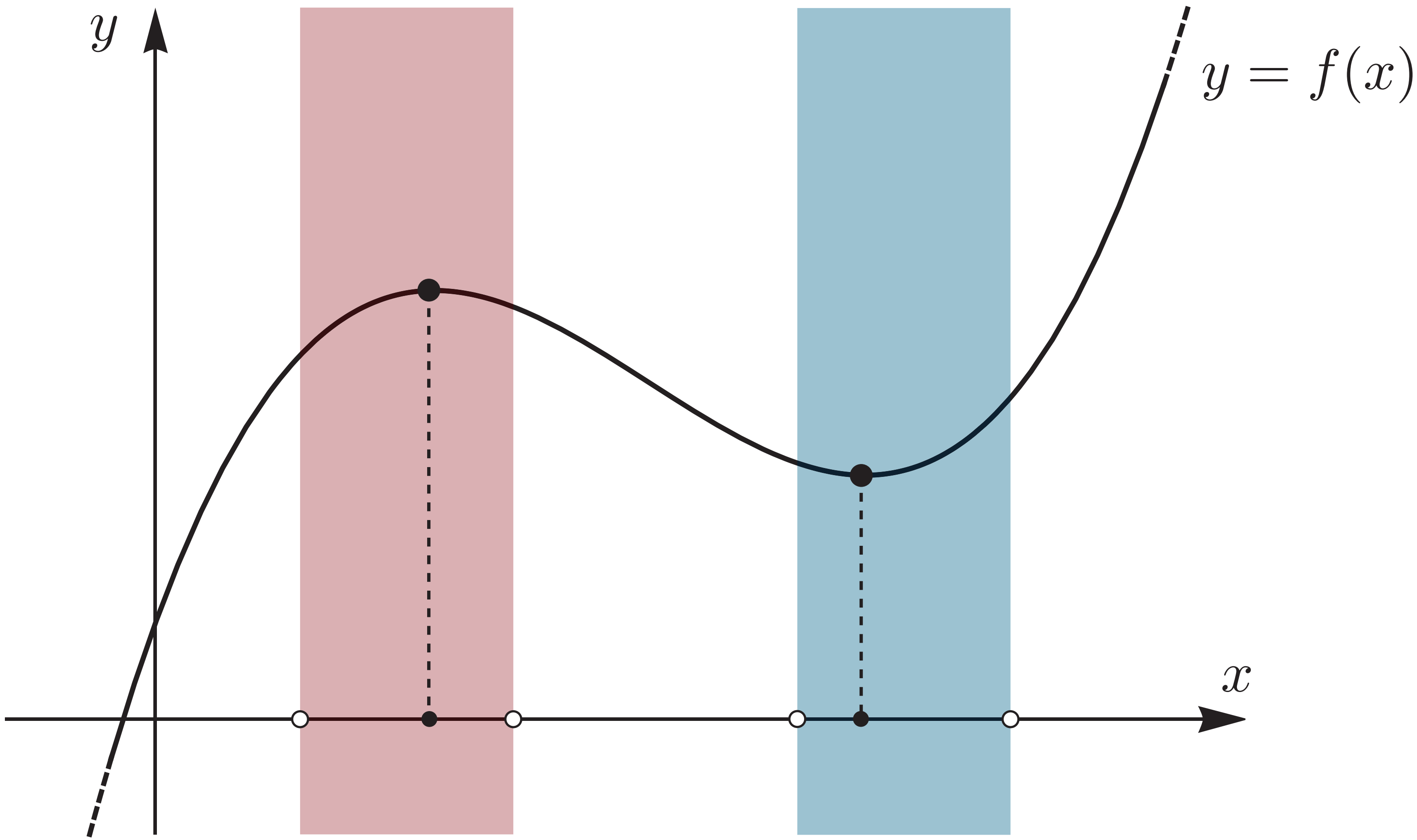
数学クォータ科目「数学」第 3 回 (1/2)

１変数関数の極値

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

極値とは

極値とは？　局所的な最大値や最小値のこと.

