数学クォータ科目「数学」第 6 回 (2/4)

行列に関する補遺（基本変形）

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

3つの基本行列

次の3種類の正方行列のことを基本行列という.

(1) $A(i, j : c)$: (i, j) 成分が c で, 他の成分は単位行列と同じ.

例) $A(1, 2 : 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $P(i, j)$: (i, j) 成分と (j, i) 成分は 1, (i, i) 成分と (j, j) 成分は 0, 他は成分は単位行列と同じ.

例) $P(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $M(i : c)$: (i, i) 成分が c で, 他は単位行列と同じ.

例) $M(1 : -3) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

基本行列（１）

基本行列を行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に 左からかける と...

(1) $A(i, j : c)$

$$A(1, 2 : 2)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 & b_1 + 2b_2 & c_1 + 2c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

$A(1, 2 : 2)\,A$ は, A の第２行を 2 倍して, 第１行に加えた行列である.

基本行列（２）

基本行列を行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に 左からかける と…

(2) $P(i, j)$

$$P(2,3)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

$P(2,3)\,A$ は, A の第２行と第３行を 入れ替えた行列である.

基本行列（３）

基本行列を行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に 左からかける と…

(3) $M(i : c)$

$$M(1 : -3)\,A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a_1 & -3b_1 & -3c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

$M(1 : -3)\,A$ は, A の第１行を <u>-3 倍した</u>行列である.

基本行列と行基本変形

一般に,

(1) $A(i, j : c)\,A$ は,

A の第 j 行を c 倍して, 第 i 行に加えた行列である.

(2) $P(i, j)\,A$ は,

A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列である.

(3) $M(i : c)\,A$ は,

A の第 i 行を c 倍した行列である.

- 行列 A に対し, 　　 のような行列を対応させることを, 行基本変形という.
- 一方, 基本行列を A の右側からかけた場合は, 列に関する変形になる.

基本行列と列基本変形

一般に,

(1) $A\,A(i, j : c)$ は,

A の第 i 列を c 倍して, 第 j 列に加えた行列である.

(2) $A\,P(i, j)$ は,

A の第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列である.

(3) $A\,M(i : c)$ は,

A の第 i 列を c 倍した行列である.

- 行列 A に対し, のような行列を対応させることを, 列基本変形という.
- 行基本変形と列基本変形を合わせて, 行列の基本変形という.

基本変形の応用

行列の基本変形は, 以下のことに応用できる.

- 連立１次方程式の解を求めること（解の存在性の判定）
- 逆行列を求めること
- 行列式の計算 ← 今回のテーマ（４つ目の講義動画を参照）

今回（第６回講義）のまとめ

(1)
- 行列の転置（転置行列)

  (対称行列, 交代行列, 三角行列, 直交行列)

(2)
- ３つの基本行列
- 基本行列の積と 行列の基本変形 の関係

(3)
- ２次正方行列の行列式
- ３次正方行列の行列式（サラスの公式）
- 行列 A が正則であることと, $|A| \neq 0$ が同値であること.

(4)
- 行列式の基本性質
- 行列の基本変形と行列式の関係