微積分 II 演習

− 第 7 回 多変数関数の極限・連続性，$\mathbf{R}^2$ の開集合・閉集合 −

担当：佐藤 弘康

未発表問題： 2.1, 2.3(2), 2.5, 2.10(4), 2.11(2,5), 2.13, 2.14, 3.3〜3.8, 4.2(3), 4.3, 4.5, 5.1(2〜7), 5.2

例題 8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$ を $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ．

解. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha$ とは，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \Longrightarrow |f(x,y)-\alpha| < \varepsilon \tag{7.1}$$

だから，勝手な ε に対し，(7.1) を満たす δ を求めればよい．

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{4}$$

であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = 2\sqrt{\varepsilon}$ ならば，$\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$ が成り立つ．

問題 7.1. 次の極限を求めよ ($\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ)．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2)$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x(1-y^n)-y(1-x^n)-x^n+y^n}{(1-x)(1-y)(x-y)} \qquad (n \in \mathbf{N})$

例題 9. $\mathbf{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y)=xy$ が連続関数であることを $\varepsilon-\delta$ 論法を用いて証明せよ．

解． $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で連続とは，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Longrightarrow |f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon \tag{7.2}$$

だから，勝手な ε に対し，(7.2) を満たす δ を求めればよい．

$$\begin{aligned}|xy-ab| &= |xy-ay+ay-ab|\\ &\le |x-a||y|+|a||y-b|\\ &\le |x-a|(|y-b|+|b|)+|a||y-b|.\end{aligned}$$

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ ならば，$|x-a|<\delta,\ |y-b|<\delta$ であるから，

$$|xy-ab|<\delta(\delta+|b|)+|a|\delta=\delta(|a|+|b|+\delta)$$

を得る．したがって，$|xy-ab|<\varepsilon$ とするためには，$\delta<1$ かつ $\delta<\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}$ を仮定すればよいことがわかる．つまり，ε に対して $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}\right\}$ とおけばよい．以上は任意の $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ で成り立つので，$f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ 上連続である．

問題 7.2. 次の $\mathbf{R}^2$ 上で定義された関数が連続関数であることを，$\varepsilon-\delta$ 論法を用いて証明せよ．

(1) $f(x,y)=x+y$

(2) $f(x,y)=x^2+y^2$

(3) $f(x,y)=\sqrt{xy}$

問題 7.3. 次の関数の定義域を求めよ．また，その集合は開集合か，閉集合か．

(1) $f(x,y)=\log(2x-x^2-y^2)$

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-|x|-|y|}$

問題 7.4. 次の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合か，閉集合か．

(1) $\{(x,y) \mid |x| \le a,\ |y| > b\}$

(2) $\{(x,y) \mid xy > 0\}$

(3) $\{(x,0) \mid a < x < y\}$

問題 7.5. $\mathbf{R}^2$ の部分集合

$$A = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) \;\middle|\; 0 < x \le \frac{1}{2\pi} \right\}$$

の閉包 $Cl(A)$ を求めよ．

□ レポート問題

問題 7.6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$ を $\varepsilon-\delta$ 論法を用いて証明せよ．

□ 前回の復習と捕捉

◇ 問題 4.4 の解　(3) 対数関数の性質より，$|\log x - \log a| < \varepsilon$ は

$$-a(1-e^{-\varepsilon}) < x - a < a(e^{\varepsilon}-1) \tag{7.3}$$

と同値である．したがって，$|x-a| < \delta = a(1-e^{-\varepsilon})$ とすれば，(7.3) が成り立つことがわかる．

(4)

$$\left| e^{-|x|} - e^{-|a|} \right| = e^{\min\{-|a|,-|x|\}} \left(e^{\left||x|-|a|\right|} - 1 \right) \le e^{-|a|} \left(e^{|x-a|} - 1 \right)$$

であるから，例題 5 と同様に $\delta = \log(1+e^{|a|}\varepsilon)$ とおけばよい．

((4) の別解)

$$x \ge 0 \implies 0 \le 1 - e^{-x} \le x \tag{7.4}$$

を用いて，$f(x) = e^{-|x|}$ が一様連続であることを示す．

(i) $y > x \ge 0$ ならば，

$$\left| e^{-|x|} - e^{-|y|} \right| = \left(e^{-x} - e^{-y} \right) = e^{-x}\left(1 - e^{-(y-x)} \right) < y - x.$$

(ii) $y < x \leq 0$ ならば,

$$\left|e^{-|x|} - e^{-|y|}\right| = (e^x - e^y) = e^x\left(1 - e^{-(x-y)}\right) < x - y.$$

(iii) $x > 0 > y$ ならば,

$$\begin{aligned}\left|e^{-|x|} - e^{-|y|}\right| &= \left|e^{-x} - e^y\right| \\ &= \left|(e^{-x} - 1) + (1 - e^y)\right| \\ &\leq \left|e^{-x} - 1\right| + |1 - e^y| \\ &= (1 - e^{-x}) + (1 - e^{-(-y)}) \\ &< x + (-y).\end{aligned}$$

