

2次偏導関数

- (復習) 2変数関数 $f(x, y)$ の偏導関数は2つあった。
 - x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$
 - y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$
- 偏導関数もまた2変数関数なので、それらを偏微分することができる。
 - $f_x(x, y)$ の $\begin{cases} x \text{ に関する偏導関数 } f_{xx}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \dots \\ y \text{ に関する偏導関数 } f_{xy}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \dots \end{cases}$
 - $f_y(x, y)$ の $\begin{cases} x \text{ に関する偏導関数 } f_{yx}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \dots \\ y \text{ に関する偏導関数 } f_{yy}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y), \dots \end{cases}$
- $f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y)$ がともに連続ならば, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ である。
つまり, **微分の順序は交換可能**である。

クォータ科目「数学」第2回(担当:佐藤 弘康) 1/4

高次偏導関数

- $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y) (= f_{yx}(x, y)), f_{yy}(x, y)$ を**2次偏導関数**という。
- $f(x, y)$ の**3次偏導関数**とは, 次の4つの関数のことである;
 - $f_{xxx}(x, y), \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y)$
 - $f_{xxy}(x, y) (= f_{xyx}(x, y) = f_{yxx}(x, y)), \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y)$
 - $f_{xyy}(x, y) (= f_{yxy}(x, y) = f_{yyx}(x, y)), \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y)$
 - $f_{yyy}(x, y), \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)$
- \vdots
- 同様に, **n 次偏導関数**が定義できる。
- 本講義で扱う関数は, 何回でも偏微分ができて, その偏導関数が連続なものとする。

クォータ科目「数学」第2回(担当:佐藤 弘康) 2/4

合成関数とその微分

- (復習) 2つの関数 $y = f(t)$ と $t = g(x)$ に対して, **$y = f(g(x))$** で定まる独立変数 x の関数を, 「 f と g の**合成関数**」といい, その微分は
$$y' = f'(g(x))g'(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dt}(g(x)) \frac{dg}{dx}(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$
- 2変数関数 $f(x, y)$ については,
 - (1) 2つの1変数関数 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ に対し,
 $z(t) := f(\varphi(t), \psi(t))$ は独立変数 t の1変数関数なので, 導関数 **$z'(t), \dots$** を考えることができる. p.59 定理 2.
 - (2) 2つの2変数関数 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ に対し,
 $z(u, v) := f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ は独立変数 u, v の2変数関数なので, 偏導関数 **$z_u(u, v), z_v(u, v), \dots$** を考えることができる. p.59 定理 3.
 - (3) ...

クォータ科目「数学」第2回(担当:佐藤 弘康) 3/4

合成関数とその微分:(1)の意味

(1) 定義域を平面内の曲線 $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ に制限すること

$$\text{例 1) } \begin{cases} \varphi(t) = \cos t \\ \psi(t) = \sin t \end{cases} : \text{原点を中心とする半径 1 の円}$$

$$\text{例 2) } \begin{cases} \varphi(t) = a + ht \\ \psi(t) = b + kt \end{cases} : \text{点 } (a, b) \text{ を通り, ベクトル } (h, k) \text{ に平行な直線}$$

(2) 平面の座標変換

$$\text{例 3) } \begin{cases} \varphi(r, t) = r \cos t \\ \psi(r, t) = r \sin t \end{cases} : \text{極座標}$$

クォータ科目「数学」第2回(担当:佐藤 弘康) 4/4