行列の転置

- 行列 A の行と列を入れ替えた行列を「A の転置行列」といい, ${}^t\!A$ と書く.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{転置}]{} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  - ${}^t\!A$ の第 j 行は, A の第 i 列.
  - ${}^t\!A$ の第 i 列は, A の第 j 行.
  - A が $m \times n$ 型ならば, ${}^t\!A$ は $n \times m$ 型.
- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 = {}^t\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$.
- 「${}^t\!A = A$」 を満たす行列 A を対称行列という.
- 「${}^t\!A = -A$」 を満たす行列 A を交代行列という.

逆行列（１）

- 正方行列 A に対し,

$$AB = BA = E$$

を満たす行列 B を, 「A の逆行列」といい, $B = A^{-1}$ と書く.

- 【２次正方行列の場合】$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し, $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくと,

$$E = A A^{-1} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & az+bw \\ cx+dy & cz+dw \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} ax+by = 1 \\ cx+dy = 0 \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} az+bw = 0 \\ cz+dw = 1 \end{cases}$$

２つの連立方程式を解くことにより, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を得る.

逆行列（２）– 正則行列 –

- A が正方行列ならば, 必ず逆行列 A^{-1} が存在するだろうか？
  - 零行列の逆行列が存在しないことは明らか.

事実

$AB = O, A \neq O, B \neq O$ を満たす行列 A, B は逆行列を持たない.

$\because A^{-1}$ が存在すると仮定し, $AB = O$ の両辺に左から A^{-1} をかけると, $B = O$ となり, $B \neq O$ の矛盾する（背理法）.

- 正方行列 A の逆行列が存在するとき, A を正則行列とよぶ.

事実

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は, $ad - bc \neq 0$ である.

逆行列（３）応用例：連立方程式の解法

- （前回）連立方程式は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表すことができる.
  ただし, A は係数行列, $\boldsymbol{b}$ は定数項ベクトル.

事実

A が正方行列, かつ正則（つまり, A^{-1} が存在）のとき, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ によって与えられる.

$\therefore A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から A^{-1} をかけることにより,

$$\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

を得る.

特別な行列（２）

- 基本行列：３種類の特別な正方行列
  (1) $A(i, j : c)$：(i, j) 成分が c で, 他は単位行列と同じ.
  (2) $P(i, j)$：(i, j) 成分と (j, i) 成分は 1, (i, i) 成分と (j, j) 成分は 0, 他は単位行列と同じ.
  (3) $M(i : c)$： (i, i) 成分が c で, 他は単位行列と同じ.

行列の基本変形

基本行列 M を行列 A に左（右）からかけた行列 MA（AM）は, A の

(1) 第 j 行（第 i 列）の c 倍を第 i 行（第 j 列）に加えた行列
(2) 第 i 行（列）と第 j 行（列）を入れ換えた行列
(3) 第 i 行（列）を c 倍した行列