# 線形代数 II 演習

－ (8) 2 次正方行列の行列式（クラメールの公式，一次変換）－

担当：佐藤 弘康

**行列式**

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，スカラー

$$\det(A) = ad - bc$$

を行列 $A$ の行列式と呼ぶ.

**クラメールの公式**

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

の解は

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

で与えられる．ただし，$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ とする.

**問題 8.1.** クラメールの公式を用いて次の連立方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$

**一次変換**

2 次正方行列 $A$ に対し，平面 $\mathbf{R}^2$ の点（ベクトル）を $\mathbf{R}^2$ の点に移す写像 $\varphi_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $\varphi_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定義することができる ($\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$)．この写像 $\varphi_A$ を行列 $A$ から定まる一次変換（または線形変換）と呼ぶ（教科書 p.60 を参照）．

**問題 8.2.** 次の 2 次正方行列に対して，それが定める一次変換がどのような写像か説明せよ（平面内の点をどのように移すか調べよ）．

(1) $E_1(k) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

**例題 8.1.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が定める $\mathbf{R}^2$ の一次変換 $\varphi_A$ により，方程式 $y = 2x - 1$ が定める直線がどのような直線に移るか調べよ．

**解.** $y = 2x - 1$ は次のように媒介変数表示することができる;

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

したがって，この直線上の点は $(t, 2t-1)$ $(t \in \mathbf{R})$ と書くことができ，変換 $\varphi_A$ により

$$(t, 2t-1) \xrightarrow{\varphi_A} (-t+1, t)$$

に移る．$x = -t + 1$, $y = t$ とおいて，$t$ を消去すると $y = -x + 1$ を得る．したがって，$\varphi_A$ により，$y = 2x - 1$ は直線 $y = -x + 1$ に移る．

**問題 8.3.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ が定める一次変換 $\varphi_A$ により，次の方程式が定める直線がどのようなものに移るか調べよ．

(1) $y = 2x + 1$　　(2) $y = -3x - 2$

**問題 8.4.** 平面 $\mathbf{R}^2$ 上の 4 点 $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ を頂点とする正方形の領域は行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ が定める一次変換でどのような領域に移るか（$\det(A) \neq 0$ を仮定）．

□ 行列式の符号について

2 次正方行列 $A$ は平面の一次変換 $\varphi_A$ を定め，平面内の図形を $\varphi_A$ で移すと，その面積は $|\det(A)|$ 倍される．一次変換とは，原点を中心とした回転作用や，ある方向へ平面全体を伸ばしたり，縮めたりする作用を何回か施す変換である．$\det(A) \neq 0$ のとき，変換 $\varphi_A$ を施すことにより，平面内の図形は伸びたり縮んだりするものの，**だいたい**の形は変わらない．ただし，行列式が負の行列の場合は，その作用により図形は裏返ってしまう (下図参照)．また，行列式が 0 の場合，平面内の図形は直線か 1 点に縮んでしまう．

