

数学クォータ科目「応用解析」第 12 回 / 微分方程式 (2)

1 階微分方程式

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

- 微分方程式とその解（一般解, 特殊解, 特異解）
- 微分方程式の解と曲線群
- 変数分離型微分方程式の解法

今回の授業で理解してほしいこと

- **同次形**微分方程式とは何か？その解法は？
- **線形**微分方程式とは何か？その解法は？
- **ベルヌーイの微分方程式**とは何か？その解法は？

1 階微分方程式（2）同次形

同次形

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

と表される微分方程式を同次形という。

例) (1) 原点で y 軸と接する円群 $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ から導かれる微分方程式

$$2xyy' = y^2 - x^2$$

(2) 上の円群に直交する曲線群の微分方程式

$$y' = -\frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

1 階微分方程式（2）同次形

事実

同次形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ は, $\frac{y}{x} = u$ と変数変換することによって,
 x と $u = u(x)$ の変数分離形微分方程式になる.

- $y = ux$ より, $y = ux$ である. これを x で微分すると, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = \frac{du}{dx}x + u$.
- $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$ を同次形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ に代入すると

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u) \quad \therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(f(u) - u)$$

- これは x と $u = u(x)$ の変数分離形微分方程式である.

1 階微分方程式（2）同次形の解法

1) $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ において, $\frac{y}{x} = u$ と変数変換し,

変数分離形 $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ に直す.

2) $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ の一般解を求める.

3) 2) で求めた一般解に $y = ux$ を代入し, x と y の式に直す.

1 階微分方程式 (3) 1 階線形微分方程式

1 階線形微分方程式

y と y' に関する 1 次の方程式, つまり,

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

と表される微分方程式をのことを **1 階線形微分方程式** という.

1 階線形微分方程式の一般解

1 階線形微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x)$ の一般解は

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right)$$

1 階微分方程式 (3) 1 階線形微分方程式

- 一般解の公式はどのようにして導かれるか？
 - $y' + P(x)y = Q(x)$ において, y の 0 次の項 $Q(x)$ を消すと, 変数分離形 $y' = -P(x)y$ になる.
 - $y' + P(x)y = 0$ の一般解は, $y = c e^{-\int P(x) dx}$ である.
 - ここで, $y' + P(x)y = Q(x)$ の解は, $y = c e^{-\int P(x) dx}$ の一般解の任意定数 c が, ある関数 $c(x)$ に置き換わったものであると考える (定数変化法) .
- $y' + P(x)y = Q(x)$ の一般解は, $y = c(x) e^{-\int P(x) dx}$ である.
 - $\iff c'(x) e^{-\int P(x) dx} + c(x) e^{-\int P(x) dx} (-P(x)) + P(x) c(x) e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$
 - $\iff c'(x) e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$
 - $\iff c'(x) = Q(x) e^{\int P(x) dx}$
 - $\iff c(x) = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} + C$

1 階微分方程式 (3) 1 階線形微分方程式の解法

- 1) $y' + P(x)y = Q(x)$ の形に直す.
- 2) $\int P(x) dx$ を計算する.
- 3) $\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx$ を計算する.
- 4) 2)3) の結果を $y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right)$ に代入する.

1 階微分方程式 (3) 1 階線形微分方程式の例

混合の問題

物質 A が m_0 [kg] 溶けた水 W [L] が水槽に入っている.

そこへ $(1 + \cos t)$ [kg] の物質 A が溶けた水が毎分 w [L] ずつ流入している. 攪拌によって一様になっている混合物が同じ量だけ流出している.

このとき, 時刻 t における物質 A の量 $m(t)$ [kg] を求めなさい.

- 初期状態 $m(0) = m_0$ [kg]
- 時刻 t における塩の流入量は $(1 + \cos t)$ [kg]
- 時刻 t における塩の流出量は $\frac{m(t)}{W} w$ [kg]
- したがって, $m'(t) = (1 + \cos t) - \frac{m(t)}{W} w$

1 階微分方程式 (3) 1 階線形微分方程式の例

$$m'(t) + \frac{w}{W}m(t) = 1 + \cos t$$

- $\int P(x) dx = \int \frac{w}{W} dt = \frac{w}{W}t$
- $\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int (1 + \cos t) e^{\frac{w}{W}t} dx$
$$= \frac{W}{w} e^{\frac{w}{W}t} \left(1 + w \cdot \frac{w \cos t + W \sin t}{w^2 + W^2} \right) + C$$
- 以上のことから, 一般解は $m(t) = \frac{W}{w} \left(1 + w \cdot \frac{w \cos t + W \sin t}{w^2 + W^2} \right) + C e^{-\frac{w}{W}t}$
- 初期条件より, $C = m_0 - \frac{W}{w} \left(1 + w \cdot \frac{w}{w^2 + W^2} \right) = m_0 - \frac{W(2w^2 + W^2)}{w(w^2 + W^2)}$
- よって, 特殊解は

$$m(t) = \frac{W}{w} \left(1 + w \cdot \frac{w \cos t + W \sin t}{w^2 + W^2} \right) + \left(m_0 - \frac{W(2w^2 + W^2)}{w(w^2 + W^2)} \right) e^{-\frac{w}{W}t}$$

1 階微分方程式（４）ベルヌーイの微分方程式

ベルヌーイの微分方程式

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

と表される微分方程式をのことをベルヌーイの微分方程式という.

