

線形代数 II 演習^{*1}

— 第 1 回 1 学期の復習 (行列の基本変形), 2 次正方行列の行列式 —

担当: 佐藤 弘康^{*2}

問題 1.1. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

問題 1.2. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

■ 行列式 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し, スカラー

$$\det(A) = ad - bc$$

を行列 A の行列式と呼ぶ.

■ クラメールの公式 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

の解は

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

で与えられる. ただし, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ とする.

^{*1} <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~hiroyasu/2007/l2-ex.html>

^{*2} 研究室: 自然系学系 D 棟 801 (029-853-4267), E-mail: hiroyasu@math.tsukuba.ac.jp

問題 1.3. 次の連立方程式を, 2 つの方法 (行基本変形とクラメールの公式) を用いて解を求めよ.

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$$

■ 一次変換 2 次正方行列 A に対し, 平面 \mathbf{R}^2 の点 (ベクトル) を \mathbf{R}^2 の点に移す写像 $\varphi_A : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $\varphi_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ により定義することができる ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$). この写像 φ_A を行列 A から定まる一次変換 (または線形変換) と呼ぶ (教科書 p.60 を参照).

問題 1.4. 次の 2 次正方行列に対して, それが定める一次変換がどのような写像か説明せよ (平面内の点をどのように移すか調べよ).

$$(1) E_1(k) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

問題 1.5. $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ を \mathbf{R}^2 上の原点 O 以外の点とする. 線分 OA と OB を 2 辺にもつ平行四辺形の面積は, 行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

の行列式の絶対値に等しいことを示せ. ただし, ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ は線形独立であるとする.

■ 行列式の符号について

2 次正方行列 A は平面の一次変換 φ_A を定め、平面内の図形を φ_A で移すと、その面積は $|\det(A)|$ 倍される。一次変換とは、原点を中心とした回転作用や、ある方向へ平面全体を伸ばしたり、縮めたりする作用を何回か施す変換である。 $\det(A) \neq 0$ のとき、変換 φ_A を施すことにより、平面内の図形は伸びたり縮んだりするものの、だいたいの形は変わらない。ただし、行列式が負の行列の場合は、その作用により図形は裏返ってしまう(下図参照)。また、行列式が 0 の場合、平面内の図形は直線か 1 点に縮んでしまう。