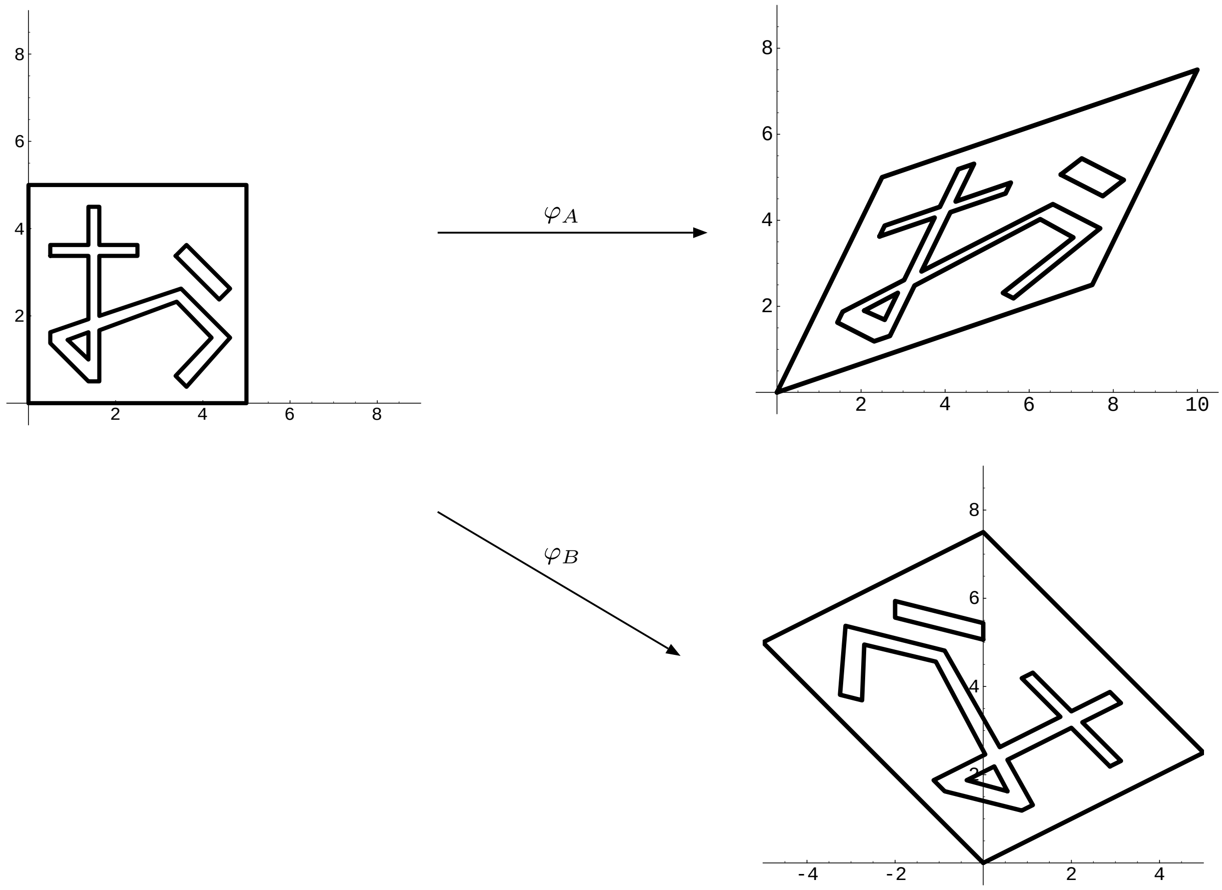


図: 一次変換による像．　$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

# 線形代数 II 演習

− (9) 置換 −

担当：佐藤 弘康

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 置換とは何か，説明せよ.

(2) 恒等置換，逆置換とはどのような置換か，説明せよ.

(3) 置換の巡回置換，巡回表示とは何か，説明せよ.

(4) 互換とはどのような置換か，説明せよ.

(5) 偶置換，奇置換とはどのような置換か，説明せよ.

**問題 9.1.** 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して，$\sigma \circ \tau$ および $\tau \circ \sigma$ を計算せよ.

**問題 9.2.** 次の置換

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，$\sigma_2 \circ \sigma_3$ および $\sigma_1 \circ \sigma_2$ を計算せよ．また，$\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$ および $(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$ を計算せよ.

**問題 9.3.** 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，$\sigma \circ \tau$, $\sigma^{-1}$, および $\tau^{-1}$ を計算せよ．また，$(\sigma \circ \tau)^{-1}$ および $\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ を計算せよ.

**互いに素な置換**

巡回置換 $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ に対し，集合 $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ を巡回置換 $\sigma$ の巡回域という．

$\sigma, \tau$ を 2 つの巡回置換とするとき，両者の巡回域が共通の元（数）を含まないとき，$\sigma, \tau$ は互いに素であるという．

**問題 9.4.** 次の置換を巡回表示せよ（互いの素な巡回置換の積に書き表せ）．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $(1,2,3)(4,5)(1,3,6,7) \in S_7$

(3) $(1,2)(1,2,3,4)(1,2)(2,3,5,6) \in S_6$

**問題 9.5.** 次の置換を互換の積で表示せよ．また，その置換の符号も求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 6 & 2 & 8 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

**問題 9.6.** 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

を互換の積で表せ．ただし，定理 3.3 (教科書 p.68) の証明にある標準的な方法

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \ldots \circ (i_{k-1}, i_k)$$

