

数学クォータ科目「基礎数学 II」第 7 回

面積と体積

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

これまでのまとめ (1)

- 関数 $y = f(x)$ がある.

- $x = a$ における微分係数 (平均変化率 の極限)

($y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の傾きの値)

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

- 導関数 (関数 $f(x)$ の微分) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

- 微分の性質 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し,

$$(1-1) \{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(1-2) \{k f(x)\}' = k f'(x)$$

これまでのまとめ (2)

- 基本的な関数の微分

$$(2-1) \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \text{ は実数})$$

$$(2-2) \quad (k)' = 0 \quad (\text{すなわち, 定数関数の微分は消える})$$

$$(2-3) \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$(2-4) \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(2-5) \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(2-6) \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(2-7) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a} \quad \text{特に, } (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(2-8) \quad (a^x)' = a^x \log a \quad \text{特に, } (e^x)' = e^x$$

これまでのまとめ (3)

- 微分公式

(3-1) 合成関数の微分： $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

特に， $\frac{d}{dx}f(ax + b) = a f'(ax + b)$

(3-2) 積の微分公式： $\{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(3-3) 商の微分公式： $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

特に， $\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

(3-4) 対数微分法： $f'(x) = f(x) \cdot (\log f(x))'$

これまでのまとめ (4)

- 関数 $y = f(x)$ がある.
 - $F'(x) = f(x)$ を満たす関数を $f(x)$ の**原始関数**という.
 - $\int f(x) dx = F(x) + C$ を $f(x)$ の**不定積分**という.
 - $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ を (区間 $a \leq x \leq b$ における) $f(x)$ の**定積分**という.
- **不定積分の性質** 関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し,
 - (4-1) $\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
 - (4-2) $\int \{k f(x)\} dx = k \int f(x) dx$

これまでのまとめ (5)

- **定積分の性質** 関数 $f(x), g(x)$ と定数 a, b, c, k に対し,

$$(6-1) \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(6-2) \int_a^b \{k f(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$(6-3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(6-4) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$(6-5) \int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$$

