線形代数 I 演習

― 第 17 回 固有多項式，固有値，固有ベクトル (2) ―

担当：佐藤 弘康

例題 1. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ．また，それぞれの固有値に対して，固有ベクトルを 1 つずつ求めよ．

解.

$$f_A(x) = |xE_3 - A| = \begin{vmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{vmatrix}$$
$$= x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$$

であるから，行列 A の固有値は $1, 2$ である．

$B_1 = E_3 - A$, $B_2 = 2E_3 - A$ とおくと，B_1, B_2 の行列式は 0 であるから，方程式 $B_\lambda \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は非自明解 $\boldsymbol{v}_\lambda$ を持ち，$\boldsymbol{v}_\lambda$ が固有値 λ の固有ベクトルである $(\lambda = 1, 2)$.

$$B_1 = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(-1)E_{32}(-2)P_{12}E_{12}(4)E_{32}(3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $B_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非自明解で，A の固有値 1 の固有ベクトルである．

同様に

$$B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{12}E_{12}(3)E_{32}(3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $B_2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非自明解で，A の固有値 2 の固有ベクトルである．

□ **注意．** 固有ベクトルは固有値に対して一意的に定まるものではない．なぜなら，$\boldsymbol{v}$ が固有値 λ の固有ベクトルならば，$k\boldsymbol{v}$ もまた固有値 λ の固有ベクトルである．しかし，上の例題において固有値 2 の場合は $B_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度が 2 だから，線形独立な 2 つの固有ベクトルを選ぶことができる．この意味で <u>固有値 2 の固有ベクトルは 2 つ存在する</u>.

> **例題 2.** 例題 1 の行列 A を対角化せよ．

解. 例題 1 の解より，固有値 1 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ である．固有値 2 の場合，$B_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．この 3 つの固有ベクトルを並べてできる行列を P とする．つまり，

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき，$AP = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となり，A は P により対角化された．

問題 17.1. 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．また，A を対角化せよ ($P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求めよ).

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

問題 17.2. 正則行列の固有値は 0 でないことを示せ．

問題 17.3. 次のことを証明せよ．

(1) λ が A の固有値ならば，λ は ${}^tA$ の固有値でもある．

(2) 正則行列 A に対して，λ が A の固有値ならば，$\dfrac{1}{\lambda}$ は A^{-1} の固有値である．

問題 17.4. A を直交行列とする．このとき，λ が A の固有値ならば，$\dfrac{1}{\lambda}$ も A の固有値であることを示せ.

問題 17.5. A を交代行列とする．このとき，λ が A の固有値ならば，$-\lambda$ も A の固有値であることを示せ.

例題 3. 例題 1 の行列 A に対し，$2A^4-6A^3-4A^2+22A-13E_3$ を計算せよ.

解. 上の例題 1. の解より，A の固有多項式は $f_A(x)=x^3-5x^2+8x-4$ であるから，ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^3-5A^2+8A-4E_3=O$ である．ここで，

$$\begin{aligned}2A^4-6A^3-4A^2+22A-13E_3 &= (A^3-5A^2+8A-4E_3)(2A+4E_3)-2A+3E_3\\ &= -2A+3E_3\end{aligned}$$

であるから，

$$2A^4-5A^3+7A-3E_3=-2\begin{pmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&12&12\\2&-5&-4\\-6&12&11\end{pmatrix}.$$

問題 17.6. 次の問に答えよ.

(1) $A=\begin{pmatrix}2&-1&-3\\1&0&2\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ に対して，$A^5-2A^4-4A^3+2A^2-2A-3E_3$ を求めよ.

(2) $B=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$ に対して，B^{100} を求めよ.

問題 17.7. 次の行列 A の逆行列を A^{-1} の多項式で表せ．ただし，多項式の次数は 2 以下とする.

