解析 I 演習 (2 学期：ベクトル解析)

－ 第 3 回 多変数関数の微分積分－

担当：佐藤 弘康

問題 3.1. $x(u,v) = u + v^2$, $y(u,v) = u^2 + v$ とするとき，$\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への写像 $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ の原点における微分写像をもとめよ．また，Jacobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を計算せよ．

問題 3.2. f を $a \in \mathbf{R}^m$ の近傍から $\mathbf{R}^n$ への微分可能な写像とする．$\boldsymbol{e}_i \in \mathbf{R}^m$ を i 番目の成分が 1 で他が 0 のベクトルとするとき，

$$x \mapsto df_x(\boldsymbol{e}_i) \tag{3.1}$$

により $a \in \mathbf{R}^m$ の近傍から $\mathbf{R}^n$ への写像が定義できる．f を

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$$

と成分表示するとき，写像 (3.1) を成分表示せよ．

問題 3.3. f, g を $a \in \mathbf{R}^m$ の近傍から $\mathbf{R}^n$ への微分可能な写像とする．このとき，

$$\frac{\partial\langle f, g\rangle}{\partial x_i}(a) = \langle df_a(\boldsymbol{e}_i), g(a)\rangle + \langle f(a), dg_a(\boldsymbol{e}_i)\rangle, \qquad (1 \leq i \leq m) \tag{3.2}$$

が成り立つことを示せ．ただし，左辺は $\mathbf{R}^m$ 上の実数値関数 $x \mapsto \langle f(x), g(x)\rangle$ の i 番目の変数に関する偏導関数．

問題 3.4. f, g を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^3$ への微分可能な写像とすると，

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により，微分可能な写像 $f \times g : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^3$ が定義できる．このとき，

$$d(f \times g)_x(\boldsymbol{v}) = df_x(\boldsymbol{v}) \times g(x) + f(x) \times dg_x(\boldsymbol{v}), \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n) \tag{3.3}$$

が成り立つことを示せ．

問題 3.5. $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を微分可能な写像とする．任意の点 $a \in \mathbf{R}^n$ に対して，微分写像 df_a が $\mathbf{R}^n$ の恒等変換になるような f はどのような写像か考察せよ．

問題 3.6. S を中心が $\mathrm{Q}=(0,0,1)$ で半径 1 の $\mathbf{R}^3$ 内の球面とする．xy 平面上の点 a に対し，S の北極 $\mathrm{N}=(0,0,2)$ と a とを結ぶ直線を l_a とし，S と l_a との交点を $f(a)$ と定める．このように定義される $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 f について以下の問に答えよ．

(1) $a=(x,y)\in\mathbf{R}^2$ に対し，$f(a)\in\mathbf{R}^3$ を x,y を用いて表せ．

(2) $a=(x,y)$ における f の微分写像 df_a を求めよ．

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^2$ に対し，ベクトル $(f(a)-\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ と $df_a(\boldsymbol{v})$ は直交することを示せ．

問題 3.7. 次の積分を適当に変数変換して計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy, \qquad D: x^2+y^2\le 1$

(2) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy, \qquad D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

(3) $\displaystyle\iiint_V x\ dxdydz, \qquad V: x^3+y^3+z^3\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$