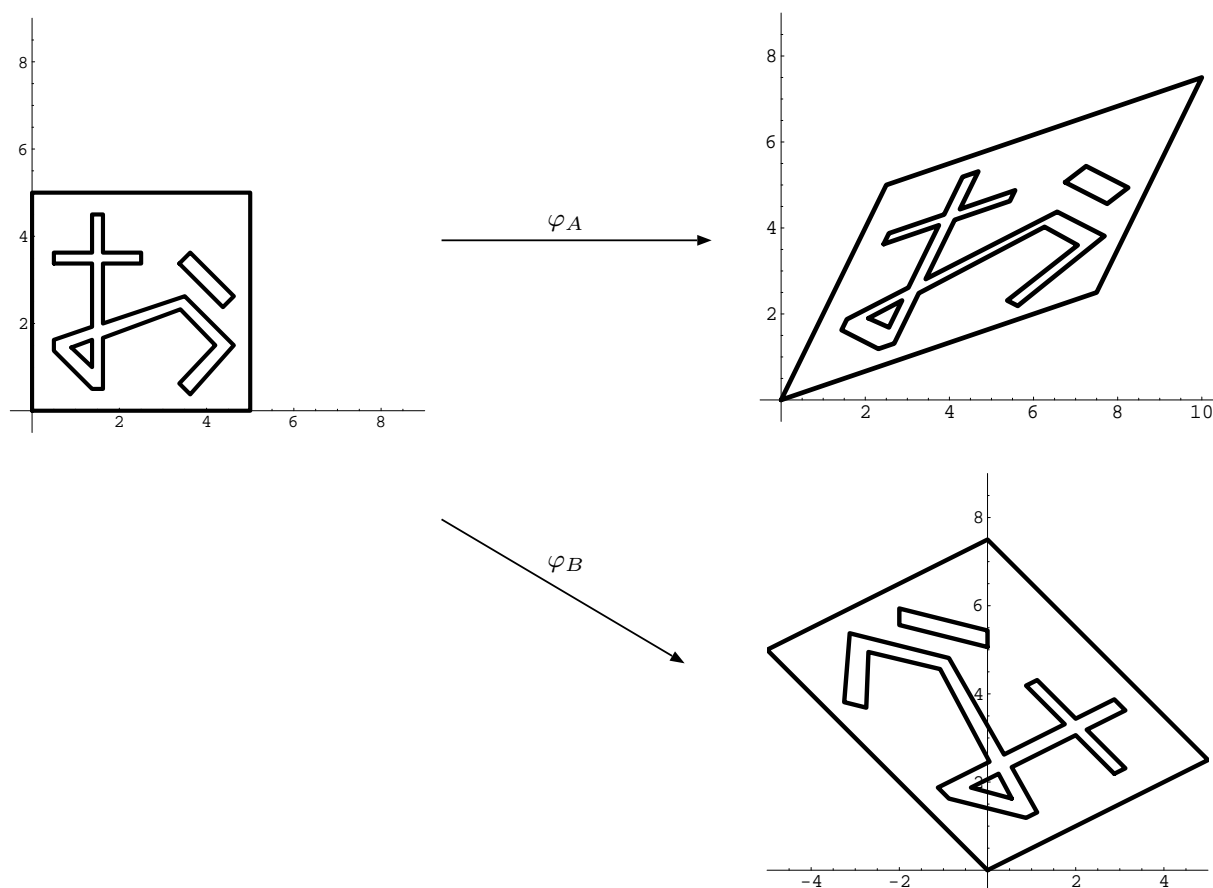


図: 一次変換による像. $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

線形代数 II 演習^{*1}

－ 第 2 回 置換

担当：佐藤 弘康^{*2}

基本問題 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

- (1) 置換とは何か, 説明せよ.
- (2) 恒等置換, 逆置換とはどのような置換か, 説明せよ.
- (3) 置換の巡回置換, 巡回表示とは何か, 説明せよ.
- (4) 互換とはどのような置換か, 説明せよ.
- (5) 偶置換, 奇置換とはどのような置換か, 説明せよ.

問題 2.1. 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して, $\sigma \circ \tau$ および $\tau \circ \sigma$ を計算せよ.

問題 2.2. 次の置換

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して, $\sigma_2 \circ \sigma_3$ および $\sigma_1 \circ \sigma_2$ を計算せよ. また, $\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$ および $(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$ を計算せよ.

問題 2.3. 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して, $\sigma \circ \tau$, σ^{-1} , および τ^{-1} を計算せよ. また, $(\sigma \circ \tau)^{-1}$ および $\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ を計算せよ.

^{*1} <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~hiroyasu/2007/l2-ex.html>

^{*2} 研究室：自然系学系 D 棟 801 (029-853-4267), E-mail: hiroyasu@math.tsukuba.ac.jp

定義. 巡回置換 $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ に対し, 集合 $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ を巡回置換 σ の巡回域という.

σ, τ を 2 つの巡回置換とするとき, 両者の巡回域が共通の元 (数) を含まないとき, σ, τ は互いに素であるという.

問題 2.4. 次の置換を巡回表示せよ (互いの素な巡回置換の積に書き表せ). また, 互換の積で表示し, 置換の符号も求めよ (偶置換か, 奇置換か).

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(3) (1, 2, 3)(4, 5)(1, 3, 6, 7) \in S_7$$

問題 2.5. 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

を互換の積で表せ. ただし, 定理 3.3 (教科書 p.68) の証明にある標準的な方法

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \dots \circ (i_{k-1}, i_k)$$

を使ったもの以外とする. また, どのようにして求めたか説明せよ.

線形代数 II 演習

－ 第 3 回 行列式 －

担当：佐藤 弘康

行列式の性質

$$\text{d-1) } \det \left(\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & A \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \cdots 0 \\ \hline * & A \end{array} \right) = a \cdot \det(A)$$

d-2) 列に関する線型性 (定理 3.10) :

$$\begin{aligned} & \det (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j + c\mathbf{b}_j \cdots \mathbf{a}_n) \\ &= \det (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) + c \cdot \det (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b}_j \cdots \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

d-3) 任意の列の入れ換えに対して, (-1) 倍される (定理 3.8) :

$$\det (\cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots) = -\det (\cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i \cdots)$$

d-4) 任意の列をスカラー倍して, 別の列に加えても行列式は変わらない :

$$\det (\cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots) = \det (\cdots \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots)$$

d-5) $|AB| = |A| \cdot |B|$ (定理 3.9)d-6) $|{}^t A| = |A|$ (定理 3.12)

注意 : d-2)~d-4) は行に関しても成り立つ.

問題 3.1. サラスの方法を用いて, 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ. また,

逆行列 A^{-1} を計算し, $|A^{-1}|$ を求めよ.

問題 3.2. 次の行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対し, サラスの

方法を用いて行列式 $|A|, |B|$ を求めよ, また, AB, BA を計算し, $|AB|, |BA|$ を求めよ.

