解析 I 演習 (2 学期：ベクトル解析)

－ 第 4 回 スカラー場・ベクトル場 (1) －

担当：佐藤 弘康

◇ **曲線**　$\mathbf{R}$ の区間 I から $\mathbf{R}^3$ への連続な写像 (1 変数ベクトル関数) $\boldsymbol{x} : I \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を $\mathbf{R}^3$ 内の**曲線**と呼ぶ．$\boldsymbol{x}'(t) = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)$ を点 $\boldsymbol{x}(t)$ における曲線 $\boldsymbol{x}$ の**接ベクトル**という．$\boldsymbol{x}(t)$ を時間 t の点の位置と見ると，曲線は点の運動の軌道を表す．このとき，$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{x}'(t)$ を**速度ベクトル**，$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{x}''(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}(t)$ を**加速度ベクトル**という．また，質量 m の質点が力 $\boldsymbol{F}$ の作用を受けて運動するとき，軌道 $\boldsymbol{x}(t)$ は以下の方程式

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

を満たす．これを**ニュートンの運動方程式**という．

◇ **曲面**　$\mathbf{R}^2$ の開集合 D から $\mathbf{R}^3$ への連続な写像 $f : D \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を $\mathbf{R}^3$ 内の**曲面**と呼ぶ．点 $f(u_0, v_0)$ を通り，ベクトル $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ ではられる平面を点 $f(u_0, v_0)$ における曲面 f の**接平面**と呼ぶ．これは $\dfrac{\partial f}{\partial u} \times \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ に垂直な平面と定義しても同値である．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial u} \times \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ を点 $f(u_0, v_0)$ における曲面 f の**法線ベクトル**と呼ぶ．$f(u_0, v_0)$ を通り曲面 f に含まれる曲線の接ベクトルは $f(u_0, v_0)$ における f の接平面に含まれる．

◇ **スカラー場**　$\mathbf{R}^n$ の開集合 D から $\mathbf{R}$ への写像をスカラー場と呼ぶ．実数 c に対し，$f = c$ を満たす D の部分集合を，$n = 2$ のとき等高線，$n = 3$ のとき等位面と呼ぶ．一般に等高線は $\mathbf{R}^2$ 内の曲線，等位面は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面となる．

◇ **ベクトル場**　$\mathbf{R}^n$ の開集合 D から $\mathbf{R}^n$ への写像をベクトル場と呼ぶ．ベクトル場 X に対し，$\mathbf{R}^n$ 内の曲線 $c(t)$ で $c'(t) = X(c(t))$ を満たすものを X の積分曲線と呼ぶ．$X = (X_1, \ldots, X_n)$, $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t),)$ のとき，積分曲線は微分方程式

$$\frac{dc_1}{dt}(t) = X_1(c(t)), \ldots, \frac{dc_n}{dt}(t) = X_n(c(t)) \tag{4.1}$$

または

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} \tag{4.2}$$

の解である．

問題 4.1. 次の式が成り立つベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ はどんな関数か説明せよ.

(1) $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \rangle = 0$

(2) $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{0}$

問題 4.2. 3 つのベクトル関数 $\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t)$ が，任意の t に対し長さが 1 で

$$\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{c}(t), \quad \boldsymbol{b}(t) \times \boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{a}(t), \quad \boldsymbol{c}(t) \times \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{b}(t)$$

を満たすとする．このとき，

$$(\boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{b}'(t), \boldsymbol{c}'(t)) = (\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t))A(t)$$

で定まる行列値関数 $A(t)$ は交代行列になることを示せ.

問題 4.3. 次の式を満たす曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は定ベクトルで，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ を満たすとする.

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{0}$

(2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{b}$

問題 4.4. 質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(t)$ とするとき，$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}(t) \times \boldsymbol{v}(t)$ を**面積速度**と呼ぶ．質点が中心力を受けて運動するとき，面積速度は一定であることを示せ.

問題 4.5. $\mathbf{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ で定義されたスカラー場

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2 - 1}{x^2 + y^2}$$

の等高線を求めよ.

問題 4.6. $\operatorname{grad} f = \boldsymbol{0}$ を満たすスカラー場はどのような関数か考察せよ.

問題 4.7. $\mathbf{R}^3$ の開集合で定義されたスカラー場 f に対し，f の勾配ベクトル場 $\operatorname{grad} f$ は f の等位面の法線ベクトルとなることを示せ.