を使ったもの以外とする．また，どのようにして求めたか説明せよ．

## 置換行列

- 置換行列とは，各行，各列の成分の中に 1 がただひとつあり，それ以外の成分は 0 であるような正方行列.
- $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を標準基底とよぶ．ただし $\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $i$ 行目だけ 1 で他は 0

$$\begin{array}{lll} \sigma & : \text{置換} & i \mapsto \sigma(i) \\ \updownarrow & & \\ A_\sigma & : \text{置換行列} & A_\sigma \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{\sigma(i)} \end{array}$$

**問題 9.7.** 問題 9.1 の置換 $\sigma, \tau$ に対応する置換行列を求めよ.

# 線形代数 II 演習

― 行列式 ―

担当：佐藤 弘康

**行列式の性質**

d-1) $\det\left(\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \\ * & & A & \\ & & & \end{array}\right) = a \cdot \det(A)$

d-2) 列に関する線型性 (定理 3.10)：

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j + c\boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\ =&\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + c \cdot \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

d-3) 任意の列の入れ換えに対して，$(-1)$ 倍される (定理 3.8)：

$$\det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots \end{pmatrix}$$

d-4) 任意の列をスカラー倍して，別の列に加えても行列式は変わらない：

$$\det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix}$$

d-5) $|AB| = |A| \cdot |B|$ （定理 3.9）

d-6) $|{}^tA| = |A|$ （定理 3.12）

注意：d-2)〜d-4) は行に関しても成り立つ.

**問題 10.1.** サラスの方法を用いて，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ．また，逆行列 $A^{-1}$ を計算し，$|A^{-1}|$ を求めよ.

**問題 10.2.** 次の行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対し，サラスの方法を用いて行列式 $|A|, |B|$ を求めよ，また，$AB, BA$ を計算し，$|AB|, |BA|$ を求めよ.

**例題.(教科書 p.83 例題 3.9.)** 次の行列 $A$ の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-\sqrt{2} & -4+5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6+4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**解.** 方針：行列式の性質 d-1), d-3), d-4) を使って行列を変形し，行列のサイズを小さくしていく.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2-\sqrt{2} & -4+5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6+4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(4 行目を適当にスカラー倍して $1, 2, 3$ 行目に加えて，1 行目と 4 行目を入れ換える)

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \\ 0 & -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ \hline 0 & -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \end{array}\right|$$

$$= -\begin{vmatrix} -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \end{vmatrix}$$

(2 行目を $(-5)$ 倍して 3 行目に加える)

$$= -\begin{vmatrix} -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ -8+3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

(1 行目と 2 行目を交換し，1 列目と 3 列目を入れ換える)

$$= \begin{vmatrix} 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -8+3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\left|\begin{array}{c|cc} -1 & -2+\sqrt{3} & 2-2\sqrt{2} \\ \hline 0 & 2 & -6+2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -8+3\sqrt{2} \end{array}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -6+2\sqrt{2} \\ 3 & -8+3\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= 2(-8+3\sqrt{2}) - 3(-6+2\sqrt{2}) = 2.$$

**問題 10.3.** 次の行列の行列式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 123 & 234 & 345 \\ 234 & 345 & 456 \\ 345 & 456 & 567 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{pmatrix}$

---

**例題．** 次の行列の行列式を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$$

---

**解．**

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

(2 列目を 1 列目に加える)

$$= \begin{vmatrix} a+b & -c & -b \\ a+b & a+b+c & -a \\ -b-a & -a & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b)\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 1 & a+b+c & -a \\ -1 & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

(1 行目を 2 行目から引き，1 行目を 3 行目に加える)

$$= (a+b)\left|\begin{array}{c|cc} 1 & -c & -b \\ \hline 0 & a+b+2c & -a+b \\ 0 & -a-c & a+c \end{array}\right| = (a+b)\begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -a-c & a+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c)\begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a+c)\left\{(a+b+2c)+(-a+b)\right\}$$

$$= 2(a+b)(b+c)(a+c).$$

**問題 10.4.** 次の行列の行列式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} m & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{pmatrix}$