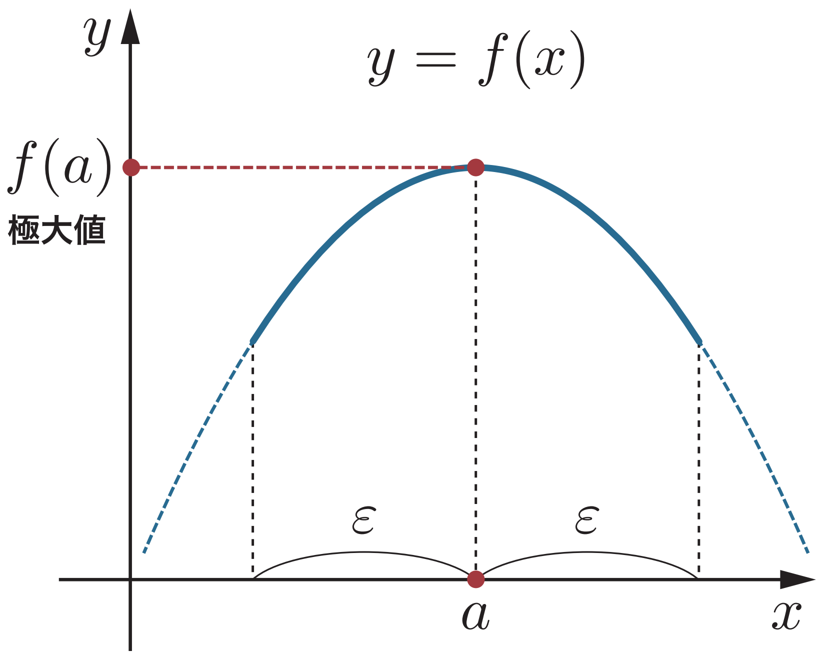


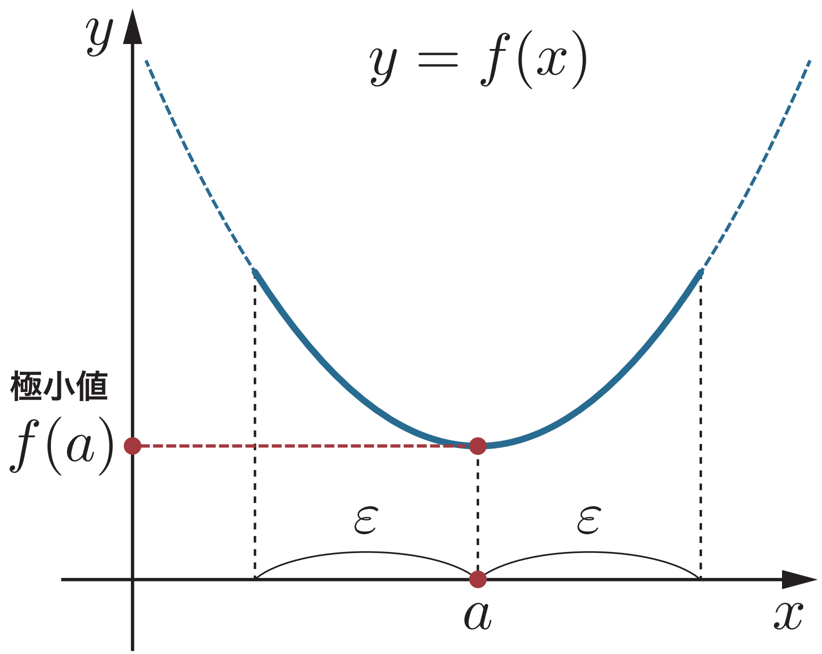
1 変数関数の極値

定義（1 変数関数の極値）

- $f(a)$ が関数 $f(x)$ の極大値 $\iff 0 < |h| < \varepsilon$ ならば，$f(a) > f(a+h)$
- $f(a)$ が関数 $f(x)$ の極小値 $\iff 0 < |h| < \varepsilon$ ならば，$f(a) < f(a+h)$