(1) $\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&-1&4\\0&2&-2\\0&0&3\end{pmatrix}$

■ 第 11 回の解

問題 11.1 $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,　$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

問題 11.2 $\sigma_2 \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,　$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 11.3 $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,　$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$,

$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,　$(\sigma \circ \tau) = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

問題 11.4 (1)　(1 5 7)(2 3 9 6)　　(2)　(2 3 6 7 2)(4 5)　　(3)　(1 3 5 6)(2 4)

問題 11.5 (1)　(1 5)(2 3)(3 4) など．符号は (-1)
(2)　(1 6)(6 5)(2 7)(7 4)(4 3) など．符号は (-1)
(3)　(1 7)(7 5)(5 8)(2 4)(3 6) など．符号は (-1)

問題 11.6 例えば，(5 3)(4 3)(1 3)(3 2) や，(4 5)(1 4)(2 3)(4 5)(1 4)(2 5) など

問題 11.7 (1) $\sigma_1 \circ \tau = \sigma_2 \circ \tau$ の両辺に右から τ^{-1} をかけると，

$$(\text{左辺}) = (\sigma_1 \circ \tau) \circ \tau^{-1} = \sigma_1 \circ (\tau \circ \tau^{-1}) = \sigma_1,$$
$$(\text{右辺}) = (\sigma_2 \circ \tau) \circ \tau^{-1} = \sigma_2 \circ (\tau \circ \tau^{-1}) = \sigma_2$$

となり，$\sigma_1 = \sigma_2$ を得る．
(2) $\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}$ の両辺に左から σ_1 をかけ，右から σ_2 をかけると

$$(\text{左辺}) = (\sigma_1 \circ \sigma_1^{-1}) \circ \sigma_2 = \sigma_2,$$
$$(\text{右辺}) = (\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}) \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ (\sigma_2^{-1} \circ \sigma_2) = \sigma_1$$

となり，$\sigma_1 = \sigma_2$ を得る．

問題 11.8 2 つの集合 S, S' が等しいことを示すには,「$S \subset S'$ かつ $S \supset S'$」であること，つまり,「任意の S の元 σ は S' の元であり，逆に S' の元 σ' は S の元である」ことを示せばよい．しかし，対象の集合が有限集合 (元の数が有限個) の場合は「$S \subset S'$ かつ S と S' の元の個数が等しい」を示せば十分である．

この問題の場合，$\sigma_i \circ \sigma_k$，$\sigma_j^{-1} \in S_n$ であるから

$$\{\sigma_1 \circ \sigma_k,\ \sigma_2 \circ \sigma_k,\ \ldots, \sigma_N \circ \sigma_k\} \subset S_n,$$
$$\{\sigma_1^{-1},\ \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_N^{-1}\} \subset S_n$$

は明らかである．問題 11.7 より集合 $\{\sigma_1 \circ \sigma_k,\ \sigma_2 \circ \sigma_k,\ \ldots, \sigma_N \circ \sigma_k\}$ に重複する元はなく，$\{\sigma_1^{-1},\ \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_N^{-1}\}$ についても同様である．また，元の個数はそれぞれ $N\ (= n!)$ 個である．したがって，

$$S_n = \{\sigma_1 \circ \sigma_k,\ \sigma_2 \circ \sigma_k,\ \ldots, \sigma_N \circ \sigma_k\} = \{\sigma_1^{-1},\ \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_N^{-1}\}$$

であることがわかる．

■ 第 12 回の解

問題 12.1 $|A| = 2,\ \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \ |A^{-1}| = \dfrac{1}{2}$

問題 12.2 $|A| = 2, |B| = 6,\ \ AB = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ \ BA = \begin{pmatrix} -7 & -6 & -10 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix},$
$|AB| = |BA| = 12$

■ 第 13 回の解

問題 13.1 (1) -12 (2) 0 (3) 0 (4) $(a-b)(b-c)(c-a)$
(5) $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(c-d)$ (5) $\dfrac{a+b+c+d+1}{abcd}$

問題 13.2 (1) まず，2 列目と 3 列目を 1 列目に加える．

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & 2a+b+c & b \\ 2(a+b+c) & a & a+2b+c \end{vmatrix}$$
$$=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2a+b+c & b \\ 1 & a & a+2b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$
$$=2(a+b+c)^3$$