- **積分の計算方法**

(5-1) 置換積分法

(5-2) 部分積分法

(5-3) 三角関数の加法定理 (積和の公式) を利用する方法

今週のこと

- 定積分を応用した面積と体積の計算

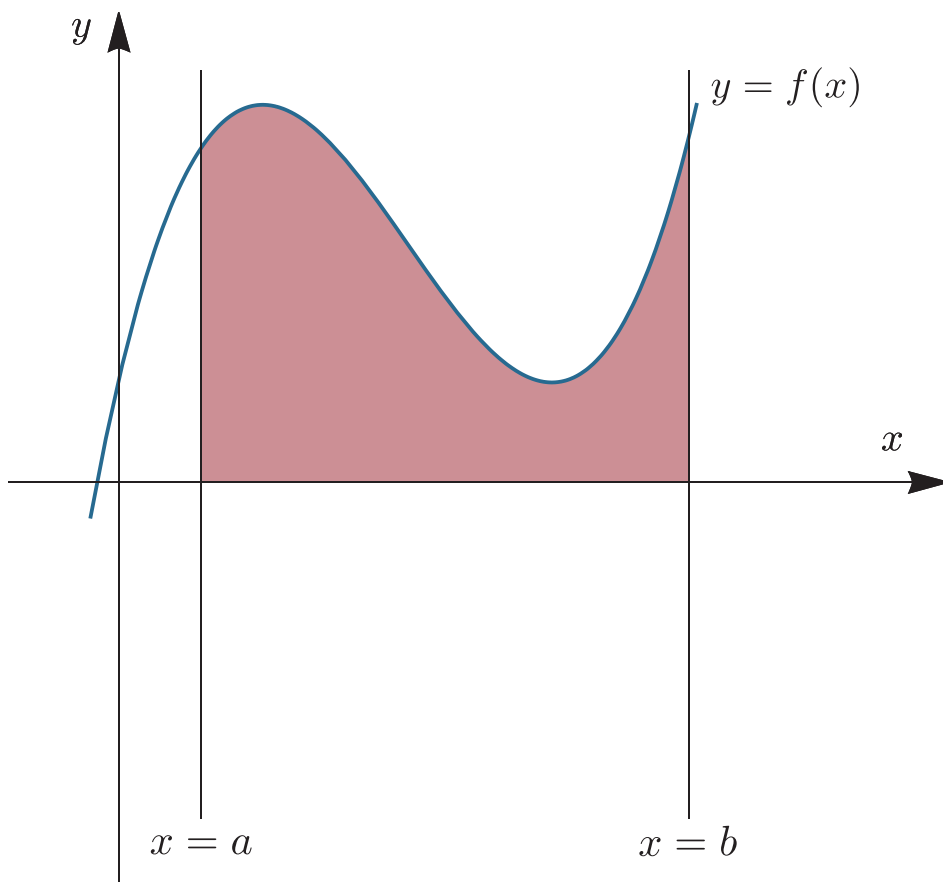
【復習】定積分

- $a \leq x \leq b$ で有界な関数 $f(x)$ に対して定まる量.
- リーマン和の極限として定義される.
 - $a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq 0$ のときは, $y = f(x)$ のグラフと, x 軸, 直線 $x = a, x = b$ で囲まれる図形の面積を, 長方形の面積の和で近似したもの.
- 定積分を利用することにより, このような領域の面積を求めることができる.

定積分を利用した面積の計算（１）

問１） $y = f(x)$ のグラフと， x 軸， 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる図形の面積 S を求めなさい．

