

## 線形代数 I 演習

- 第 1 回 平面ベクトルの演算, 線形独立・線形従属 -

担当: 佐藤 弘康

基本問題 以下のことを確認せよ (定義を述べよ) .

- (1) 「ベクトルの線形結合」とは何か .
- (2) 「 $\mathbb{R}^2$  がベクトル  $a_1, \dots, a_n$  で張られる」とはどういうことか .
- (3) 「 $n$  個のベクトル  $a_1, \dots, a_n$  が線形独立である」とは?
- (4) 「 $n$  個のベクトル  $a_1, \dots, a_n$  が線形従属である」とは?
- (5) 「 $\mathbb{R}^2$  の基底」とは, どういうベクトルのことか?

問題 1.1. 次のベクトルは線形従属か, 線形独立か調べよ .

- (1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$       (2)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$       (3)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (4)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$       (5)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

問題 1.2. 次のベクトルは平面ベクトル全体  $\mathbb{R}^2$  の基底か? もし基底ならば,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  をそれらの線形結合で表せ .

- (1)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$       (2)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$       (3)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

問題 1.3.  $a, b$  を線形独立なベクトルとする . このとき ,

- (1)  $a$  と  $b$  の線形結合で表されるベクトル  $a + 2b$  と  $3a + 4b$  は線形独立であることを示せ .
- (2)  $a$  と  $b$  の線形結合で表されるベクトル  $-a + 2b$  と  $2a - 4b$  は線形従属であることを示せ .

問題 1.4. 2 つの平面ベクトル  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  に対し, 「 $a, b$  が線形独立であること」と「 $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ 」が同値であることを証明せよ .