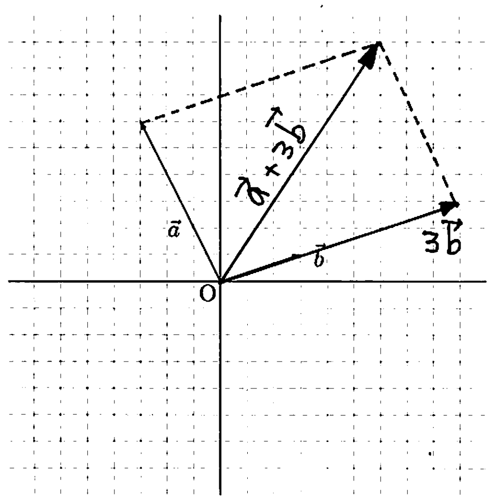
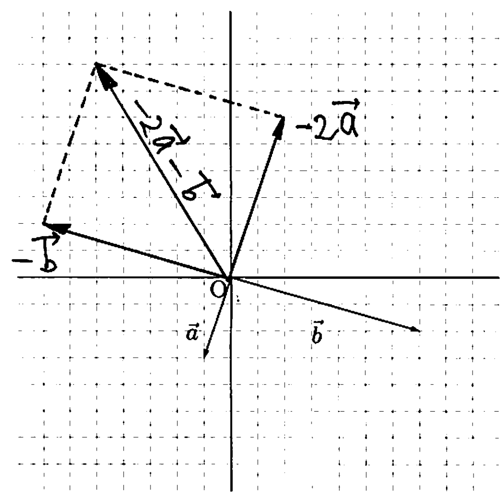
情報数学 III 第 2 回小テスト（レポート）　　学籍番号 | | | | | | | |　　氏名　解答例

1 図中のベクトル（有向線分）$\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，次の各ベクトルを有向線分として図示しなさい．ただし，始点は原点とすること．（各 2 点）

(1) $\vec{a}+3\vec{b}$



(2) $-2\vec{a}-\vec{b}$



2 ある直交座標系で $\vec{a}=(1,-3)$，$\vec{b}=(-2,1)$ と成分表示されるベクトルに対し，以下の問に答えなさい．

(1) ベクトル $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-2\vec{b}$ を成分表示しなさい．（各 2 点）
(2) ノルム $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ を求めなさい．（各 2 点）
(3) 内積 $(\vec{u},\vec{v})$ を求めなさい．（2 点）
(4) ベクトル $\vec{u},\vec{v}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を求めなさい．（2 点）

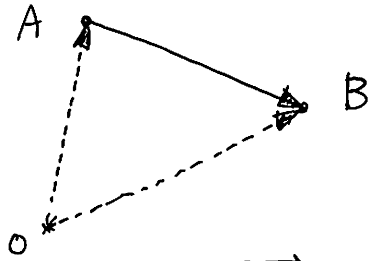
(1) $\vec{u}=(1,-3)+(-2,1)=\underline{(-1,-2)}$
$\vec{v}=(1,-3)-2(-2,1)=\underline{(5,-5)}$

(2) $\|\vec{u}\|=\sqrt{1+4}=\underline{\sqrt{5}}$
$\|\vec{v}\|=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=\underline{5\sqrt{2}}$

(3) $(\vec{u},\vec{v})=-5+10=\underline{5}$

(4) $\cos\theta=\dfrac{(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$
$=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times5\sqrt{2}}$
$=\underline{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$

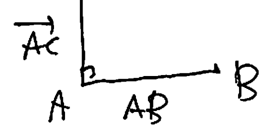
3 直交座標系における 3 点 $A(3,3,3)$，$B(-3,1,3)$，$C(4,0,2)$ に対し，$\triangle ABC$ は直角三角形になる．このとき，$\angle ABC, \angle BCA, \angle CAB$ の中で直角になる角がどれか調べなさい．（3 点）



$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ より
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

したがって
$\overrightarrow{AB}=(-3,1,3)-(3,3,3)$
$=(-6,-2,0)$
$\overrightarrow{AC}=(4,0,2)-(3,3,3)$
$=(1,-3,-1)$
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-6+6+0=0$

つまり $\angle CAB$ が直角である



$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0$

点/40 点

4 ある直交座標系で $\vec{a}=(1,2,3), \vec{b}=(2,-1,1), \vec{c}=(3,1,-2)$ と表されるベクトルに対し，次の問に答えなさい．（各 3 点）

(1) ベクトル $\vec{a}\times\vec{b}$ を成分表示しなさい．ただし，「$\times$」は空間ベクトルの外積とする．

(2) $\vec{a}\times\vec{b}$ が $\vec{a}$ と直交することを示しなさい．また，$\vec{a}\times\vec{b}$ が $\vec{b}$ と直交することを示しなさい．

(3) (1) の結果を利用して $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ を計算しなさい．

(4) $\vec{b}\times\vec{c}$ を計算しなさい．さらに $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ を計算しなさい．

(1) $\vec{a}\times\vec{b} = \left(\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\right)$

$= \underline{(5,\ 5,\ -5)}$

(2) $(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{a}) = 5+10-15 = \underline{0}$

$(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}) = 10-5-5 = \underline{0}$

(3) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 5 & 5 & -5\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$

$= -5\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3$

$= \underline{(-5, -5, -10)}$

(4) $\vec{b}\times\vec{c} = \left(\det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right)$

$= \underline{(1, 7, 5)}$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \left(\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 7\end{pmatrix}\right) = \underline{(-11, -2, 5)}$

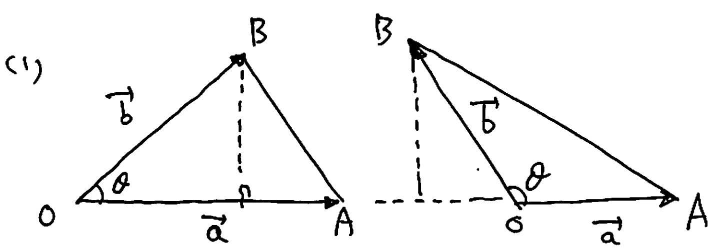
5 $\{\vec{a},\vec{b}\}$ を線形独立な 2 つのベクトルとし，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とする．このとき次の問に答えなさい．（各 3 点）

(1) ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，三角形 OAB の面積が $\frac{1}{2}\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\sin\theta$ に等しいことを説明しなさい．

(2) 三角関数の性質と内積の定義を用いて，$\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\sin\theta = \sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2}$ であることを示しなさい．

(3) ある直交座標系で $\vec{a}=(a_1,a_2), \vec{b}=(b_1,b_2)$ と表されるとき，$\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2 = \left(\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\right)^2$ が成り立つことを計算して確かめなさい．ただし，$\det M$ は行列 M の行列式とする．

(1)



OAを底辺とするとΔOABの高さは $\|\vec{b}\|\sin\theta$ である．したがって面積は

$\frac{1}{2}\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\sin\theta$

となる。

(2) $\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\sin\theta \overset{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}{=} \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$= \sqrt{\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta}$

$= \sqrt{\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2}$

$(\vec{a},\vec{b}) = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta$：内積の定義

(3) $\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2$

$= (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2$

$= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 - (a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_2^2)$

$= a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2$

$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2$

$= \underline{\left(\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\right)^2}$