

## 【復習】1 変数関数のべき級数展開

**テイラー展開** 関数  $f(x)$  が  $x = a$  のまわりで連続かつ微分可能で、収束半径が  $\rho$  であるとする。このとき、 $a - \rho < x < a + \rho$  ならば、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

**マクローリン展開** 特に、 $a = 0$  のまわりで級数展開すると

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

——— 今回の目的 ———

1 変数関数のマクローリン展開と合成関数の考え方を利用して、2 変数関数をべき級数展開する。

クォータ科目「数学」第 4 回（担当：佐藤 弘康） 1/6

## 2 変数関数のべき級数展開（考え方）

2 変数関数  $f(x, y)$  に対し、

1)  $x(t) = a + ht, y(t) = b + kt$  ( $a, b, h, k$  は定数) との合成関数を考える;

$$F(t) := f(a + ht, b + kt)$$

2)  $F(t)$  をマクローリン展開する;

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \cdots$$

3)  $t = 1$  を代入する;

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

$$\rightarrow f(a + h, b + k) = f(a, b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

**問**  $F^{(n)}(0)$  は、どのように表されるだろうか？

クォータ科目「数学」第 4 回（担当：佐藤 弘康） 2/6

## 合成関数 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ の導関数

合成関数の微分 (p.59 定理 2.)

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t), \psi(t)) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)$$

$$F(t) = f(a + ht, b + kt), \quad (a, b, h, k \text{ は定数})$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(a + ht, b + kt) \cdot (a + ht)' + f_y(a + ht, b + kt) \cdot (b + kt)' \\ &= f_x(a + ht, b + kt)h + f_y(a + ht, b + kt)k \end{aligned}$$

$$\therefore F'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

クォータ科目「数学」第 4 回（担当：佐藤 弘康） 3/6

## 合成関数 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ の 2 次導関数

合成関数の微分 (p.59 定理 2.)

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t), \psi(t)) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)$$

$$F(t) = f(a + ht, b + kt), \quad (a, b, h, k \text{ は定数})$$

$$F'(t) = f_x(a + ht, b + kt)h + f_y(a + ht, b + kt)k, \quad F'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt}\{f_x(a + ht, b + kt)\}h + \frac{d}{dt}\{f_y(a + ht, b + kt)\}k \\ &= \{f_{xx}(a + ht, b + kt)h + f_{xy}(a + ht, b + kt)k\}h \\ &\quad + \{f_{yx}(a + ht, b + kt)h + f_{yy}(a + ht, b + kt)k\}k \end{aligned}$$

$$= f_{xx}(a + ht, b + kt)h^2 + 2f_{xy}(a + ht, b + kt)hk + f_{yy}(a + ht, b + kt)k^2$$

$$\therefore F''(0) = f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$$

クォータ科目「数学」第 4 回（担当：佐藤 弘康） 4/6

## 合成関数 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ の高次導関数

$$\bullet F(t) = f(a + ht, b + kt), \quad (a, b, h, k \text{ は定数})$$

$$\bullet F'(t) = f_x(a + ht, b + kt)h + f_y(a + ht, b + kt)k$$

$$\bullet F'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

$$\bullet F''(t) = f_{xx}(a + ht, b + kt)h^2 + 2f_{xy}(a + ht, b + kt)hk + f_{yy}(a + ht, b + kt)k^2$$

$$\bullet F''(0) = f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$$

→  $F''(t)$ , および  $F''(0)$  の右辺において、2 次の偏導関数の係数に着目すると、 $(h + k)^2$  の各項であることに気づく。

⋮

$$\bullet \text{一般に, } F^{(n)}(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b) = \sum_{j=0}^n {}_n C_j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-j} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a, b)$$

クォータ科目「数学」第 4 回（担当：佐藤 弘康） 5/6

## 2 変数関数のテイラー展開, マクローリン展開

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \cdots \\ &= f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k \\ &\quad + \frac{1}{2}(f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2) + \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b) + \cdots \end{aligned}$$

↓ ( $a + h = x, b + k = y$  とおくと)

**テイラー展開**  $f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \cdots$

↓ ( $x = 0, y = 0$  とおくと)

**マクローリン展開**  $f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \cdots$

クォータ科目「数学」第 4 回（担当：佐藤 弘康） 6/6