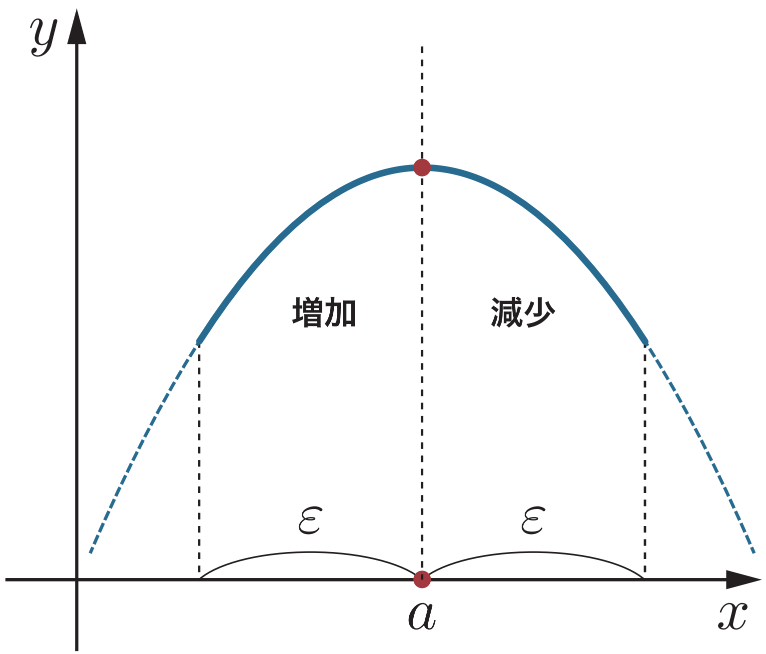
極大値と極小値を合わせて「極値」という．

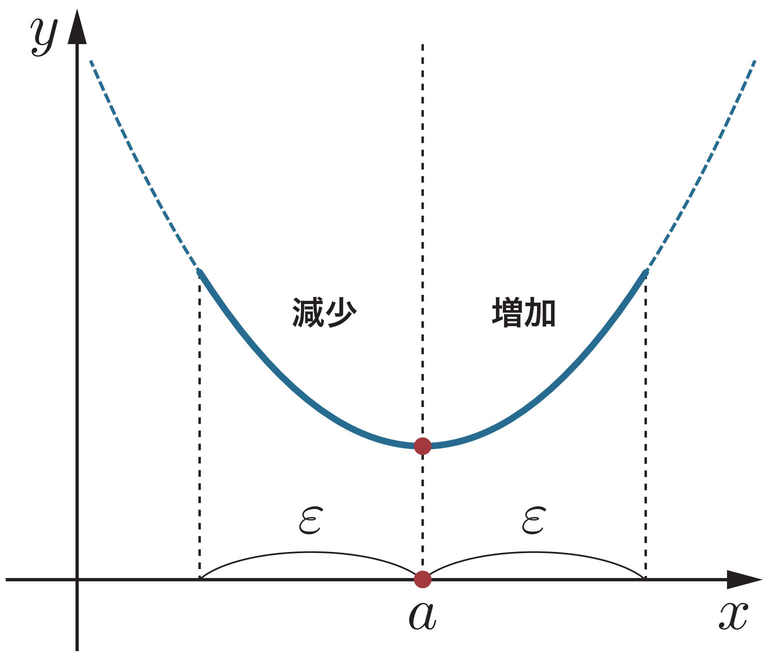




1変数関数の極値

極値とは？　関数の増減が入れかわる点のこと.





関数の増減

定義（関数の増減）

関数 $f(x)$ がある区間で

- 「単調増加である」とは，「$x_1 < x_2$ ならば，$f(x_1) \leq f(x_2)$」
- 「単調減少である」とは，「$x_1 < x_2$ ならば，$f(x_1) \geq f(x_2)$」

が成り立つときをいう．

注

- 厳密には，上の単調性は「広義」単調○○という．
- の等号がない不等号の場合を「狭義」単調○○という．

関数の増減と導関数の符号

定理

関数 $f(x)$ がある区間で, $\begin{cases} \text{単調増加である} \iff f'(x) \geq 0 \\ \text{単調減少である} \iff f'(x) \leq 0 \end{cases}$

証明 $\Longrightarrow$) $x = x_0$ のまわりで $f(x)$ が増加関数ならば,

- $h > 0$ に対し, $x_0 < x_0 + h$ だから $f(x_0) < f(x_0 + h)$ である.

