数学クォータ科目「応用解析」第 10 回 / 複素関数論（5）

# 正則関数の展開と留数定理

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

# 前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

**前回のキーワード**

- 単一閉曲線の沿った複素積分
- コーシーの定理, コーシーの積分表示, グルサーの定理

**今回の授業で理解してほしいこと**

- 正則関数の級数展開（テイラー展開, マクローリン展開, ローラン展開）
- 特異点（極）とその位数, 真性特異点
- 特異点における留数と留数定理

# テイラー展開

**定義**

- 領域 $D$ で正則な関数 $f(z)$ と, $D$ 内の点 $z=a$ がある.
- 円 $|z-a|=R$ の内部が $D$ に含まれている.

このとき, $|z-a|<R$ ならば,

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots$$

と書ける. これを「$z=a$ における $f(z)$ のテイラー展開」という.

# テイラー展開

証明

- 円 $C$ の内部の点 $\zeta$ を任意にとる.
- $|\zeta - a| < R_1 < R$ を満たす $R_1$ を選ぶ. 円 $|z - a| = R_1$ を $\Gamma$ とする.
- $\Gamma$ の内部は $D$ に含まれるので, コーシーの積分表示より,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

- $\displaystyle \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{(z - a) - (\zeta - a)} = \frac{1}{z - a} \left(1 - \frac{\zeta - a}{z - a}\right)^{-1}, \left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| < 1$
- 事実：$\displaystyle |Z| < 1 \text{ ならば, } \frac{1}{1 - Z} = 1 + Z + Z^2 + \cdots + Z^n + \cdots$ より,

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - a} \left\{1 + \left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right) + \left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^n + \cdots\right\}$$

- (青) を (赤) に代入すると, ...

# テイラー展開

**証明**（続き）

- を に代入すると, ...

$$
\begin{aligned}
f(\zeta) =& \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\left\{1+\frac{\zeta-a}{z-a}+\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n+\cdots\right\}dz \\
=& \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz+(\zeta-a)\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz\right. \\
& \qquad\qquad \left.+\cdots+(\zeta-a)^n\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz+\cdots\right\}
\end{aligned}
$$

- 各複素積分にコーシーの積分表示（グルサーの定理）を適用することにより, テイラー展開を得る.

# マクローリン展開

**定義**

$z = 0$ における $f(z)$ のテイラー展開

$$f(z) = f(0) + f'(0)\,z + \frac{f''(0)}{2}\,z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,z^n + \cdots$$

のことを**マクローリン展開**という.

注

- テイラー展開, は, 関数 $f(z)$ が正則な領域での級数展開である.
- $f(z)$ が正則とはならない点を含む領域でも, 級数展開が可能である.

# 特異点を含む領域での級数展開

**定義**

関数 $f(z)$ が

- 点 $z = a$ では定義されていない.
- $a$ を中心とする円板から１点 $a$ を取り除いた領域 $0 < |z - a| < R$ では正則である.

このとき，$z = a$ を $f(z)$ の**特異点**という.

例）　$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ の特異点は $z = 1, 2$ の２点である.

# ローラン展開

**定義**

- $z = a$ は関数 $f(z)$ の特異点.
- $f(z)$ は $0 < |z - a| < R$ で正則.

このとき, $z$ が $0 < |z - a| < R$ を満たすならば,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n = b_0 + b_1(z-a) + \cdots + b_m(z-a)^m + \cdots$$

$$+ \frac{b_{-1}}{z-a} + \frac{b_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{b_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots$$

と書ける. ただし, $b_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$.

これを「$z = a$ における $f(z)$ のローラン展開」という.

# ローラン展開

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n = b_0 + b_1(z-a) + \cdots + b_m(z-a)^m + \cdots$$

$$+ \frac{b_{-1}}{z-a} + \frac{b_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{b_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots$$

- の部分は点 $z=a$ で正則である．
- の部分が消えることがある．このとき，$z=a$ を除去可能特異点という．
- の部分が有限個の項からなるとする．つまり，$b_{-k} \neq 0$ で $b_{-(k+1)}$ 以降がすべて $0$ になるとき，$z=a$ を $k$ 位の極 という．
- の部分が無限個の項からなるとき，$z=a$ を真性特異点という．

# 留数

**定義**

関数 $f(z)$ の特異点 $z = a$ に対し,

$$\mathrm{Res}[f(z), a] := \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$$

を「特異点 $z = a$ における $f(z)$ の**留数**」という. ただし, $C$ はその内部に $a$ を含み, $a$ 以外に特異点を含まないような単一閉曲線である.

# 留数の計算方法

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n = b_0+b_1(z-a)+\cdots+b_m(z-a)^m+\cdots$$

$$+\boxed{b_{-1}}\over{z-a}$$

$$+\frac{\boxed{b_{-1}}}{z-a}+\frac{b_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{b_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots$$

- $\boxed{\mathrm{Res}[f(z),a]=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)\,dz}$ と $\boxed{\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i & (n=1)\\ 0 & (n>1)\end{cases}}$ より,

$z=a$ でローラン展開したときの $\boxed{b_{-1}}$ が留数 $\mathrm{Res}[f(z),a]$ である.

- $a$ が $k$ 位の極ならば,

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\begin{cases}\displaystyle\lim_{z\to a}(z-a)f(z) & (k=1)\\[2mm] \displaystyle\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{(z-a)^k f(z)\right\} & (k>1)\end{cases}$$

# 留数定理

定理

- 関数 $f(z)$ と 単一閉曲線 $C$ がある.
- $C$ の内部にある $f(z)$ の特異点を $a_1, a_2, \ldots, a_m$ とする.

このとき,

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi\,i \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}[f(z), a_i]$$

# 留数定理

証明

- 各特異点 $a_i$ に対し, $a_i$ を中心する十分小さい半径の円を $C_i$ を
  - $C_i$ の内部から点 $a_i$ を除いた領域で $f(z)$ は正則
  - $C_1, C_2, \ldots, C_m$ と $C$ で囲まれた領域で $f(z)$ は正則

  を満たすようにとる.
- このとき,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_m} f(z)\,dz$$

※ 前回スライドの 定理２ （定理積分路の変形）の証明と同様

- 留数の定義から, $\displaystyle\int_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z), a_i]$.（証明終）

# まとめと復習（と予習）

- テイラー展開, マクリーン展開, ローラン展開とは何ですか？
- 関数が点 $z = a$ でどのようなときに, テイラー展開できますか？
- 関数が点 $z = a$ でどのようなときに, ローラン展開できますか？
- 特異点（極）とは何ですか？特異点の位数とは何ですか？
- 留数とは何ですか？留数定理はどのような定理ですか？

**教科書** **p.170〜180**

**問題集** **234, 235, 236, 237, 238**

**予 習** 不定積分 「基礎数学 II」