【復習】１変数関数の極値の判定

定理 1.

(i)「$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる」 $\Longrightarrow$ $f'(a)=0$

(ii) $f'(a)=0$ かつ $\begin{cases} f''(a)<0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極大値} \\ f''(a)>0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$

関数 $f(x)$ の極値を求める手順

(1) 導関数 $f'(x)$, $f''(x)$ を求める.

(2) 方程式 $f'(x)=0$ の解を求める.

(3) (2) の解 $x=a$ の対し, $f''(a)$ の符号を調べる；

$f''(a)<0$ ならば極大, $f''(a)>0$ ならば極小, $f''(a)=0$ ならば？

$\boxed{\text{問}}$ $f'(a)=0$ かつ $f''(a)=0$ のときは？

【参考】１変数関数の極値の判定

定理.

- $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(2m-1)}(a)=0$

  かつ $\begin{cases} f^{(2m)}(a)<0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極大値} \\ f^{(2m)}(a)>0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$

- $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(2m)}(a)=0$

  かつ $f^{(2m+1)}(a)\neq 0 \Longrightarrow f(a)$ は極値ではない

例） $f(x)=x^4$ は, $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, $f'''(x)=24x$, $f^{(4)}(x)=24$ より,
$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, $f^{(4)}=24>0$ であるから, $f(0)$ は極小値.

例） $f(x)=x^3$ は, $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$, $f'''(x)=6$ より,
$f'(0)=f''(0)=0$, $f'''(0)=6\neq 0$ であるから, $f(0)$ は極値ではない.

【復習】２変数関数の極値の判定

定理 2.

[I]「$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとる」 $\Longrightarrow$ $f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$

[II] $D(x,y):=\{f_{xy}(x,y)\}^2-f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y)$ とおく.

$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ かつ

- $D(a,b)<0$ かつ $\begin{cases} f_{xx}(a,b)<0 & \Longrightarrow \quad f(a,b) \text{ は極大値} \\ f_{xx}(a,b)>0 & \Longrightarrow \quad f(a,b) \text{ は極小値} \end{cases}$
- $D(a,b)>0$ のとき, $f(a,b)$ は極値ではない.
- $D(a,b)=0$ のとき, $f(a,b)$ が極値となるときも, そうならないときもある.

２変数関数 $f(x,y)$ の極値を求める手順

(ステップ 1) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求める.

(ステップ 2) 連立方程式 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ の解を求める.

(ステップ 3) 2 次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ を求める.

(ステップ 4) $D(x,y)=\{f_{xy}(x,y)\}^2-f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y)$ を求める.

(ステップ 5) (2) の解 $(x,y)=(a,b)$ の対し,
$D(a,b)$ と $f_{xx}(a,b)$ の符号を調べる；（省略）