行列とは

- 行列とは？：数を格子状（矩形状）に並べたもの. 数の配列.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- 行と列によって構成（行列を構成する数のことを成分という）
  - 行：横に並んだ数の集まり（上から第１行, 第２行, . . .）
  - 列：縦に並んだ数の集まり（左から第１列, 第２列, . . .）
  - 第 i 行と第 j 列に共通して含まれる成分を (i, j) 成分とよぶ.
  - 行列の型：m(行の数) $\times$ n(列の数) 型行列
- 行列の相等：同じ型の行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対し, 対応するすべての成分が等しい（すなわち, $a_{ij} = b_{ij}$）とき, $A = B$ と表す.

行列の例（１）

(1) 表から数値を取りだしたもの（数表, ２次元データの相関表など）

(2) 点の座標 (x, y), ベクトルの成分表示;

行ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, 列ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

(3) 連立方程式から係数と定数項を取りだしたもの;

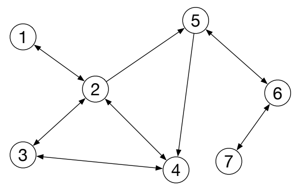
$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{pmatrix}$$

(4) ２ (多) 変数関数 $f(x, y)$ のヘッセ行列; $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$

(5) 変数変換 $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ のヤコビ行列; $\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$

行列の例（２）

(6) グラフ（= 道, ネットワーク, 点のつながり方）の隣接行列



$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

点ⓘから点ⓙへ１ステップで行ける $\rightarrow (i, j)$ 成分が 1

点ⓘから点ⓙへ１ステップでは行けない $\rightarrow (i, j)$ 成分が 0

特別な行列（１）

- $n \times n$ 型行列を n 次正方行列とよぶ.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

（正方行列に対し, (i, i) 成分達のことを対角成分とよぶ）

- 対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列を対角行列とよぶ.
- 対角成分がすべて 1 である対角行列を単位行列とよぶ.
  （$E_1, E_2, E_3, \ldots$ または $I_1, I_2, I_3, \ldots$ など. 単に E, I と書くこともある）
- すべての成分が 0 である行列を零行列とよぶ.
  （$O_{m,n}$, $O_{n,n} = O_n$ など. 単に O と書くこともある）

行列の演算（和, スカラー倍, 積）

和 同じ型の行列 A, B に対し, $A + B$ が定義できる.

- $(A + B$ の (i, j) 成分$) = (A$ の (i, j) 成分$) + (B$ の (i, j) 成分$)$.
- A, B が $m \times n$ 型ならば, $A + B$ も $m \times n$ 型.

スカラー倍 任意の型の行列 A と, 実数 λ に対し, λA が定義できる.

- $(\lambda A$ の (i, j) 成分$) = (A$ の (i, j) 成分$) \times \lambda$.
- A が $m \times n$ 型ならば, λA も $m \times n$ 型.

積 A の列の数と B の行の数が同じとき, AB が定義できる.

- $(AB$ の (i, j) 成分$) \cdots (A$ の第 i 行$)$ と $(B$ の第 j 列$)$ によって構成.
  （定義の詳細は, 教科書 p.111 を参照）
- A が $m \times n$ 型で, B が $n \times l$ 型ならば, AB は $m \times l$ 型.

行列の積の意味

- 点の移動や変換（線形写像, １次変換）;
  例）x 軸に関する対称移動：$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- 連立方程式の行列表示;

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

- ベクトルの内積; $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し,

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \; (= \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta)$$

- グラフの隣接行列 M の n 乗 M^n の (i, j) 成分は,
  「点ⓘから点ⓙへ, n ステップで到達する経路の個数」を表す.