関数のべき級数展開

- 級数とは？

  → 数列 $\{a_n\}$ の各項を順に加えた式のこと.（p.15 を参照）
- べき級数とは？

  → 級数の各項が x のべき関数 $c_n x^n$ である級数のこと（c_n は定数）.

事実（べき級数展開）

関数 $f(x)$ が $x = a$ のまわりで連続かつ微分可能であるならば, ある区間で

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

にようなべき級数として表すことができる.

（意味）$a - \rho < x < a + \rho$ のおいて, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x)$.

テイラー展開, マクローリン展開

- テイラーの定理（p.62 定理 1.）
  - $R_n(x)$ を剰余項という（他の表し方もある）.
  - $n = 1$ のときは, 平均値の定理（p.46 定理 8.）
  - 定理の証明には, ロルの定理（p.45 定理 7.）が使われる.

    ロルの定理は,「$f(a) = f(b)$ を満たす関数に対する平均値の定理」

$\downarrow$ $a = 0$ の場合

- マクローリンの定理（p.63 定理 1.）
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ならば, . . .
  - $f(x)$ は無限級数として表すことができる.
  - これを満たす x の最大範囲が $a - \rho < x < a + \rho$ のとき, ρ のことを $f(x)$ の収束半径という.

マクローリン級数を求めるには？

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

- 上の式中で未知なのは, $x = 0$ のおける $f(x)$ の値, および微分係数たち.
- 一般の n の対して, $f^{(n)}(0)$ がわかればよい.（例 1, 2, 3）

例）
$$\begin{cases} e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots & (\rho = \infty) \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots & (\rho = \infty) \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m\dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots & (\rho = \infty) \\ \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots & (\rho = 1) \\ \log(1+x) = x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \cdots + (-1)^n\dfrac{x^n}{n} + \cdots & (\rho = 1) \end{cases}$$

べき級数展開の応用：近似値の計算

- テイラー級数における有限の n までの式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

を, $f(x)$ の n 次近似式という.

- １次近似：$y = f(a) + f'(a)(x-a)$　（$x = a$ における接線）
- ２次近似：$y = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

$\vdots$

- $x = a + h$ とした式

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)\,h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

は, h が十分小さければ, $f(a+h)$ の近似値と解釈できる.（p.64 注意）

２変数関数のべき級数展開（次回のテーマ）

２変数関数 $f(x,y)$ に対し,

1) $x(t) = a + ht$, $y(t) = b + kt$（a, b, h, k は定数）との合成関数を考える;

   $F(t) := f(a+ht, b+kt)$

2) $F(t)$ をマクローリン展開すると,

   $$F(t) = F(0) + F'(0)\,t + \frac{F''(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \cdots$$

3) $t = 1$ のとき,

   $$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

   $$\to\ f(a+h, b+k) = f(a,b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

   - $F^{(n)}(0)$ は, h, k の n 次多項式として表すことができる.
   - その係数は $f(x,y)$ の点 (a,b) における偏微分係数.