$a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq 0$ の場合

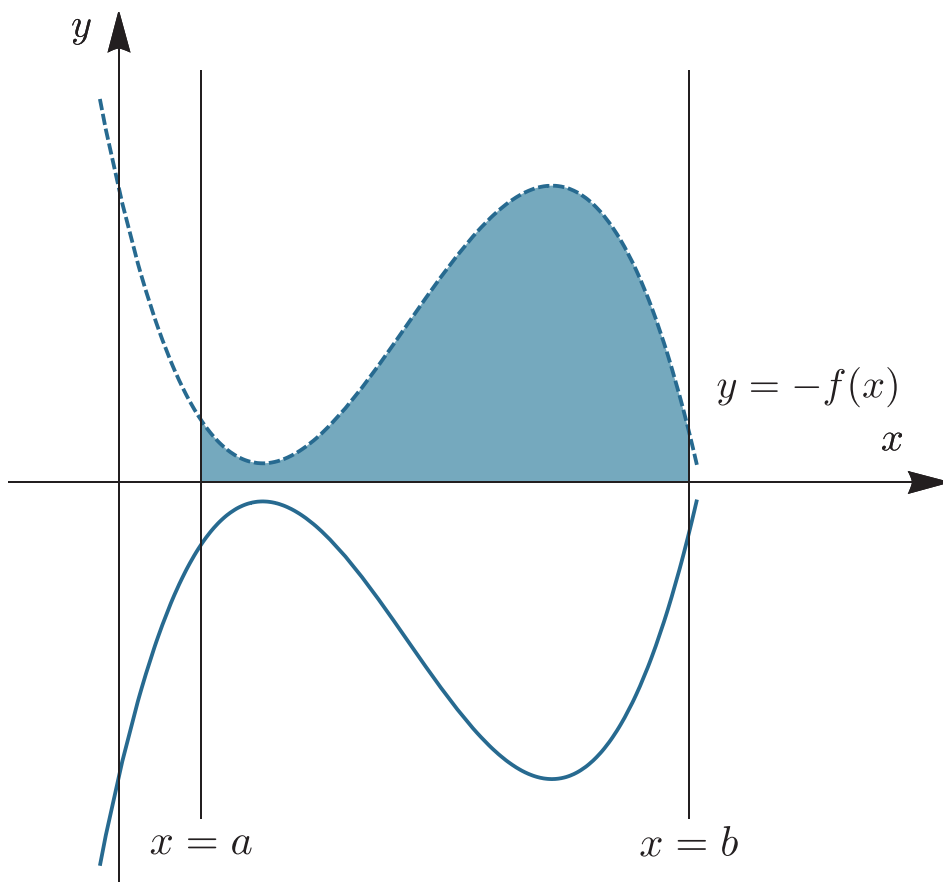


$$S = \int_a^b f(x) dx$$

定積分を利用した面積の計算（2）

問2) $y = f(x)$ のグラフと、 x 軸，直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる図形の面積 S を求めなさい．

$a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq 0$ の場合



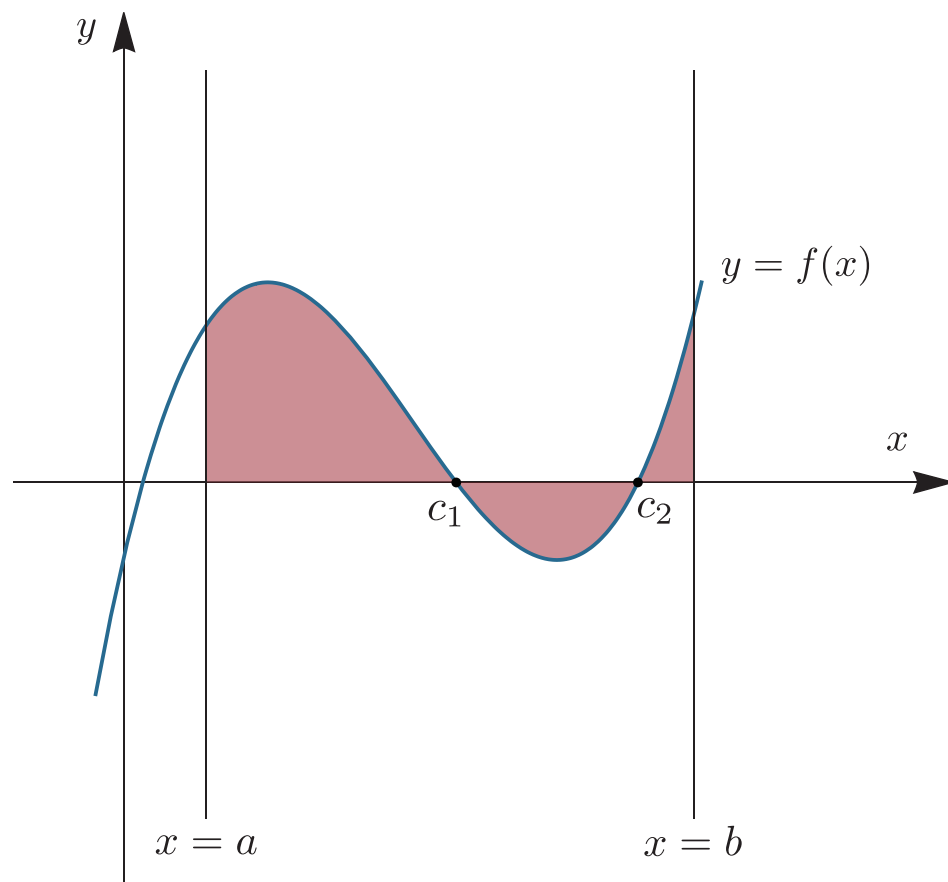
$y = -f(x)$ はこの区間で非負かつ，グラフと3直線で囲まれる図形の面積は， x 軸に関して対称なので，元の図形の面積に等しい．よって

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b (-f(x)) \, dx \\ &= - \int_a^b f(x) \, dx \end{aligned}$$

定積分を利用した面積の計算（3）

問3) $y = f(x)$ のグラフと, x 軸, 直線 $x = a, x = b$ で囲まれる図形の面積 S を求めなさい.

