調和 Hadamard 多様体と Gauss 超幾何微分方程式

佐藤 弘康

（日本工業大学 工学部 共通教育系）

伊藤光弘氏（筑波大学数理物質系）との共同研究に基づく

2015 年 8 月 28 日

第 62 回幾何学シンポジウム

（東京理科大学 神楽坂キャンパス）

§0.1 概要

- 調和 Hadamard 多様体上の球 Fourier 変換について考える.
- 空間がどのような性質を満たすとき，逆変換が存在し，Plancherel 公式が成立するか.
- 超幾何型調和 Hadamard 多様体の概念を定義.
- その性質，および関連する話題について述べる.

目次

§0.2 伊藤光弘氏の講演との関係

- (X, g)：Hadamard 多様体
- Poisson 核測度 $P(x, \theta)\, d\theta$ は写像

$$\Theta : (X, g) \to (\mathcal{P}(\partial X), G)\ ;\ x \mapsto P(x, \theta)\, d\theta$$

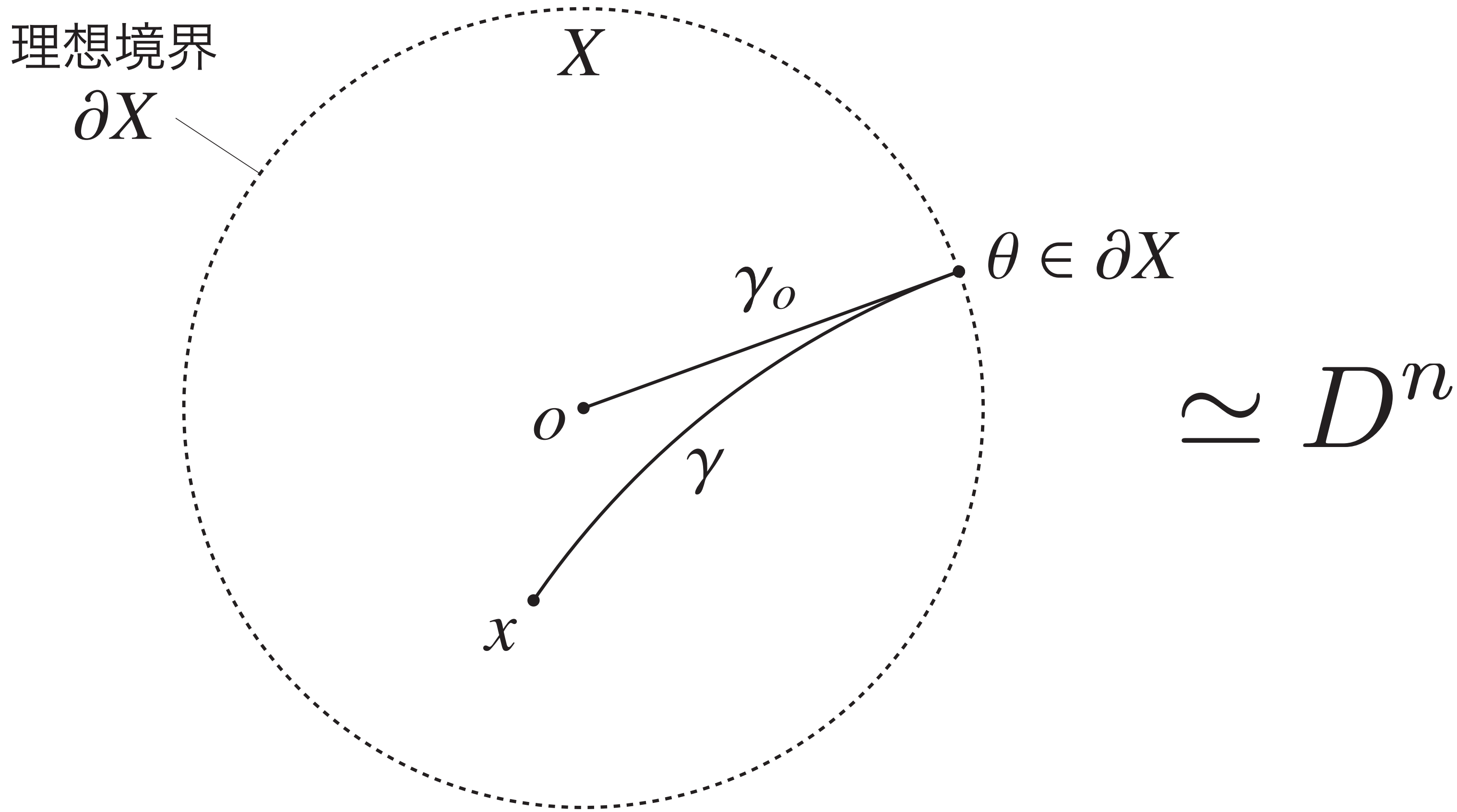
を定義する.

