微積分 I 演習[*1]

– 第 2 回 数列の極限 –

担当：佐藤 弘康

基本問題　$\{a_n\}$ を実数の数列とする．このとき，以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) $\{a_n\}$ が「上に有界である」とはどういうことか.

(2) $\{a_n\}$ が「非減少である」とはどういうことか.

(3) $\{a_n\}$ が「下に有界である」，「非増加である」とはどういうことか.

例題 **2.1.** a を $a > 1$ を満たす実数とする．このとき，$a_n = \sqrt[n]{a}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ は収束することを示せ.

解. この数列は下に有界で，$a_n > 1$ を満たす．なぜなら，もし $a_n \leq 1$ なら，

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = (a_n)^n \leq 1$$

となり，仮定に反する．また，$a_n > 1$ という事実から

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n+1} = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n+1]{a}}\right)^{n+1} = \frac{a\sqrt[n]{a}}{a} = \sqrt[n]{a} > 1.$$

すなわち，$a_n > a_{n+1}$ となり数列 $\{a_n\}$ は非増加である.

以上により，$\{a_n\}$ は下に有界かつ非増加であるから，収束することがわかる．□

問題 **2.1.** 次の式で定まる数列 $\{a_n\}$ が収束することを示せ.

(1) $a_n = \sqrt[n]{a}$ （ただし $0 < a < 1$）　(2) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(3) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$　(4) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

[*1] この授業に関する情報： http://www.math.tsukuba.ac.jp/~hiroyasu/2007/c1-ex.html
(携帯版： http://www.math.tsukuba.ac.jp/~hiroyasu/2007/c1m/)

例題 **2.2.** 漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \quad \text{（ただし，}c\text{ は正の実数）}$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ が収束することを示せ．

解.

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{c + a_n} - \sqrt{c + a_{n-1}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{c + a_n} + \sqrt{c + a_{n-1}}}$$

であるから，右辺の分母が正であることに注意して同様の計算を繰り返すと

$$a_{n+1} - a_n = A(a_2 - a_1) \quad (A > 0)$$

を得る．$a_2 - a_1 = \sqrt{a+1} - 1 > 0$ より，数列 $\{a_n\}$ は非減少（増加）列である．

ここで，$\{a_n\}$ が α に収束すると仮定すると，漸化式の両辺を $n \to \infty$ とすることで α は

$$\alpha = \sqrt{c + \alpha} \tag{2.1}$$

を満たすことがわかる．(2.1) より，$\alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$ であるが，$a_n \geq 0$ より $\alpha \geq 0$．したがって，$\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{1+4c}}{2}$.

どんな $n \in \mathbf{N}$ に対しても $a_n < \alpha$ であることを背理法で示そう．仮にこの主張が成り立たないとする．つまり，いくつかの $n \in \mathbf{N}$ に対しては $a_n \geq \alpha$ が成り立つ．n_0 を $a_{n_0} \geq \alpha$ を満たす最初の番号としよう．このとき，

$$\frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2} \leq a_{n_0} = \sqrt{c + a_{n_0 - 1}}.$$

上式の両辺を 2 乗して式を整理すると $a_{n_0-1} \geq \alpha$ となり，「n_0 を $a_{n_0} \geq \alpha$ を満たす最初の番号」とした仮定に反する．したがって，$a_n < \alpha$ であり，数列 $\{a_n\}$ は上に有界である．

以上のことから，$\{a_n\}$ は収束することがわかる．□

問題 **2.2.** 次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，その極限を求めよ．

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$

(2) $a_1 > \sqrt{c}, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{c}{a_n}\right) \qquad$（ただし，$c$ は正の実数）

問題 2.3. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$，$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ は下に有界な減少列であることを示せ．また，その極限はどのような値か？

(2) 数列 $\{b_n\}$ は下に有界な減少列であることを示せ．
ヒント：(1) の結果と $\log n = \log 2 + \log \dfrac{3}{2} + \cdots + \log \dfrac{n}{n-1}$

例題 2.3. a を $a > 1$ を満たす実数とする．このとき，$a_n = \sqrt[n]{a}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ は 1 に収束することを示せ．

解． $\sqrt[n]{a} > 1$ より，$\sqrt[n]{a} = 1 + b_n$ と書ける $(b_n > 0)$．このとき，

$$\begin{aligned} a &= (\sqrt[n]{a})^n = (1+b_n)^n \\ &= 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2}(b_n)^2 + \cdots + (b_n)^n > nb_n. \end{aligned}$$

したがって，$0 < b_n < \dfrac{a}{n}$ で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$ であるから，定理 1.2 より b_n も 0 に収束する．以上により，$\lim a_n = 1$ を得る．□

問題 2.4. 例題 2.3 の解法を参考にして，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を証明せよ．

問題 2.5. $0 < a < 1$ の場合も $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ となることを示せ．

問題 2.6. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

によって定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 高校までに習った知識を使ってこの数列の極限を求めよ．

(2) (1) で求めた値を α とおくとき，任意の n に対して

$$|a_n - \alpha| < \frac{1}{8n}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $|a_n - \alpha| < 0.00001$ が成り立つためには自然数 n をどのくらい大きくとればよいか？

問題 2.7. $a_n = 2^n$ とおくとき，数列 $\{a_n\}$ にはいくらでも大きい項が存在する（つまり，正の無限大に発散する）ことを示せ．

問題 2.8. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+1}$$

によって定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 高校までに習った知識を使ってこの数列の極限を求めよ．

(2) 正の実数 ε が与えられたとき，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つためには自然数 n をどのくらい大きくとればよいか？