(i) (ii) (iii) より，$|x - y| < \varepsilon$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ であるから，$f(x)$ は一様連続である．

注意：(7.4) は，関数 $f(x) = e^{-x}$ に平均値の定理 (教科書 I p.77, 定理 3.2) を適用して得られる．

(6) 任意に与えた $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta = \min\left\{1, \frac{\sqrt{a^2+1}}{1+2|a|}\varepsilon\right\}$ とおく．このとき，$|x-a| < \delta$ ならば,

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{a^2+1}\right| &= \frac{|x^2 - a^2|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{a^2+1}} \\ &\leq \frac{(|x-a| + 2|a|)|x-a|}{\sqrt{a^2+1}} \\ &\leq \frac{(1+2|a|)}{\sqrt{a^2+1}} \cdot |x-a| < \varepsilon\end{aligned} \tag{7.5}$$

となり，$f(x)$ は点 $a \in \mathbf{R}$ で連続であることがわかる．ここで，任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $\frac{\sqrt{a^2+1}}{1+2|a|} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ が成り立つので，$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\right\}$ としても (7.5) は成立する．この δ は a に依らずに定まるので $f(x)$ は一様連続である．

(7)

$$\left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right| < \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|x||y|}.$$

ここで，関数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ の定義域は $[1, +\infty)$ だから，$\frac{1}{|x||y|} < 1$．したがって，$|x-y| < \varepsilon$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となるので $f(x)$ は一様連続である．

□ レポート問題 (問題 5.1(1)) の解　$f(x) = \frac{1}{x}$, $(x > 0)$ が一様連続でないことを示す．

(解 1) $f(x)$ は連続だから，任意の $a \in (0, \infty)$ と $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し $|x - a| < \delta$ ならば,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon \tag{7.6}$$

が成り立つ．(7.6) は

$$-\frac{a^2\varepsilon}{1+a\varepsilon} < x-a < \frac{a^2\varepsilon}{1-a\varepsilon}$$

と同値だから，a を十分小さい ($1 > a\varepsilon$ を満たすような) 正の数とすると，$|x-a| < \delta$ を満たす x が (7.6) を満たすための最大の δ は $\frac{a^2\varepsilon}{1+a\varepsilon}$ である．しかし，a を 0 に近づけていくと，δ も 0 に近づくから，十分小さいすべての数に共通する $\delta > 0$ を定めることはできない．したがって，$f(x)$ は一様連続ではない．

(解 2) $f(x)$ が，

$$\exists\varepsilon > 0,\ \forall\delta > 0,\ \exists x, y \in (0,\infty),\ |x-y| < \delta \text{ かつ } |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon \tag{7.7}$$

を満たすことを示す (一様連続であることの否定命題)．任意の δ に対し，$\delta' = \min\{\delta, 1\}$ とおき，$x = \delta'$, $y = \frac{\delta'}{2}$ とすると，

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{\delta'} - \frac{2}{\delta'}\right| = \frac{1}{\delta'} \geq 1$$

となるから，$\varepsilon = 1$ は (7.7) を満たすことがわかる．したがって，$f(x)$ は一様連続ではない．

(解 3) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$ とおくと，

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| = 1$$

となる．十分大きい n をとれば，$\frac{1}{n(n+1)}$ はいくらでも小さくできるから，任意の δ に対して $|x_{n_\delta} - y_{n_\delta}| < \delta$ かつ $|f(x_{n_\delta}) - f(y_{n_\delta})| = 1$ を満たす $x_{n_\delta}, y_{n_\delta}$ が存在する．したがって，$f(x)$ は一様連続ではない．

注意：「$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ かつ，$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 1$ だから，問題 5.2 の結果より，$f(x)$ は一様連続でなはない」と言ってもよい．

(解 4) $f(x)$ が一様連続であると仮定する．$a_n = \frac{1}{n}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ は集合 $(0,\infty)$ の Cauchy 列である．しかし，$f(a_n) = n$ だから数列 $\{f(a_n)\}$ は Cauchy 列ではない．これは，教科書 I, p.165 の補題 5.14 に矛盾する．したがって，$f(x)$ は一様連続ではない．

□ **訂正**　第 5 回のプリントの例題 7 の解説中で,「$|x-a| < \delta$ が (5.1) を満たすための最大の δ は $\log(n) - \log(n-\varepsilon) = \log\left(\frac{n}{n-\varepsilon}\right)$ であるが」とありますが，この性質を満たす最大の δ は $\log\left(\frac{n}{n-\varepsilon}\right)$ ではなく $\log\left(\frac{n+\varepsilon}{n}\right)$ です．

また，第 6 回のプリント 1 ページの「◇ **問題 4.3 の解**」は「◇ **問題 4.4 の解**」の間違いです．