- (X, g) が Damek-Ricci 空間のとき，Θ は相似的かつ調和的.
- Θ は相似的かつ調和的な Hadamard 多様体は，Damek-Ricci 空間以外に存在するか？

§1.0 はじめに

調和 Hadamard 多様体上の球 Fourier 変換について考える

- (X, g)：n 次元 Hadamard 多様体（つまり，単連結，完備，非正曲率）
- ∂X：X の理想境界（$(n-1)$ 次元球面に同相）



§1.0 はじめに

調和 Hadamard 多様体上の球 Fourier 変換について考える

- (X, g)：n 次元 Hadamard 多様体（つまり，単連結，完備，非正曲率）
- ∂X：X の理想境界（$(n-1)$ 次元球面に同相）

- 調和多様体とは，次のいずれかの条件を満たす Riemann 多様体；
  - 体積密度関数 $\sqrt{\det(g_{ij})}$ が動径関数となる.
  - 測地球面の平均曲率が動径関数となる.

$$\vdots$$

- 以下，(X, g) は調和 Hadamard 多様体であるとする.

§1.1 調和 Hadamard 多様体上の球 Fourier 変換

調和 Hadamard 多様体上の球 Fourier 変換について考える

- ラプラシアン $\mathcal{L}$ を極座標 (r,θ) で表すと

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sigma(r)\frac{\partial}{\partial r} + \text{(測地球面方向の微分)}$$

ただし，$\sigma(r)$ は測地球面 $G(o,r)$ の平均曲率.

- $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}} := \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \sigma(r)\dfrac{\partial}{\partial r}$
- X 上の動径関数 φ_λ が
    - $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}$ の固有関数；$\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}\varphi_\lambda = -\left(\dfrac{1}{4}\rho^2 + \lambda^2\right)\varphi_\lambda$，かつ
    - $\varphi_\lambda(o) = \varphi_\lambda(0) = 1$

を満たすとき，φ_λ を X の球関数という.

§1.1 調和 Hadamard 多様体上の球 Fourier 変換

- X 上のコンパクト台をもつ C^∞ 動径関数 f に対し，その球 Fourier 変換 $\widetilde{f}$ を以下の式で定義する;

$$\widetilde{f}(\lambda) = \int_X f(x)\,\varphi_\lambda(x)\,dv_g = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty f(r)\,\varphi_\lambda(r)\,S(r)\,dr. \tag{2}$$

ただし，$S(r)$ は半径 r の測地球面の体積密度関数.

