微積分 II 演習

― 第 1 回 上限・下限，数列の収束・発散 ―

担当：佐藤 弘康[1]

例題 1． 集合

$$S = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$$

の上限，下限，最大値，最小値がどうなっているか考察せよ．

解. 任意の n に対し，$\frac{n-1}{n} < \frac{(n+1)-1}{(n+1)}$ だから，0 が S の最小値になることは明らか．
　次に，S の上限は 1 であることを背理法を使って証明する．上限が 1 でないと仮定すると，

$$\begin{gathered} \text{すべての } s \in S \text{ に対して } 1-\varepsilon \geq s \text{ が成り立つような } \varepsilon > 0 \text{ が存在する} \\ (\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \ \forall s \in S \Longrightarrow 1-\varepsilon \geq s) \end{gathered} \tag{1}$$

が，これは任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し，

$$1-\varepsilon \geq \frac{n-1}{n}$$

が成り立つことに他ならない．しかし，このとき

$$\varepsilon \leq 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

となり，これは $\frac{1}{n}$ が 0 に収束することに矛盾する．したがって，1 はこの集合の上限である．また，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し，$\frac{n-1}{n} \neq 1$ だから 1 は最大値にならない．(証明終了)

問題 1.1. 上限の定義 (教科書 p.48) を参考にして，下限の定義を述べよ．また，上の (1) を参考にして，下限の定義の否定命題を述べよ．

問題 1.2. 集合 S のすべての元 s について $s < a$ なら，$\sup S \leq a$ となることを示せ．

[1]研究室：自然系学系 D 棟 801，E-mail：hiroyasu@math.tsukuba.ac.jp

問題 1.3. 次の集合の上限，下限，最大値，最小値がどうなっているか考察せよ.

(1) 自然数全体の集合 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

(2) 二乗したものが 2 以下となる有理数全体の集合

(3) $\left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \middle| n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$

例題 2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ を証明せよ.

数列の収束「$\lim_{n\to\infty} a_n = a$」の定義は

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \text{ s.t. } n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

だから，勝手に与えた ε に対し，$n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ をどう定めたらよいか考えればよい.

$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$ を解くと，$n > 1/\sqrt{\varepsilon}$ だから，$n_\varepsilon = [1/\sqrt{\varepsilon}\,] + 1$ とすればよいことがわかる (ただし，$[k]$ は k を越えない最大の整数).

また，n_ε の選び方は一意的ではないので,「$1/\sqrt{\varepsilon}$ より大きい自然数を 1 つ選び，それを n_ε とおく」としてもよい.

解. 任意の ε に対し，$n_\varepsilon = [1/\sqrt{\varepsilon}\,] + 1$ とおくと，$n \geq n_\varepsilon$ を満たす $n \in \mathbf{N}$ に対して $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$ だから，

$$\left|\frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon.$$

したがって，$1/n^2$ は 0 に収束する. (証明終了)

問題 1.4. 次の極限を求め，そのことを ε-N 論法を用いて証明せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n$

問題 1.5. 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対し，

(1) 数列 $\{a_n + b_n\}$ が収束するならば，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は共に収束するか？

(2) 数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ が収束するならば，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は共に収束するか？

注意：この 2 つの主張の逆は常に成り立つ．教科書 p.18, 定理 1.3 参照

問題 1.6. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{1 + 2 + \ldots + n} = a$$

を証明せよ．

ヒント：教科書 p.141, 例題 5.2

問題 1.7. $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ であるとき，

(1) $r < 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束することを示せ．

(2) $r > 1$ のとき，$\{a_n\}$ の極限はどうなるか考察せよ．

□ レポート問題

問題 1.8. 数列 $\{|a_n|\}$ は収束するが，$\{a_n\}$ は発散するような数列の例を構成せよ (できるだけ多く)．