2019年度春秋期末試験問題・解答

試験実施日　　2019 年　8 月　1 日　2 時限

出題者記入欄

試験科目名 ベクトル解析	出題者名 佐藤 弘康
試験時間 60 分	平常授業日 木 曜日 2 時限

持ち込みについて　可　不可

可、不可のいずれかに○印をつけ
持ち込み可のものを○で囲んでください

教科書 ・ 参考書 ・ ノート (手書きのみ ・ コピーも可) ・ 電卓 ・ 辞書
その他 (　　　　　　　　　　　　　　)

本紙以外に必要とする用紙　解答用紙 0 枚　計算用紙 0 枚

通信欄

受験者記入欄

学科	学年	学籍番号	氏名
		1	

採点者記入欄

採点欄	評価

1 曲線 $C_1 : \boldsymbol{r}_1(t) = t\,\boldsymbol{i} + t^2\,\boldsymbol{j}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に対し, 次の問に答えなさい.

(1) スカラー場 $\varphi_1(x, y, z) = xy + yz + zx$ の曲線 C_1 に沿った線積分

$$\int_{C_1} \varphi_1\, dt$$

を求めなさい.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}_1(x, y, z) = y\,\boldsymbol{i} - z\,\boldsymbol{j} + x\,\boldsymbol{k}$ の曲線 C_1 に沿った線積分

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1$$

を求めなさい.

2 点 $(1, 2, 3)$ を始点とし, $(3, 2, 1)$ を終点とする線分を C_2 とする. このとき, 次の問に答えなさい.

(1) C_2 のパラメータ表示をひとつ答えなさい.

(2) スカラー場 $\varphi_2(x, y, z) = xyz$ の C_2 に沿った線素に関する線積分

$$\int_{C_2} \varphi_2\, ds$$

を求めなさい.

3 次の空欄に当てはまる最も適切なものを

(ア) スカラー　**(イ)** スカラー場　**(ウ)** 0

(エ) ベクトル　**(オ)** ベクトル場　**(カ)** $\mathbf{0}$（零ベクトル）

(キ) 一般には定義不可能

の中から選びなさい. ただし, ここで「ベクトル場」というとき, 3 次元空間内の曲線に沿ったベクトル場や曲面上のベクトル場を指す場合もある（スカラー場についても同様）.

- ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ の微分 $\boldsymbol{r}'(t)$ は $\boxed{}$ であり, 定積分 $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt$ は $\boxed{}$ である.
- ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ は $\boxed{}$ である.
- スカラー場の発散の面積分は $\boxed{}$ である.
- スカラー場 φ の勾配の回転 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi)$ の線積分は $\boxed{}$ であり, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転の発散 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\varphi)$ の面積分は $\boxed{}$ である.

4 次の各問に答えなさい.

(1) 3 点 $(4,0,0),(1,1,1),(0,0,2)$ を頂点とする三角形の周とその内部を S_1 とすると, S_1 は空間内の平面の一部である. この平面の方程式を求めなさい.

(2) 方程式

$$2x+y+z=2, \quad x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$$

で定まる平面を S_2 とする. この方程式を

$$z=f(x,y)$$

と変形して, S_2 をグラフ曲面と考えるとき, 関数 $f(x,y)$ の定義域 D_2 は, 不等式

$$\boxed{} \leqq x \leqq \boxed{}, \quad \boxed{} \leqq y \leqq \boxed{}$$

を満たす点 (x,y) の全体である.
空欄に当てはまる数, または式を答えなさい.

(3) xy 平面内の領域 $D_3: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \frac{1}{3}-\frac{x}{3}$ で定義されたベクトル関数

$$\boldsymbol{r}_3(x,y)=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+(1-x-3y)\,\boldsymbol{k}$$

をパラメータ表示とする曲面を S_3 とする. このとき, スカラー場 $\varphi(x,y,z)=2x+3y+z$ の面積分

$$\int_{S_3} \varphi\, dS_3$$

を求めなさい.

(4) (1)(2)(3) の各平面 S_i の周をそれぞれ C_i とする. このとき, ベクトル場

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=(2y+z)\,\boldsymbol{i}+(z-x)\,\boldsymbol{j}+(2x+3z)\,\boldsymbol{k}$$

を C_i $(i=1,2,3)$ のいずれかで線積分すると, その値は 0 になる. ストークスの定理

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

を活用して, どの C_i に沿った線積分が 0 になるか考察しなさい.