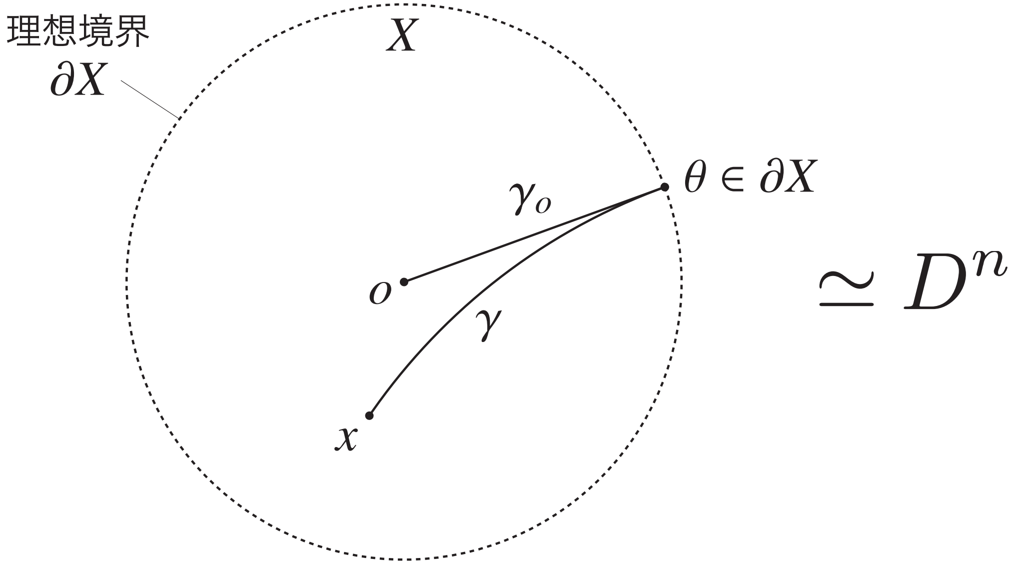
§1.1 調和 Hadamard 多様体上の球 Fourier 変換

- Fourier 変換「関数をラプラシアン $\mathcal{L}$ の固有関数の和の分解すること」
- 調和 Hadamard 多様体ならば，$\varphi_\lambda(x) = \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\rho + i\lambda\right) B_\theta(x)\right\}$ は

$$\mathcal{L}\varphi_\lambda = -\left(\frac{1}{4}\rho^2 + \lambda^2\right)\varphi_\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

を満たす．ここで，

- ○ B_θ は Busemann 関数；$B_\theta(x) = \lim_{t\to\infty}(d(\gamma_o(t), x) - t)$
  ただし，γ_o は $\gamma_o(0) = o$，$\gamma_o(\infty) = \theta \in \partial X$ を満たす測地線.



§1.1 調和 Hadamard 多様体上の球 Fourier 変換

- Fourier 変換「関数をラプラシアン $\mathcal{L}$ の固有関数の和の分解すること」
- 調和 Hadamard 多様体ならば，$\varphi_\lambda(x) = \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\rho + i\lambda\right)B_\theta(x)\right\}$ は

$$\mathcal{L}\varphi_\lambda = -\left(\frac{1}{4}\rho^2 + \lambda^2\right)\varphi_\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

を満たす．ここで，

  - B_θ は Busemann 関数；$B_\theta(x) = \lim_{t\to\infty}(d(\gamma_o(t), x) - t)$
    ただし，γ_o は $\gamma_o(0) = o$，$\gamma_o(\infty) = \theta \in \partial X$ を満たす測地線.
  - ρ は体積エントロピー；$\rho = \lim_{r\to\infty}\frac{\log \mathrm{Vol} B(p; r)}{r}$
- なぜ，固有関数となるのか.
  - Busemann 関数の性質；$|\nabla B_\theta| = 1$
  - 調和多様体のホロ球面（B_θ の等位超曲面）はすべて平均曲率一定で，共通値をとる；$\mathcal{L}B_\theta = \rho$

§1.1 調和 Hadamard 多様体上の球 Fourier 変換

- $|\nabla B_\theta| = 1$，$\mathcal{L}B_\theta = \rho$ より，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\varphi_\lambda &= \nabla_i\nabla_i\varphi_\lambda = \nabla_i\nabla_i \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\rho + i\lambda\right)B_\theta(x)\right\} \\
&= \nabla_i\left\{-\left(\frac{\rho}{2} + i\lambda\right)\nabla_i B_\theta \cdot \varphi_\lambda\right\} \\
&= -\left(\frac{\rho}{2} + i\lambda\right)\left\{\mathcal{L}B_\theta \cdot \varphi_\lambda - \left(\frac{\rho}{2} + i\lambda\right)|\nabla B_\theta|^2\,\varphi_\lambda\right\} \\
&= -\left(\frac{\rho}{2} + i\lambda\right)\left\{\rho - \left(\frac{\rho}{2} + i\lambda\right)\right\}\varphi_\lambda \\
&= -\left(\frac{\rho}{2} + i\lambda\right)\left(\frac{\rho}{2} - i\lambda\right)\varphi_\lambda \\
&= -\left(\frac{\rho^2}{4} + \lambda^2\right)\varphi_\lambda.
\end{aligned}
$$

- よって，Fourier 変換は定義可能.

