

数学クォータ科目「数学」第1回 (3/4)

高次偏導関数

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

【復習】高次導関数

- 関数 $f(x)$ に対し, その導関数 $f'(x)$ をさらに微分した関数をそれぞれ

- $f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$: 第 2 次導関数

- $f'''(x) = \frac{d}{dx}f''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}(x)$: 第 3 次導関数

⋮

- $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$: 第 n 次導関数

とよび, これらを高次導関数という.

- 記号の意味 ;

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x) = \frac{d^n}{(dx)^n} f(x) = \frac{d^n f}{(dx)^n}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

ここで, $\left(\frac{d}{dx} \right)^n$ は「 x の関数として n 回微分する」という意味. この記号を形式的に分数とみている.

高次偏導関数

- 関数 $f(x, y)$ がある領域で偏微分可能ならば, 次の2つの関数が定義可能.
 - x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$
 - y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$
- これらが偏微分可能ならば, さらにそれらを偏微分することができる.
 - $f_x(x, y)$ の $\left\{ \begin{array}{ll} x \text{ に関する偏導関数} & f_{xx}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \dots \\ y \text{ に関する偏導関数} & f_{xy}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \dots \end{array} \right.$
 - $f_y(x, y)$ の $\left\{ \begin{array}{ll} x \text{ に関する偏導関数} & f_{yx}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \dots \\ y \text{ に関する偏導関数} & f_{yy}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y), \dots \end{array} \right.$
- これらを $f(x, y)$ の第2次偏導関数という.
- 同様に, 第 n 次偏導関数が定義可能. これらを高次偏導関数という.

高次偏導関数を表す記号

例) $f_x(x, y)$ を y に関して偏微分した関数は？

- f_{\square} : 偏微分する変数を右下に添える.

$$f_x \underset{y}{}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

- $\frac{\partial f}{\partial \square}$: 偏微分の記号 $\frac{\partial}{\partial \square}$ を左からかける.

$$\frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \cdot \partial x} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

注意 変数の並ぶ順序が逆になっている.

高次偏導関数の計算例

例) $f(x, y) = x^2 - 3xy - 2y^2 + 2x$ の第 2 次偏導関数を求めなさい.

解 まず, 偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求める.

$$\circ f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 3xy - 2y^2 + 2x) = 3x - 3y + 2$$

$$\circ f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3xy - 2y^2 + 2x) = -3x - 4y$$

次に, 偏導関数をさらに偏微分し, 第 2 次偏導関数を求める.

$$\circ f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x - 3y + 2) = 3$$

$$\circ f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x - 3y + 2) = -3$$

$$\circ f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(-3x - 4y) = -3$$

$$\circ f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(-3x - 4y) = -4$$

偏微分の順序交換可能性

定理

$f_{xy}(x, y)$ と $f_{yx}(x, y)$ が連続関数ならば, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ が成り立つ.

関数 $f(x, y)$ が何度でも偏微分でき, その偏導関数が連続ならば,

- 2次偏導関数は, $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y) (= f_{yx}(x, y))$, $f_{yy}(x, y)$ の3つである.
- 3次偏導関数は, $f_{xxx}(x, y)$, $f_{xxy}(x, y)$, $f_{xyy}(x, y)$, $f_{yyy}(x, y)$ の4つである.
- \vdots
- n 次偏導関数は, $(n + 1)$ 個ある.