線形代数I演習

－ 第 14 回 行列の階数 －

担当：佐藤 弘康

例題 1. 次の行列 A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

解. 行列の階数を求めるには，その行列に行基本変形と列基本変形を行い，

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

の形に変形すればよい．

$$\begin{aligned}
A &\xrightarrow[E_{21}(-1)E_{41}(-2)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & 7 & -6 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[E_{42}(4)E_{32}(-2)E_{12}(-2)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[E_3\left(\frac{1}{3}\right)E_{43}(-1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{13}(-2)E_{23}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\times E_{14}\left(\frac{7}{3}\right)E_{24}\left(-\frac{8}{3}\right)E_{34}\left(-\frac{2}{3}\right)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

したがって，$\operatorname{rank} A = 3$ である．

問題 14.1. 次の行列の階数を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

問題 14.2. 次の行列 A に対し，$\operatorname{rank} A = 2$ となるための k の条件をそれぞれ求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$　**(2)** 宿題：$\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 2 & k-2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

問題 14.3. 次の行列の階数を求めよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

問題 14.4. 次のことを証明せよ．

(1) $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

(2) $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

問題 14.5. n 次正方行列 A, B に対して，AB が正則ならば，A, B も共に正則であることを，階数の性質を使って証明せよ．

例題 2. 例題 1 の行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ．また，

$$n - \operatorname{rank} A = (\text{解の自由度}) \tag{14.1}$$

が成り立つことを確認せよ．ただし，n は行列 A の列の数で，この場合 $n = 4$.

解. 行基本変形により $\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$ は

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と簡約階段行列に変形できる．したがって，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (k \in \mathbf{R})$$

であり，解の自由度は 1 である．これは $4 - \operatorname{rank} A$ に等しい．

問題 14.6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

に対し，

(1) A の階数を求めよ．

(2) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解と解の自由度を求めよ．また，例題 2 の (14.1) 式が成り立つことを確認せよ．