

数学クォータ科目「応用解析」第 7 回 / 複素関数論 (2)

正則関数

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 複素数, 虚数単位, 実部と虚部, 純虚数, 複素共役
- 複素数平面, 複素数の絶対値と偏角, 極形式

今回の授業で理解してほしいこと

- 複素関数とその実部, 虚部
- 複素関数の微分
- 正則関数とコーシー・リーマンの方程式
- 正則関数の例 (有理関数, 指数関数, 三角関数, 対数関数)

複素関数

- 複素数の値をとる 2 つの変数 z と w がある（複素変数）。
- z の値に対して、 w の値が唯一つ定まるとき、「 w は z の複素関数である」という。
- $z = x + yi$ とおけば、 w は 2 つの独立変数（実変数） x, y の関数 $w = f(x, y)$ と考えられる。
- さらに、 $f(x, y)$ は複素数なので、実部と虚部に分けることができる。

$$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

- このように、複素関数 $w = f(z)$ は、2 つの 2 変数関数 $u(x, y), v(x, y)$ の組 と考えることもできる。

複素関数の例

例 1) $f(z) = z^2$

$$(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

より, $f(z)$ の実部は $u(x, y) = x^2 - y^2$, 虚部は $v(x, y) = 2xy$ である.

例 2) $f(z) = \frac{1}{z}$

$$\frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

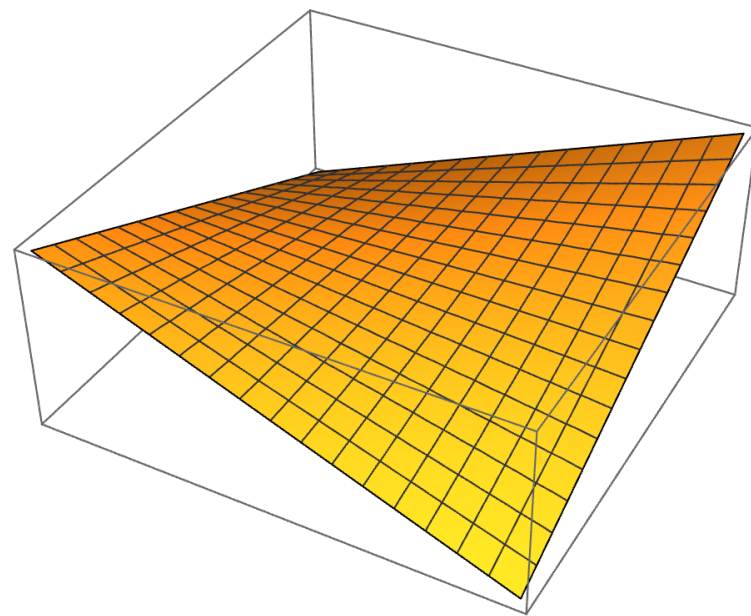
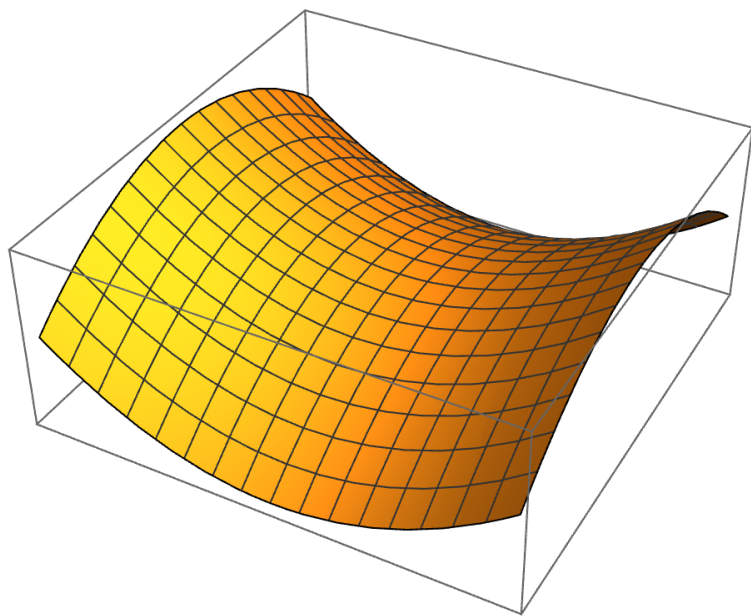
より, $f(z)$ の実部は $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, 虚部は $v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ である.