  つまり $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$

- $h < 0$ に対し, $x_0 + h < x_0$ だから $f(x_0 + h) < f(x_0)$ である.

  つまり $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{(-h)} > 0$

いずれの場合も, $h \to 0$ のとき, $\boxed{}$ は $f'(x_0)$ に収束. したがって, $f'(x_0) \geq 0$.

関数の増減と導関数の符号

定理

関数 $f(x)$ がある区間で, $\begin{cases} \text{単調増加である} \iff f'(x) \geq 0 \\ \text{単調減少である} \iff f'(x) \leq 0 \end{cases}$

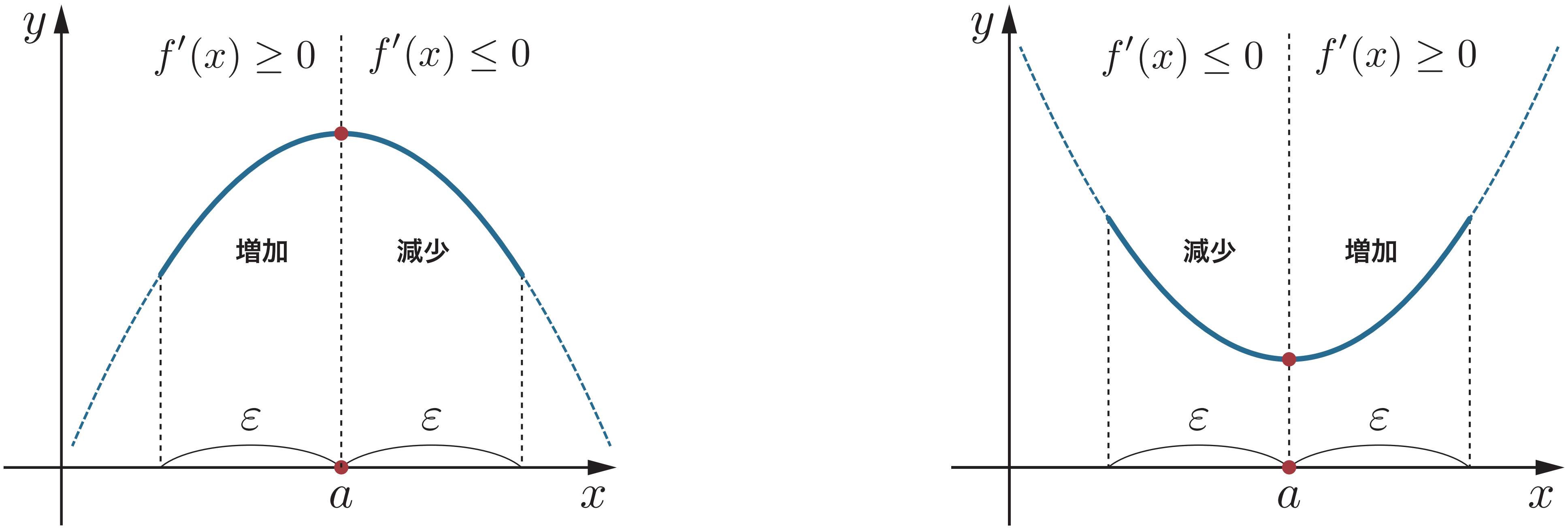
$\boxed{\text{証明}}$ $\Longleftarrow$)「平均値の定理（p.46 定理 8.）」を用いる.

（省略）

1変数関数の極値（再掲）

$\boxed{\text{極値とは？}}$　関数の増減が入れかわる点のこと.

- $f(x)$ が $x = a$ で極大値をとるとする. $x = a$ の近傍で
    - $x \leq a$ においては, $f(x)$ は増加関数なので, $f'(x) \geq 0$
    - $a \leq x$ においては, $f(x)$ は減少関数なので, $f'(x) \leq 0$
- よって, このとき, $f'(a) = 0$ が成り立つ（極小の場合も同様）.



