Fisher 情報計量の測地線と一般化平均

伊藤　光弘　(筑波大学 数理物質系)*1
佐藤　弘康　(日本工業大学 工学部)*2

1. $(M, d\theta)$ を，正規化体積測度 $d\theta$ をもつコンパクト連結 C^∞ 級多様体とする．M 上の確率測度空間 $\mathcal{P}^+(M)$ を，$d\theta$ に絶対連続な確率測度 μ で M 上正値連続な密度関数 $f = f(x)$, $x \in M$ をもつものからなるとする．$\mathcal{P}^+(M)$ の位相は，埋め込み $\rho : \mathcal{P}^+(M) \to L^2(M, d\theta)$; $\mu = f(x)\,d\theta \mapsto 2\sqrt{f(x)}$ による誘導位相とする．

$\mathcal{P}^+(M)$ の各接空間 $T_\mu\mathcal{P}^+(M)$ は，$\displaystyle\int d\tau = 0$ を満たす M 上の符号付き測度の全体と見なすことができ，ここには Fisher 計量 G が定義される．Friedrich [2] は計量 G の Levi-Civita 接続 ∇ を求め，初期条件 $\gamma(0) = \mu$, $\dot\gamma(0) = \tau$ を満たす測地線 $\gamma(t)$ が

$$\gamma(t) = \left(\cos\frac{t}{2} + \frac{d\tau}{d\mu}\sin\frac{t}{2}\right)^2 \mu \tag{1}$$

と表せることを示した（[4] も参照）．ここに，$\dfrac{d\tau}{d\mu}$ は Radon-Nikodym 微分である．本講演では，**確率測度の一般化平均（冪平均）**の概念による Fisher 計量の測地線の特徴付けについて述べる．また，$(\mathcal{P}^+(M), G)$ に自然に定義される双対接続構造 $(\nabla^{(\alpha)}, \nabla^{(-\alpha)})$ に関する測地線（α-測地線）についても言及する．

2 定義. $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．写像 $\varphi^{(\alpha)} : \mathcal{P}^+(M) \times \mathcal{P}^+(M) \to \mathcal{P}^+(M)$ を

$$\varphi^{(\alpha)}(\mu_1, \mu_2) = \frac{1}{C}\left\{1 + \left(\frac{d\mu_2}{d\mu_1}\right)^\alpha\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \mu_1$$

と定める（ただし，C は確率測度となるための正規化定数）．$\varphi^{(\alpha)}(\mu_1, \mu_2)$ を μ_1 と μ_2 の**正規化 α-冪平均**とよぶ．特に，$\alpha = 1$ のときは算術平均，$\alpha = -1$ のときは調和平均と呼ばれ，$\alpha = 0$ のときは

$$\varphi^{(0)}(\mu_1, \mu_2) = \left(\int_M \sqrt{\frac{d\mu_2}{d\mu_1}}\, d\mu_1\right)^{-1} \sqrt{\frac{d\mu_2}{d\mu_1}}\,\mu_1$$

となり，これを**正規化幾何平均**とよぶ．

3. μ と $\mu' \in \mathcal{P}^+(M)$ が測地線 (1) で結べるとする．つまり，$\gamma(l) = \mu'$ かつ $\gamma(t) \in \mathcal{P}^+(M)$, $t \in [0, l]$ を満たす $l > 0$ が存在したとする．このとき，$\dot\gamma(0) = \tau$ は

$$\tau = \cot\frac{l}{2}\,\left(\varphi^{(0)}(\mu, \mu') - \mu\right), \qquad l = \ell(\mu, \mu') := 2\arccos\left(\int_M \sqrt{\frac{d\mu_2}{d\mu_1}}\, d\mu_1\right) \tag{2}$$

と表される．これは，**計量 G の測地線上の 2 点における各接線は $\mathcal{P}^+(M)$ 内で交わり，その交点が正規化幾何平均となること**を示唆している（逆に，正規化幾何平均に対して，このような性質を満たす曲線は G の測地線に限ることもわかる）．

