微積分 II 演習

－ 第 8 回 多変数関数の極限・連続性，$\mathbf{R}^2$ の開集合・閉集合 (2) －

担当：佐藤 弘康

未発表問題： 3.5, 3.7, 5.2, 7.1(2,3,4,5), 7.2(2, 3), 7.3〜7.5

問題 8.1. A を $\mathbf{R}^2$ の部分集合とする．$(a,b) \in \mathbf{R}^2$ が A の内点ならば，$U_\varepsilon(a,b) \subset A$ となる $U_\varepsilon(a,b)$ の点はすべて A の内点であることを示せ．

問題 8.2. $\mathbf{R}^2$ の部分集合に関して，次を証明せよ．

(1) A_1，A_2 が開集合ならば，$A_1 \cap A_2$，$A_1 \cup A_2$ も開集合である．

(2) 無限個の開集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は開集合だが，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は開集合とは限らない．

(3) B_1，B_2 が閉集合ならば，$B_1 \cap B_2$，$B_1 \cup B_2$ も閉集合である．

(4) 無限個の閉集合の族 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ は閉集合だが，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ は閉集合とは限らない．

問題 8.3. $\mathbf{R}^2$ 上で定義された関数 f が

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha f(x,y), \qquad (\alpha \in \mathbf{R})$$

を満たすとする．このとき，関数 f が原点で連続であるためには，半径 1 の円周 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 上で f が有界であることが必要かつ十分であることを証明せよ．

問題 8.4. f を $\mathbf{R}^2$ 上で定義された連続関数，$I \subset \mathbf{R}$ を f の値域に含まれるある開区間とする．このとき，f による I の原像 $f^{-1}(I) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) \in I\}$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合であることを証明せよ．

□ レポート問題

問題 8.5. $(a,b) \in \mathbf{R}^2$，$\varepsilon > 0$ に対し，$\mathbf{R}^2$ の部分集合 $U'_\varepsilon(a,b), U''_\varepsilon(a,b)$ を

$$U'_\varepsilon(a,b) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x-a| < \varepsilon,\ |y-b| < \varepsilon\}$$
$$U''_\varepsilon(a,b) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x-a| + |y-b| < \varepsilon\}$$

と定める．このとき，任意の $(a,b) \in U_\varepsilon(0,0)$ に対し，$U'_{\varepsilon'}(a,b) \subset U_\varepsilon(0,0)$，$U''_{\varepsilon''}(a,b) \subset U_\varepsilon(0,0)$ を満たす $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$ が存在することを示せ．

□ レポート問題の解

問題. $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上で定義された連続関数で，任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し，

$$f(x+1) = f(x) \tag{8.1}$$

を満たすとする．このとき，次を示せ；

(1) f は有界な関数で，最大値と最小値が存在する．

(2) $f(x_0+\pi) = f(x_0)$ を満たす $x_0 \in \mathbf{R}$ が存在する．

(3) f は一様連続である．

解. (1) 関数 f の定義域を閉区間 $I = [0,2]$ に制限した関数を $\tilde{f}$ とおく[1]．すなわち，$x \in I$ に対し $\tilde{f}(x) = f(x)$．$\tilde{f}$ は有界閉区間で定義された連続関数だから，最大値の定理 (教科書 I, p.45, 定理 2.6) より，最大値 $M = \tilde{f}(a)$ と最小値 $m = \tilde{f}(b)$ が存在する $(a, b \in I)$．

次に，この M, m が関数 f の最大値，最小値であることを f の周期性 (8.1) を用いて示す．仮に，$f(y) > M$ を満たす $y \in \mathbf{R}$ が存在すると仮定する．このとき，$0 \leq y + k \leq 2$ を満たす整数 $k \in \mathbf{Z}$ が存在する[2]ので，

$$f(y) = f(y \pm 1) = \ldots = f(y+k) = \tilde{f}(y+k) \leq M$$

となり，$f(y) > M$ とした仮定に矛盾する．したがって，M は f の最大値である．最小値についても同様に示すことができる．

(2) $\bar{f}(x) = f(x+\pi) - f(x)$ により $\mathbf{R}$ 上の連続関数 $\bar{f}$ を定義する．このとき，

$$\bar{f}(a) = f(a+\pi) - f(a) = f(a+\pi) - M \leq 0$$
$$\bar{f}(b) = f(b+\pi) - f(b) = f(b+\pi) - m \geq 0$$

