微積分 II 演習

－ 第 2 回 実数の性質，数列の収束・発散 (Cauchy 列，部分列) －

担当：佐藤 弘康

未発表問題： 1.3(1)(3), 1.4(3)(5), 1.5(2), 1.6, 1.7

例題 3． $\mathbf{F}$ を実数の公理群 I(教科書 I p.7 の青枠の 1)〜5)) と公理群 II (教科書 I p.9 の青枠の 1)，2) 及び p.10 の青枠の 1)〜3)) を満たす集合とするとき，$a, b, c \in \mathbf{F}$ に対して以下の命題が成り立つことを証明せよ．

(1) $a \leq b \iff 0 \leq b + (-a)$

(2) $a \leq b \iff -a \geq -b$

(3) $a \geq 0 \Longrightarrow -a \leq 0$

(4) $a \leq b,\ c \geq 0 \Longrightarrow ac \leq bc$

解. (1) $a \leq b$ のとき，両辺に $(-a)$ を加えると，II-2) より

$$0 = a + (-a) \leq b + (-a)$$

を得る．逆に $b + (-a) \geq 0$ のとき，両辺に a を加えると

$$a = 0 + a \leq (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = b$$

を得る．これで，(1) の同値性が示された．(証明終了)

問題 2.1. 実数 $\mathbf{R}$ の定義として，実数の公理群 I，II に加え，実数の連続性として「上に有界な集合には必ず上限が存在する」を採用するとき以下の命題が成り立つことを証明せよ．

(1) 下に有界な集合には必ず下限が存在する．

(2) 任意の正の実数 a, b に対して，$na > b$ となるような $n \in \mathbf{N}$ が存在する．

ヒント： 3 つの公理群と例題 3 の結果を使って証明せよ

例題 4．(教科書 I p.19)　漸化式

$$a_1 \geq 1,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n + 1} \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{2.1}$$

で定まる数列が収束することを示し，その極限を求めよ．

解. $a_{n+1} - a_n$ を計算すると

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{a_{n-1} + 1} = -\frac{a_n - a_{n-1}}{(a_n + 1)(a_{n-1} + 1)},$$

となり，(2.1) 式より，常に $a_n \geq 1$ であることがわかるから

$$|a_n - a_{n-1}| \leq \frac{1}{4}|a_{n-1} - a_{n-2}|$$

が成り立つ．これを繰り返し使うと

$$|a_n - a_{n-1}| \leq \frac{1}{4^{n-1}}|a_2 - a_1|$$

を得る．したがって，任意の $m, n \in \mathbf{N}$ $(m > n)$ に対し

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq \left(\frac{1}{4^{m-2}} + \frac{1}{4^{m-3}} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) |a_2 - a_1| \\
&= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{m-n} - 1 \right)}{\frac{1}{4} - 1} \cdot |a_2 - a_1| \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m-n}}{3} \cdot |a_2 - a_1| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \cdot |a_2 - a_1|
\end{aligned}$$

となる．数列 $\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\}|a_2 - a_1|$ は 0 に収束するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 n_ε が存在し，$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \cdot |a_2 - a_1| < \varepsilon$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ を満たす．したがて，$\{a_n\}$ は Cauchy 列となり，収束する．a_n の極限を a とおき，(2.1) の両辺の極限をとると

$$a = 1 + \frac{1}{a + 1}.$$

したがって，$a = \sqrt{2}$ を得る．(証明終了)

問題 2.2. 例題 3 の漸化式 (2.1) で定まる数列 $\{a_n\}$ が $\sqrt{2}$ に収束することを $\varepsilon - N$ 論法で証明せよ．

ヒント： $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

問題 2.3. 漸化式

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{2.2}$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ が収束することを，次の 2 つの方法で証明せよ．

(1) $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示す．

(2) 極限値を求め (予想し)，その値に収束することを $\varepsilon - N$ 論法で証明する．

ヒント： 例題 4 を参照．

問題 2.4. 任意の自然数 n $(n \geq 2)$ に対し，

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c|a_n - a_{n-1}| \tag{2.3}$$

を満たす定数 c $(0 \leq c < 1)$ が存在するならば，数列 $\{a_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ．

注意： この主張は例題 4，問題 2.3 の一般化となっている．

問題 2.5. 第 n 項が

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列でないことを証明せよ．

ヒント： $\{a_n\}$ が Cauchy 列とは，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ \forall m \in \mathbf{N},\ m \geq n \geq N \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

だから，その否定命題

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N},\ m \geq n \geq N \text{ かつ } |a_m - a_n| \geq \varepsilon$$

を示せばよい．つまり，次の命題を満たす正の実数 ε が存在することを示せばよい；「どんな大きな $n \in \mathbf{N}$ をとっても，さらに大きな $m \in \mathbf{N}$ をとれば，$|a_m - a_n| \geq \varepsilon$ となる」．

問題 2.6. 数列の部分列とはどのような数列か，説明せよ．

問題 2.7. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき，その部分列も a に収束することを示せ．

問題 2.8. 数列 $\{a_n\}$ において，部分列 $\{a_{2n}\}$，$\{a_{2n-1}\}$，$\{a_{3n}\}$ がそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ に収束するならば，$\alpha = \beta = \gamma$ であって $\{a_n\}$ も α に収束することを示せ．

ヒント： 問題 2.7 の結果を用いて証明せよ．

□ レポート問題

問題 2.9. 例題 3 の (2)〜(4) の中から 1 つ命題を選び，それを証明せよ．

□ 前回の復習と捕捉

◇ **問題 1.1**　集合 S ($\subset \mathbf{R}$) の**下限** $\inf S$ とは，次の 2 つの条件を満たす数である；

(1) S の任意の元 s に対して，$s \geq \inf S$．($\forall s \in S : s \geq \inf S$)

(2) どんな正の数 ε をとっても，$\inf S + \varepsilon > s$ を満たす $s \in S$ が存在する．
($\forall \varepsilon > 0 : \exists s \in S : \inf S + \varepsilon > s$)

その否定命題「l が $\inf S$ でない」とは,

(1) $s < l$ を満たす $s \in S$ が存在する ($\exists s \in S : s < l$) か，又は

(2) 任意の $s \in S$ に対し，$l + \varepsilon \leq s$ を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する．
($\exists \varepsilon > 0 : \forall s \in S : l + \varepsilon \leq s$)

◇ **問題 1.3(2)**　問題 1.2 の結果から，集合 $\{p \in \mathbf{Q} : -\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}\}$ の上限 l は，$l \leq \sqrt{2}$ を満たす．また，任意の実数 a と正の実数 ε に対して，開区間 $(a-\varepsilon, a)$ は必ず有理数 q を含む (**有理数の稠密性**) ので，$l = \sqrt{2}$ となることがわかる．

◇ **問題 1.4(1)(2)(4)**　(1) $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| < \left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right|$

(2) $\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{n+1}{n} = 2 + \dfrac{1}{n(n+1)} < 2 + \dfrac{1}{n}$

(4) $\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{n^2}$

このことから，各数列の収束性は数列 $\{1/\sqrt{n}\}$，$\{1/n\}$，$\{1/n^2\}$ の話に帰着される．

◇ **問題 1.5(1)**　数列 $\{a_n + b_n\}$ が収束しても，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束するとは限らない．例えば，$\{a_n\}$ を発散する数列とし，$b_n = -a_n$ とおけば，$a_n + b_n = 0$ で，$\{a_n + b_n\}$ は 0 に収束する．