§1.1 調和 Hadamard 多様体上の球 Fourier 変換

- 調和 Hadamard 多様体ならば，（球）Fourier 変換が定義可能.
- どのような空間において，逆変換や Plancherel の公式が成立するか？
- Damek-Ricci 空間においては成立
  - 階数 1 対称空間の場合の類似（Damek-Ricci [4], Ricci [5]）
  - Koornwinder [8] による Jacobi 関数と Jacobi 変換に関するより一般的な枠組みで展開できる（Anker-Damek-Yacoub [1]）

§1.1 調和 Hadamard 多様体上の球 Fourier 変換

- Anker-Damek-Yacoub [1] の方法
  - 球関数の方程式

$$\mathcal{L}_{\mathrm{rad}} f(r) = -\left(\frac{1}{4}\rho^2 + \lambda^2\right) f(r)$$

を，$-\sinh^2 \dfrac{r}{2} = z$ と変数変換すると Gauss 超幾何型微分方程式

$$z(1-z)u''(z) + \left(\frac{n}{2} - (\rho+1)z\right)u'(z) - \left(\frac{1}{4}\rho^2 + \lambda^2\right)u(z) = 0$$

に変換される．

  - 「Jacobi 関数と Jacobi 変換」の議論 [Ko] が適用できる．
    （逆変換が存在．Plancherel の公式が成立）

$\longrightarrow$ 超幾何型 調和 Hadamard 多様体 の概念を定義．

§1.2 超幾何型 調和 Hadamard 多様体

定義 1.

調和 Hadamard **多様体** (X, g) **において，球関数が満たす方程式**

$$\mathcal{L}_{\mathrm{rad}} f(r) = -\left(\frac{1}{4}\rho^2 + \lambda^2\right) f(r) \tag{1}$$

に対し， $-\sinh^2 \dfrac{r}{2} = z$ **と変数変換すると，** Gauss **超幾何型微分方程式**

$$z(1-z)\, u''(z) + (c - (a+b+1)z)\, u'(z) - ab\, u(z) = 0 \tag{3}$$

に変換されるとき，「(X, g) は超幾何型である」という．

§1.2 主結果

定理 2.

n 次元調和 Hadmard 多様体 (X, g) が超幾何型であるための必要十分条件は，半径 r の測地球面の体積密度関数 $S(r)$ が

$$S(r) = \mathrm{Const}\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{n-1}\left(\cosh\frac{r}{2}\right)^{2\rho-(n-1)}$$

と表されることである（ただし，ρ は (X, g) の体積エントロピー）.

§2.1 Jacobi 関数と Jacobi 変換

$\boxed{\text{Gauss 超幾何関数}}$　$a, b, c \in \mathbb{C}$（ただし，$c \neq 0, -1, -2, \ldots$）に対して，

$$ {}_2F_1(a, b, c; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k} \times \frac{z^k}{k!}, \qquad z \in \mathbb{C} \backslash [0, \infty) $$

- $(a)_k$ は shifted factorial；$(a)_k = \begin{cases} a(a+1)\cdots(a+(k-1)) & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$
- これは微分方程式

$$ z(1-z)\,u''(z) + \{c - (a+b+1)z\}\,u'(z) - ab\,u(z) = 0 \tag{3} $$

の解（原点で正則かつ値 1 をとる）

§2.2 Jacobi 関数と Jacobi 変換

Jacobi 関数

$$\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) := {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2}, \alpha+1; -\sinh^2 t\right)$$

- $|\beta| < \alpha + 1$ のとき，$\left\{\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}\right\}$ は重み関数

$$\Delta_{\alpha,\beta}(t) = (2\sinh t)^{2\alpha+1}(2\cosh t)^{2\beta+1}$$

に関して，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の正規直交系をなす．

- $L_{\alpha,\beta} := \dfrac{d^2}{dt^2} + \{(2\alpha+1)\coth t + (2\beta+1)\tanh t\}\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{\Delta'_{\alpha,\beta}(t)}{\Delta_{\alpha,\beta}(t)}\dfrac{d}{dt}$
- $z = -\sinh^2 t$ と変数変換すると，超幾何型微分方程式 (3) は

$$L_{\alpha,\beta}v = -\left(\lambda^2 + (\alpha+\beta+1)^2\right)v$$

ただし，$\alpha = c-1,\ \beta = a+b-c,\ \lambda^2 = -(a-b)^2$.

