線形代数 I 演習 二学期末試験

担当：佐藤 弘康

(1) すべての答案用紙に，名前，学籍番号を忘れずに記入してください.

(2) すべての答案用紙の右上に，全体の中で何枚目かを記入してください (例えば，1/2 のように). 答案用紙は裏を使用しても構いません. 解答が表裏にまたがる場合は「裏へ続く」と書くなどしてください.

(3) 解答は結果だけでなく，計算のプロセス，思考の過程など，できるだけ丁寧に記述するようにしてください.

問 1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，$\sigma^{-1} \circ \tau$ を計算し互換の積に表せ.

問 2. 行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -k & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ k & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A が正則行列となるための k の条件を求めよ.

問 3. 次の事柄のうち，正しいものには証明を与え，正しくないものには反例を与えよ．ただし，σ, τ は置換，A, B は正方行列とする.

(1) $\sigma^{-1} = \tau^{-1}$ ならば，$\sigma = \tau$ である.

(2) $\det(-A) = -\det(A)$

(3) AB が正則行列ならば，A, B も共に正則行列である.

(4) A が正則行列ならば，A の余因子行列 $\widetilde{A}$ も正則行列である.

問 4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) A の固有多項式を求めよ.

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ．また，その P に対して $P^{-1}AP$ はどのような対角行列になるか.

問 5. 線形代数 I(2 学期) の講義と演習で勉強した内容に関して，深く印象に残ったこと (概念，定理，方法など) をひとつあげて，その理由を具体的に述べよ.

■ 解答

問 1． $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. したがって,

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \circ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これを巡回表示すると (1 2 4 5 3) であるから,

$$(1\ 2)(2\ 4)(4\ 5)(5\ 3)$$

と互換の積に表すことができる.

問 2． (1)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -k & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ k & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -k & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} 2 \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ k & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & -k & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ k+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -k & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ k+1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (3-k) + 2\left(-1-(k-1)\right) = -(3k+1). \end{aligned}$$

(2) A が正則であることと，$|A| \neq 0$ は同値であるから，条件は $k \neq -\dfrac{1}{3}$.

問 3．

(1) 正しい．証明は問題 11.7(2)(解答は第 17 回プリントの p.4) を参照.

(2) 正しくない．一般に n 次正方行列 A に対し，$|-A| = (-1)^n |A|$ であるから，正則な偶数次正方行列に対しては成立しない．例えば，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) 正しい．証明は問題 9.4(解答は第 16 回プリントの p.3) を参照.

(別解) AB は正則行列だから，$|AB| \neq 0$．行列式の性質より，$|AB| = |A||B|$ だから，$|A||B| \neq 0$．よって $|A| \neq 0$ かつ $|B| \neq 0$ となり A, B は共に正則である.

(4) 正しい．$A\widetilde{A} = |A|E_n$ より，$|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$．したがって，$|\widetilde{A}| \neq 0$.

問 4． (1) 固有多項式は $f_A(x) = |xE_3 - A|$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ 1 & x-4 & 2 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-4) - 2 - 4 - \{2(x-4) - 2(x-1) - 2(x-1)\}$$
$$= (x-1)^2(x-4) + 2(x-1)$$
$$= (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$
$$= (x-1)(x-2)(x-3).$$

(2) 固有値は $f_A(x) = 0$ の解だから，$1, 2, 3$.

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(1)P_{13}E_2\left(-\frac{1}{2}\right)E_{12}(-1)E_{23}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$(E_3 - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．したがって，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 の固有ベクトルである．同様に，固有値 $2, 3$ については

$$2E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(1)P_{13}E_2(-1)E_{23}(-1)E_{12}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2\left(\frac{1}{2}\right)E_{21}(-1)E_{12}(-1)E_{32}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ はそれぞれ固有値 $2, 3$ の固有ベクトルである．

(3) P を上で求めた固有ベクトルを並べた行列とする．つまり

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき，

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

したがって，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$