行列の対角化

- n 次正方行列 A が対角化可能とは，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & k_n \end{pmatrix}$$

となるような正則行列 P が存在するときをいう．

- 上式右辺の対角行列の対角成分 $k_1, \ldots, k_n$ は A の固有値である．
- 行列 P は A の固有ベクトルを並べた行列である；
  $P = (\vec{v}_1 \ \cdots \ \vec{v}_n)$ とおくと，$A\vec{v}_i = k_i\vec{v}_i$ $(i = 1, 2)$.
- 任意の 対称行列は対角化可能 である．特に，行列 P として 直交行列 を選ぶことができる（つまり，対称行列 A に対して，${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P が必ず存在する）．

問題 6.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$ に対して次の問に答えなさい．

(1) A の固有値 k_1, k_2 を求めなさい．

(2) A の各固有値 k_i に関する固有ベクトル $\vec{v}_i$ を求めなさい（$i = 1, 2$）．

(3) $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ が直交することを確かめなさい．

(4) $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ を長さが 1 になるように正規化しなさい．

(5) (4) で求めた 2 つのベクトルを並べてできる行列 P が直交行列になることを確かめなさい．

(6) (5) で構成した行列 P に対し，${}^tPAP$ が対角行列となることを確かめなさい．さらに対角行列の対角成分が A の固有値となること確かめなさい．

問題 6.2. 問題 6.1 を参考にして，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化しなさい[*1]．

[*1] ${}^tPAP$ が対角行列となるような 直交行列 P と その対角行列 を求めること

2 次式の行列表示

2 次式 $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ は，行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + c = 0 \tag{6.1}$$

と表すことができる．つまり，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおくことにより

$$^t\vec{x}A\vec{x} + {}^t\vec{x}\vec{b} + c = 0 \tag{6.2}$$

と書ける（(6.2) の左辺は行列の積であることに注意せよ）．また，内積を用いると

$$\vec{x}\cdot(A\vec{x}) + \vec{x}\cdot\vec{b} + c = 0 \tag{6.3}$$

と書ける．

問題 **6.3.** 方程式

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - y + 1 = 0 \tag{6.4}$$

が表す図形がどのような形か知りたい．以下の問いに答えなさい．

(1) (6.4) 式を (6.1) のように行列を用いて表しなさい．

(2) 直交行列 $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対し，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換する．(6.4) 式を $\bar{x}\bar{y}$ 座標で表しなさい．

問題 **6.4.** 方程式

$$x^2 + 6xy + y^2 - x - y = 0 \tag{6.5}$$

が表す図形がどのような形か知りたい．以下の問いに答えなさい．

(1) (6.5) 式を (6.1) のように行列を用いて表しなさい．

(2) 直交行列 $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換する．(6.5) 式を $\bar{x}\bar{y}$ 座標で表しなさい．

(3) さらに $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}$ と座標変換する．(2) で求めた $\bar{x}, \bar{y}$ の方程式を $\tilde{x}\tilde{y}$ 座標で表しなさい．

2 次曲面の分類

2 次式は適当な座標変換により次の 5 つの型に変換できる．

(1) $ax^2 + by^2 = 1 \ (a, b > 0)$：楕円
(2) $ax^2 - by^2 = 1 \ (a, b > 0)$：双曲線
(3) $y = ax^2 \quad (a \neq 0)$：放物線
(4) $ax^2 + by^2 = 0 \ (a, b > 0)$：点
(5) $ax^2 - by^2 = 0 \ (a, b > 0)$：直線

問題 6.5. 問題 6.3 および問題 6.4 の 2 次式が表す 2 次曲線がどのような図形か答えなさい．

問題 6.6. 2 次曲線

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2\sqrt{3}x + 2y + 1 = 0$$

がどのような図形か答えなさい．

円錐曲線

空間 $\mathbf{R}^3$ 内の円錐を適当な平面で切った切り口は 2 次曲線のいずれかである．このことから，2 次曲線は円錐曲線ともよばれる．

問題 6.7. 点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐

$$x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0 \tag{6.6}$$

をある平面で切り，その切り口の形を調べたい．次のように座標変換するとき，(i) (6.6) を $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ で表しなさい．さらに，(ii) $\bar{z} = 0$ を代入し，$\bar{x}, \bar{y}$ の方程式を導きだし，(iii) その方程式が表す図形が何か答えなさい．

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$