§2.3 Jacobi 関数と Jacobi 変換

$\boxed{\text{Jacobi 変換}}$ $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ に対して，Jacobi 変換 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_0^\infty f(t)\, \phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\, \Delta_{\alpha,\beta}(t)\, dt$$

- $f \in \mathcal{D}_{\mathrm{even}}(\mathbb{R})$ ならば，$\widehat{f}$ は 解析的な偶関数.
- ただし，$\mathcal{D}_{\mathrm{even}}(\mathbb{R})$ は，コンパクト台をもつ $\mathbb{R}$ 上の偶関数全体.

- Jacobi 変換は逆変換が存在し，Plancherel の定理が成り立つ；

§2.4 Jacobi 関数と Jacobi 変換

定理 4 ([8]).

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ が $\alpha>-1,\ \alpha\pm\beta+1\geq 0$ を満たすとする．このとき，$f,g\in\mathcal{D}_{\mathrm{even}}(\mathbb{R})$ に対し，次が成り立つ．

(i) **逆変換**：$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\,\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\,\frac{1}{|\boldsymbol{c}_{\alpha,\beta}(\lambda)|^2}\,d\lambda$

(ii) **Plancherel の公式**：

$$\int_0^\infty f(t)\,\overline{g(t)}\,\Delta_{\alpha,\beta}(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\,\overline{\widehat{g}(\lambda)}\,\frac{1}{|\boldsymbol{c}_{\alpha,\beta}(\lambda)|^2}d\lambda$$

$\boldsymbol{c}_{\alpha,\beta}(\lambda)$ は Harish-Chandra の $\boldsymbol{c}$-関数；$\boldsymbol{c}_{\alpha,\beta}(\lambda)=\dfrac{2^{\alpha+\beta+1-i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{i\lambda+\alpha+\beta+1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{i\lambda+\alpha-\beta+1}{2}\right)}$

§3.1 Damek-Ricci 空間 $X = A \ltimes N \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$

- $\mathfrak{n} = (\mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}, [\cdot,\cdot], \langle \cdot,\cdot \rangle)$: 2-step 冪零 Lie 環（$\mathfrak{z}$ は中心，$\mathfrak{v} = \mathfrak{z}^{\perp}$）
- $Z \in \mathfrak{z}$ に対して，$J_Z : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}; \quad \langle J_Z V, V' \rangle = \langle Z, [V, V'] \rangle$.
- $(J_Z)^2 = -|Z|^2 \, \mathrm{id}_{\mathfrak{v}}$ $(\forall Z \in \mathfrak{z})$ のとき，$\mathfrak{n}$ を H-type Lie 環とよぶ.
- $\mathfrak{n}$ を Lie 環とする単連結 Lie 群 N を H-type 群とよぶ.

- $\mathfrak{s} = (\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}, \ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{s}}, \ \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathfrak{s}})$
  - $[V + Z + lA, V' + Z' + l'A]_{\mathfrak{s}} = \left(\frac{l}{2} V' - \frac{l'}{2} V \right) + (lZ' - l'Z + [V, V'])$
  - $\langle V + Z + lA, \ V' + Z' + l'A \rangle_{\mathfrak{s}} = \langle V, V' \rangle + \langle Z, Z' \rangle + ll'$.
- $\mathfrak{s}$ を Lie 環とし，$\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$ から定まる左不変計量を備えた単連結 Lie 群を Damek-Ricci 空間という.
- $S \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$ と同一視したときの群構造は

$$(V, Z, a) \cdot (V', Z', a') = \left(V + \sqrt{a} V', \ Z + aZ' + \frac{\sqrt{a}}{2}[V, V'], \ aa' \right).$$

§3.2 Damek-Ricci 空間上のラプラシアン $\mathcal{L}$

$$X = A \ltimes N \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+, \qquad \partial X = N \cup \{\infty\}$$

