演習書・問題 3.13

(1) $(hD_x+kD_y)^3f=h^3D_x^3f+3h^2kD_x^2D_yf+3hk^2D_xD_y^2f+k^3D_y^3f$ を示せ．

(2) 次の等式が成り立つことを，n に関する数学的帰納法により示せ．

$$(hD_x+kD_y)^nf=\sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\j\end{array}\right)h^{n-j}k^j\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j} \tag{8.1}$$

(3) $\varphi(t)=f(a+th,b+tk)$ にたいして，次を示せ．

$$\varphi^{(n)}(t)=((hD_x+kD_y)^nf)(a+th,b+tk) \tag{8.2}$$

(1) 偏微分作用素の定義より，

$$(hD_x+kD_y)f=hD_xf+kD_yf\ \left(=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{8.3}$$

微分の性質 $\frac{\partial}{\partial x}(f+g)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}$ から，以下のように計算できる：

$$\begin{aligned}
(hD_x+kD_y)^2f=&(hD_x+kD_y)(hD_xf+kD_yf)\\
=&hD_x(hD_xf+kD_yf)+kD_y(hD_xf+kD_yf)\\
=&h^2D_x^2f+hkD_xD_yf+khD_yD_xf+k^2D_y^2f\\
=&h^2D_x^2f+2hkD_xD_yf+k^2D_y^2f,\\
(hD_x+kD_y)^3f=&(hD_x+kD_y)(h^2D_x^2f+2hkD_xD_yf+k^2D_y^2f)\\
=&hD_x(h^2D_x^2f+2hkD_xD_yf+k^2D_y^2f)\\
&+kD_y(h^2D_x^2f+2hkD_xD_yf+k^2D_y^2f)\\
=&h^3D_x^3f+2h^2kD_x^2D_yf+hk^2D_xD_y^2f\\
&+kh^2D_yD_x^2f+2hk^2D_xD_y^2f+k^3D_y^3f\\
=&h^3D_x^3f+3h^2kD_x^2D_yf+3hk^2D_xD_y^2f+k^3D_y^3f.
\end{aligned}$$

(2) (8.3) より，$n=1$ のとき (8.1) は成立する．

ある $n\in\mathbf{N}$ にたいし，(8.1) が成立すると仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}
(hD_x+kD_y)^{n+1}f=&(hD_x+kD_y)\left((hD_x+kD_y)^nf\right)\\
=&(hD_x+kD_y)\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\j\end{array}\right)h^{n-j}k^j\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right)\\
=&\sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\j\end{array}\right)h^{n-j+1}k^j\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-j+1}\partial y^j}+\sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\j\end{array}\right)h^{n-j}k^{j+1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-j}\partial y^{j+1}}.
\end{aligned}$$

上式の 2 項目において $l=j+1$ とし，$l=1$ から $n+1$ までの和に書き換える（同時に 1 項目についても $j=l$ と書き直す）と

$$
\begin{aligned}
(hD_x+kD_y)^{n+1}f =& \sum_{l=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} h^{n+1-l}k^l\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-l}\partial y^l}+\sum_{l=1}^{n+1}\begin{pmatrix} n \\ l-1 \end{pmatrix} h^{n+1-l}k^l\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-l}\partial y^l} \\
=& h^{n+1}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}+\sum_{l=1}^{n}\begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} h^{n+1-l}k^l\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-l}\partial y^l} \\
&+\sum_{l=1}^{n}\begin{pmatrix} n \\ l-1 \end{pmatrix} h^{n+1-l}k^l\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-l}\partial y^l}+k^{n+1}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n \\ l-1 \end{pmatrix} =& \frac{n!}{l!\,(n-l)!}+\frac{n!}{(l-1)!\,(n-l+1)!}=\frac{n!((n-l+1)+l)}{l!\,(n-l+1)!} \\
=& \frac{(n+1)!}{l!\,(n-l+1)!}=\begin{pmatrix} n+1 \\ l \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
(hD_x+kD_y)^{n+1}f =& h^{n+1}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}+\sum_{l=1}^{n}\begin{pmatrix} n+1 \\ l \end{pmatrix} h^{n+1-l}k^l\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-l}\partial y^l}+k^{n+1}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n+1}} \\
=& \sum_{l=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ l \end{pmatrix} h^{n+1-l}k^l\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-l}\partial y^l}
\end{aligned}
$$

を得る．以上のことから，一般の n にたいして (8.1) が成立することがわかる．

(3) これも帰納法を用いて示す．$n=1$ のときは省略．n にたいし，(8.2) が成り立つと仮定．このとき，

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(n+1)}(t) =& \frac{d}{dt}\varphi^{(n)}(t) \\
=& \frac{d}{dt}\left\{((hD_x+kD_y)^n f)(a+th,b+tk)\right\} \\
=& \frac{\partial\left((hD_x+kD_y)^n f\right)}{\partial x}(a+th,b+tk)\cdot h \\
&+\frac{\partial\left((hD_x+kD_y)^n f\right)}{\partial y}(a+th,b+tk)\cdot k \\
=& hD_x\left((hD_x+kD_y)^n f\right)(a+th,b+tk) \\
&+kD_y\left((hD_x+kD_y)^n f\right)(a+th,b+tk) \\
=& (hD_x+kD_y)\left((hD_x+kD_y)^n f\right)(a+th,b+tk) \\
=& \Big((hD_x+kD_y)^{n+1} f\Big)(a+th,b+tk).
\end{aligned}
$$