*1 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1
e-mail: itohm@math.tsukuba.ac.jp
*2 〒345-8501 埼玉県南埼玉郡宮代町学園台 4-1
e-mail: hiroyasu@nit.ac.jp

また, (2) を (1) に代入することにより,

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sin^2 \frac{l}{2}} \left(\sin \frac{l-t}{2} + \sin \frac{t}{2} \sqrt{\frac{d\mu'}{d\mu}} \right)^2 \mu \tag{3}$$

$$= a_1(t)\, \mu + a_2(t)\, \mu' + a_3(t)\, \varphi^{(0)}(\mu, \mu') \tag{4}$$

と表すことができる. ただし, $a_i : [0, l] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ は, $a_i(t) \geq 0$ かつ $\sum_{i=1}^{3} a_i(t) = 1$ を満たす関数である. (4) の表記から, **$\mathcal{P}^+(M)$ の任意の 2 点は測地線で結べる**ことがわかる.

4. 小原氏は, 対称錐 Ω 上のあるポテンシャル関数に関するヘッセ計量 g を考え, さらに, (Ω, g) 上の双対接続構造 $(\nabla^{(\alpha)}, \nabla^{(-\alpha)})$, $-1 \leq \alpha \leq 1$ を定義し, $\nabla^{(\alpha)}$ に関する測地線分（α-測地線分）の中点が端点の α-冪平均であることを示した. ここでの α-冪平均とは, 関数 $\sigma_{1/2}^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{1 + t^\alpha}{2} \right)^{1/\alpha}$ が生成する Ω の作用素平均である（詳細は [5] を参照）.

$(\mathcal{P}^+(M), G)$ の測地線（0-測地線）についてみてみると, (3) 式から直ちに, **中点は μ と μ' の正規化 $\frac{1}{2}$-冪平均に等しい**ことがわかる. [1, p.33] と同様の方法により, $(\mathcal{P}^+(M), G)$ 上にも双対接続構造 $(\nabla^{(\alpha)}, \nabla^{(-\alpha)})$ が定義でき, $\nabla^{(\alpha)}$ に関する測地線 $\gamma^{(\alpha)}(t) = f(t)\, d\theta$, $f(t) = f(\theta, t)$ は微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \right) + \frac{1-\alpha}{2} \left(\frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \right)^2 + \frac{1+\alpha}{2} \int_M \left(\frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \right)^2 f(t)\, d\theta = 0$$

の解であることがわかっている（[3, 補遺 ‡ 2] を参照）.

$\alpha = -1$ のときは, $\gamma^{(-1)}(t) = \mu + t\tau = \frac{1}{l}((l-t)\mu + t\,\mu')$ となり, μ と μ' の中点 $\gamma^{(-1)}(l/2)$ は $\varphi^{(1)}(\mu, \mu')$ である. $\alpha = 1$ のとき, μ と μ' を結ぶ 1-測地線分は, ある関数 $F(t)$ を用いて $\gamma^{(1)}(t) = \exp\left(\frac{t}{l} F(l) - F(t) \right) \cdot \left(\frac{d\mu'}{d\mu} \right)^{t/l} \mu$ と表され, $\gamma^{(1)}(l/2)$ は $\varphi^{(0)}(\mu, \mu')$ となることがわかる. 一般の α についても, μ と μ' を結ぶ α-測地線分の中点が $\varphi^{(\frac{1-\alpha}{2})}(\mu, \mu')$ に等しいことが予想される.

参考文献

[1] S.-I. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, Trans. Math. Monogr. **191**, AMS, 2000.

[2] T. Friedrich, Die Fisher-Information und symplektische Strukturen, Math. Nachr. **153** (1991), 273-296.

[3] 伊藤 光弘, 重心写像の Fisher 情報幾何, 東京理科大学連続講演記録, 2015.

[4] M. Itoh and H. Satoh, Geometry of Fisher information metric and the barycenter map, Entropy **17** (2015), 1814-1849.

[5] A. Ohara, Geodesics for dual connections and means on symmetric cones, Integr. Equat. Oper. Th. **50** (2004), 537-548.