

線形代数 I 演習

－ (3) 行列の演算 －

担当: 佐藤 弘康

基本問題.

(1) 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

に対し, AB および BA を計算せよ.

(2) 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 10 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して, $A+B$, AC , BC を計算せよ. また, $(A+B)C$, $AC+BC$ も計算せよ.

問題 3.1. 次の行列

$$I = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

に対して, $I^2, J^2, K^2, IJ, JK, KI$ を計算せよ.問題 3.2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し, $AB = BA$ を満たす行列 B をすべて求めよ.問題 3.3. 次の行列 A に対し, $AX = O, YA = O$ を満たす行列 $X, Y \in M(2, \mathbf{R})$ を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

問題 3.4. 次の条件を満たす行列 $A \in M(2, \mathbf{R})$ を求めよ.

- (1) $A^2 = O$.
- (2) $A^2 = E_2$.
- (3) 任意の行列 $B \in M(2, \mathbf{R})$ に対し, $AB = BA$.

問題 3.5. 次の行列 A に対して A^n を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

計算問題の解

$$(1) AB = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -7 \\ 14 & 22 & 70 \\ 0 & -18 & -70 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -18 \\ 13 & 11 & 12 \\ -18 & 16 & -40 \end{pmatrix}$$

$$(2) A+B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 12 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, AC = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 10 & -28 & -24 \\ 4 & -10 & -6 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$(A+B)C = AC + BC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 12 & -32 & -20 \\ 4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$