□ **2 変数関数の Taylor 級数**

問題 3.13 の結果を用いて，2 変数関数の Taylor 展開の公式を導いてみよう．(3) で定義した関数 $\varphi(t)$ の $t=0$ における Taylor 級数は

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)\cdot t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left((hD_x+kD_y)^n f\right)(a,b)\cdot t^n && \because (8.2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} h^{n-j}k^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(a,b)\cdot t^n && \because (8.1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n-j)!\,j!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(a,b)\cdot h^{n-j}k^j\, t^n\end{aligned}$$

となる．この式に $t=1$ を代入すると

$$f(a+h,b+k)=\varphi(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n-j)!\,j!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(a,b)\cdot h^{n-j}k^j.$$

さらに $h=x-a$, $k=y-b$ を代入することにより

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n-j)!\,j!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(a,b)\cdot(x-a)^{n-j}(y-b)^j \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{l!\,j!}\frac{\partial^{l+j} f}{\partial x^{l}\partial y^j}(a,b)\cdot(x-a)^{l}(y-b)^j \qquad (8.4)\end{aligned}$$

を得る．

演習書・問題 3.16

次の関数の $(x,y)=(0,0)$ における Taylor 展開を計算せよ．

(1) $\dfrac{y^3}{1-x^2y}$　　(2) $x^3y\,e^{xy}$　　(3) $\dfrac{1}{1-x-y+xy}$

(1) $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n$ に $t=x^2y$ を代入し，y^3 をかける．よって，$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}y^{n+3}$.

(2) $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n$ に $t=xy$ を代入し，xy をかける．よって，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+3}y^{n+1}$.

(3) $\frac{1}{1-x-y+xy}=\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-y}\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x^n\,y^m$.

問題 8.4

関数 $f(x,y)=x^4+y^4-10x^2+16xy-10y^2$ にたいして

(1) $f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたすべての点にたいし，その点における $f(x,y)$ の Taylor 級数を 2 次の項まで求めよ．

(1) $f_x(x,y)=4(x^3-5x+4y)$，$f_y(x,y)=4(y^3+4x-5y)$．したがって，次の連立方程式の解を求めればよい：

$$a^3-5a+4b=0, \tag{8.5}$$
$$b^3+4a-5b=0. \tag{8.6}$$

(8.5) より，$b=-\frac{a}{4}(a^2-5)$．これを (8.6) に代入すると

$$\begin{aligned}0=&-\frac{a^3}{4^3}(a^2-5)^3+4a+\frac{5}{4}a(a^2-5)\\ =&-a\left(a^8-15a^6+75a^4-205a^2+144\right)/4^3\\ &-a(a^2-1)(a^2-9)(a^4-5a^2+16)/4^3.\end{aligned}$$

この解は $a=0,\pm1,\pm3$．求める点は $\mathbf{(0,0)}$, $\mathbf{(1,1)}$, $\mathbf{(-1,-1)}$, $\mathbf{(3,-3)}$, $\mathbf{(-3,3)}$.

別解：(8.5)+(8.6) および (8.5)−(8.6) より

$$a^3+b^3-a-b=(a+b)(a^2-ab+b^2-1)=0, \tag{8.7}$$
$$a^3-b^3-9a+9b=(a-b)(a^2+ab+b^2-9)=0. \tag{8.8}$$

(i) $a+b=0$ かつ $a-b=0$ のとき, $(a,b)=\mathbf{(0,0)}$．(ii) $a+b=0$ かつ $a^2+ab+b^2-9=0$ のとき，$a=\pm3$．したがって，$(a,b)=\mathbf{(3,-3)},\mathbf{(-3,3)}$．(iii) $a-b=0$ かつ $a^2-ab+b^2-1=0$ のとき，$a=\pm1$，したがって，$(a,b)=\mathbf{(1,1)},\mathbf{(-1,-1)}$.
(iv) $a^2+ab+b^2-9=0$ かつ $a^2-ab+b^2-1=0$ のとき，$a^2+b^2=5$，$ab=4$．つまり，a^2, b^2 は $X^2-5X+16=0$ の正の実根であるが，この方程式は実根をもたない．

(2) $f_{xx}(x,y)=4(3x^2-5)$，$f_{xy}(x,y)=16$，$f_{yy}(x,y)=4(3y^2-5)$．したがって，2 次の項までの Taylor 級数は以下の式で与えられる（復号同順）：

$$\begin{array}{rcl}(0,0) & : & f(x,y)\simeq-10x^2+16xy-10y^2\\ (\pm1,\pm1) & : & f(x,y)\simeq-2-4(x\mp1)^2+16(x\mp1)(y\mp1)-4(y\mp1)^2\\ (\pm3,\mp3) & : & f(x,y)\simeq-162+44(x\mp3)^2+16(x\mp3)(y\pm3)+44(y\pm3)^2\end{array}$$

課題　上で求めた 5 つの点が極値を与えるかどうか判定せよ．（提出期限：10/29）