であるから，中間値の定理 (教科書 I, p.44, 定理 2.5) より，$\bar{f}(x_0) = 0$，すなわち $f(x_0+\pi) = f(x_0)$ を満たす点 $x_0 \in [a,b]$ [3]が存在する．

(3) $\tilde{f}$ は有界閉区間上の連続関数だから一様連続である．すなわち，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x-y| < \delta \Longrightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ．ここで $\delta \leq 1$ を仮定する ($\delta > 1$ ならば，改めて $\delta = 1$ とすればよい)．

---

[1]閉区間 $[0,1]$ で考えれば十分だが，(3) でも同じ記号が使いたかったので，ここでは $[0,2]$ で考えることにします．

[2]このような $k \in \mathbf{Z}$ の存在性については第 6 回のプリント 1 ページの問題 4.1(1) の解説を参照．

[3]ここでは $a < b$ を仮定している．

$|x-y|<\delta$ を満たす任意の $x, y \in \mathbf{R}$ $(x>y)$ に対し，$x-l, y-l \in I$ となるような整数 $l \in \mathbf{Z}$ が存在することを示す．$l \leq y \leq l+1$ (つまり $y-l \in [0,1]$) を満たす l をとれば

$$0 \leq y-l < x-l < (y+\delta)-l \leq (l+1)+\delta-l = 1+\delta \leq 2,$$

すなわち，$x-l \in I$．したがって，

$$|f(x)-f(y)| = |f(x-l)-f(y-l)| = |\tilde{f}(x-l)-\tilde{f}(y-l)| < \varepsilon$$

を満たすので，f は一様連続である．

□ 問題の解 (その 1)

◇ **問題 2.1** (1) S を下に有界な集合とする．すなわち，ある実数 $M \in \mathbf{R}$ が存在し，任意の $s \in S$ に対し $M \leq s$ が成り立つ．$(-S) = \{-s \mid s \in S\}$ と定めると，$-M \geq -s$ であるから，集合 $(-S)$ は上に有界な集合である．したがって，仮定 (連続性の公理) より，$(-S)$ の上限 l が存在する．すなわち，i) 任意の $-s \in (-S)$ に対し，$-s \leq l$，ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$l-\varepsilon < -s$ を満たす $-s \in (-S)$ が存在する．これはつまり，i*) 任意の $s \in S$ に対し，$s \geq (-l)$，ii*) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$(-l)+\varepsilon > s$ を満たす $s \in S$ が存在する．これは，$(-l)$ が S の下限であることを意味する．

(2) ある正の数 $a, b \in \mathbf{R}$ が存在し，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $na \leq b$ を満たすと仮定する．集合 $A = \{an \mid n \in \mathbf{N}\}$ を定めると，上の仮定から集合 A は上に有界である．したがって，実数の連続性から A の上限 l が存在する．すなわち，任意の ε に対し，ある $an \in A$ が存在し，$l-\varepsilon < an$ を満たす．特に $\varepsilon = a$ とすると，$l < a(n+1) \in A$．これは，l が集合 A の上限であることに矛盾する．

◇ **問題 2.3(2)** 漸化式が $a_{n+1} = \sqrt{a_n+1}$ であるから，極限が存在すると仮定して，両辺を $n \to \infty$ とすると，$a = \sqrt{a+1}$ かつ $a_n > 0$ より極限は $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と予想される．証明は例題 4(第 4 回プリント) と同様にできるので省略する．

◇ **問題 2.5** $m > n$ に対しては $|a_m - a_n| > \dfrac{m-n}{m}$ が成り立つ (第 6 回プリントの 3 ページ参照)．このことから，任意の n に対し $m = 2n (> n)$ とすれば，$|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$．したがって，$\{a_n\}$ は Cauchy 列ではない．

◇ **問題 2.10** (1) $b = -(-a)$ とおくと，b は $(-a)+b = 0$ を満たす数である．この両辺に $(-b)$ を加えると $-a = -b$．さらに両辺に $(a+b)$ を加えれば $a = b$ を得る．

(2) $a+(-1)a = (1+(-1))a = 0 \cdot a = 0$ より，$(-1)a$ は a の和に関する逆元である．すなわち $(-1)a = -a$．

(3) $ab+(-a)b = (a+(-a))b = 0 \cdot b = 0$ より，$(-a)b = -ab$．

(4) $a(-b)+(-a)(-b) = (a+(-a))(-b) = 0 \cdot (-b) = 0$．一方，(3) より $a(-b) = -ab$．したがって，$ab = ab+(a(-b)+(-a)(-b)) = ab+(-ab+(-a)(-b)) = (-a)(-b)$．