1変数関数の極値の判定（1）

以上のことをまとめると,

定理 1. (i)（教科書 p.68）

「$f(x)$ が $x = a$ で**極値**をとる」 $\Longrightarrow$ $f'(a) = 0$

問 逆の主張 『$f'(a) = 0 \Longrightarrow f(x)$ は $x = a$ で極値をとる』 は正しい？

例1） $f(x) = x^3$

- $f'(x) = 3x^2$ より, $f'(x) = 0$ を満たすのは $x = 0$ のみ.
- しかし, $f(0)$ は極値でない.
- なぜなら, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ だから, この関数は**単調増加**関数である.

※ 極値をとるのは, 関数に増減が入れ替わる点なので, 単調増加関数や単調減少関数は極値をとらない.

１変数関数の極値の判定（２）

問　$f'(a)=0$ が成り立つとき, $f(a)$ が極値か否かを, どう判定するのか？

（方法１）$f(x)$ の増減表をつくる.

（方法２）$f''(a)$ の符号を調べる.（第２次導関数 $f''(x)$ が連続であると仮定）

- $f'(a)=0$ のとき, テイラーの定理より, $x=a$ のまわりで

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(c_x)}{2}(x-a)^2$$

とかける（ただし, c_x は a と x の間にある数）.

- x が a に十分近い値ならば, c_x も当然 a に十分近い値である.
- $f''(a)>0$ ならば, $f''(x)$ の連続性より, $f''(c_x)>0$. よって,

$$f(x)-f(a)=\frac{f''(c_x)}{2}(x-a)^2 \geq 0. \quad \therefore\ f(x) \geq f(a)$$（つまり, $f(a)$ は極小）.

１変数関数の極値の判定（３）

以上のことをまとめると,

定理 1. (ii)（教科書 p.68）

$f'(a) = 0$ かつ $\begin{cases} f''(a) < 0 \\ f''(a) > 0 \end{cases}$ ならば, $f(a)$ は $\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$ である.

1変数関数の極値の求め方

関数 $f(x)$ の極値を求めるには

(1) 導関数 $f'(x)$ を求める.

(2) 方程式 $f'(x) = 0$ の解 $x = a$ を求める.

(3) 第2次導関数 $f''(x)$ を求める.

(4) (2) の解 $x = a$ に対して, $f''(a)$ の符号を調べる.

$$\begin{cases} f''(a) < 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極大値} \\ f''(a) > 0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$$

$\boxed{\text{問}}$ $f''(a) = 0$ のときは？

答え）$f'''(a) = 0$ の符号を調べる.

【参考】１変数関数の極値の判定

定理.

関数 $f(x)$ は, $\underline{f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,\ \text{かつ}\ f^{(n)}(a) \neq 0}$ を満たすとする. このとき,

- n が偶数のとき, $\begin{cases} f^{(n)}(a) < 0 & \Longrightarrow \quad f(a)\ \text{は極大値} \\ f^{(n)}(a) > 0 & \Longrightarrow \quad f(a)\ \text{は極小値} \end{cases}$
- n が奇数のとき, $f(a)$ は 極値ではない.

仮定を満たすとき, テイラーの定理より, $f(x) - f(a) = \dfrac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n$.

- n が偶数ならば, ☐ の符号は, $f^{(n)}(c_x)$ の符号と一致する.
- n が奇数ならば, ☐ の符号は, $x = a$ の前後で正負が入れ替わる.

【参考】１変数関数の極値の判定（例）

例） $f(x) = x^4$

- $f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2,\ f'''(x) = 24x,\ f^{(4)}(x) = 24,\ f^{(5)}(x) = 0, \ldots$
- $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, かつ $f^{(4)}(0) = 24 \neq 0$ が成り立つ.
- 4 は偶数なので, $f(0)$ は 極値である .
- $f(0) > 0$ より, $f(0)$ は極小値.

例） $f(x) = x^3$

- $f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6,\ f^{(4)}(x) = 0, \ldots$
- $f'(0) = f''(0) = 0$, かつ $f'''(0) = 6 \neq 0$ が成り立つ.
- 3 は奇数なので, $f(0)$ は 極値ではない .