解析 I 演習 (2 学期：ベクトル解析)

— 試験問題の解と線積分・面積分に関する捕捉—

担当：佐藤 弘康

□ 試験問題の解

問 1． 問題 4.2 と同様，仮定から

$$(\boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{b}'(t), \boldsymbol{c}'(t)) = (\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t))A(t)$$

で定まる行列値関数 $A(t)$ は交代行列になる．(詳しい解説は 10/26 配布のプリントを参照せよ．) 各 t で $\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t)$ は正規直交基となり，$A(t)$ の行列式は 0 だから，$\boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{b}'(t), \boldsymbol{c}'(t)$ は一次従属である．

問 2． (1)

$$\mathrm{grad}\, f(x, y, z) = -\frac{1}{\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}^{\frac{3}{2}}}(x-a, y-b, z-c).$$

(2) 命題 2.2.23 より，$\mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, f = \mathbf{0}$.

(3) $\mathrm{div}\, X = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \Delta f = 0$.（すなわち，$f$ は調和関数である．）

問 3． $\dfrac{3}{4}\pi$

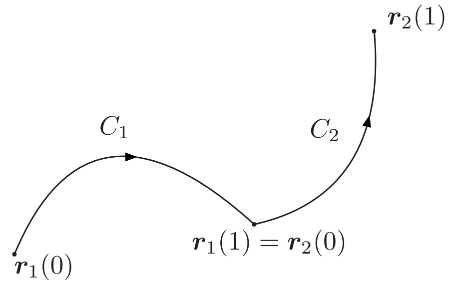
問 4． $\dfrac{8}{3}abc\pi$

□ 捕捉事項

◇ **区分的に滑らかな曲線**　2 つの滑らかな曲線 C_1, C_2 があって，C_1 の終点と C_2 の始点が同じ点のとき，この 2 つの曲線をつないで得られる曲線 C を C_1 と C_2 の**和**と呼び，$C = C_1 + C_2$ と書くことにする．C_1, C_2 のパラメータ表示をそれぞれ $\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t),\ (0 \leq t \leq 1)$ とすると

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{r}_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \boldsymbol{r}_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

は C のパラメータ表示を与える．



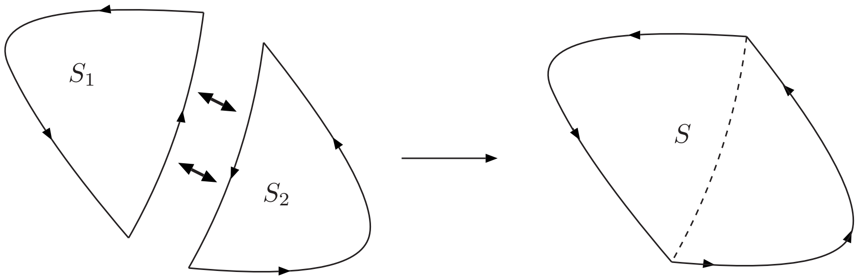
向きのついた曲線が有限個の滑らかな曲線の和であるとき，C は**区分的に滑らか**であるという．区分的に滑らかな曲線上の線積分は，滑らかな各成分上の積分の和で定義する．つまり

$$\int_{C_1+\ldots+C_k} f ds = \int_{C_1} f ds + \ldots + \int_{C_k} f ds,$$
$$\int_{C_1+\ldots+C_k} \omega = \int_{C_1} \omega + \ldots + \int_{C_k} \omega.$$

◇ **区分的に滑らかな曲面**　2 つの滑らかな曲面 S_1, S_2 があって，それぞれの境界の一部が同じ曲線を共有するとき，その境界の部分をつなげて得られる曲面 S を S_1 と S_2 の**和**と呼び，$S = S_1 + S_2$ と書くことにする．曲面 S が有限個の滑らかな曲面の和であるとき，S は**区分的に滑らか**であるという．

曲面が向きづけ可能とは，直観的には表と裏が区別できることと同じだから，区分的に滑らかな曲面に対しても同様に向きが定義できる．

定義. $S = S_1 + \ldots + S_k$ を区分的に滑らかな曲面とするとき，各 S_i に次の条件を満たす向きを定めることができるとき，S は**向きづけが可能**であるという；すべての (i, j) の組に対し，S_i と S_j が境界の一部を共有するならば，それぞれの曲面の向きから定まる (境界の一部の) 曲線の向きは互いに逆になる．



向きのついた区分的に滑らかな曲面上の面積分は，滑らかな各成分上の積分の和として定義する．すなわち

$$\int_{S_1+\ldots+S_k} f dS = \int_{S_1} f dS + \ldots + \int_{S_k} f dS,$$
$$\int_{S_1+\ldots+S_k} \omega = \int_{S_1} \omega + \ldots + \int_{S_k} \omega.$$

◇ **境界が区分的に滑らかな場合の Stokes の定理**　境界が区分的に滑らかな場合にも定理 2.3.18 と同様のことが成り立つ．(問題 9.6, 9.7, 9.8)

定理. (i) $\mathbf{R}^2$ の開集合 D 内の領域 S の境界 ∂S が区分的に滑らかな曲線になると仮定する．曲線の向きは反時計まわりとする．このとき，D 上で定義された一次微分形式 α に対して次の等式が成り立つ;

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha.$$

(ii) $\mathbf{R}^3$ の開集合 D 内の向きづけられた曲面 S の境界 ∂S が区分的に滑らかな曲線になると仮定する．曲線 ∂S には S の向きから自然に定まる向きをつける．このとき，D 上定義された一次微分形式 α に対して次の等式が成り立つ;

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha.$$

(iii) $\mathbf{R}^3$ 内の領域 D の境界 ∂D が区分的に滑らかな曲面になると仮定する．この曲面には領域の内部の側が裏となるように向きを定める．このとき D のまわりで定義された二次微分形式 α に対して次の等式が成り立つ;

$$\int_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha.$$