(5) $ab=0$ かつ $a,\ b$ ともに零でないと仮定する．すると，a の積に関する逆元 $1/a$ が存在するので，$0=0\cdot(1/a)=(ab)\cdot(1/a)=b$ となり，$b\neq 0$ とした仮定に矛盾する．したがって，$a=0$ または $b=0$ である．

(6) 定義から $(-a)\cdot(1/(-a))=1$．一方，(3) から $(-a)\cdot(1/(-a))=a\cdot(-(1/(-a)))$．積に関する逆元の定義から，$-(1/(-a))$ は a の積に関する逆元 $1/a$ に等しい．

(7) 積の可換律と結合律から，$(ab)\cdot((1/a)\cdot(1/b))=1$．したがって，$(1/a)\cdot(1/b)$ は ab の積に関する逆元 $1/(ab)$ に等しい．

◇ **問題 2.11**　(1) $a\leq b$ より，$a+c\leq b+c$．$c\leq d$ より，$b+c\leq b+d$．したがって，$a+c\leq b+c\leq b+d$．

(2) $a+c\geq b+d$ を仮定する．$a\leq b$ より，$a+c\leq b+c$．したがって，$b+c\geq a+c\geq b+d$ となり $c\geq d$ を得るが，これは仮定 $c<d$ に矛盾する．

(3) $1/a\leq 0$ を仮定する．例題 3(2)(第 2 回プリント) より，$-(1/a)\geq 0$ であるから，$0\leq a\cdot(-(1/a))=-(a\cdot(1/a))=-1$．これは矛盾である．なぜなら，$-1\geq 0$(つまり $1\leq 0$) ならば，$0\leq(-1)\cdot(-1)=-(-1)=1$．したがって $1=0$．これは例題 1.1(教科書 I,p.8) に反する．

(4) $a=0$ ならば，$a^2=0$ だから，$a>0$ を仮定する ($a<0$ のときも同様に証明できる)．仮りに $a^2<0$ ならば，両辺に $1/a(>0)$ をかけると $0=0\cdot(1/a)>a^2\cdot(1/a)=a$ となり，$a>0$ とした仮定に反する．したがって，$a^2\geq 0$．

(5) $a>b$ に対し $c=\frac{a+b}{2}$ とおけば，$a>c>b$．

◇ **問題 2.12**　ある正の数 $a,b\in\mathbf{R}$ が存在し，任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して $na\leq b$ を満たすと仮定する．$a_n=an$ とおき，数列 $\{a_n\}$ を定める．このとき，上の仮定から数列 $\{a_n\}$ は上に有界であり、かつ $a_n=an<a(n+1)=a_{n+1}$(単調増加) だから，連続性公理から a_n は収束し，Cauchy の条件を満たす．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対してある $n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ が存在し，$m,n\geq n_\varepsilon$ ならば，$|a_m-a_n|<\varepsilon$ を満たす．特に，$\varepsilon<a$ をとれば，$\varepsilon>|a_{n+1}-a_n|=|a(n+1)-an|=a$ となり，ε のとり方に矛盾する．

◇ **問題 2.13**　$\{a_n\}$ を上に有界な単調増加数列とする．$A=\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}$ と定めると，この集合は上に有界だから，上限 a が存在する．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $a_{n_\varepsilon}\in A$ が存在し，$a-\varepsilon<a_{n_\varepsilon}$ が成り立つ．$\{a_n\}$ は単調増加だから，任意の $n\geq n_\varepsilon$ に対し，$a-\varepsilon<a_n$，すなわち $0<a-a_n<\varepsilon$ が成り立つ．これは数列 $\{a_n\}$ が a に収束することを意味する．

◇ **問題 2.14(第 6 回プリント，p.4，補題の証明)**　(1) $\{a_n\}$ は Cauchy 列だから，$\varepsilon=1$ に対してある $n_1\in\mathbf{N}$ が存在し，任意の $m,\ n\geq n_1$ に対し $|a_m-a_n|<1$．特に，$|a_m-a_{n_1}|<1$，つまり

$$a_{n_1}-1<a_m<a_{n_1}+1,\qquad (m>n_1)$$

が成り立つ．したがって，

$$A=\max\{a_1,\ldots,a_{n_1-1},a_{n_1}+1\},\quad B=\min\{a_1,\ldots,a_{n_1-1},a_{n_1}-1\}$$

