平面の媒介変数表示 (1)

3 点 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を通る平面上の点 $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a}) \qquad (s,t \text{ は実数})$$

と表される．ただし，3 点 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は同一直線上にはないものとする．

問題 2.5. 3 点 $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ を通る平面上の点を $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とする．x,y,z を媒介変数 s,t を用いて表しなさい．

平面の媒介変数表示 (2)

点 $\vec{a}$ を通り，ベクトル $\vec{u},\vec{v}$ で生成される平面上の点 $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v} \qquad (s,t \text{ は実数})$$

と表される．ただし，$\vec{u},\vec{v}$ は 1 次独立とする．

問題 2.6. 点 $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ を通り，ベクトル $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ で生成される平面上の点を $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とする．x,y,z を媒介変数 t を用いて表しなさい．

問題 2.5, 2.6 の解は問題 2.8 の 3 式．また，問題 2.7 (2) と問題 2.8 (3) は同じ方程式となる．（解答は省略する）

平面の方程式 (1)

点 $\vec{a}$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n}$ の平面上の点 $\vec{p}$ とするとき，

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$$

が成り立つ．

問題 2.7. $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ とする．次の問に答えなさい．

(1) $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ とおく．ベクトル $\vec{n}$ を成分表示しなさい．

(2) $\vec{a}$ を通り，$\vec{n}$ を法線ベクトルする平面上の点を $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とする．このとき，x,y,z が満たす方程式を求めなさい．

平面の方程式 (2)

実数 a,b,c,d に対し，方程式

$$ax+by+cz=d$$

を満たす点 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ の集合は $\mathbf{R}^3$ 内の平面となる．

問題 2.8. 次の 3 式

$$x=-1+3s+t, \tag{2.1}$$
$$y=-2s+2t, \tag{2.2}$$
$$z=2-s-3t \tag{2.3}$$

について，以下の問に答えなさい．

(1) (2.1) 式と (2.2) 式から t を消去し，s を x,y を用いて表しなさい．

(2) (2.1) 式と (2.2) 式から s を消去し，t を x,y を用いて表しなさい．

(3) (1)(2) で求めた s,t の式を (2.3) に代入し，x,y,z の関係式を求めなさい．