数学クォータ科目「数学」第 1 回 (2/4)

偏微分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】１変数関数の微分

- 関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数とは, 数

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{b \to a} \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

　のこと.　　　　グラフ上の２点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の傾き

- $f'(a)$ は, $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線の傾きである.
- 上の極限が存在するとき,「$y = f(x)$ は $x = a$ で微分可能である」という.
- 微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数とは, x に対して $f'(x)$ を対応させる関数のこと;

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  - 記号：$f'(x), \quad y', \quad \dfrac{df}{dx}(x), \quad \dfrac{dy}{dx}$
  - 導関数を求めることを,「関数を微分する」という.

２変数関数の偏微分

- ２変数関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数とは, ２つの変数のうち一方を定数と見なして, もう一方の変数に関して微分した関数のこと.
- 「x に関する偏導関数」
  - y を定数とみなして, x で微分した関数
  - 記号：$f_x(x, y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad z_x, \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}$
- 「y に関する偏導関数」
  - x を定数とみなして, y で微分した関数
  - 記号：$f_y(x, y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad z_y, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}$
- 記号 ∂ は, 筆記体の d が元. 読み方：「デル」「ラウンドディー」など.
- 偏導関数を求めることを「関数を偏微分する」という.

偏微分の計算

- 一方の変数を定数とみなして, 他方の変数に関して微分するだけなので, 1 変数関数の微分の公式・法則が適用できる.
- $(t^\alpha)' = \alpha\, t^{\alpha-1}$, $(\sin t)' = \cos t$, $(\cos t)' = -\sin t$, $(e^t)' = e^t$, $(\log t)' = \dfrac{1}{t}$, ...
- 関数 $f(t), g(t)$ と定数 k に対し,

(1) $$\boxed{\frac{d}{dt}}(f(t) \pm g(t)) = \frac{df}{dt}(t) \pm \frac{dg}{dt}(t), \quad \frac{d}{dt}(k\,f(t)) = k\,\frac{df}{dt}(t)$$

ここで, $\dfrac{d}{dt}(\cdots)$ は, 「括弧内の関数を t の関数と思って微分せよ」という意味.

(2) 積の微分の公式: $$\frac{d}{dt}(f(t)\cdot g(t)) = \frac{df}{dt}(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot\frac{dg}{dt}(t)$$

(3) 商の微分の公式: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{\frac{df}{dt}(t)\cdot g(t) - f(t)\cdot\frac{dg}{dt}(t)}{g(t)^2}$$

(4) 合成関数の微分

偏微分の計算例

次の関数を偏微分しなさい．（← ２つの偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求める）

例１） $f(x,y) = x^2 + y^2$

解 $f_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2) + \dfrac{\partial}{\partial x}(y^2) = 2x^{2-1} + 0 = 2x.$

ここで，$\dfrac{\partial}{\partial x}(\cdots)$ は，「括弧内の関数を x に関して偏微分せよ」という意味．

同様に，$f_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 + 2y^{2-1} = 2y.$

例２） $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

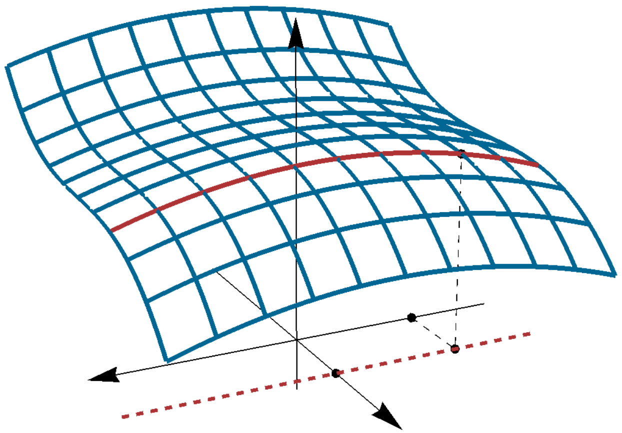
解 $$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}.$$

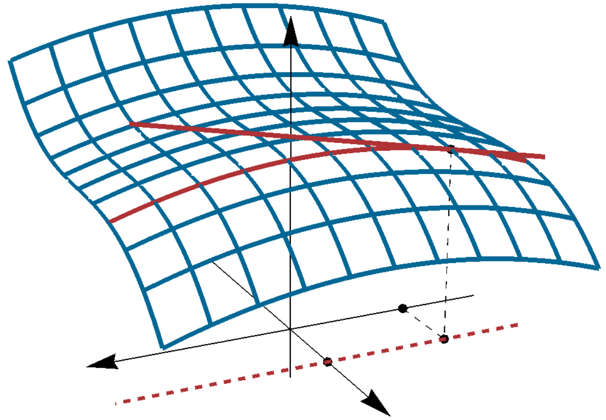
$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

偏導関数の厳密な定義

- １変数関数の導関数と同様, **極限**を用いて定義される.
- 関数 $f(x,y)$ の定義域内の点 (a,b) に対し,
  $y=b$ に固定して得られる１変数関数 $\varphi(x)=f(x,b)$ の $x=a$ における微分係数を, 点 (a,b) における **x に関する偏微分係数**という.

$$f_x(a,b)=\varphi'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

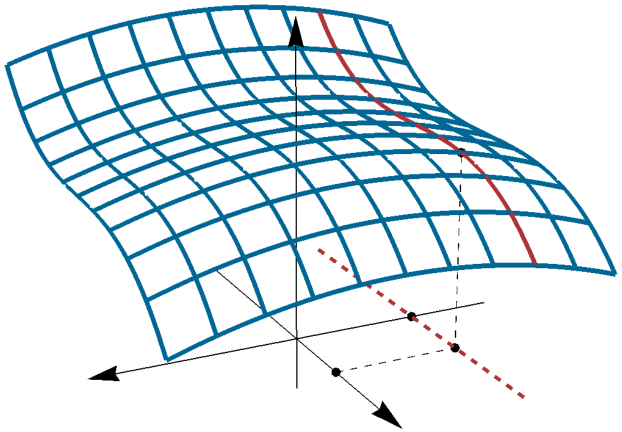


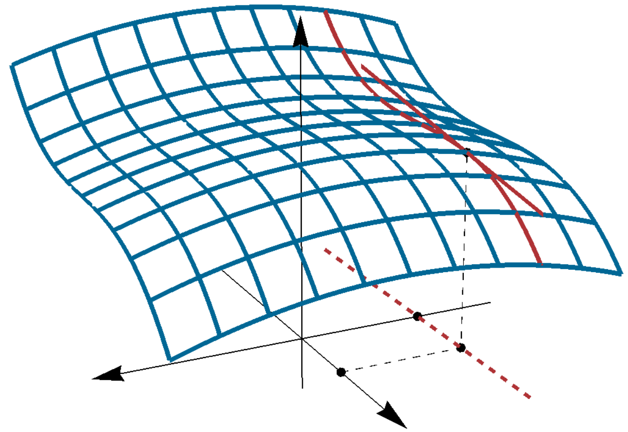


偏導関数の厳密な定義

- 関数 $f(x,y)$ の定義域内の点 (a,b) に対し，
  $x=a$ に固定して得られる１変数関数 $\psi(x)=f(a,y)$ の $y=b$ における微分係数を，点 (a,b) における y に関する偏微分係数という．

$$f_y(a,b)=\psi'(b)=\lim_{h\to 0}\frac{\psi(b+h)-\psi(b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$





- $f_x(a,b), f_y(a,b)$ が存在するとき，点 (a,b) で偏微分可能であるという．