(2) 各列が 1 個の m と $(n-1)$ 個の 1 を成分に持つことに着目し，2 列目から n 列目を 1 列目に加える．

$$\begin{vmatrix} m & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+(n-1) & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ m+(n-1) & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ m+(n-1) & 1 & \cdots & 1 & m \end{vmatrix}$$
$$=(m+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{vmatrix} = (m+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & m-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m-1 \end{vmatrix}$$
$$=(m+n-1)(m-1)^{n-1}$$

(3) 各列が 1 から n までの自然数をそれぞれ 1 個ずつ成分に持つことに着目し，2 列目

から n 列目を 1 列目に加える．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

「i 行目に $(i-1)$ 行目を (-1) 倍して加える」という操作を $i=n$ から $i=2$ まで (下の行から順番に) 行っていくと

$$= \frac{n(n+1)}{2} \left|\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \unicode{x22F0} & 1-n & 1 \\ 0 & 1 & \unicode{x22F0} & \unicode{x22F0} & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right|$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \unicode{x22F0} & 1-n & 1 \\ 1 & \unicode{x22F0} & \unicode{x22F0} & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

ここで，

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \unicode{x22F0} & 1-n & 1 \\ 1 & \unicode{x22F0} & \unicode{x22F0} & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \tag{17.1}$$

であるから，問題 13.2(2) の結果を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-1}(n+1)$$

を得る．

(17.1) の証明　$\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,\dots,k)$ を k 項数ベクトルとする．

$$\begin{aligned}
\left| \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{k-1} \ \boldsymbol{a}_k \right| &= (-1)\left| \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{k-2} \ \boldsymbol{a}_k \ \boldsymbol{a}_{k-1} \right| \\
&= \cdots = (-1)^{k-1}\left| \boldsymbol{a}_k \ \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{k-1} \right| \\
&= (-1)^{(k-1)+(k-2)}\left| \boldsymbol{a}_k \ \boldsymbol{a}_{k-1} \ \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{k-2} \right| \\
&= \cdots = (-1)^{(k-1)+\cdots+2+1}\left| \boldsymbol{a}_k \ \boldsymbol{a}_{k-1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_2 \ \boldsymbol{a}_1 \right| \\
&= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\left| \boldsymbol{a}_k \ \boldsymbol{a}_{k-1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_2 \ \boldsymbol{a}_1 \right|
\end{aligned}$$

□

問題．　(17.1) 式は

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \tag{17.2}$$

と表すこともできる．n が奇数と偶数の両方の場合に (17.1) と (17.2) の符号が等しくなることを確かめ，(17.2) と書ける理由を考えよ ((17.2) の行列は $(n-1)$ 次正方行列であることに注意せよ)．ただし，$[k]$ は k を越えない最大の整数を表す (例えば，$\left[\frac{13}{4}\right]=3$，$[6.73]=6$，$[\pi]=3$)．

問題 13.3　$A^{-1}\cdot A = E_n$ より，$1=|E_n|=|A^{-1}\cdot A|$．行列式の性質より，$|A^{-1}\cdot A| = |A^{-1}|\cdot|A|$．以上のことから，$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ を得る．

問題 13.4

$$\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -E_n \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}, \tag{17.3}$$

かつ，$\begin{vmatrix} E_n & E_n \\ O & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & -E_n \\ O & E_n \end{vmatrix} = 1$ であるから，(17.3) の両辺の行列式をとれば，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B|\cdot|A-B|$$

を得る．

問題 13.5　A を n 次交代行列とする．このとき，

$$|A| = |{}^tA| = |-A| = (-1)^n|A|$$

であるから，n が奇数なら $|A|=-|A|$ となり，$|A|=0$ を得る．

問題 13.6 A を直交行列とすると，${}^tA \cdot A = E_n$ より，$1 = |E_n| = |{}^tA \cdot A| = |{}^tA| \cdot |A|$. $|{}^tA| = |A|$ より，$|A|^2 = 1$ を得る．

問題 13.7 (問題 13.2 を用いる) $n = 4$ の場合だから，$\dfrac{1}{2}(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} 4^{(4-1)} \cdot (4-1) = 160.$

(問題 13.4 を用いる) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(16-36) \cdot (-4-4) = (-20) \cdot (-8) = 160.$$