微積分 III 演習

− (5) 一様連続 −

担当：佐藤 弘康

例題 5.1. $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x) = \sin x$ が一様連続であることを証明せよ．

解. 任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対して，

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq |x-y|$$

が成り立つから，与えられた ε に対し $\delta = \varepsilon$ を選べば，一様連続の定義の条件を満たすことがわかる． □

例題 5.2. $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x) = e^x$ が一様連続ではないことを証明せよ（ただし $f(x) = e^x$ およびその逆関数である $f^{-1}(x) = \log x$ が連続であることは認めてよい）．

$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で連続だから，

$$\forall a \in \mathbf{R},\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ |x-a| < \delta \Longrightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つ．今，$a = \log n$ $(n \in \mathbf{N},\ n > \varepsilon)$ とすると，$\varepsilon > |f(x) - f(a)| = |e^x - n|$ より

$$\log(n-\varepsilon) < x < \log(n+\varepsilon) \tag{5.1}$$

が成り立つ．$|x-a| < \delta$ が (5.1) を満たすための最大の δ は $\log(n-\varepsilon) - \log n = \log\left(\frac{n-\varepsilon}{n}\right)$ であるが，この値は n をどんどん大きくしていくと 0 に近づく．したがって，すべての点 $a = \log n$ に共通する $\delta > 0$ を定めることはできない．したがって $f(x) = e^x$ は一様連続ではないことがわかる．一様連続の定義に従って背理法を用いてもう少しきちんと証明しよう．

解. $f(x) = e^x$ が一様連続であると仮定する．つまり任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，

$$|x-y| < \delta \Longrightarrow |e^x - e^y| < \varepsilon \tag{5.2}$$

が成り立つ．ここで $y=\log n$ $(n\in\mathbf{N})$ とおくと (5.2) は

$$\log n-\delta<x<\log n+\delta \Longrightarrow \log(n-\varepsilon)<x<\log(n+\varepsilon) \tag{5.3}$$

と書ける．(5.3) が成り立つためには

$$\log n+\delta\le\log(n+\varepsilon)$$

とならなければいけない．これは $\delta\le\log\left(\frac{n-\varepsilon}{n}\right)$ を意味するが，対数関数の連続性より n をどんどん大きくしたとき右辺は 0 に収束するので，「$\delta>0$ が存在する」という最初の仮定と矛盾する．したがって，$f(x)=e^x$ は一様連続ではない． □

注意：一様連続でないことを証明するには，このほかに演習プリントの問題 5.3，問題 5.4，問題 5.5 の結果を用いる方法などがある．

問題 5.1. 次の関数が一様連続かどうか考察せよ (一様連続でない関数について，一様連続にならないことを証明せよ)．

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad(x>0)$
(2) $f(x)=x^2$ $\quad(x\in\mathbf{R})$
(3) $f(x)=\log x$ $\quad(x>0)$
(4) $f(x)=e^{-|x|}$ $\quad(x\in\mathbf{R})$
(5) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad(x\ge 0)$
(6) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ $\quad(x\in\mathbf{R})$
(7) $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad(x\ge 1)$

問題 5.2. 関数 $f(x)=(\sin x)^2$ は一様連続だが，関数 $g(x)=\sin(x^2)$ は一様連続ではないことを証明せよ．

問題 5.3. 関数 $f(x)$ が開区間 (a,b) で一様連続ならば，$f(x)$ はこの区間で有界であることを証明せよ．

問題 5.4. $f(x)$ を定義域が区間 I の連続関数とする．このとき，$f(x)$ が一様連続ならば，任意の収束列 $\{x_n\}$ （ただし各 x_i は区間 I に含まれてるとする）に対して，$\{f(x_n)\}$ も収束することを証明せよ．

問題 5.5. $f(x)$ を一様連続な関数とする．このとき，2 つの数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ に対し，$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ ならば，$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$ となることを証明せよ．