- $m = \dim \mathfrak{v}$, $k = \dim \mathfrak{z}$, $n = k + m + 1$
- 単位元 $e \in X$ を中心とする測地球面 $G(e; r)$ の
  - 体積密度関数；$S(r) = 2^{m+k} \left(\sinh \frac{r}{2}\right)^{m+k} \left(\cosh \frac{r}{2}\right)^{k}$
  - 平均曲率；$\sigma(r) = \dfrac{S'(r)}{S(r)} = \dfrac{m+k}{2} \cosh \dfrac{r}{2} + \dfrac{k}{2} \tanh \dfrac{r}{2}$
- $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \sigma(r) \dfrac{\partial}{\partial r} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\dfrac{m+k}{2} \coth \dfrac{r}{2} + \dfrac{k}{2} \tanh \dfrac{r}{2} \right) \dfrac{\partial}{\partial r}$
- $S(r)$ から $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}$ が定まることに注意.

- 体積エントロピー；$\rho = \dfrac{m}{2} + k$

§3.3 Damek-Ricci 空間上の球 Fourier 変換

- $S(r) = 2^{m+k}\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{m+k}\left(\cosh\frac{r}{2}\right)^{k}$
- $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\dfrac{m+k}{2}\coth\dfrac{r}{2} + \dfrac{k}{2}\tanh\dfrac{r}{2}\right)\dfrac{\partial}{\partial r}$

- $t = \dfrac{r}{2}$ と変換すると,
  - $S(r) = 2^{-k}\Delta_{\alpha,\beta}(t)$
  - $4\mathcal{L}_{\mathrm{rad}} = L_{\alpha,\beta}$

  ただし，$\alpha = \dfrac{m+k-1}{2} = \dfrac{n}{2} - 1,\qquad \beta = \dfrac{k-1}{2} = \rho - \dfrac{n}{2}$.

- 以上のことから，Damek-Ricci 空間における球 Fourier 変換は，本質的には $\alpha = \dfrac{n}{2} - 1,\ \beta = \rho - \dfrac{n}{2}$ の場合の Jacobi 変換である.
- ただし，定数倍の違いあり. $\widetilde{f}(\lambda) = \dfrac{2^{2-k}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\widehat{f(2\,\cdot\,)}(2\lambda)$

§4. 定理 2 の証明

定理 2.

n 次元調和 Hadmard 多様体 (X, g) が超幾何型であるための必要十分条件は，半径 r の測地球面の体積密度関数 $S(r)$ が

$$S(r) = \mathrm{Const}\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{n-1}\left(\cosh\frac{r}{2}\right)^{2\rho-(n-1)} \tag{4}$$

と表されることである（ただし，ρ は (X, g) の体積エントロピー）.

定義 1.（超幾何型調和 Hadamard 多様体）

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \sigma(r)\frac{d}{dr}\right)f(r) = -\left(\frac{1}{4}\rho^2 + \lambda^2\right)f(r) \quad \cdots\ (1)$$

$$\xrightarrow[-\sinh^2(r/2)=z]{} \quad z(1-z)\,u''(z)+(c-(a+b+1)z)\;u'(z)-ab\,u(z) = 0 \quad \cdots\ (3)$$

§4. 定理 2 の証明

- $z = -\sinh^2 \dfrac{r}{2}$ と変換すると

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{1}{2}\sinh r, \qquad \frac{d^2 z}{dr^2} = -\frac{1}{2}\cosh r.$$

- $f(r) = u(z)$ とおくと,

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dr} &= u'(z)\cdot\frac{dz}{dr} = -\frac{1}{2}\sinh r\cdot u'(z),\\
\frac{d^2 f}{dr^2} &= \frac{d}{dr}\left(u'(z)\cdot\frac{dz}{dr}\right) = u''(z)\cdot\frac{dz}{dr} + u'(z)\cdot\frac{d^2 z}{dr^2}\\
&= -z(1-z)\,u''(z) - \frac{1}{2}\cosh r\,u'(z).
\end{aligned}$$