複素関数の可視化

- 実数値関数のときのような関数のグラフを描くことはできない.

(1) **実部**と**虚部**をそれぞれ 2変数関数のグラフ曲面 として可視化する.

例 1) $f(z) = z^2 : u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$

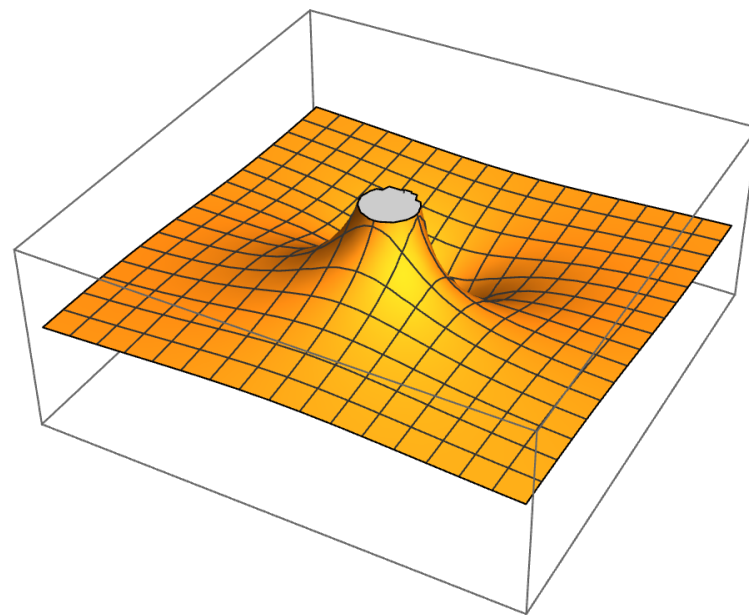
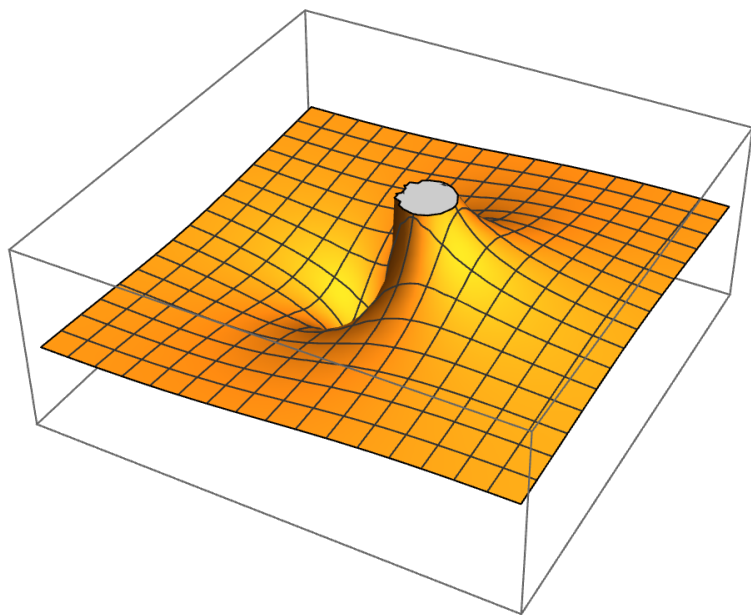


複素関数の可視化

- 実数値関数のときのような関数のグラフを描くことはできない。

(1) 実部と虚部をそれぞれ 2変数関数のグラフ曲面 として可視化する。

例 2) $f(z) = \frac{1}{z} : u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$

