問題 8.5

次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y)=y^2-3x^2y+3x^4$
(2) $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$
(3) $f(x,y)=(y-a^2x^2)(y-b^2x^2)$

(1) $f_x(x,y)=-6xy+12x^3$，$f_y(x,y)=2y-3x^2$．したがって，極値をとる候補の点は $(0,0)$．$f_{xx}(x,y)=-6y+36x^2$，$f_{xy}(x,y)=-6x$，$f_{yy}(x,y)=2$ であるから，$(0,0)$ におけるヘッセ行列の行列式は 0．このことから $(0,0)$ で極値をとるかどうかの判定はできない．しかし，

$$f(x,y)=\left(y-\frac{3}{2}x^2\right)^2+\frac{3}{4}x^4\geq 0=f(0,0)$$

であるから，f は $(0,0)$ で極小値をとることがわかる．

(2) $f_x(x,y)=2x-2y^2$，$f_y(x,y)=-4xy+4y^3-5y^4$．したがって，極値をとる候補の点は $(0,0)$．$f_{xx}(x,y)=2$，$f_{xy}(x,y)=-4y$，$f_{yy}(x,y)=-4x+12y^2-20y^3$ であるから，$(0,0)$ におけるヘッセ行列の行列式は 0 である．しかし，十分小さい k にたいし $f(k^2,k)=-k^5$ であるので，f は $(0,0)$ の近傍で $f(0,0)=0$ よりも大きくも小さくもなる．したがって，f は $(0,0)$ では極値をとらない．

(3) $f_x(x,y)=4a^2b^2x^3-2(a^2+b^2)xy$，$f_y(x,y)=2y-(a^2+b^2)x^2$．

$\underline{a^2\neq b^2 \text{ のとき}}$（$a^2>b^2$ を仮定），極値をとる候補の点は $(0,0)$．このとき，$b^2x^2<y<a^2x$ を満たす (x,y) にたしては $f(x,y)<0$，その他の点では $f(x,y)\geq 0$（真に 0 以上になる点がある）．以上のことから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値をとらない．

$\underline{a^2=b^2 \text{ のとき}}$，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ の解は $(a,b)=(h,a^2h^2)$ $(h\in\mathbf{R})$．このとき，$f(x,y)=(y-a^2x^2)^2\geq 0=f(h,a^2h^2)$ より，(h,a^2h^2) で極小値をとる．
（このように，極値をとる点が離散的ではなく連続的にあらわれることもある．）

問題 8.6

与えられた長さ l の針金を 3 つに切り，円，正方形，正三角形を 1 つずつ作り，その面積の和を最小にするにはどのようにすればよいか．

円の半径を r，正方形の一辺の長さを x，正三角形の一辺の長さを y とすると，仮定から

$$2\pi r+4x+3y=l,\quad 0<x<\frac{l}{4},\quad 0<y<\frac{l}{3}.$$

このとき，それぞれの図形の面積の和 S は

$$S = \pi r^2 + x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = \frac{(l-4x-3y)^2}{4\pi} + x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2.$$

上の式の最右辺を $f(x,y)$ とおく．求めるものは $f(x,y)$ の最小値だが，最小値は極小値でもあるので，極値をとる点を求める．

$f_x(x,y) = -\frac{4(l-4x-3y)}{2\pi} + 2x$，$f_y(x,y) = -\frac{3(l-4x-3y)}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{2}y$ より，$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ の解は $\left(\frac{l}{\pi+4+3\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}l}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)$（この点を (a,b) とおく）．$f_{xx}(x,y) = \frac{8}{\pi} + 2$，$f_{xy}(x,y) = \frac{6}{\pi}$，$f_{yy}(x,y) = \frac{9}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$\det\begin{pmatrix} \frac{8}{\pi}+2 & \frac{6}{\pi} \\ \frac{6}{\pi} & \frac{9}{2\pi}+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{4\sqrt{3}+9}{\pi} + \sqrt{3} > 0, \quad f_{xx}(0,0) = \frac{8}{\pi} + 2 > 0.$$

したがって，$f(x,y)$ は (a,b) で極小値をとる．

一方，$f(x,y)$ は 2 次の多項式だから，$f(x,y)$ の 2 次までの Taylor 級数は $f(x,y)$ そのものである．つまり，定義域全体で

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8}{\pi}+2\right)(x-a)^2 + \frac{12}{\pi}(x-a)(y-b)\left(\frac{9}{2\pi}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(y-b)^2\right\}$$

と書ける（右辺を展開してみればよい）．(a,b) におけるヘッセ行列の行列式の評価より，$f(x,y) \geq f(a,b) = \frac{l^2}{4(\pi+4+3\sqrt{3})}$ を満たす．したがって，半径 $\frac{l}{2(\pi+4+3\sqrt{3})}$ の円，一辺が $\frac{l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$ の正方形一辺が $\frac{\sqrt{3}l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$ の三角形をつくるときが面積の合計が一番小さく，その値は $\frac{l^2}{4(\pi+4+3\sqrt{3})}$ である．

□ 演習書の解答の訂正（問題 4.2 について）

(2) 解答の積分領域が問題文と異なってる．正解は $-\pi$．

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{1}\left(\int_{y+2}^{4-y^2} xy\,dx\right)dy = \int_{-2}^{1}\frac{1}{2}\left(y^5 - 9y^3 - 4y^2 + 12y\right)dy = -\frac{27}{8}$．<u>追加問題</u>：下の図で示した領域 $D_1\,(\subset D)$ について，$\iint_D xy\,dxdy = \iint_{D_1} xy\,dxdy$ であることを確かめよ（なぜ積分値が等しくなるのか考えよ）．