- よって, (1) は

$$z(1-z)\,u''(z) + \frac{1}{2}(\cosh r + \sigma(r)\cdot\sinh r)\,u'(z) - \left(\lambda^2 + \frac{\rho^2}{4}\right)u(z) = 0$$

§4. 定理 2 の証明

$$z(1-z)\,u''(z) + \frac{1}{2}(\cosh r + \sigma(r)\ \sinh r)\,u'(z) - \left(\lambda^2 + \frac{\rho^2}{4}\right) u(z) = 0$$

- (X, g) が超幾何型ならば，この方程式は

$$z(1-z)\,u''(z) + (A + Bz)\,u'(z) - ab\,u(z) = 0$$

  となる（ただし，$A = c,\ B = -(a+b+1)$ は定数）.
- つまり，$\dfrac{1}{2}(\cosh r + \sigma(r)\ \sinh r) = A - B\sinh^2\dfrac{r}{2}$ を得る.

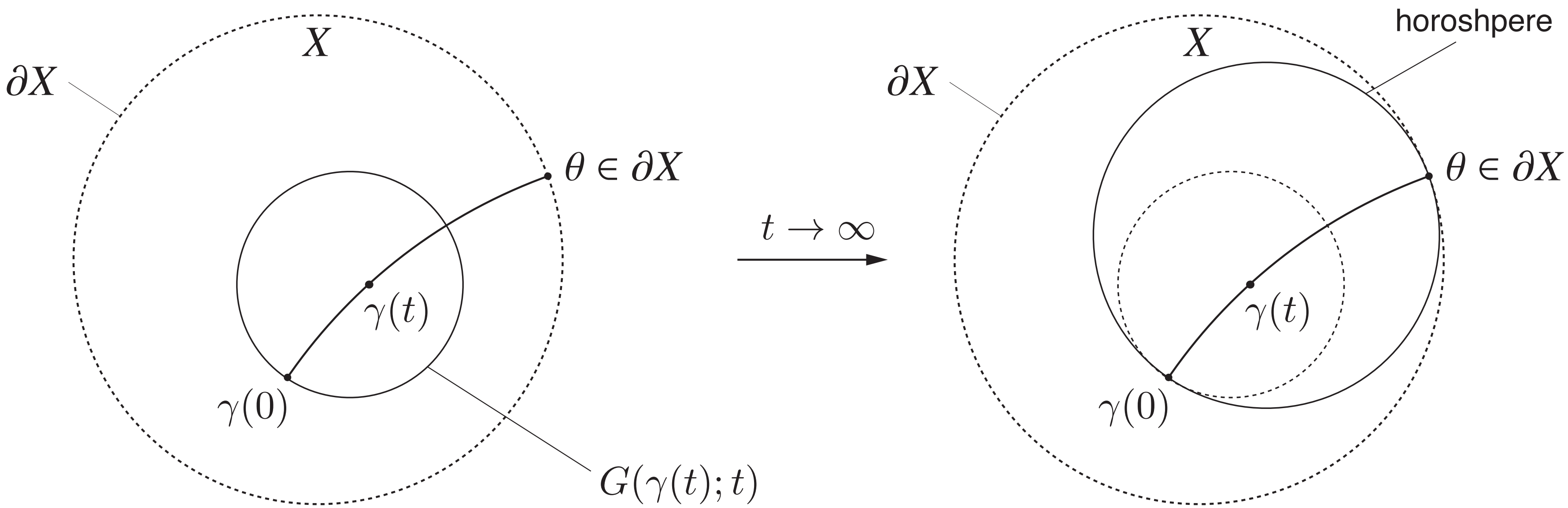
$$\therefore\ \sigma(r) = \left(A - \frac{1}{2}\right)\coth\frac{r}{2} - \left(A + B + \frac{1}{2}\right)\tanh\frac{r}{2}$$

  となる.
- A, B は？ $\longleftarrow \sigma(r)$ の漸近的性質から値がわかる.

§4. 定理 2 の証明

$$\sigma(r) = \left(A - \frac{1}{2}\right)\coth\frac{r}{2} - \left(A + B + \frac{1}{2}\right)\tanh\frac{r}{2}$$

- $\lim_{r\to\infty}\sigma(r) = \rho$
  - X 上の Busemann 関数 $B_\theta(x)$ の等位超曲面をホロ球面という.
  - 調和多様体内のすべてのホロ球面は平均曲率一定で，その値は ρ.
  - ホロ球面は測地球面の半径を $r\to\infty$ としたときの極限.



