解析 I 演習 (2 学期：ベクトル解析)

― 第 7 回 線積分・面積分 (1) ―

担当：佐藤 弘康

未発表問題： 3.1, 3,7(2)(3), 4.3(2), 4.6, 4.7, 4.9, 4.11, 5.2, 5.3, 5.4, 6.4〜6.7

問題 7.1. 次のスカラー場 f と曲線 C に対し，C に沿った f の線素による線積分 $\int_C f ds$ を求めよ．

(1) $f = \dfrac{x+y}{y+z}$, $C: \boldsymbol{r}(t) = \left(t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t\right)$, $1 \leqq t \leqq 2$

(2) $f = xy + yz + zx$, $C: \boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, 0)$, $0 \leqq t \leqq 1$

(3) $f = x^2 - yz + z^2$, C: 点 $(1,2,0)$ から点 $(1,2,3)$ までの線分

問題 7.2. 次の一次微分形式 ω を与えられた曲線 C に沿って線積分せよ．

(1) $\omega = xydx - ydy + 3zydz$
$C: \boldsymbol{r}(t) = (t^2, t, -t^3)$ で原点から点 $(1,1,-1)$ まで

(2) $\omega = y^2dx + x^3dy$
C: xy 平面上の円 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ に沿って反時計まわり

(3) $\omega = a^2xdx + ayzdy + xz^2dz$
C: 円柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ と平面 $x + z = a$ との交わりに沿って点 $(a,0,0)$ から点 $(0,a,a)$ に至る曲線で長さが短い方 (ただし，$a > 0$)

問題 7.3. C を点 $\mathrm{A} = (1,-1,1)$ から点 $\mathrm{B} = (3,1,4)$ に至る任意の滑らかな曲線とするとき，

$$\int_C \big((2xy + z^3)dx + x^2dy + 3xz^2dz\big)$$

を求めよ．

問題 7.4. 一次微分形式 ω が任意の点 A, B に対し次の条件を満たすとする；「A を始点， B を終点とする曲線 C に沿った積分 $\int_C \omega$ の値は曲線 C に依らず，始点と終点で決まる」．このとき，任意の曲線 C に対して

$$\int_C \omega = \int_C df$$

を満たすスカラー場 f が存在することを示せ．

問題 7.5. 次のスカラー場 f と曲面 S に対し，S 上の f の面素による面積分 $\int_S f dS$ を求めよ．

(1) $f = 4x + 3y - 2z$
S : 平面 $2x + y + 2z = 6$ が 4 つの平面 $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$ に切り取られる面分

(2) $f = x^2,\quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$

(3) $f = x^2 + 2y,\quad S : z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \leqq z \leqq 1$

□ レポート問題 (10 月 12 日) の解答

問題 3.4 の解　標準ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ については

$$d(f \times g)_x(\boldsymbol{e}_i) = \frac{\partial(f \times g)}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \times g(x) + f(x) \times \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

が成り立つから，$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{e}_i$ $(v_i \in \mathbf{R}, i = 1 \ldots, n)$ とおけば

$$\begin{aligned}
d(f \times g)_x(\boldsymbol{v}) =& \sum_{i=1}^{n} v_i d(f \times g)_x(\boldsymbol{e}_i) \\
=& \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \times g(x) + f(x) \times \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right) \\
=& \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \times g(x) + f(x) \times \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right) \\
=& \left(\sum_{i=1}^{n} v_i df_x(\boldsymbol{e}_i) \right) \times g(x) + f(x) \times \left(\sum_{i=1}^{n} v_i dg_x(\boldsymbol{e}_i) \right) \\
=& df_x(\boldsymbol{v}) \times g(x) + f(x) \times dg_x(\boldsymbol{v}).
\end{aligned}$$

■

問題 4.2 の解　仮定から $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は互いに直交する．さらにノルムが常に 1 だから，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の微分は

$$\begin{gathered}
\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}' \rangle = 0, \\
\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}' \rangle = -\langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}' \rangle = -\langle \boldsymbol{c}', \boldsymbol{b} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}' \rangle = -\langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{c} \rangle
\end{gathered} \tag{7.1}$$

を満たすことがわかる．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は各 t で $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底だから，$\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}'(t) &= A_{11}(t)\boldsymbol{a}(t) + A_{21}(t)\boldsymbol{b}(t) + A_{31}(t)\boldsymbol{c}(t) \\
\boldsymbol{b}'(t) &= A_{12}(t)\boldsymbol{a}(t) + A_{22}(t)\boldsymbol{b}(t) + A_{32}(t)\boldsymbol{c}(t) \\
\boldsymbol{c}'(t) &= A_{13}(t)\boldsymbol{a}(t) + A_{23}(t)\boldsymbol{b}(t) + A_{33}(t)\boldsymbol{c}(t)
\end{aligned}$$

と書くことができる．(7.1) より，

$$\begin{gathered}
A_{21} = \langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} \rangle = -\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}' \rangle = -A_{12}, \\
A_{11} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \rangle = 0.
\end{gathered}$$

他の成分についても同様にすると，$A_{22} = A_{33} = 0, A_{13} = -A_{31}, A_{32} = -A_{23}$ を得る．したがって，行列 A は交代行列である．■

問題 5.5 の解　ベクトル関数 $\boldsymbol{x}(t)$ の向きが一定とは，$\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{x}'(t)$ が常に平行，すなわち $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}' = 0$．$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''] = 0$ ならば

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}')' &= (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}'') \\
&= (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}'') \\
&= \langle \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'' \rangle \boldsymbol{r} + \langle \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r} \rangle \times \boldsymbol{r}'' \\
&= [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''] \boldsymbol{r} = 0.
\end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}'$ は向きが一定．■

問　1 変数ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ がある平面 π に常に平行であるための必要十分条件は $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''] = 0$ であることを示せ．