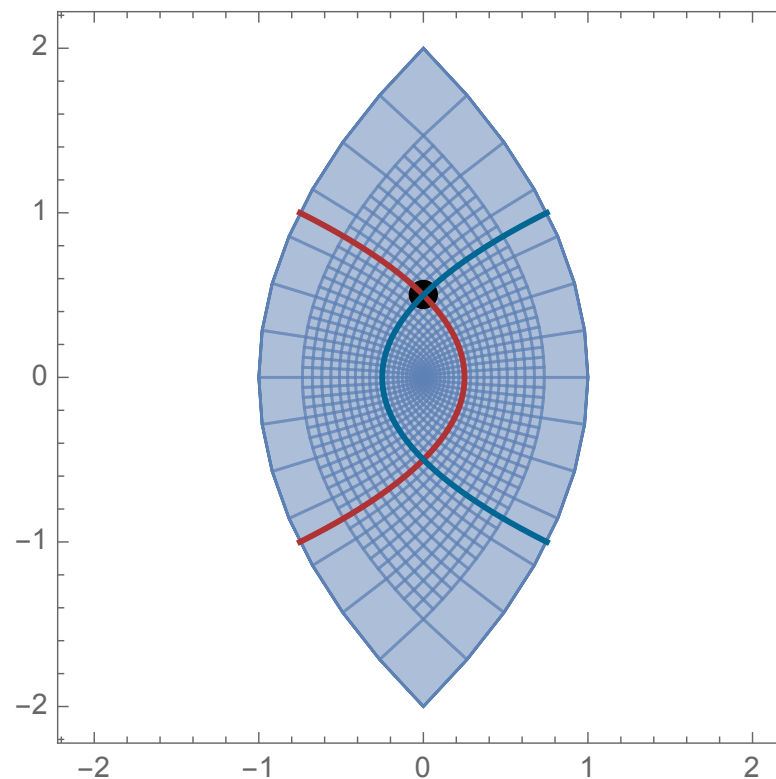
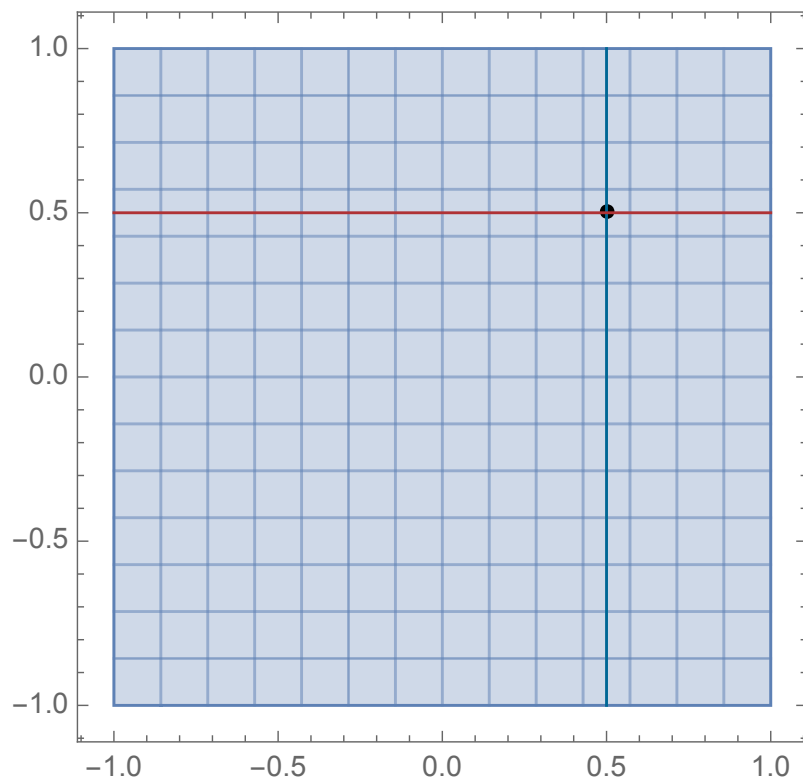