§4. 定理 2 の証明

$$\sigma(r) = \left(A - \frac{1}{2}\right)\coth\frac{r}{2} - \left(A + B + \frac{1}{2}\right)\tanh\frac{r}{2}$$

- $\lim_{r\to\infty}\sigma(r) = \rho$
  - X 上の Busemann 関数 $B_\theta(x)$ の等位超曲面をホロ球面という.
  - 調和多様体内のすべてのホロ球面は平均曲率一定で，その値は ρ.
  - ホロ球面は測地球面の半径を $r \to \infty$ としたときの極限.
- $\rho = \lim_{r\to\infty}\sigma(r) = \left(A - \frac{1}{2}\right) - \left(A + B + \frac{1}{2}\right) = -B - 1$

$$\therefore\ B = -(\rho + 1)$$

§4. 定理 2 の証明

$$\sigma(r) = \left(A - \frac{1}{2}\right)\coth\frac{r}{2} - \left(A + B + \frac{1}{2}\right)\tanh\frac{r}{2}$$

- $\displaystyle\lim_{r\to 0} r\sigma(r) = (n-1)$
  - $r = 0$ における測地球面の平均曲率の展開公式 [3]

$$(n-1) = \lim_{r\to 0} r\sigma(r) = \left(A - \frac{1}{2}\right)\lim_{r\to 0} r\coth\frac{r}{2} = 2\left(A - \frac{1}{2}\right)$$ より，$A = \dfrac{n}{2}$.

- 以上のことから,

$$\sigma(r) = \frac{n-1}{2}\coth\frac{r}{2} + \left(\rho - \frac{n-1}{2}\right)\tanh\frac{r}{2}$$

- $\sigma(r) = (\log S(r))'$ より，$S(r)$ は (4) 式によって与えられることが示される.

§5.1 関連する話題 (1)

- **調和多様体の分類問題**
  - Lichnerowicz conjecture (1944)
  - Szabó, J. Differential Geom. **31** (1990), 1-28.
    「コンパクトな調和多様体は階数 1 **対称空間に限る」**
  - Ranjan-Shah, J. Geom. Anal. **12** (2002), 683-694.
    「非コンパクトで polynomial volume growth **をもつ調和多様体は** Euclid **空間に限る」**
  - Heber, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 869-890.
    「等質な調和多様体は Euclid **空間か，階数** 1 **対称空間か，** Damek-Ricci **空間に限る」**
- **等質でない** exponential volume growth **をもつ調和多様体は？**

§5.1 関連する話題 (1)

定理（Knieper [7]**）**

Let X be a simply connected noncompact harmonic manifold. Then the following assertion are equivalent:

(i) X is Gromov hyperbolic.

(ii) X has purely exponential volume growth.

(iii) X has rank one.

(iv) X has an Anosov geodesic flow with respect to the Sasaki metric.

§5.2 関連する話題 (2)

- Ramachandran-Ranjan,
  Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **107** (1997), 251-261.

定理

(M,g) が n 次元，非コンパクト，単連結，調和多様体で

- 密度関数が $S(t) = \sinh^{n-1} t$
  $\Longrightarrow (M,g)$ は n 次元実双曲空間に等長的
- Kähler かつ，密度関数が $S(t) = \sinh^{2n-1} t \cosh t$
  $\Longrightarrow (M,g)$ は $2n$ 次元複素双曲空間に等長的
- 四元数 Kähler かつ，密度関数が $S(t) = \sinh^{4n-1} t \cosh^3 t$
  $\Longrightarrow (M,g)$ は $4n$ 次元四元数双曲空間に等長的

§5.2 関連する話題 (2)

- Ramachandran-Ranjan,
  Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **107** (1997), 251-261.

  ◦ 調和多様体における Ledger の公式

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{S(t)}{t^{n-1}}\right)\bigg|_{t=0} = -\frac{1}{3}\mathrm{Ric}$$

  ◦ （正則）断面曲率が一定であることを示している.