例題.(教科書 p.83 例題 3.9.) 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 - \sqrt{2} & -4 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6 + 4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解. 方針: 行列式の性質 d-1), d-3), d-4) を使って行列を変形し, 行列のサイズを小さくしていく.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 - \sqrt{2} & -4 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6 + 4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(4 行目を適当にスカラー倍して 1, 2, 3 行目に加えて, 1 行目と 4 行目を入れ換える)

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \\ 0 & -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ 2 - 7\sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{3} & -5 \end{vmatrix}$$

(2 行目を (-5) 倍して 3 行目に加える)

$$= - \begin{vmatrix} -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ -8 + 3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

(1 行目と 2 行目を交換し, 1 列目と 3 列目を入れ換える)

$$= \begin{vmatrix} 2 - 2\sqrt{2} & -2 + \sqrt{3} & -1 \\ -6 + 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -8 + 3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 + \sqrt{3} & 2 - 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -6 + 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -8 + 3\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -6 + 2\sqrt{2} \\ 3 & -8 + 3\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= 2(-8 + 3\sqrt{2}) - 3(-6 + 2\sqrt{2}) = 2.$$

問題 3.3. 次の行列の行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 123 & 234 & 345 \\ 234 & 345 & 456 \\ 345 & 456 & 567 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{pmatrix}$$

例題. 次の行列の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$$

解.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

(2 列目を 1 列目に加える)

$$= \begin{vmatrix} a+b & -c & -b \\ a+b & a+b+c & -a \\ -b-a & -a & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 1 & a+b+c & -a \\ -1 & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

(1 行目を 2 行目から引き, 1 行目を 3 行目に加える)

$$= (a+b) \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 0 & a+b+2c & -a+b \\ 0 & -a-c & a+c \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -a-c & a+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c) \begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c) \{(a+b+2c) + (-a+b)\}$$

$$= 2(a+b)(b+c)(a+c).$$

問題 3.4. 次の行列の行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} m & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{pmatrix}$$

問題 3.5. A を正則行列とする. このとき, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ が成り立つことを証明せよ.

問題 3.6. A, B を n 次正方行列とすると,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$$

を証明せよ.

問題 3.7. 次の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

線形代数 II 演習

－ 第 6 回 余因子展開 －

担当：佐藤 弘康

例題. 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

解. 行列式の性質を用いてなるべく 0 を多く含む行 (または列) をつくるように行列を変形していき, その行 (または列) に関して行列式を展開する.

(第 1 列を (-1) 倍して第 2 列, 第 3 列にそれぞれ加える)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 12 & 1 & 2 & 5 \\ 11 & 5 & 4 & 6 \\ 10 & -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 1 & 5 \\ 11 & 5 & 2 & 6 \\ 10 & -1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

(第 3 列を (-1) 倍して第 2 列に加える)

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 12 & 0 & 1 & 5 \\ 11 & 3 & 2 & 6 \\ 10 & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

(第 3 列に関して展開)

$$= -2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 5 \\ 10 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

(第 2 列を (-1) 倍して第 1 列に, (-4) 倍して第 3 列にそれぞれ加える)

$$= -6 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

(第 1 行に関して展開)

$$= 6 \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} = 6(121 - 11) = 660.$$

問題 6.1. 次の行列の行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 4 & -7 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 6.2. 次の $(n+1)$ 次正方行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{pmatrix}$$

問題 6.3. n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} x^2+1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & x^2+1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & x^2+1 \end{pmatrix}$$

の行列式を $D_n(x)$ とおくとき, 余因子展開を使って,

$$D_n(x) = (x^2+1)D_{n-1} - x^2D_{n-2}(x)$$

が成り立つことを示し, それを用いて $D_n(x)$ を求めよ.

線形代数 II 演習

－ 第 7 回 余因子行列, クラメールの公式 －

担当: 佐藤 弘康

例題 1. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

の行列式と余因子行列を求めよ.

解. 第 1 列について $|A|$ を余因子展開すると

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) + (-1) \times (-12) = 6.$$

次に, 余因子行列を求める. 各小行列 A_{ij} の行列式は

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -12, \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9, \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6, \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

となるので, 余因子行列 \tilde{A} は

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 9 \\ -4 & 8 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

また, 定理 3.51(教科書 p.84) より, 逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である (第 1 回プリントの問題 1.1).