問題 4.8. ベクトル場 X に対し，スカラー場 f が

$$\langle X, \operatorname{grad} f \rangle = 0$$

を満たすならば，f は X の積分曲線上で定数であることを示せ.

問題 4.9. 次の $\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場 X を図示し，その積分曲線を求めよ．

(1) $X(x,y) = (x,y)$

(2) $X(x,y) = (-y,x)$

例題 4.10. ベクトル場 $X(x,y,z) = (x,y,z)$ の積分曲線を求めよ．

解. $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$ を X の積分曲線とすると，(4.1) 式から

$$\frac{dc_1}{dt}(t) = c_1(t), \frac{dc_2}{dt}(t) = c_2(t), \frac{dc_3}{dt}(t) = c_3(t)$$

を満たす．この式を積分すると

$$c(t) = (k_1 e^t, k_2 e^t, k_3 e^t)$$

となる ($k_i \in \mathbf{R}$).

一方，(4.2) を用いると

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

を解けばよいことがわかる．$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$ を積分すると $\log y = \log x + l_1 = \log e^{l_1} x$. よって $y = e^{l_1} x$．同様に $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z}$ より，$\log z = \log x + l_2 = \log e^{l_2} x$．よって $z = e^{l_2} x$．したがって，積分曲線は

$$x = \frac{y}{e^{l_1}} = \frac{z}{e^{l_1}}$$

となる．この結果から曲線の像が原点を通る直線になることはわかるが，パラメーターの情報は含んでいない．

問題 4.11. 次のベクトル場 X の積分曲線を求めよ．

(1) $X(x,y,z) = (x, -y, 2z)$

(2) $X(x,y,z) = (x^2, -xy, -y^2)$

□ レポート問題 (9 月 14 日) の解答

問題 2.8 の解　$\boldsymbol{x} = (3,-1,-1)$■

問題 2.9(2) の解　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は一次独立だから，$\mathbf{R}^3$ の基底となる．したがって，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ は $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ $(x,y,z \in \mathbf{R}^3)$ と書ける．(2.6) 式より

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}' \rangle &= \langle x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}' \rangle \\ &= x\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \rangle + y\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}' \rangle + z\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}' \rangle \\ &= x\end{aligned}$$

となる．同様に $y = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}' \rangle$，$z = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}' \rangle$ を得る．■

問題 2.9(3) の解 1　条件式 (2,6) から具体的に $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ を求めよう．(2.6) 式から $\boldsymbol{a}'$ は $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に直交しているので，$\boldsymbol{a}' = k\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ と書ける ($k \in \mathbf{R}$)．このとき，

$$1 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \rangle = k\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \rangle = k[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$$

したがって，$\boldsymbol{a}' = \dfrac{\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}}{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]}$．$\boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ についても同様．■

問題 2.9(3) の解 2　$\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ と $\boldsymbol{a}'', \boldsymbol{b}'', \boldsymbol{c}''$ が共に (2.6) 式を満たすとすと，ただちに

$$\langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{a} \rangle = \langle \boldsymbol{a}'', \boldsymbol{a} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}'', \boldsymbol{b} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}'', \boldsymbol{c} \rangle$$

を満たすことがわかる．すなわち，

$$\langle \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}'', \boldsymbol{a} \rangle = \langle \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}'', \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}'', \boldsymbol{c} \rangle = 0.$$

このことから，ベクトル $(\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}'')$ は基底のすべての元と直交するので，$\mathbf{0}$ ベクトルである．したがって，$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}''$．$\boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ についても同様．■

◇ **相反系**　1 次独立なベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し，(2.5) 式で定まる (または，(2.6) 式を満たす) ベクトルの組 $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の**相反系**と呼ぶ．

問　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の相反系を $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ とするとき，$\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ の相反系は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ になることを示せ．

問題 2.10 の解　三角形 ABC がベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ を 2 辺にもつとする．これらを xy 平面に正射影したベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{a}_{xy} = (a_1, a_2, 0), \boldsymbol{b}_{xy} = (b_1, b_2, 0)$ だから，この 2 つのベクトルを 2 辺にもつ三角形の面積の 2 乗は

$$\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}_{xy} \times \boldsymbol{b}_{xy}\|\right)^2 = \frac{1}{4}\|(a_1b_2 - a_2b_1, 0, 0)\|^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

となる．yz 平面，zx 平面に正射影したベクトルを 2 辺にもつ三角形についても同様にできるので，

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &= \frac{1}{4}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 = S^2 \end{aligned}$$

となる．■