$a \leq x \leq b$ で $f(x)$ の符号が変わる場合



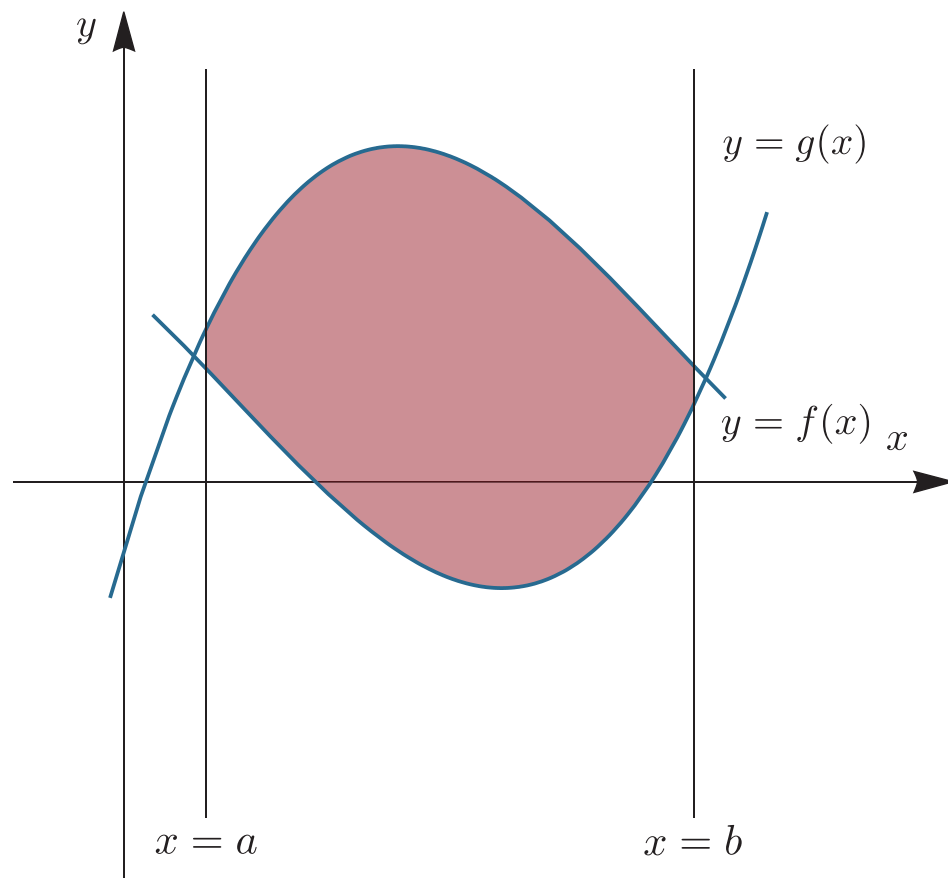
x 軸との交点を求め, 各区間で面積がどのような定積分の式で表されるか考察する.

左図の場合は

$$S = \int_a^{c_1} f(x) dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^b f(x) dx$$

