問題 4.1 (双曲線の漸近線)**.** 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を $\mathcal{H}$，直線 $y = \dfrac{b}{a}x$ を l とする $(a, b > 0)$．第 1 象限における $\mathcal{H}$ 上の点 P に対し，点 P を通り l と直交する直線を l' とし，l と l' の交点を H とする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) 点 P の座標を (X, Y) とするとき，l' の方程式を求めなさい．

(2) 点 H の座標を a, b, X, Y を用いて表しなさい．

(3) $|PH| = \dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \dfrac{1}{|bX + aY|}$ となることを示しなさい．

問題 4.2 (双曲線の離心角)**.** [*1]双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を $\mathcal{H}$，円 $x^2 + y^2 = a^2$ を $\mathcal{C}$ とする．$\mathcal{H}$ 上の点 P に対し，点 P から x 軸に下ろした垂線の足を Q とする．また，点 R を点 P と同じ象限にある $\mathcal{C}$ 上の点で，直線 QR が R における $\mathcal{C}$ の接線となるような点とする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) 点 P の座標を (X, Y) とする．Y を a, b, X を用いて表しなさい．ただし，P は第 1 象限の点とする（$X, Y > 0$)．

(2) 点 P の座標を (X, Y) のとき，Q の座標を答えなさい．

(3) 点 Q を通り，傾きが m の直線を l とする．l の方程式を求めなさい．

(4) l と $\mathcal{C}$ の交点の数がただ 1 つであるとき，m を a, X を用いて表しなさい．

(5) 点 R の座標を求めなさい．

(6) 点 R の座標を $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ とおくとき，X, Y を a, b, θ を用いて表しなさい．

[*1] 教科書 p.86 の図 4.4 を参照せよ．

解 (問題 4.1).

(1) l' の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，$y = -\dfrac{a}{b}(x - X) + Y$.

(2) 方程式 $\dfrac{b}{a}x = -\dfrac{a}{b}(x - X) + Y$ の解が点 H の x 座標である．H の座標は $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}(aX+bY), \dfrac{b}{a^2+b^2}(aX+bY)\right)$.

(3) 定義にしたがって $|PH|$ を計算すればよい．式変形の過程で

$$bX - aY = \frac{a^2b^2}{bX + aY}$$

を用いるが，これは $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ より，$b^2X^2 - a^2Y^2 = a^2b^2$ の左辺を因数分解した式

$$(bX - aY)(bX + aY) = a^2b^2$$

から得られる．

解 (問題 4.2).

(1) $Y = \dfrac{b}{a}\sqrt{X^2 - a^2}$

(2) $(X, 0)$

(3) $y = m(x - X)$

(4) x に関する 2 次方程式

$$x^2 + m^2(x - X)^2 = a^2$$

が重解を持つときの m の条件を求めればよい．$m = \dfrac{a}{\sqrt{X^2 - a^2}}$.

(5) m が (3) で求めた値のときの 2 次方程式 (4) の解が R の x 座標である．R の座標は $\left(\dfrac{a^2}{X}, \dfrac{a^2}{X}\sqrt{X^2 - 1}\right)$.

(6) $\dfrac{a^2}{X} = a\cos\theta$ より，$X = \dfrac{a}{\cos\theta}$. これを (1) の式に代入すると $Y = b\tan\theta$.