複素関数の可視化

- 実数値関数のときのような関数のグラフを描くことはできない。

(2) z -平面内の 曲線の像 を w -平面に描く。

例 1) $f(z) = z^2$

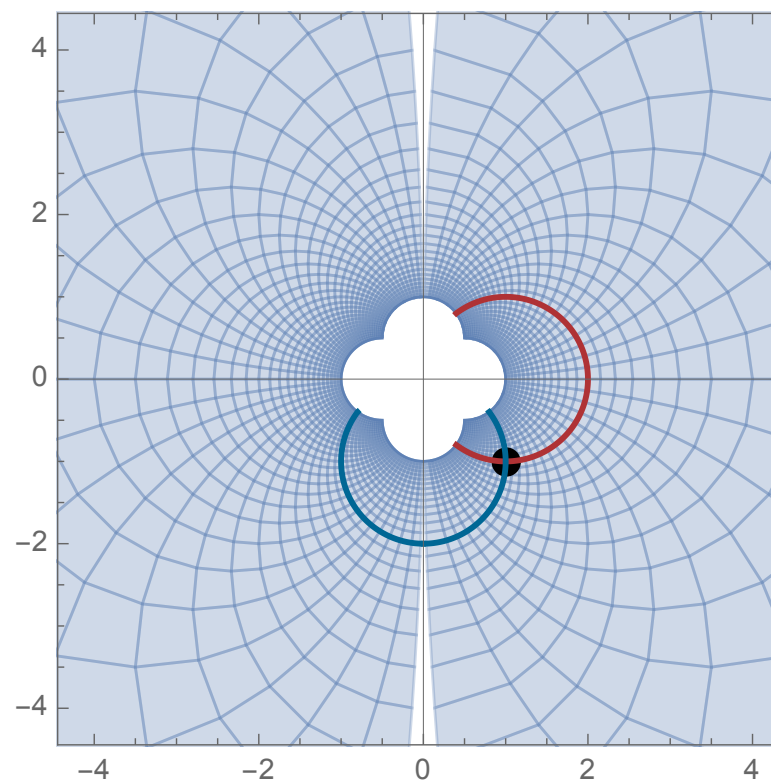
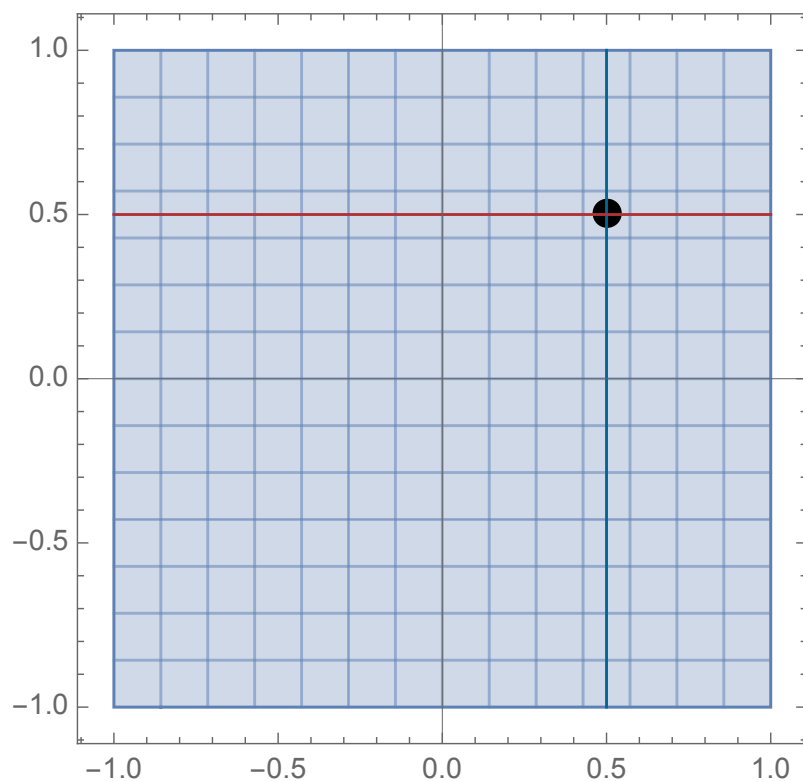


複素関数の可視化

- 実数値関数のときのような関数のグラフを描くことはできない。

(2) z -平面内の 曲線の像 を w -平面に描く.