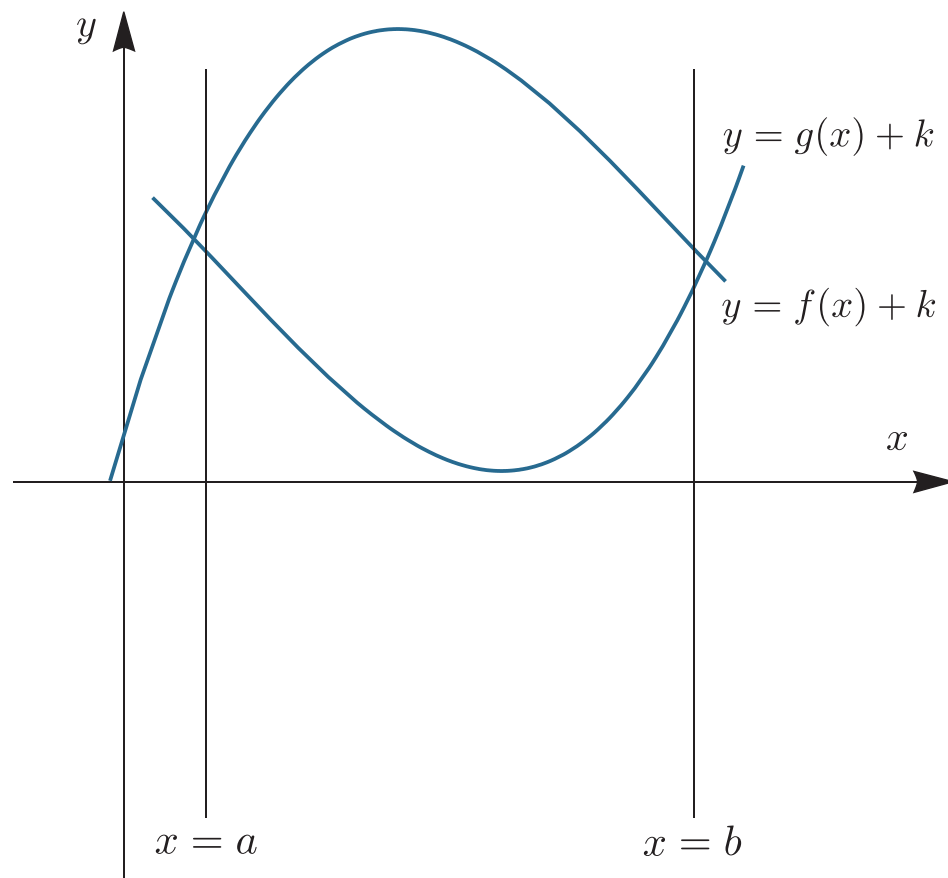
定積分を利用した面積の計算（４）

問４）２つの関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフと、直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる図形の面積 S を求めなさい．



定積分を利用した面積の計算（４）

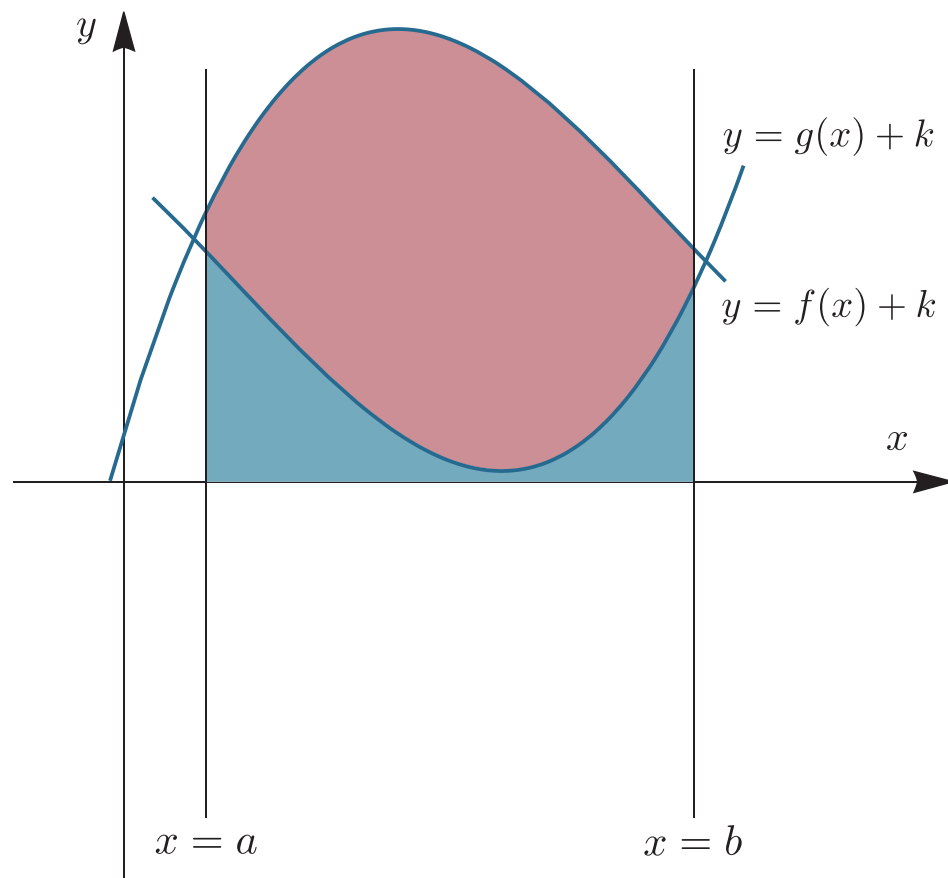
問４）２つの関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフと、直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる図形の面積 S を求めなさい．



