解析 I 演習 (2 学期：ベクトル解析)

— 第 8 回 線積分・面積分 (2) —

担当：佐藤 弘康

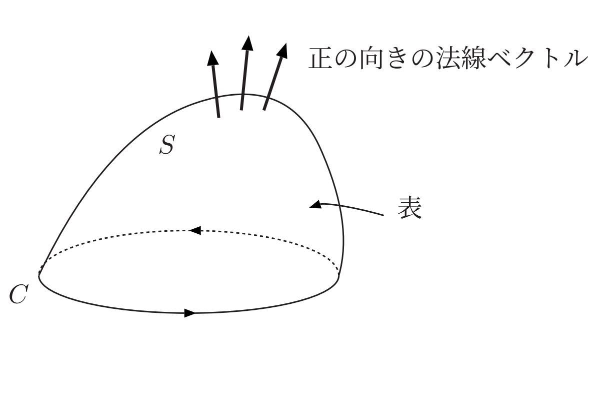
未発表問題：3.1, 3,7(3), 4.3(2), 4.7, 4.11, 5.2, 5.3, 5.4, 6.4(2), 6.6, 7.1〜7.5

◇ **曲面の向き**　$\mathbf{R}^3$ 内の滑らかな曲面 S の各点では法線をひくことができる．そのとき，単位法線ベクトルの選び方は，その向きに応じて 2 通りある．曲面の各点で単位法線ベクトルの向きの一方を正の向きと指定し，正の向きの単位法線ベクトルが連続的にかわるようにできるとき，S は**向きづけが可能**という．向きづけが可能な曲面で正の向きの単位法線ベクトルの向かう側を曲面の**表**，反対側を**裏**という．曲面に向き (表と裏) を定めることと，単位法線ベクトルの向きを決めることは同値である．

◇ **曲面のパラメータの向き**　S を $\mathbf{R}^3$ 内の向きづけられた曲面とする．S のパラメータ表示 $\boldsymbol{r}(u,v)$ が与えられていると，$(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)/\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|$ により，S の各点で単位法線ベクトルが連続的に定まる．この単位法線ベクトルが S の向きと同じとき，このパラメータ表示は**正の向きを持つ**(または曲面の向きに**同調する**) という．

スカラー場の面素による面積分は曲面の向きに依らないが (補題 2.3.9)，二次微分形式の面積分は曲面の向きに依存する (± 1 の違いがある．補題 2.3.14)．二次微分形式の面積分においては，正の向きを持つパラメータ表示を与えて計算することとする．

◇ **曲面の境界の向き**　向きづけられた滑らかな曲面 S の境界が閉曲線 C のとき，曲面 S の表側から見て時計と反対まわりになるように C に向きを定める．(特に断らないかぎり，曲面の境界にはこのようにして向きを定める．)



問題 8.1. 次の二次微分形式 ω を向きづけられた曲面 S 上で面積分せよ．

(1) $\omega = x\ dy \wedge dz + z\ dx \wedge dy$,
S : $\boldsymbol{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2-u^2)$,$0 \le u \le \sqrt{2}$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$ を正のパラメータ表示とする曲面

(2) $\omega = (x+1)dy \wedge dz - (2y+1)dz \wedge dx + z\ dx \wedge dy$,
S : 3 点 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ を頂点とする三角形 (原点の無い側を表)

(3) $\omega = 3xyz\ dy \wedge dz + y^2 z\ dz \wedge dx - 5yz\ dx \wedge dy$,
S : 円柱 $y^2 + z^2 = 9$ の表面で，$0 \le x \le 2, y \ge 0, z \ge 0$ (x 軸の側を裏)

(4) $\omega = xy^2\ dy \wedge dz - yz^2\ dx \wedge dz + x^2 z\ dx \wedge dy$,
S : 半径 1 の上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$ (原点の無い側を表)

問題 8.2. S を滑らかな曲面とし，$\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ を S の正のパラメータ表示とする．このとき，

(1) 法線ベクトル $(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)$ と $\boldsymbol{e}_3$ とのなす角を γ とするとき，$cos\gamma$ を求めよ．

(2) f を $\mathbf{R}^3$ 上のスカラー場とするとき，次の等式が成り立つことを示せ;

$$\int_S f\ dx \wedge dy = \int_S f \cos\gamma dS \tag{8.1}$$

(3) $\int_S f\ dy \wedge dz$，$\int_S f\ dz \wedge dx$ についても (8.1) と同様の等式が成り立つと考えられる．その等式を具体的に記述し，説明せよ．

問題 8.3. 問題 8.2 は，スカラー場の面積分と二次微分形式の面積分との関係を述べている．スカラー場の線積分と一次微分形式の線積分はどのような関係式が成り立つか考察せよ．

問題 8.4. S を $z = 4 - x^2 - y^2$ $(z \ge 0)$ で，上向きの法線ベクトルで向きづけられている曲面とし，その境界の曲線を C とする．

(1) 3 つのスカラー場 $f = x^2 + y - 4$, $g = 3xy$, $h = 2xz + z^2$ に対し

$$\int_C f dx + g dy + h dz$$

を計算せよ．

(2) 上のスカラー場を用いてベクトル場 X を $X = (f, g, h)$ で定義する．このとき

$$\int_S \langle \mathrm{rot}\, X, \boldsymbol{e}_1 \rangle dy \wedge dz + \langle \mathrm{rot}\, X, \boldsymbol{e}_2 \rangle dz \wedge dx + \langle \mathrm{rot}\, X, \boldsymbol{e}_3 \rangle dx \wedge dy$$

を計算せよ．