例 2) $f(z) = \frac{1}{z}$



複素関数の微分

- 関数 $w = f(z)$ とその定義域内の点 $z = a$ に対し,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta z) - f(a)}{\Delta z}$$

が存在するとき, この極限值を「点 $z = a$ における $w = f(z)$ の微分係数」といい, $f'(a)$ と表す.

- 関数 $w = f(z)$ が領域 D 内の点で微分可能であるとき,
「 $w = f(z)$ は D で正則である」といい, $w = f(z)$ を正則関数という.
- $w = f(z)$ が D で正則ならば, D 内の点 $z = a$ に対し, 微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数が定まる.

これを $f(z)$ の導関数といい, $f'(z)$ または $\frac{df}{dz}$ と表す.

複素関数の微分

例 1) $f(z) = z^2$ の導関数を求めなさい.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \end{aligned}$$

例 2) $f(z) = \frac{1}{z}$ の導関数を求めなさい.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z + \Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \cdot \frac{z - (z + \Delta z)}{(z + \Delta z)z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \cdot \frac{-\Delta z}{(z + \Delta z)z} = - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{(z + \Delta z)z} = - \frac{1}{(z + 0)z} = - \frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

複素関数の微分

定理

関数 $f(z)$, $g(z)$ が領域 D で正則ならば,

- $f \pm g$, fg も領域 D で正則で $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(fg)' = f'g + fg'$ が成り立つ.
- D 内の $g(z) \neq 0$ を満たす領域で $\frac{f}{g}$ は正則で $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ が成り立つ.

定理

$$(z^n)' = n z^{n-1} \quad (n \text{ は整数})$$

複素関数の微分

例3) $f(z) = \bar{z}$ は正則ではないことを確かめなさい.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{a+bi \rightarrow 0} \frac{a - bi}{a + bi}$$

$a + bi \rightarrow 0$ とする近づけ方は無数に考えられる. 例えば,

○ $a \rightarrow 0$ としてから, $b \rightarrow 0$ とすると

$$\lim_{b \rightarrow 0} \left(\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a - bi}{a + bi} \right) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{-bi}{bi} = \lim_{b \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

○ $b \rightarrow 0$ としてから, $a \rightarrow 0$ とすると

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\lim_{b \rightarrow 0} \frac{a - bi}{a + bi} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a} = \lim_{b \rightarrow 0} 1 = 1.$$

よって, $f(z)$ は正則ではない.

正則性の判定：コーシー・リーマンの方程式

定理

関数 $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ が正則であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

このとき、導関数は

$$f'(z) = f'(x + yi) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} i.$$

正則性の判定：コーシー・リーマンの方程式

関数 $f(z)$ の実部と虚部をそれぞれ $u(x, y)$, $v(x, y)$ とする.

例 1) $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ より, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

- $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$
- よって $f(z)$ は正則で, $f'(z) = 2x + 2yi$ ($= 2(x + yi) = 2z$) である.

例 2) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$ より, $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$
- よって $f(z)$ は正則で, $f'(z) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}i$ ($= -\frac{1}{z^2}$) である.

例 3) $f(z) = \bar{z} = x - yi$ より, $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$.

- $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$. $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ より, $f(z)$ は 正則ではない.

基本的な正則関数（1）有理関数

- z の多項式 $g(z), h(z)$ に対し, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ と表される関数のこと:

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots + b_mz^m}$$

- $h(z) = 0$ となる点 z を除いた領域で正則となる.

例) 複素数 a, b, c, d に対して定まる複素関数 $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ のことを一次分数変換という.

- $ad - bc = 0$ のときは定値関数となるため, $ad - bc \neq 0$ を仮定する.
- 一次分数変換は, 拡大・縮小, 回転 $z \mapsto az$, 平行移動 $z \mapsto z + b$, 反転 $z \mapsto \frac{1}{z}$ を合成したものである.

