

線形代数 I 演習

— 第 19 回 余因子展開 —

担当：佐藤 弘康

問題 19.1. 次の行列の行列式を余因子展開を使って求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 4 & -7 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 19.2. 次の $(n+1)$ 次正方行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{pmatrix}$$

問題 19.3. n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} x^2+1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & x^2+1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & x^2+1 \end{pmatrix}$$

の行列式を $D_n(x)$ とおくとき, 余因子展開を使って,

$$D_n(x) = (x^2+1)D_{n-1} - x^2D_{n-2}(x)$$

が成り立つことを示し, それを用いて $D_n(x)$ を求めよ.