$a \leq x \leq b$ で $f(x)$, $g(x)$ が非負となるよう上の方（ y 軸正の方向）に平行移動する．

定積分を利用した面積の計算（４）

問４）２つの関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフと、直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる図形の面積 S を求めなさい．

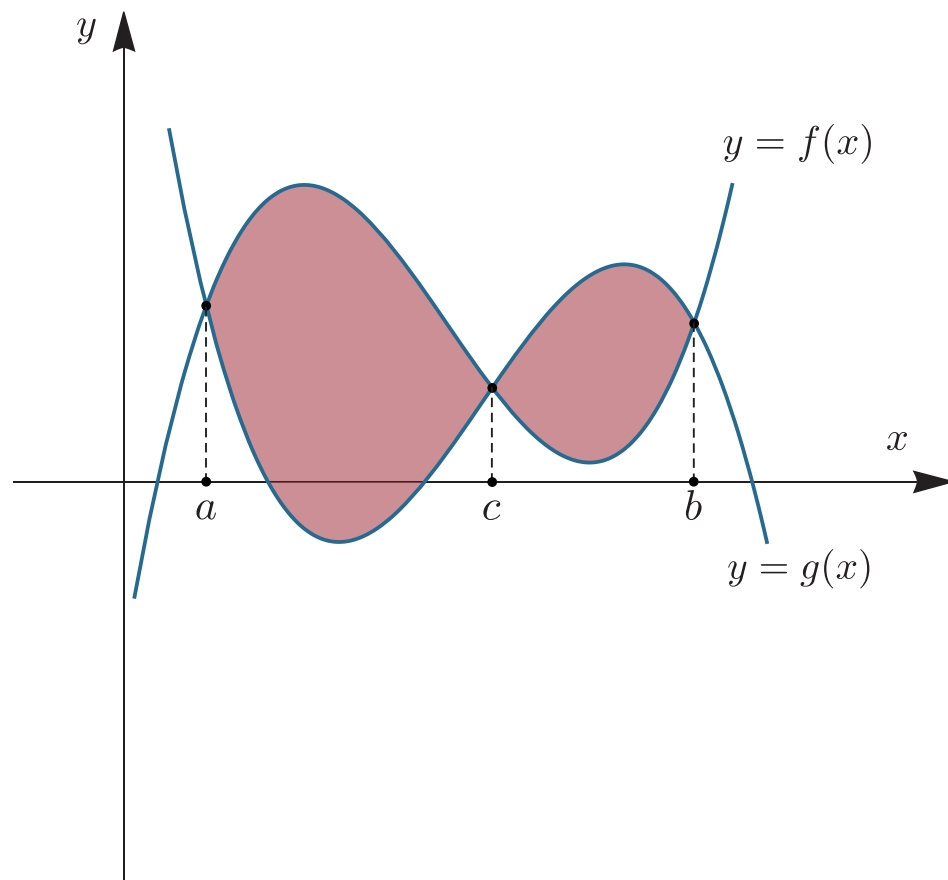


左図の場合は

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b (f(x) + k) dx - \int_a^b (g(x) + k) dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

定積分を利用した面積の計算（5）

問5) 2つの関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S を求めなさい.