基本的な正則関数（２）指数関数 e^z

- e^x のマクローリン展開を利用して複素変数の指数関数を定義する：

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

- 特に, 実数 y に対して

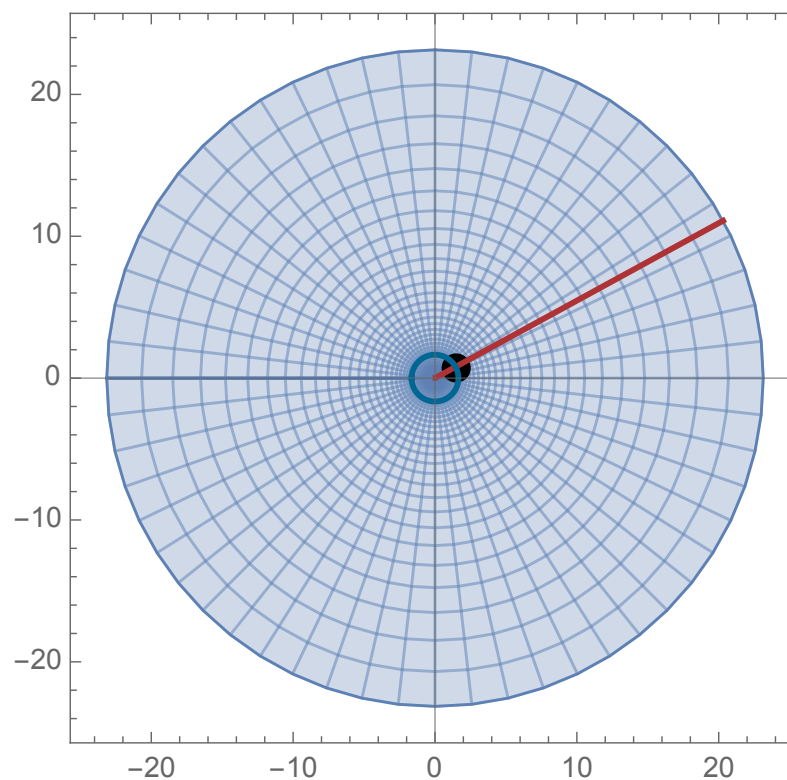
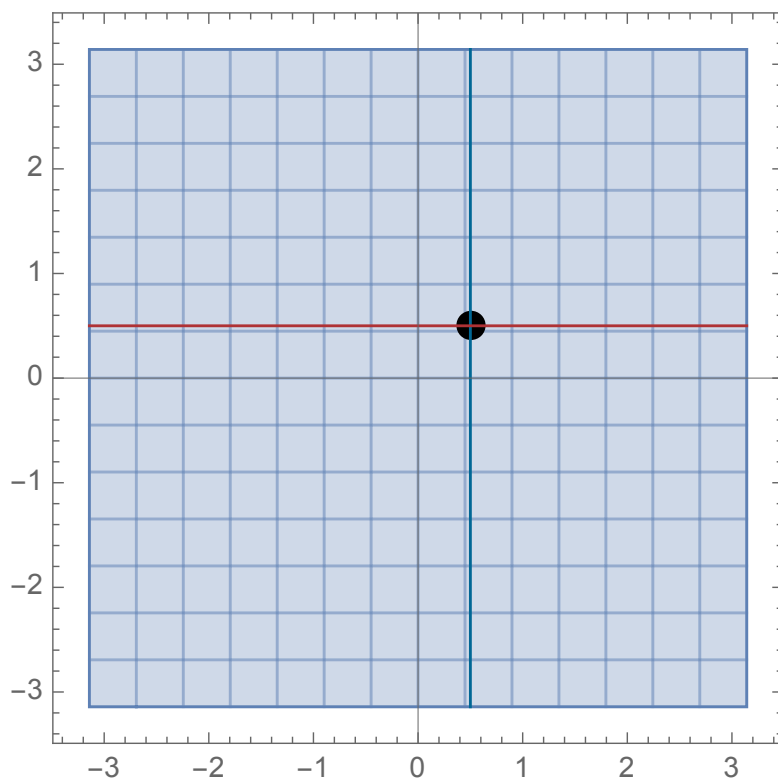
$$\begin{aligned} e^{yi} &= 1 + yi - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3!}i + \cdots + (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}i + \cdots \\ &= 1 - \frac{y^2}{2} + \cdots + (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + \cdots + \left(y - \frac{y^3}{3!} + (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots \right) i \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

