問題 1

次の行列の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 11 & -4 \\ -2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 11 & -4 \\ -2 & 1 & 9 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2\times 1 & 2\times 4 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2\times\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2\times\det\left(\begin{array}{c:cc} 1 & 3 & -4 \\ \hdashline 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \end{array}\right) = 2\times 1\times\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2(1\times 1 - 4\times 7) \\
&= -54.
\end{aligned}$$

1 行目を (-3) 倍して 2 行目に加える
1 行目を 2 倍して 3 行目に加える

ある行（列）が定数倍されていれば，
その定数をくくり出すことができる．

問題 2

次の連立方程式の解を求めなさい．

$$\begin{cases} x+3y+5z=2 \\ 2x+7y+13z=5 \\ -3x-9y-15z=-6 \end{cases} \tag{0.2}$$

連立方程式 (0.2) は行列とベクトルの方程式に書き直すことができる；

$$\begin{pmatrix} x+3y+5z \\ 2x+7y+13z \\ -3x-9y-15z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 13 \\ -3 & -9 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を行基本変形により，簡約階段行列に変形する；

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 13 & 5 \\ -3 & -9 & -15 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

これは，消去法によって (0.2) の未知数を消去するとき，以下の方程式まで式を簡約化できることを意味する；

$$\begin{cases} x \quad\quad -4z = -1 \\ \quad\quad y \; +3z = 1 \end{cases} \tag{0.3}$$

(0.3) の 2 式に共通に含まれる未知数 z を k とおくと，$x=4k-1$，$y=-3k+1$ となる．したがって，(0.2) の解は

$$\begin{cases} x=4k-1 \\ y=-3k+1 \\ z=k \end{cases}$$

または，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とベクトル表記することができる（ただし，k は任意の実数）．