

微積分 I 演習 期末試験

担当：佐藤 弘康

注意事項

- (1) すべての答案用紙の表に名前，学籍番号を忘れずに記入してください。
- (2) すべての答案用紙の右上に，全体の中で何枚目かを記入してください (例えば， $1/2$ のように)。
- (3) 答案用紙は裏を使用しても構いません。解答が表裏にまたがる場合は「裏へ続く」と書くなどしてください。
- (4) 問題番号順に解答する必要はありません。
- (5) 解答は結果だけでなく，計算のプロセスや思考の過程など，できるだけいねいに記述するようにしてください。
- (6) 終了時間前に解答が済んだ場合は途中退席しても構いません (その際は挙手をしてその旨を伝えてください)。

問 1. \mathbf{R} 上で定義された関数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が

$$f^{-1}(x) = \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

となることを示せ. また, $f^{-1}(x)$ の導関数を計算せよ.

問 2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ の k 階導関数 $f^{(k)}(x)$ を求めよ.
- (2) $f(x)$ を $x = 0$ のまわりで形式的にテイラー展開せよ.
- (3) $(\log(1-x))' = -\frac{1}{1-x}$ を利用して, $\log(1-x)$ を $x = 0$ のまわりで形式的にテイラー展開せよ.

問 3. 微分可能な関数 $\varphi(x)$ において, $\varphi'(x) = 0$ ならば $\varphi(x)$ は定数関数である. この事実を用いて, 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (ただし $a, b, c, d \in \mathbf{R}$) に対し, $ad - bc = 0$ ならば $h(x)$ は定数関数であることを示せ.
- (2) $f(x), g(x)$ をある区間 I で定義された微分可能な関数とする. $f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$ ならば, $g(x) = cf(x)$ (ただし, c は定数) となることを示せ. ただし, $f(x) \neq 0$ とする.

問 4. 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$$

問 5. 微積分 I の講義と演習で学習した事 (概念, 考え方, 定理, 方法など) の中で深く印象に残ったことをひとつ挙げよ. また, それを挙げた理由 (どのようなところが面白いと思ったかなど) を具体的かつ簡潔に述べよ.