- 指数法則より, $e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$

基本的な正則関数 (2) 指数関数 e^z

定義

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$



基本的な正則関数（２）指数関数 e^z

定義

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

- 実部は $u(x, y) = e^x \cos y$, 虚部は $v(x, y) = e^x \sin y$.
- \mathbb{C} 全体で正則関数で, 導関数は $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$.
- 絶対値は $|e^z| = e^x$, 偏角は $\arg(e^z) = y$.
- 周期が $2\pi i$ の周期関数である: $e^{z+2n\pi i} = e^z$.

基本的な正則関数 (3) 三角関数 $\sin z, \cos z$

- マクローリン展開を利用して複素変数の正弦関数, 余弦関数を定義する:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} + \cdots.$$

- 指数関数のマクローリン展開より

$$e^{iz} = 1 + zi - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3!}i + \cdots + (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} + (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}i + \cdots,$$
$$e^{-iz} = 1 - zi - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!}i + \cdots + (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} - (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}i + \cdots.$$

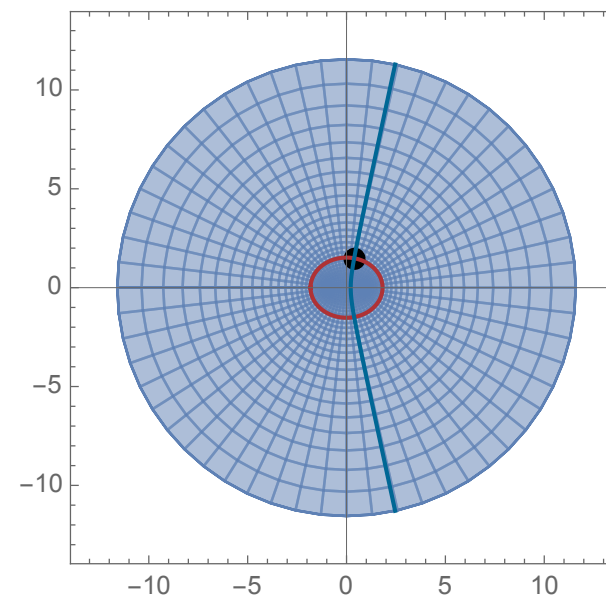
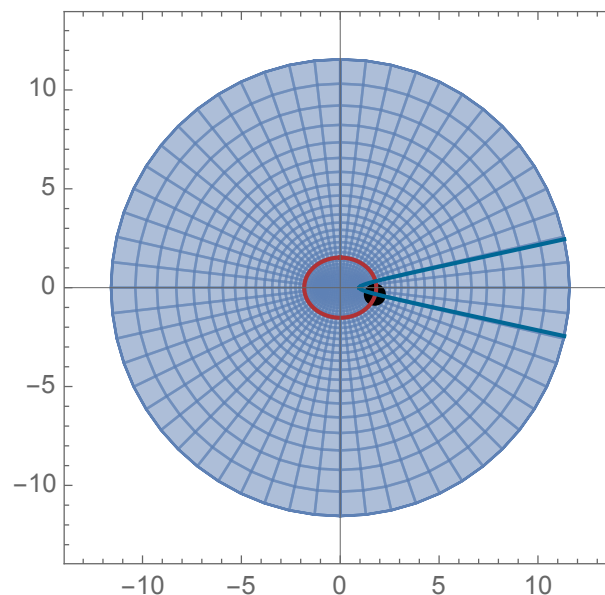
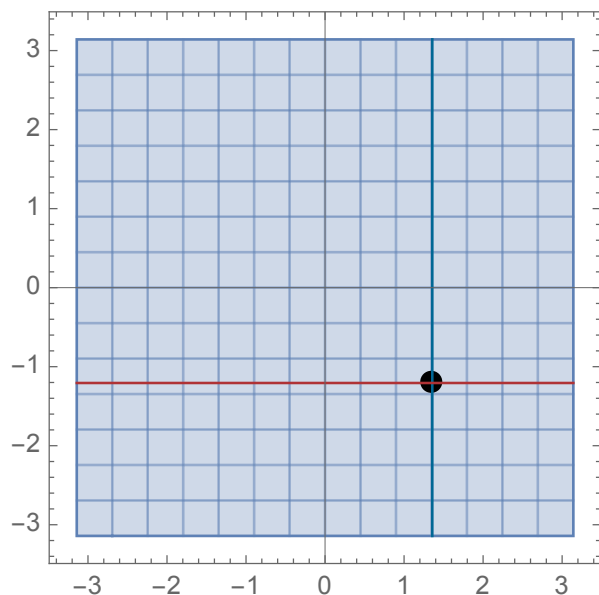
- 以上のことから,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

