問題 10.4 (2) の解

$$A \xrightarrow[E_{12}(1)\cdots E_{1n}(1)\times]{} \begin{pmatrix} m+(n-1) & \cdots & \cdots & \cdots & m+(n-1) \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_1(\frac{1}{m+n-1})\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{21}(-1)\cdots E_{n1}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & m-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m-1 \end{pmatrix} =: B$$

以上のことから

$$\left(\prod_{i=2}^{n} E_{i1}(-1)\right) \cdot E_1(\tfrac{1}{m+n-1}) \cdot \left(\prod_{j=2}^{n} E_{1j}(1)\right) A = B.$$

両辺の行列式をとると $\frac{1}{m+n-1}|A| = (m-1)^{n-1}$. したがって $|A| = (m+n-1)(m-1)^{n-1}$ を得る.

問題 10.8 (2) の解　各列が 1 から n までの自然数をそれぞれ 1 個ずつ成分に持つことに着目し，2 列目から n 列目を 1 列目に加える.

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

「i 行目に $(i-1)$ 行目を (-1) 倍して加える」という操作を $i=n$ から $i=2$ まで (下の行

から順番に) 行っていくと

$$
= \frac{n(n+1)}{2} \left| \begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 0 & 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{array} \right| = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.
$$

ここで,

$$
\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \qquad (*)
$$

であるから，問題 10.4(2) の結果を用いると

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-1}(n+1)
$$

を得る.

<u>$(*)$ 式の証明</u>　$\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,\ldots,k)$ を k 項数ベクトルとする.

$$
\begin{aligned}
\left| \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{k-1} \ \boldsymbol{a}_k \right| &= (-1) \left| \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{k-2} \ \boldsymbol{a}_k \ \boldsymbol{a}_{k-1} \right| \\
&= \cdots = (-1)^{k-1} \left| \boldsymbol{a}_k \ \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{k-1} \right| \\
&= (-1)^{(k-1)+(k-2)} \left| \boldsymbol{a}_k \ \boldsymbol{a}_{k-1} \ \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{k-2} \right| \\
&= \cdots = (-1)^{(k-1)+\cdots+2+1} \left| \boldsymbol{a}_k \ \boldsymbol{a}_{k-1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_2 \ \boldsymbol{a}_1 \right| \\
&= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \left| \boldsymbol{a}_k \ \boldsymbol{a}_{k-1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_2 \ \boldsymbol{a}_1 \right|
\end{aligned}
$$