**問題 10.5.** $A$ を正則行列とする．このとき，$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ が成り立つことを証明せよ．

**問題 10.6.** $A, B$ を $n$ 次正方行列とするとき，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$$

を証明せよ．

**問題 10.7.** 次の行列の行列式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**問題 10.8.** 次の行列式の行列式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+\frac{1}{a} \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{b} & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{c} & 1 & 1 \\ 1+\frac{1}{d} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$

**問題 10.9.** ${}^tA = -A$ を満たす行列を交代行列とよんだ (教科書 p.24). 奇数次の交代行列の行列式は 0 であることを証明せよ.

**問題 10.10.** ${}^tA \cdot A = E_n$ を満たす行列を直交行列とぶ. 直交行列の行列式は $+1$ か $-1$ のどちらかであることを証明せよ.

**基本問題.** 基本行列 $E_i(c)$, $P_{ij}$, $E_{ij}(c)$（教科書 p.34, 35 参照）の行列式の値を計算せよ.

**問題 10.11.** 以下の正方行列 $A$ にたいし,

- 基本変形により $A$ を階段行列に変形せよ.
- その基本変形を参考に $A$ を階段行列と基本行列たちの積で表せ（配布プリント p.12，例題 6.2 を参照せよ）.
- 行列式の性質 $\det(XY) = \det(X) \cdot \det(Y)$ を用いて，$\det(A)$ を計算せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (問題 10.1)

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (問題 10.3 (1))

(3) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (問題 10.3 (2))

(4) $A = \begin{pmatrix} m & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m \end{pmatrix}$ (問題 10.4 (2))

# 線形代数 II 演習

― 余因子展開 ―

担当：佐藤 弘康

**例題.** 次の行列 $A$ の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

**解.** 行列式の性質を用いてなるべく 0 を多く含む行（または列）をつくるように行列を変形していき，その行（または列）に関して行列式を展開する.

(第 1 列を $(-1)$ 倍して第 2 列，第 3 列にそれぞれ加える)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 12 & 1 & 2 & 5 \\ 11 & 5 & 4 & 6 \\ 10 & -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 1 & 5 \\ 11 & 5 & 2 & 6 \\ 10 & -1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

(第 3 列を $(-1)$ 倍して第 2 列に加える)

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 12 & 0 & 1 & 5 \\ 11 & 3 & 2 & 6 \\ 10 & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

(第 3 列に関して展開)

$$= -2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 5 \\ 10 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

(第 2 列を $(-1)$ 倍して第 1 列に，$(-4)$ 倍して第 3 列にそれぞれ加える)

$$= -6 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

(第 1 行に関して展開)

$$= 6 \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} = 6(121 - 11) = 660.$$

**問題 0.11.** 次の行列の行列式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 4 & -7 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**問題 0.12.** 次の $(n+1)$ 次正方行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{pmatrix}$$

**問題 0.13.** $n$ 次正方行列

$$\begin{pmatrix} x^2+1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & x^2+1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & x^2+1 \end{pmatrix}$$

の行列式を $D_n(x)$ とおくとき，余因子展開を使って,

$$D_n(x) = (x^2+1)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}(x)$$

が成り立つことを示し，それを用いて $D_n(x)$ を求めよ.

# 線形代数 II 演習

ー 余因子行列 ー

担当：佐藤 弘康

**例題 12.1.** 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

の行列式と余因子行列を求めよ.

**解.** 第 1 列について $|A|$ を余因子展開すると

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) + (-1) \times (-12) = 6.$$

次に，余因子行列を求める．各小行列 $A_{ij}$ の行列式は

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -12, \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9, \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6, \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

となるので，余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 9 \\ -4 & 8 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

また，定理 3.20(教科書 p.90) より，逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である.

