問題 7.1

$$u(x,y,t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^2 \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{4t}\right\}, \quad (t>0, (x,y)\in \mathbf{R}^2)$$

は $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ を満たすことを示せ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\pi t}\left(-\frac{x}{2t}\right)\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{4t}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi t}\left(-\frac{1}{2t}+\frac{x^2}{4t^2}\right)\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{4t}\right\}. \tag{7.1}$$

x と y に関する対称性 $u(x,y,t)=u(y,x,t)$ と (7.1) より，ただちに

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{4\pi t}\left(-\frac{1}{2t}+\frac{y^2}{4t^2}\right)\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{4t}\right\}.$$

を得る．したがって，

$$u_{xx}+u_{yy} = \frac{1}{4\pi t}\left(-\frac{1}{t}+\frac{x^2+y^2}{4t^2}\right)\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{4t}\right\}.$$

一方，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi t^2}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{4t}\right\} + \frac{1}{4\pi t}\cdot\frac{x^2+y^2}{4t^2}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{4t}\right\} = u_{xx}+u_{yy}.$$ [*1]

問題 7.2

水平面を xy-平面とし，鉛直方向を z 軸として，山の表面が $z=f(x,y)$ で表されているとする．地図の上で，この山の登山道が $x=x(t)$，$y=y(t)$ で表されるとすれば，この道の勾配は

$$\frac{f_x(x(t),y(t))\,x'(t)+f_y(x(t),y(t))\,y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \tag{7.2}$$

で与えられることを示せ．ただし $f(x,y)$ は全微分可能，$x(t),y(t)$ は微分可能とする．

[*1] 偏微分方程式 $u_{xx}+u_{yy}=u_t$ は $\mathbf{R}^2$ 上の熱方程式とよばれ，その解は平面 $\mathbf{R}^2$ の熱分布の時間変化を表している．問題 7.1 の関数 $u(x,y,t)$ は次のように解釈できる；時刻 0 のとき熱源が原点 $(0,0)$ に集中している（つまり，$\lim_{t\to 0} u(0,0,t)=\infty$，原点以外では $\lim_{t\to 0} u(x,y,t)=0$）とすると，時刻 t における点 (x,y) の熱量が $u(x,y,t)$ である．

空間曲線 $(x(t), y(t), z(t))$ の道の勾配は速度ベクトル $(x'(t), y'(t), z'(t))$ の傾きと考えてよい．つまり

$$\text{勾配} = \frac{\text{垂直方向の変化}}{\text{水平方向の長さ}} = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}. \tag{7.3}$$

曲面 $z = f(x, y)$ で表される山の登山道が地図の上で $x = x(t)$，$y = y(t)$ で表されるとき，実際の登山道は空間曲線 $(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ で表される．合成関数の微分の法則より

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))\, x'(t) + f_y(x(t), y(t))\, y'(t). \tag{7.4}$$

(7.3) と (7.4) より，(7.2) を得る．

問題 7.3

$f(x, y)$ を領域 D で定義された C^2 級関数とする．このとき，

$$f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \tag{7.5}$$

を満たすならば，$f(x, y) = g(x)\, h(y)$ とかけることを示せ．ただし，$f(x, y)$ は D 上で 0 でないとする

(7.5) 式から

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_x}{f}\right) = \frac{f\, f_{xy} - f_x\, f_y}{f^2} = 0. \tag{7.6}$$

つまり，$\frac{f_x}{f}$ は y に依存しない関数であることがわかるので，

$$\frac{f_x(x, y)}{f(x, y)} = k(x) \tag{7.7}$$

と書ける．$k(x)$ の原始関数を $K(x)$ とし[*2]，$g(x) = \exp K(x)$ とおく．すると $g(x)$ は

$$g'(x) = K'(x) \exp K(x) = k(x)\, g(x) \tag{7.8}$$

を満たす．このとき，(7.7) と (7.8) から $g(x)\, f_x(x, y) = f(x, y)\, g'(x)$ が成立することがわかり，このことから

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g(x)}{f(x, y)}\right) = 0$$

を得る．つまり，$\frac{g(x)}{f(x,y)}$ は x に依らない関数なので，$\frac{g(x)}{f(x,y)} = \frac{1}{h(y)}$ と書ける．

[*2] なぜこのようなことを考えたのか：(7.7) において $k = \varphi'/\varphi$ の形だったら，(7.6) の方法がまた使えるな，と思ったからです．