線形代数 I 演習

― 第 8 回 連立一次方程式 ―

担当：佐藤 弘康

例題. 連立一次方程式

$$\begin{cases} x+2y-4z=2 \\ 2x+3y+7z=1 \\ 3x+5y+3z=3 \end{cases} \tag{8.1}$$

の解を求めよ.

解. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，連立一次方程式 (8.1) は

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

と表すことができる (行列表示)．ここで，行列 $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-2)E_{31}(-3)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{2}(-1)E_{12}(2)E_{32}(-1)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と簡約階段行列に変形できる．したがって，方程式 (8.1) の解であることと

$$\begin{cases} x+26z=-4 \\ y-15z=3 \end{cases}$$

の解であることは同値である (教科書 p.41 を参照)． $z=k$ とおくと $x=-4-26k$, $y=3+15k$，つまり (8.1) の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } k\in\mathbf{R})$$

であり，解の自由度は 1 である.

問題 8.1. 次の方程式が解をもつかどうか調べ，解が存在するなら解を求めよ．また，解の自由度も求めよ．

(1) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ -3x+2y+2z=-1 \\ 5x+y-3z=-2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y-3z-4w=-6 \\ 2x+y+5z+w=-6 \\ 2x+2y+2z-3w=-10 \\ 3x+6y-2z+w=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=4 \\ 3x-2y+z=1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+2y+3z+4w=0 \\ 5x+6y+7z+8w=0 \\ 9x+10y+11z+12w=0 \\ 13x+14y+15z+16w=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x-2y-3z+w=3 \\ 2x+y-z=1 \\ -x-3y-2z+w=2 \\ 4x+7y+3z-2w=-3 \end{cases}$

問題 8.2. 次の方程式が解をもつための条件と，そのときの解を求めよ．

(1) $\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 2x+7y-4z=3 \\ 3x+7y-6z=a \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+z-w=a \\ -x+y-z+2w=b \\ -3x+2y-3z+5w=c \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-4y+10z=1 \\ 3x-2y-z=a \\ 5x-4y+2z=b \end{cases}$ (4) $\begin{cases} ax-by-z=0 \\ x+y-az=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

問題 8.3. 次の方程式が自明でない解をもつための条件を求めよ．

(1) $\begin{cases} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \end{cases}$

問題 8.4. 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) $k=1,2,3$ とするとき，各 k に対して方程式 $A\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}$ の自明でない解 $\boldsymbol{v}_k$ を一つ求めよ．

(2) (1) で求めたベクトル $\boldsymbol{v}_k$ を並べてできる 3 次正方行列 $P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP$ を求めよ．

■ 第 6 回の解と捕捉

問題 6.1 (1) E_3 (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) E_4 (4) E_4 (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問題 6.2 $AC = CA = E_2$，すなわち $C = A^{-1}$．また，$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ であるから，$AB^nC = (ABC)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$．したがって

$$B^n = C(AB^nC)A = \begin{pmatrix} 6-5\cdot 2^n & 3(1-2^n) \\ 10(2^n-1) & 3\cdot 2^{n+1}-5 \end{pmatrix}.$$

問題 6.3 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

問題 6.4 (1) 正則行列の転置行列もまた正則行列である．したがって，$E_n - A = {}^t(E_n + A)$ は正則行列である．

(2)

$$\begin{aligned} B\cdot {}^tB =& (E_n+A)^{-1}(E_n-A){}^t\left\{(E_n+A)^{-1}(E_n-A)\right\} \\ =& (E_n+A)^{-1}(E_n-A){}^t(E_n-A){}^t\left\{(E_n+A)^{-1}\right\} \\ =& (E_n+A)^{-1}(E_n-A)({}^tE_n-{}^tA)\left\{{}^t(E_n+A)\right\}^{-1} \\ =& (E_n+A)^{-1}(E_n-A)(E_n+A)(E_n-A)^{-1}. \end{aligned}$$

ここで，(E_n+A) と (E_n-A) は可換であることから，$B\cdot {}^tB = E_n$ を得る．${}^tB\cdot B = E_n$ となることも同様に計算できる．したがって，$B^{-1} = {}^tB$.

問題 6.5

$$\begin{aligned} {}^t\left\{(E_n+A)^{-1}(E_n-A)\right\} =& {}^t(E_n-A){}^t\left\{(E_n+A)^{-1}\right\} \\ =& ({}^tE_n-{}^tA)\left\{{}^t(E_n+A)\right\}^{-1} \\ =& \left(E_n-A^{-1}\right)\left(E_n+A^{-1}\right)^{-1} \\ =& \left(E_n-A^{-1}\right)AA^{-1}\left(E_n+A^{-1}\right)^{-1} \\ =& \left(A-A^{-1}A\right)\left\{\left(E_n+A^{-1}\right)A\right\}^{-1} \\ =& (A-E_n)(A+E_n)^{-1} = -(E_n-A)(E_n+A)^{-1}. \end{aligned}$$

ここで，(E_n+A) と (E_n-A) が可換だから，$(E_n+A)^{-1}$ と (E_n-A) も可換である (問題 5.6 参照)．したがって，$(E_n+A)^{-1}(E_n-A)$ は交代行列である．

> **問題 9.** 交代行列 A に対して (E_n+A) が正則ならば，(E_n-A) も正則であった (問題 6.4(1))．それでは，直交行列 B に対して (E_n+B) が正則であるとき (E_n-B) は正則か?