1 階微分方程式（４）ベルヌーイの微分方程式

事実

ベルヌーイの微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ は, $u = y^{1-n}$ と変数変換することによって, x と $u = u(x)$ の線形微分方程式になる.

- \square より, $\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}y'$.
- \square の両辺に $(1-n)y^{-n}$ をかけると,
$$(1-n)y^{-n} \cdot y' + (1-n)y^{-n} \cdot P(x)y = (1-n)y^{-n} \cdot Q(x)y^n$$

$$\iff \frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

1 階微分方程式（４）ベルヌーイの微分方程式の解法

- 1) $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ の形に直す.
- 2) $u = y^{1-n}$ と変数変換し,
を線形微分方程式 $u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$ に直す.
- 3) の一般解を求める.
- 4) 3) で求めた一般解に を代入し, x と y の式に直す.

1 階微分方程式（４）ベルヌーイの微分方程式の例

海洋漁業を放置しておくと、やがて世界の漁業資源はひどく涸渇する。漁獲制限するための取り決めをするには、魚の個々の成長と個体数のモデルが必要である。

魚の成長モデル

時刻 t における、ある魚の体重を $w(t)$ と表す。体重の変化 $w'(t)$ は、栄養分による体重の増加量と、呼吸による減少量の差で表される。

栄養分による増加量は表面積に比例し、呼吸による減少量は体重に比例するとき、 $w(0) = 0$ として、 $w(t)$ を求めなさい。

- 栄養分による増加量： $\alpha w(t)^{\frac{2}{3}}$
- 呼吸による減少量： $\beta w(t)$
- よって、 $w'(t) = \alpha w(t)^{\frac{2}{3}} - \beta w(t)$ が成り立つ。

1 階微分方程式 (4) ベルヌーイの微分方程式の例

$w'(t) + \beta w(t) = \alpha w(t)^{\frac{2}{3}}$: $n = \frac{2}{3}$ の場合のベルヌーイの微分方程式.

- $u(t) = w(t)^{1-\frac{2}{3}} = w(t)^{\frac{1}{3}}$ とおくと, $u'(t) = \frac{1}{3}w(t)^{-\frac{2}{3}}w'(t)$.
- \square の両辺に $\frac{1}{3}w(t)^{-\frac{2}{3}}$ をかけると, $u'(t) + \frac{\beta}{3}u(t) = \frac{\alpha}{3}$
- 線形微分方程式 \square を解く.
 - $\int P(t) dt = \int \frac{\beta}{3} dt = \frac{\beta}{3}t$
 - $\int Q(t) e^{\int P(t) dt} dt = \int \frac{\alpha}{3} e^{\frac{\beta}{3}t} dt = \frac{\alpha}{\beta} e^{\frac{\beta}{3}t} + C$
 - $u(t) = e^{-\frac{\beta}{3}t} \left(\frac{\alpha}{\beta} e^{\frac{\beta}{3}t} + C \right) = \frac{\alpha}{\beta} + C e^{-\frac{\beta}{3}t}$
 - $w(t) = u(t)^3 = \left(\frac{\alpha}{\beta} + C e^{-\frac{\beta}{3}t} \right)^3$

1 階微分方程式（４）ベルヌーイの微分方程式の例

$$w'(t) + \beta w(t) = \alpha w(t)^{\frac{2}{3}} \text{ の一般解は } w(t) = u(t)^3 = \left(\frac{\alpha}{\beta} + C e^{-\frac{\beta}{3}t} \right)^3$$

- 初期条件 $w(0) = 0$ より, $0 = \left(\frac{\alpha}{\beta} + C \right)^3$. したがって, $C = -\frac{\alpha}{\beta}$.
- よって, 特殊解は $w(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t} \right)^3$ である.

4つの1階微分方程式の関係

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

変数分離形

$\xleftarrow{u = \frac{y}{x}}$
変数変換

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

同次形

(定数変化法) $\downarrow \uparrow$ $Q(x)$ が消えると

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

線形微分方程式

$\xleftarrow{u = y^{1-n}}$
変数変換

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

ベルヌーイの微分方程式

まとめと復習（と予習）

- 同次形 微分方程式とはどのような微分方程式ですか？
その一般解はどのようにして求めることができますか？
- 線形 微分方程式とはどのような微分方程式ですか？
その一般解はどのようにして求めることができますか？
- ベルヌーイの微分方程式 とはどのような微分方程式ですか？
その一般解はどのようにして求めることができますか？

教科書 p.12～16

問題集 245, 246, 247, 248, 249

予 習 微分方程式の一般解 「応用解析」