線形代数 I 演習

− (4) 転置行列，特殊な行列 −

担当：佐藤 弘康

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 行列 A の転置行列 ${}^tA$ とはどのような行列か.

(2) 対称行列，交代行列 (歪対称行列) とはどのような行列か.

(3) 対角行列，スカラー行列とはどのような行列か.

(4) 上三角行列，下三角行列とはどのような行列か.

問題 4.1. 次の行列を対称行列と交代行列の和で表せ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

問題 4.2. 任意の正方行列 A に対して，${}^tA \cdot A$ は対称行列になることを証明せよ.

問題 4.3. $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ が上三角行列ならば，$A + B$ および AB も上三角行列であることを示せ.

問題 4.4. $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ を対称行列とするとき，次の 2 つの条件が同値であることを証明せよ.

(i) AB が対称行列である.

(ii) A と B は可換. つまり $AB = BA$ が成り立つ.

定義 4.1. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，その対角成分の和を行列 A のトレースといい，$\operatorname{tr} A$ で表す (トレースの性質については教科書 p.33 問題 11 参照).

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

問題 4.5. $A \in M(n, \mathbf{R})$ に対し，次の 2 つの条件が同値であることを証明せよ.

(i) 任意の交代行列 $B \in M(n, \mathbf{R})$ に対して，$\operatorname{tr}(AB) = 0$.

(ii) A は対称行列.