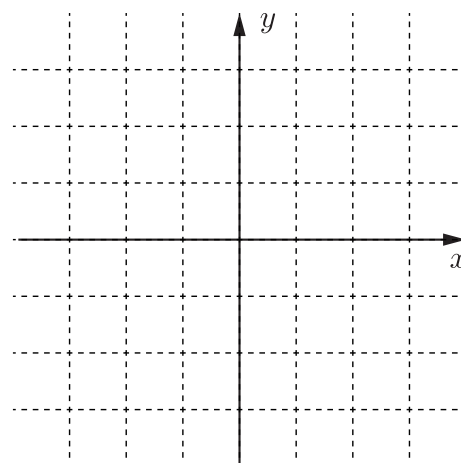
3 次の 2 つの不等式が表す領域  $D$  を  $xy$ -平面に図示なさい.

【各 4 点】

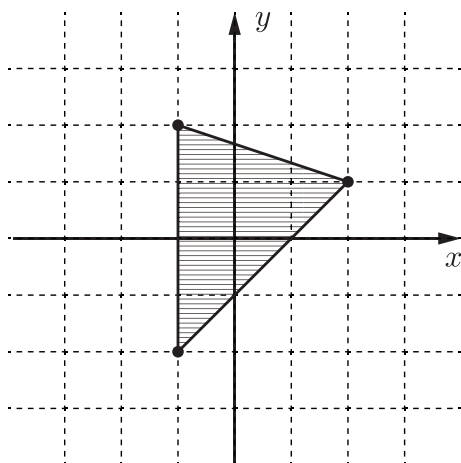
$$(1) \quad D : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq 2x$$



$$(2) \quad D : 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1$$



- 4 3点  $(-1, 2)$ ,  $(-1, -2)$ ,  $(2, 1)$  を頂点とする三角形の領域（下図参照）を  $x, y$  の不等式で表しなさい。



$$-1 \leq x \leq 2, x-1 \leq y \leq \frac{5}{3} - \frac{x}{3}$$

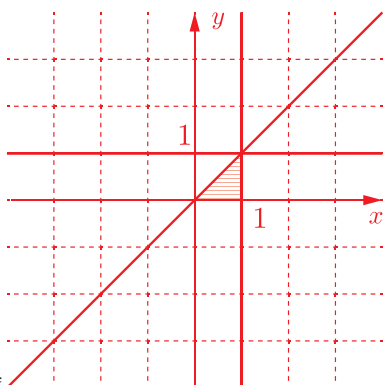
【4点】

- 5 次の累次積分の積分順序を変更しなさい。

【各4点】

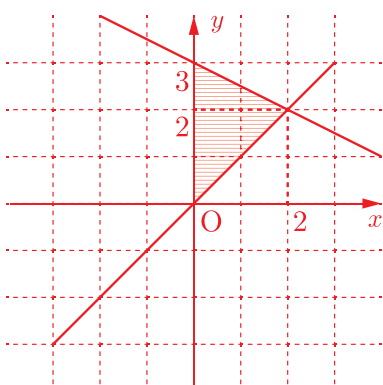
$$(1) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy.$$



$$(2) \int_0^2 \int_x^{3-\frac{x}{2}} f(x, y) dy dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^y f(x, y) dx dy + \int_2^3 \int_0^{6-2y} f(x, y) dx dy.$$



- 6 次の不等式で表される空間の領域の体積  $V$  を求めなさい。

【各5点（体積を累次積分として書けていれば1点）】

$$(1) V : 1 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq 3, \quad 0 \leq z \leq 2x + y^2$$

領域  $D : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$  上で  $2x + y^2 \geq 0$  であるから、

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \int_1^3 (2x + y^2) dy dx \\ &= \int_1^2 \left[ 2xy + \frac{y^3}{3} \right]_{y=1}^{y=3} dx \\ &= \int_1^2 \left\{ (6x + 9) - \left( 2x + \frac{1}{3} \right) \right\} dx \\ &= \int_1^2 \left( 4x + \frac{26}{3} \right) dx \\ &= \left[ 2x^2 + \frac{26}{3}x \right]_1^2 dx \\ &= 8 + \frac{52}{3} - \left( 2 + \frac{26}{3} \right) \\ &= \frac{44}{3}. \end{aligned}$$

$$(2) V : 0 \leq x \leq 1, \quad -x \leq y \leq 0, \quad 0 \leq z \leq (x+y)e^y$$

 $-x \leq y$  を満たすので、 $(x+y)e^y \geq (x+(-x))e^x = 0$ . よって、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_{-x}^0 (x+y)e^y dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{-x}^0 (x+y) (e^y)' dy dx \\ &= \int_0^1 \left\{ [(x+y)e^y]_{y=-x}^{y=0} - \int_{-x}^0 (x+y)' e^y dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ x - \int_{-x}^0 e^y dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ x - [e^y]_{y=-x}^{y=0} \right\} dx \\ &= \int_0^1 (x - 1 + e^{-x}) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} - x - e^{-x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - 1 - e^{-1} - (-1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

