$\mathbf{R}^3$ の拡大・縮小

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad (k \in \mathbf{R})$$

$\mathbf{R}^3$ の回転変換

(1) z 軸を回転軸とする θ-回転；

$$R_{z(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) x 軸を回転軸とする θ-回転；

$$R_{x(\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(3) y 軸を回転軸とする θ-回転；

$$R_{y(\theta)} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

(4) 原点を通り，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の直線を回転軸とする θ-回転；

$$R_{(a,b,c;\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ca + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ca - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix}$$

ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

問題 3.8. 次の問に答えなさい.

(1) $R_{(a,b,c;\theta)}$ の式に $a = 1,\ b = 0,\ c = 0$ を代入すると $R_{x(\theta)}$ に等しくなることを確かめなさい.

(2) (1) を参考にして，$R_{(0,1,0;\theta)} = R_{y(\theta)}$，$R_{(0,0,1;\theta)} = R_{z(\theta)}$ を示しなさい.

$\mathbf{R}^3$ のせん断

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbf{R})$$

問題 3.9. 平面 $\mathbf{R}^2$ のせん断（問題 3.4 および `im3-ex3.2.nb` の 3.1)）を参考にして，空間 $\mathbf{R}^3$ のせん断がどのような変換なのか考えなさい.

$\mathbf{R}^3$ 内の平面 $ax+by+cz=0$ に関する鏡映変換

$$S_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$$

ただし，$a^2+b^2+c^2=1$.

問題 3.10. 鏡映変換を表す行列 $S_{(a,b,c)}$ について以下の問に答えなさい.

(1) $S_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となることを確かめなさい.

(2) (1) を参考にして，$S_{(1,0,0)}$，$S_{(0,1,0)}$ を書きなさい.

問題 3.11. 鏡映変換 $S_{(a,b,c)}$（ただし，$a^2+b^2+c^2=1$）について，以下の問に答えなさい.

(1) $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおき，$S_{(a,b,c)}\vec{p}$ を成分表示しなさい.

(2) ベクトル $(\vec{p} - S_{(a,b,c)}\vec{p})$ が $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 平行であることを確かめなさい.

(3) 点 $\vec{p}$ と点 $S_{(a,b,c)}\vec{p}$ の中点 $\dfrac{1}{2}\left(\vec{p} + S_{(a,b,c)}\vec{p}\right)$ が平面 $ax+by+cz=0$ 上の点であることを確かめなさい.