とおくと，任意の $n\in\mathbf{N}$ に対し $B\leq a_n\leq A$ が成り立つ．

(2) $\{a_{n(k)}\}$ を収束する $\{a_n\}$ の部分列とし，その極限を a とする．このとき，任意の ε に対しある k_ε が存在し，

$$k \geq k_\varepsilon \implies |a_{n(k)} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．また，$\{a_n\}$ は Cauchy 列だから上の ε に対しある n_ε が存在し，

$$m, n \geq n_\varepsilon \implies |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．$N = \max\{n_\varepsilon, n(k_\varepsilon)\}$ とおくと N 以上の任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し，

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n(k)}| + |a_{n(k)} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となり，$\{a_n\}$ も a に収束することがわかる．

◇ 問題 3.3

$$|\sin^2 x - \sin^2 y| = |\sin x + \sin y||\sin x - \sin y| \leq 2|\sin x - \sin y| \leq 2|x - y|$$

だから，関数 $\sin^2 x$ は一様連続である．一方，

$$|\sin(x)^2 - \sin(y)^2| \leq |x^2 - y^2|$$

となり，関数 x^2 が連続であることから，$\sin(x)^2$ も連続である．次に，第 5 回プリントの問題 5.2 の結果を用いて関数 $\sin(x)^2$ が一様連続でないことを示す．$n \in \mathbf{N}$ に対し

$$x_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \qquad y_n = \sqrt{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}}$$

により数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を定める．すると

$$|x_n - y_n| = \left| \frac{\pi}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}}} \right| < \left| \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \right|$$

より，$\{x_n - y_n\}$ は 0 に収束する．したがって，$\sin(x)^2$ が一様連続なら $\{\sin(x_n)^2 - \sin(y_n)^2\}$ も 0 に収束するはずだが，

$$|\sin(x_n)^2 - \sin(y_n)^2| = \left| \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left((2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right| = 2$$

となり矛盾する．したがって，$\sin(x)^2$ は一様連続ではない．

◇ 問題 3.4　(3.1) 式を満たす関数 f が $p \in \mathbf{R}$ で連続であるとする．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，$|x - p| < \delta$ を満たすすべての x に対して $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ が成り立つ．今，$|x - y| = |(x - y + p) - p| < \delta$ を満たす $x, y \in \mathbf{R}$ に対し，

$$\varepsilon > |f(x - y + p) - f(p)| = |(f(x) - f(y) + f(p)) - f(p)| = |f(x) - f(y)|$$

が成り立つので，f は一様連続である．

◇ 問題 3.8　関数 $f(x) = \tan^{-1} x$ または $f(x) = -\tan^{-1} x$ はどんな無限区間をとってもそこで最大値または最小値をとらない．また，$f(x) = x$ または $f(x) = -x$ はどんな有界開区間，有界半開区間をとってもそこで最大値または最小値をとらない．

◇ **問題 4.2** $A = \left\{ (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n} \right) \middle| n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$ とおく．A の上限が 1，下限が -1 であることから，± 1 は A の集積点であり，それ以外の点は集積点にはなり得ない (第 6 回プリントの問題 4.1(1) の解を参照)．したがって，$Cl(A) = A \cup \{-1, 1\}$ である．

◇ **問題 4.3** A は有界だから，A はある有界な区間 $I_0 = [a, b]$ に含まれる．A は無限個の元を含むから，I_0 を半分に切った区間 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$，$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ のうち少なくとも一方は A の元を無限個含む．A の元を無限個含む方の区間を $I_1 = [a_1, b_1]$ とし，以後同様にして A の元を無限個含む区間 $I_n = [a_n, b_n]$ を構成する．このとき，$I_n \subset I_{n-1}$ かつ $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$ であるから，区間縮小法 (教科書 I, p.144, 定理 5.1) より $\bigcap_n I_n$ は 1 点で，その点は A の集積点である．

◇ **問題 4.5** $p \in \mathbf{R}$ を関数 g の定義域の点とする．仮定から $g(p)$ は f の定義域に含まれる．f は点 $g(p)$ で連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta' > 0$ が存在し，

$$|x' - g(p)| < \delta' \implies |f(x') - f(g(p))| < \varepsilon \tag{8.2}$$

が成り立つ．また，g は点 p で連続だから，上の δ' に対してある $\delta > 0$ が存在し，

$$|x - p| < \delta \implies |g(x) - g(p)| < \delta' \tag{8.3}$$

が成り立つ．(8.2)，(8.3) より，$|x - p| < \delta$ ならば $|f(g(x)) - f(g(p))| < \varepsilon$ が成り立つので，合成関数 $f \circ g$ は点 p で連続である．