線形代数 I 演習

－ (2) 平面ベクトルの幾何学的意味，内積，複素数と複素平面 －

担当：佐藤 弘康

基本問題. 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) ベクトルの和，スカラー倍にはどのような幾何学的意味があるか？

(2) 「平面ベクトルの内積」とは?

問題 2.1. 次のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対し，ベクトルの長さ $\|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{v}\|$ および内積 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を計算し，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角を求めよ.

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

問題 2.2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を平面ベクトルとする．もし，$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ ならば，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ は直交することを示せ.

問題 2.3. A, B を平面内の点とし，それぞれの点の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とする (ただし，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形従属でないとする)．このとき，三角形 OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}$$

に等しいことを示せ.

内積の性質

平面ベクトルの内積が以下の性質を満たすことを示せ.

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

(2) $c \in \mathbf{R}$ に対して，$(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$．また，$\|c\boldsymbol{a}\| = |c| \cdot \|\boldsymbol{a}\|$.

(3) $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$.

(4) $\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$．さらに等号が成り立つのは $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ のときのみである.

基本問題. 以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 「複素平面」とは?

(2) 「複素数の絶対値，偏角」とは？

(3) 複素数の和と積は，複素平面において幾何学的にどのように解釈できるか.

(4) 「共役複素数」とは?

問題 2.4. 次の複素数を $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ の形[*1]で表せ．ただし，r は正の実数とする.

(1) $\sqrt{-1}$ (2) -5 (3) $\sqrt{3}+3\sqrt{-1}$

問題 2.5. $z = a + \sqrt{-1}b$ (a, b は実数) に対して，z^4 が実数になる条件を求めよ.

問題 2.6. $z, w \in \mathbf{C}$ に対して，$\overline{z}w + z\overline{w} = 0$ と $\arg z - \arg w = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ は同値であることを証明せよ.

問題 2.7. $(2+\sqrt{-1})(3+\sqrt{-1}) = 5(1+\sqrt{-1})$ を確かめ，そのことを使って

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

を示せ (ただし，$\tan^{-1}$ は $f(x) = \tan x$ の逆関数).

複素数の偏角の性質

複素数の偏角が以下の性質を満たすことを示せ.

(1) $z \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{R}(a \neq 0)$ に対して，$\arg(az) = \arg(z)$.

(2) $z \in \mathbf{C}$ に対して，$\arg\overline{z} = -\arg z$.

(3) $z, w \in \mathbf{C}(w \neq 0)$ に対して，$\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$.

[*1] $z = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ $(= re^{\sqrt{-1}\theta})$ を複素数 z の極表示という（教科書 p.12 参照).