2つのグラフの交点を求め、これまでの考え方を参考にして、定積分の式として表す.

左図の場合は

$$S = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

定積分を利用した面積の計算

一般に,

- (1) $y = f(x)$ のグラフと, x 軸, 直線 $x = a, x = b$ で囲まれる図形の面積 S は,

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

- (2) 2つの関数 $y = f(x), y = g(x)$ のグラフと, 直線 $x = a, x = b$ で囲まれる図形の面積 S は,

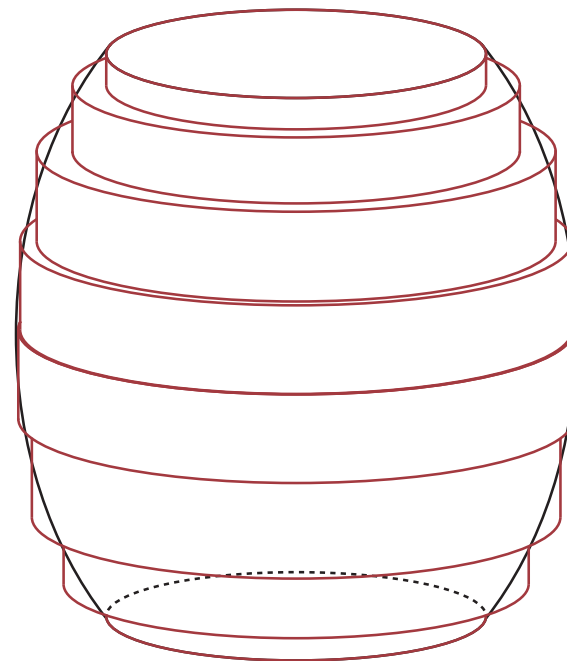
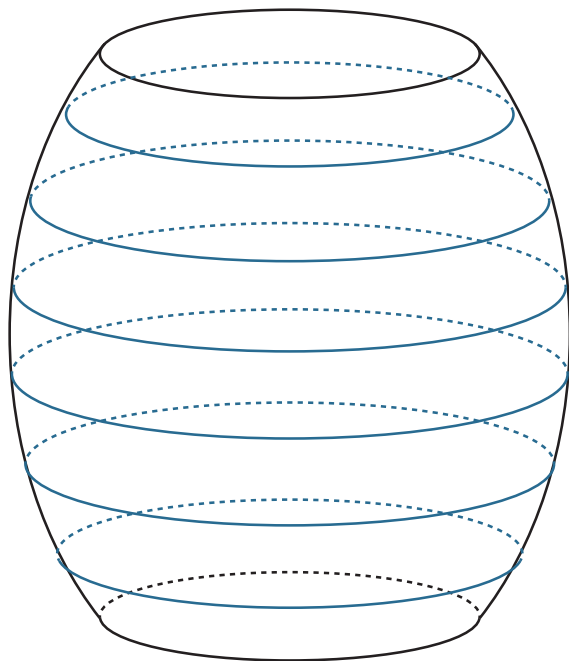
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

※ (1) は (2) において, $g(x) = 0$ (x 軸) とした場合である.

定積分を利用した回転体の体積の計算

例) 樽型の立体の体積

- 適当に 樽の周囲 の長さ ℓ_i を測る (断面の円の半径 r_i がわかる) .
- 樽を左図のような 円柱の集まり として体積 $\sum \pi r_i^2 \cdot h_i$ を計算する .
- これは定積分におけるリーマン和である .
- 積分する関数は樽の 断面積 .



定積分を利用した回転体の体積の計算

- 関数 $y = f(x)$ のグラフの $a \leq x \leq b$ の部分を, x 軸を回転軸として回転してできる立体の体積 V は

$$V = \int_a^b \pi \{f(x)\}^2 dx$$

となる.