

線形代数 I 演習 一学期末試験

担当：佐藤 弘康

- (1) すべての答案用紙に、名前、学籍番号を忘れずに記入してください。
- (2) すべての答案用紙の右上に、全体の中で何枚目かを記入してください (例えば、 $1/2$ のように)。答案用紙は裏を使用しても構いません。解答が表裏にまたがる場合は「裏へ続く」と書くなどしてください。
- (3) 解答は結果だけでなく、計算のプロセス、思考の過程など、できるだけ丁寧に記述するようにしてください。

問 1. ベクトル $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し, $a + 2b - c$ に直交する長さ 1 のベクトルを求めよ.

問 2. 任意の n 次正方行列 A に対して, $(A - {}^t A)$ は交代行列になることを証明せよ.

問 3. 次の命題のうち, 正しいものには証明を与え, 正しくないものには反例を与えよ.

- (1) 複素数 z, w に対し, $zw = 0$ ならば, $z = 0$ または $w = 0$ が成り立つ.
- (2) n 次正方行列 A, B に対し, $AB = O$ ならば, $A = O$ または $B = O$ が成り立つ.
- (3) A, B が n 次正則行列ならば, $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ が成り立つ.
- (4) A, B が n 次正則行列ならば, その積 AB も正則である.
- (5) n 次正方行列 A, B に対し, AB が正則ならば, A, B はともに正則である.

問 4. 次の 3 つのベクトル

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) a, b, c が線形独立となるための実数 k の条件を求めよ.
- (2) k が (1) で求めた条件を満たすとき, a, b, c が線形独立となることを証明せよ.
- (3) a, b, c が線形従属となるための実数 k の条件を求めよ.

問 5. 線形代数 I の講義と演習の内容に関して, 深く印象に残ったこと (概念, 定理, 方法など何でもよい) をひとつあげて, その理由を具体的に述べよ.