**問題 12.11.** 次の行列 $A$ にたいし，その行列式 $|A|$ と余因子行列 $\widetilde{A}$ を求め，$A\cdot\widetilde{A} = |A|E_3$ が成り立つことを確認せよ．さらに，正則なら逆行列を求めよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**問題 12.12.** 正方行列 $A, B$ に対して，次のことを証明せよ．

(1) $|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$
(2) $\widetilde{A^{-1}} = \left(\widetilde{A}\right)^{-1}$ (ただし，$A$ は正則行列とする)
(3) $\widetilde{{}^tA} = {}^t\left(\widetilde{A}\right)$

$\boxed{\text{考えてみよう}}$

(1) 基本行列 $E_{ij}(c), E_i(c), P_{ij}$ の余因子行列を求めよ．
(2) $\widetilde{AB}$ は $\widetilde{A}$ と $\widetilde{B}$ を用いて表せないだろうか？
(例：${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$)
(3) $A$ に余因子行列をとる操作を 2 回行った行列 $\widetilde{\left(\widetilde{A}\right)}$ はどんな行列だろうか？
(例：${}^t\left({}^tA\right) = A$，$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$)

# 線形代数 II 演習

－ クラメールの公式，固有多項式・固有値 －

担当：佐藤 弘康

**例題 13.1.** 次の連立方程式の解を求めよ．

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z=1 \\ -3x+2y+2z=-1 \\ 5x+y-3z=-2 \end{array}\right. \tag{13.1}$$

**解．** 連立方程式 (13.1) を行列を用いて書き直すと

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．クラメールの公式より，

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}.$$

各行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -26, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 26, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -52,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -26$$

であるから，(13.1) の解は $x=1, y=-1, z=2$.

**問題 13.1.** クラメールの公式を用いて，次の連立方程式を解け．ただし，(4) において $a, b, c, d, e$ はすべて異なるものとする．

(1) $\begin{cases} 3x + y + z = 6 \\ 2x - 3y - 6z = 7 \\ 7x + 5y + 9z = -2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 12 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + z = 11 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + y - 3z - 4w = -6 \\ 2x + y + 5z + w = -6 \\ 2x + 2y + 2z - 3w = -10 \\ 3x + 6y - 2z + w = 4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ ax + by + cz + dw = e \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2w = e^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3w = e^3 \end{cases}$

**例題 13.2.** 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ．また，固有値も求めよ．

**解.** $n$ 次正方行列 $A$ の固有多項式

$$\Phi_A(x) = \det(xE_n - A)$$

で定義される $n$ 次多項式のことである．サラスの方法を用いて $\Phi_A(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \Phi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ 1 & x-4 & 2 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)^2(x-4) - 4 - 2 - 2(x-4) + 2(x-1) + 2(x-1) \\ &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6. \end{aligned}$$

また，$A$ の固有値とは $\Phi_A(x) = 0$ の解のことである．$\Phi_A(x)$ は

$$\Phi_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

と因数分解できるので，固有値は $1, 2, 3$ である．

**問題 13.2.** 次の行列 $A$ の固有多項式 $\Phi_A(x)$ および固有値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{-1} \\ 2-\sqrt{-1} & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

**問題 13.3.** $A$ を $n$ 次正方行列，$P$ を $n$ 次正則行列とするとき，$\Phi_{P^{-1}AP}(x) = \Phi_A(x)$ であることを示せ．

**問題 13.4.** 正則行列の固有値は 0 でないことを示せ．

**問題 13.5.** 次のことを証明せよ．

(1) $\lambda$ が $A$ の固有値ならば，$\lambda$ は ${}^tA$ の固有値でもある．
(2) 正則行列 $A$ に対して，$\lambda$ が $A$ の固有値ならば，$\dfrac{1}{\lambda}$ は $A^{-1}$ の固有値である．
(3) 実正方行列 $A$ に対して，$\lambda \in \mathbf{C}$ が $A$ の固有値ならば，その複素共役 $\overline{\lambda}$ も $A$ の固有値である．
(4) 複素正方行列 $A = (a_{ij})$ にたいし，行列 $\overline{A}$ を $A$ の各成分の複素共役をとった行列，すなわち $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ と定義する．このとき，$\lambda$ が $A$ の固有値ならば，$\overline{\lambda}$ は $\overline{A}$ の固有値である．

**問題 13.6.** 例題 13.2 の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 行列 $A$ の各固有値 $\lambda = 1, 2, 3$ に対して，方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の自明でない解 $\boldsymbol{v}_\lambda$ を一つ求めよ（$\boldsymbol{v}_\lambda$ を固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトルとよぶ)．
(2) (1) で求めたベクトル $\boldsymbol{v}_\lambda$ を並べてできる 3 次正方行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP$ を計算せよ．