基本的な正則関数 (3) 三角関数 $\sin z, \cos z$

定義

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$



基本的な正則関数 (3) 三角関数 $\sin z, \cos z$

定義

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

- 実部と虚部は以下ようになる：

$$\sin(x + yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos(x + yi) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

- \mathbb{C} 全体で正則関数で, 導関数は $\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$, $\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$.
- 周期が 2π の周期関数である： $\sin(z + 2n\pi) = \sin z$, $\cos(z + 2n\pi) = \cos z$.
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ や加法定理も成り立つ.

基本的な正則関数（４）対数関数 $\log z, \text{Log} z$

- （復習）対数関数 $y = \log x$ は指数関数 $y = e^x$ の逆関数として定めた。
つまり, $y = \log x \iff x = e^y$.
- 複素関数版の対数関数も同様に定義する: $w = \log z \iff z = e^w$.
- 指数関数の周期性 $e^w = e^{w+2n\pi i}$ より, z に対して \square を満たす w は唯一に決まらない（無限多価関数）.
- $\log z$ の実部と虚部を調べる. $\log z = u(x, y) + i v(x, y)$ とし, z を極形式 $z = r e^{i\theta}$ で表すと,

$$\begin{aligned}\log z = u + i v &\iff \log(r e^{i\theta}) = u + i v \iff r e^{i\theta} = e^{u+vi} = e^u e^{iv} \\ &\iff r = e^u, e^{i\theta} = e^{iv} \iff u = \log r, v = \theta + 2n\pi\end{aligned}$$

- よって, $\log z = \log |z| + i \arg(z)$ と表すことができる.

基本的な正則関数 (4) 対数関数 $\log z, \text{Log} z$

定義

$\log z$ の値のうち、虚部が $(-\pi, \pi]$ に含まれるものを**主値**といい、 $\text{Log} z$ と表す：

$$\text{Log} z = \log |z| + i \arg(z) \quad (-\pi < \arg(z) \leq \pi)$$

- 整数 n を固定し、 $\log z$ の値の中で虚部が $(-\pi + 2n\pi, \pi + 2n\pi]$ を満たすものに制限すると、これも関数となる。これを $\log z$ のひとつの**分枝**という。
- $\log z$ は原点 0 を除く領域で正則であり、導関数は $(\text{Log} z)' = (\log z)' = \frac{1}{z}$ 。
- $e^{\log z} = z, \log e^z = z + 2n\pi i$ 。

まとめと復習（と予習）

- 正則関数とは何ですか？
- コーシー・リーマンの方程式とは何ですか？
- 有理関数, 指数関数, 三角関数, 対数関数 の定義は？また、それらの導関数は？

教科書 p.133～150

問題集 218 ～ 227

予 習 ベクトル関数の積分, スカラー場の線積分 「応用解析」