数学クォータ科目「数学」第 6 回 (4/4)

行列式の基本性質

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】行列式

- 正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し, 行列式 $|A|$ を以下で定義;

$$|A| = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} \mathrm{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, a_{1k_1}\, a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$$

- ２次正方行列の行列式は, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- ３次正方行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$
$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$$

- ４次以上の場合は, 行列式の基本性質 を利用して求めることができる.

行列式の基本性質［1］

［性質1］

行列式の 行と列を入れ替えても 行列式の値はかわらない. つまり,

$$|{}^{t}A| = |A|$$

- このことから, 行列式の 行に関する性質 は, 列についても同様に成立することがわかる.

行列式の基本性質［2］

［性質２］

１つの行（列）を c 倍した行列式の値は, もとの行列式の $\underline{c}$ 倍になる.

- このことから, ある行に共通の因数 c が含まれるとき, その因数 c を括りだすことができる.

例）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 12 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ (-1)\times 2 & 2\times 2 & 6\times 2 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\times 3 \\ -1 & 2 & 2\times 3 \\ 3 & 5 & 3\times 3 \end{vmatrix} = 2\times 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式の基本性質［3］

［性質３］

１つの行（列）が２つの行ベクトル（列ベクトル）の和になっている行列式の値は, その行（列）をそれぞれの行ベクトル（列ベクトル）で置き換えてできる行列式の値の和に等しい.

例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式の基本性質［4］

［性質 4］

２つの列（行）を入れ替えた行列式は, もとの行列式の $\underline{-1}$ 倍に等しい.

例）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式の基本性質［5］

［性質５］

２つの列（行）が等しいならば, 行列式の値は $\underline{0}$ である.

例）［性質４］より

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{(-1)} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

符号が異なっても等しい数は 0 のみである.

行列式の基本性質［6］

［性質６］

１つの列（行）の c 倍を他の列（行）に加えた行列式の値は，もとの行列式の値に等しい．

例）［性質２］［性質３］［性質５］より

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ca_{21} & a_{32}+ca_{22} & a_{33}+ca_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

消える（［性質５］より）

行列式の基本性質［７］

［性質７］

正方行列 A, B に対し,

$$|AB| = |A|\,|B|$$

が成り立つ.

行列式の基本性質（まとめ）

[性質 1] $|{}^tA| = |A|$

[性質 2] １つの行（列）を c 倍した行列式の値は,
もとの行列式の c 倍になる.

[性質 3] （省略）
※［性質２］［性質３］を行列式の線形性という.

[性質 4] ２つの行（列）を入れ替えた行列式は,
もとの行列式の (-1) 倍に等しい.
※［性質４］を行列式の交代性という.

[性質 5] （省略）

[性質 6] １つの行（列）の c 倍を他の行（列）に加えた行列式の値は,
もとの行列式の値に等しい.

[性質 7] $|AB| = |A|\,|B|$

【復習】行列の基本変形

- 行列式の基本性質［2］［4］［6］は, 行列の基本変形と関連している.
- つまり, これら３つの性質は, 行列の基本変形によって, 行列式の値がどのように変化するかを述べている.

行列の基本変形（前々回のスライドを参照）

(1) ある行（または列）の c 倍を別の行（または列）に加える.
　→［性質６］に対応

(2) ２つの行（または列）を入れ換える.
　→［性質４］に対応

(3) ある行（または列）を c 倍する.
　→［性質２］に対応

行列の基本変形と行列式

行列の基本変形と行列式

(1) ［性質６］ある行（または列）の c 倍を別の行（または列）に加えても行列式の値は変わらない.

(2) ［性質４］２つの行（または列）を入れ替えると行列式は, (-1) 倍される.

(3) ［性質２］ある行（または列）を c 倍した行列の行列式は, もとの行列式の c 倍である（ある行（または列）に共通の因数 c が含まれるとき, その因数 c を括りだすことができる）.

行列の基本変形を利用した行列式の計算例

例）［性質 6］ を利用して 0 成分の多い行列式に変形すれば, サラスの方法を利用した計算が容易になる.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 12 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6\{0 - (-1) \times 3 \times 1\} = 18.$$

一般の次数の行列式の求め方

- 行列式の基本性質［性質 2］［4］［6］を利用して, 三角行列の行列式に変形する.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角行列　　上三角行列

※ 三角行列については, 一つ目のスライド p.3 を参照.

- 三角行列の行列式は, 対角成分の積に等しい という事実を利用する.

※ 前回の講義動画を参照.

今回（第６回講義）のまとめ

(1)
- 行列の転置（転置行列)

  (対称行列, 交代行列, 三角行列, 直交行列)

(2)
- ３つの基本行列
- 基本行列の積と 行列の基本変形 の関係

(3)
- ２次正方行列の行列式
- ３次正方行列の行列式（サラスの公式）
- 行列 A が正則であることと, $|A| \neq 0$ が同値であること.

(4)
- 行列式の基本性質
- 行列の基本変形 と行列式の関係