問題 7.1. 次の行列の行列式と余因子行列を求め、 $A \cdot \tilde{A} = |A|E_3$ が成り立つことを確認せよ。さらに、正則なら逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

例題 2. 次の連立方程式の解を求めよ。

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{cases} \quad (7.1)$$

解. 連立方程式 (7.1) を行列を用いて書き直すと

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる。クラメールの公式より、

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}.$$

各行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -26, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 26, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -52, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -26$$

であるから、(7.1) の解は $x = 1, y = -1, z = 2$ 。

問題 7.2. クラメールの公式を用いて、次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 12 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + z = 11 \end{cases}$$

問題. 次の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

解. 各列が 1 から n までの自然数をそれぞれ 1 個ずつ成分に持つことに着目し, 第 2 列から第 n 列を第 1 列に加える:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \\ = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

「第 i 行に第 $(i-1)$ 行を (-1) 倍して加える」という操作を $i = n$ から 2 まで (下の行から順番に) 行っていくと

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1-n & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \ddots & 1-n & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

ここで,

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \ddots & 1-n & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

であるから, 問題 3.4(2) の結果を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-1}(n+1)$$

を得る.

線形代数 II 演習

— 第 8 回 固有多項式, 固有値 —

担当: 佐藤 弘康

例題. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ. また, 固有値も求めよ.解. 行列 A の 固有多項式とは

$$\Phi_A(x) = \det(xE_n - A)$$

で定義される n 次多項式 のことである. サラスの方法を用いて $\Phi_A(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \Phi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ 1 & x-4 & 2 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)^2(x-4) - 4 - 2 - 2(x-4) + 2(x-1) + 2(x-1) \\ &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6. \end{aligned}$$

また, A の 固有値とは $\Phi_A(x) = 0$ の解のことである. $\Phi_A(x)$ は

$$\Phi_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

と因数分解できるので, 固有値は $1, 2, 3$ である.問題 8.1. 次の行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ および固有値を求めよ.

$$\begin{array}{lll} (1) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ (4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \end{array}$$

問題 8.2. A を n 次正方行列, P を n 次正則行列とすると, $\Phi_{P^{-1}AP}(x) = \Phi_A(x)$ であることを示せ.

問題 8.3. 正則行列の固有値は 0 でないことを示せ.

問題 8.4. 次のことを証明せよ.

- (1) λ が A の固有値ならば, λ は tA の固有値でもある.
- (2) 正則行列 A に対して, λ が A の固有値ならば, $\frac{1}{\lambda}$ は A^{-1} の固有値である.

問題 8.5. 例題の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

- (1) 行列 A の各固有値 $\lambda = 1, 2, 3$ に対して, 方程式 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ の自明でない解 \mathbf{v}_λ を一つ求めよ.
- (2) (1) で求めたベクトル \mathbf{v}_λ を並べてできる 3 次正方行列 $P = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP$ を計算せよ.

線形代数 II 演習

— 第 9 回 ハミルトン・ケーリーの定理 —

担当：佐藤 弘康

例題. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えよ.

- (1) A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.
- (2) $2A^4 - 6A^3 - 4A^2 + 22A - 13E_3$ を計算せよ.
- (3) A^{-1} を A の多項式として表せ (ただし, 多項式の最大次数は 2 とする).

解. (1) 定義より

$$\begin{aligned} \Phi_A(x) &= |xE_3 - A| = \begin{vmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{vmatrix} \\ &= x^3 - 5x^2 + 8x - 4. \end{aligned}$$

(2) ハミルトン・ケーリーの定理より, $\Phi_A(A) = A^3 - 5A^2 + 8A - 4E_3 = O$ が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned} &2A^4 - 6A^3 - 4A^2 + 22A - 13E_3 \\ &= (A^3 - 5A^2 + 8A - 4E_3)(2A + 4E_3) - 2A + 3E_3 \\ &= -2A + 3E_3 \end{aligned}$$

であるから,

$$2A^4 - 5A^3 + 7A - 3E_3 = -2 \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & 12 \\ 2 & -5 & -4 \\ -6 & 12 & 11 \end{pmatrix}.$$

(3) ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$E_3 = \frac{1}{4} (A^3 - 5A^2 + 8A) = \frac{1}{4} (A^2 - 5A + 8E_3) \cdot A$$

であるから, $A^{-1} = \frac{1}{4} (A^2 - 5A + 8E_3).$

問題 9.1. 次の行列 A に対し, $\Phi_A(A)$ を実際に計算し, ハミルトン・ケーリーの定理が成り立つことを確認せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} : \text{問題 8.1(1)}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} : \text{問題 8.1(2), 例題}$$

問題 9.2. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して, $A^5 - 2A^4 - 4A^3 + 2A^2 - 2A - 3E_3$ を求めよ.

問題 9.3. 次の行列 A の逆行列を A の多項式で表せ (ただし多項式の最大次数は 2 以下とする). また, その多項式を実際に計算し, 問題 7.1 の計算結果と比べよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} : \text{問題 7.1(1)}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} : \text{問題 7.1(3)}$$