行列式とは

- 正方行列 A に対して定まる値（数）のこと.
  （行列 A の行列式を, $|A|$ や $\det(A)$ と表す）
- 厳密な定義（２通りあるが, この授業では扱わない）
  - 順列とその転倒数（符号）を用いた定義; $A = (a_{ij})$ に対して

$$|A| = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} \mathrm{sgn}(k_1,k_2,\dots,k_n)\, a_{1k_1}\, a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$$

（教科書 p.128〜131 を参照）

  - 次の３つの条件を満たすもの;
    (1) 行（または列）に関して線形である
    (2) 行（または列）に関して交代的である.
    (3) $|E| = 1$

サラスの方法

- ２次, ３次正方行列の場合は, サラスの方法がある.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式の効用（１）

- 逆行列：２次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- 正則性の判定：正方行列 A が正則 $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$
- ２変数関数 $f(x,y)$ の極値の判定：$F(t) = f(a+ht, b+kt)$ に対し,

$$\begin{aligned}
F''(0) =& f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2 \\
=& f_{xx}(a,b)\left\{\left(h + \frac{f_{xy}(a,b)}{f_{xx}(a,b)}\cdot k\right)^2 - \frac{\{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)}{\{f_{xx}(a,b)\}^2}\cdot k^2\right\} \\
=& f_{xx}(a,b)\left\{\left(h + \frac{f_{xy}(a,b)}{f_{xx}(a,b)}\cdot k\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}}{\{f_{xx}(a,b)\}^2}\cdot k^2\right\}
\end{aligned}$$

行列式の効用（２）

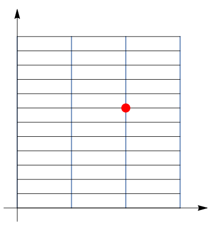
- ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し, $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ とおくと,

「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を２辺とする平行四辺形の面積」は, 「$|A|$ の絶対値」の等しい.

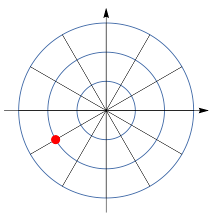
$$\begin{aligned}
\because\ (\text{面積}) &= \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\,\|\boldsymbol{b}\|^2(1-\cos^2\theta)} = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\,\|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2\,\|\boldsymbol{b}\|^2\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\,\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta)^2} = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\,\|\boldsymbol{b}\|^2 - \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle^2} \\
&= \sqrt{\{(a_1)^2+(a_2)^2\}\{(b_1)^2+(b_2)^2\} - (a_1b_1+a_2b_2)^2} \\
&\ \vdots \\
&= \sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2} = \sqrt{|A|^2}.
\end{aligned}$$

行列式の効用（３）

- 変数変換（座標変換）のヤコビ行列式



(r,θ)



$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

ヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}$ は, 局所的な面積の変化率（比）と解釈できる.

行列式の基本性質

[性質 1] $|{}^tA| = |A|$（つまり, 行に関する性質は, 列についても成立する）

[性質 2] １つの行（列）を c 倍した行列式の値は, もとの行列式の c 倍になる.

[性質 3]

（[性質 2] [性質 3] を行列式の線形性という）

[性質 4] ２つの行（列）を入れ替えた行列式は, 元の行列式の (-1) 倍に等しい.
（[性質 4] を行列式の交代性という）

[性質 5] $\Longleftarrow$ [性質 4]

[性質 6] $\Longleftarrow$ [性質 2] [性質 3] [性質 5]　１つの行（列）の c 倍を他の行（列）に加えた行列式の値は, 元の行列式の値に等しい.

[性質 7] $|AB| = |A|\,|B|$