

## 行列の固有値と固有ベクトル

### 定義

正方行列  $A$  に対し、等式  $Ax = \lambda x$  を満たす

- スカラー  $\lambda$  を「 $A$  の固有値」といい、
- ベクトル  $x$  を「 $A$  の固有値  $\lambda$  に対する固有ベクトル」という。

ただし、 $x$  は零ベクトルではないとする。

### 【2次の場合】

行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の固有値、固有ベクトルとは、

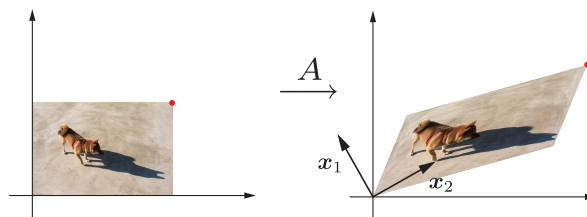
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を満たすスカラー  $\lambda$  と、ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  のこと。

クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 1/6

## 固有値・固有ベクトルの意味（1次変換において）

例)  $A = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}$  の固有値は  $\frac{2}{3}$  と  $\frac{3}{2}$ 。

$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$  と  $x_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$  はそれぞれ対応する固有ベクトルである。



クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 2/6

## 固有値の性質

- 固有値・固有ベクトルの定義式を次のように変形、

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow Ax - \lambda E x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0$$

- 仮に、行列  $(A - \lambda E)$  が正則ならば、逆行列  $(A - \lambda E)^{-1}$  が存在する。
- $(A - \lambda E)x = 0$  の両辺に、左から  $(A - \lambda E)^{-1}$  をかけると、

$$x = E x = (A - \lambda E)^{-1} (A - \lambda E)x = (A - \lambda E)^{-1} 0 = 0$$

よって、 $x = 0$  となる。（これは、 $x \neq 0$  に矛盾）

- つまり、 $\lambda$  が  $A$  の固有値ならば、行列  $(A - \lambda E)$  は正則ではない。

### 固有値の性質

$\lambda$  が  $A$  の固有値である  $\Leftrightarrow (A - \lambda E)$  は正則ではない  $\Leftrightarrow |A - \lambda E| = 0$

クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 3/6

## 固有方程式

- 一般に、 $A$  が  $n$  次正方行列ならば、 $|A - \lambda E|$  は  $\lambda$  に関する  $n$  次多項式。
- つまり、 $A$  の固有値は、 $n$  次方程式  $|A - \lambda E| = 0$  の解である。  
（この方程式を固有方程式とよぶ）

### 固有値の性質（求め方）

$\lambda$  が  $A$  の固有値である  $\Leftrightarrow \lambda$  は固有方程式  $|A - \lambda E| = 0$  の解である。

クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 4/6

## 固有ベクトルの性質

- 行列  $A$  の固有値  $\lambda$  に対応する固有ベクトルは

$$(A - \lambda E)x = 0 \quad (*)$$

を満たすベクトル  $x$ （ただし、 $x \neq 0$ ）。

- $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix}$  とおくと、 $(*)$  は、 $x, y, \dots$  の連立1次方程式となる。→ 連立1

次方程式の解が固有ベクトルである。

- 一般に、 $x$  が行列  $A$  の固有値  $\lambda$  に対応する固有ベクトルならば、そのスカラー倍  $kx$  も行列  $A$  の固有値  $\lambda$  に対応する固有ベクトルである。→ 固有ベクトルは一意的に定まるものではない（無数にある）。

クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 5/6

## 固有値・固有ベクトルを求める手順

(ステップ1) 固有方程式

$$|A - \lambda E| = 0$$

の解  $\lambda$  (← 固有値) を求める。

(ステップ2) (1) で求めた各固有値  $\lambda$  に対して、連立1次方程式

$$(A - \lambda E)x = 0$$

の解  $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix}$  (← 固有ベクトル) を求める。

クォータ科目「数学」第13回（担当：佐藤 弘康） 6/6