## 【復習】１変数関数のべき級数展開

**１変数関数のマクローリン展開**

関数 $f(x)$ が $x = 0$ のまわりで連続かつ微分可能で，収束半径が $\rho$ であるとする．このとき，$-\rho < x < \rho$ ならば，

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots .$$

これと合成関数の考え方を利用して，２変数関数をべき級数展開する．



## ２変数関数のべき級数展開（考え方）

２変数関数 $f(x, y)$ に対し，

1) $x(t) = a + ht,\ y(t) = b + kt$（$a, b, h, k$ は定数）との合成関数を考える；
$F(t) := f(a + ht, b + kt)$

2) $F(t)$ をマクローリン展開すると，
$$F(t) = F(0) + F'(0)\,t + \frac{F''(0)}{2}\,t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}\,t^n + \cdots$$

3) $t = 1$ のとき，
$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$
$$\to\ f(a + h, b + k) = f(a, b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

$F^{(n)}(0)$ は，どのように表されるだろうか？



## 合成関数 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ の導関数

**合成関数の微分**

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)$$

$F(t) = f(a + ht, b + kt)$,　　$(a, b, h, k$ は定数)

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(a + ht, b + kt)\cdot(a + ht)' + f_y(a + ht, b + kt)\cdot(b + kt)' \\ &= f_x(a + ht, b + kt)\,h + f_y(a + ht, b + kt)\,k \\ \therefore\ F'(0) &= f_x(a, b)\,h + f_y(a, b)\,k \end{aligned}$$



## 合成関数 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ の２次導関数

**合成関数の微分**

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)$$

$F(t) = f(a + ht, b + kt)$,　　$(a, b, h, k$ は定数)

$F'(t) = f_x(a + ht, b + kt)\,h + f_y(a + ht, b + kt)\,k$,　$F'(0) = f_x(a, b)\,h + f_y(a, b)\,k$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt}\{f_x(a + ht, b + kt)\}\,h + \frac{d}{dt}\{f_y(a + ht, b + kt)\}\,k \\ &= \{f_{xx}(a + ht, b + kt)\,h + f_{xy}(a + ht, b + kt)\,k\}\,h \\ &\quad + \{f_{yx}(a + ht, b + kt)\,h + f_{yy}(a + ht, b + kt)\,k\}\,k \\ &= f_{xx}(a + ht, b + kt)\,h^2 + 2f_{xy}(a + ht, b + kt)\,hk + f_{yy}(a + ht, b + kt)\,k^2 \\ \therefore\ F''(0) &= f_{xx}(a, b)\,h^2 + 2f_{xy}(a, b)\,hk + f_{yy}(a, b)\,k^2 \end{aligned}$$



## 合成関数 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ の高次導関数

- $F(t) = f(a + ht, b + kt)$,　　$(a, b, h, k$ は定数)
- $F'(t) = f_x(a + ht, b + kt)\,h + f_y(a + ht, b + kt)\,k$
- $F'(0) = f_x(a, b)\,h + f_y(a, b)\,k$
- $F''(t) = f_{xx}(a + ht, b + kt)\,h^2 + 2f_{xy}(a + ht, b + kt)\,hk + f_{yy}(a + ht, b + kt)\,k^2$
- $F''(0) = f_{xx}(a, b)\,h^2 + 2f_{xy}(a, b)\,hk + f_{yy}(a, b)\,k^2$

$\to$ $F''(t)$，および $F''(0)$ の右辺において，２次の偏導関数の係数に着目すると，$(h + k)^2$ の各項であることに気づく．

$\vdots$

- $F^{(n)}(0) = \left(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-j} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a, b)$



## ２変数関数のテイラー展開，マクローリン展開

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots \\ &= f(a, b) + f_x(a, b)\,h + f_y(a, b)\,k \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(a, b)\,h^2 + 2f_{xy}(a, b)\,hk + f_{yy}(a, b)\,k^2\right) + \\ &\quad + \cdots \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b) + \cdots \end{aligned}$$

$\downarrow$ （$a + h = x, b + k = y$ とおくと）

**テイラー展開：** $f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b) + \cdots$

$\downarrow$ （$x = 0, y = 0$ とおくと）

**マクローリン展開：** $f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)\,x + f_y(0, 0)\,y + \cdots$