

数学クォータ科目「応用解析」第2回 / ベクトル解析 (2)

スカラー場の勾配

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

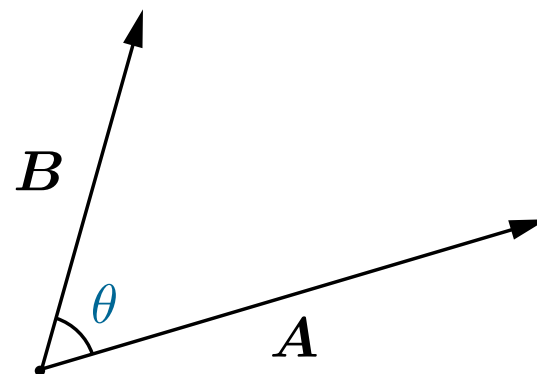
- ベクトル関数，ホドグラフ，ベクトル関数の微分（導関数）
ベクトル関数の不定積分と定積分

今回の授業で理解してほしいこと

- スカラー場とベクトル場の定義
- スカラー場の等位面
- スカラー場の勾配
- スカラー場の方向微分係数

【復習 3】 ベクトルの内積

- ベクトル A, B があり, 始点が一致するよう平行移動したとき, 2つのベクトル (線分) のなす角が θ であるとする.



- このとき, A と B の **内積** $A \cdot B$ を以下の式で定義する.

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta$$

- $A = a_1 i + a_2 j + a_3 k, B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ と基本ベクトル表示されるとき, 内積は $A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ と表される.

スカラー場とベクトル場

定義

空間内のある領域 Ω 内の任意の点 $P(x, y, z)$ に対し、スカラー（たとえば実数） $\varphi(x, y, z)$ が対応するとき、この対応を Ω 上の **スカラー場** という。

注 スカラー場とは、定義域が Ω の **3変数関数** $\varphi(x, y, z)$ のことである。

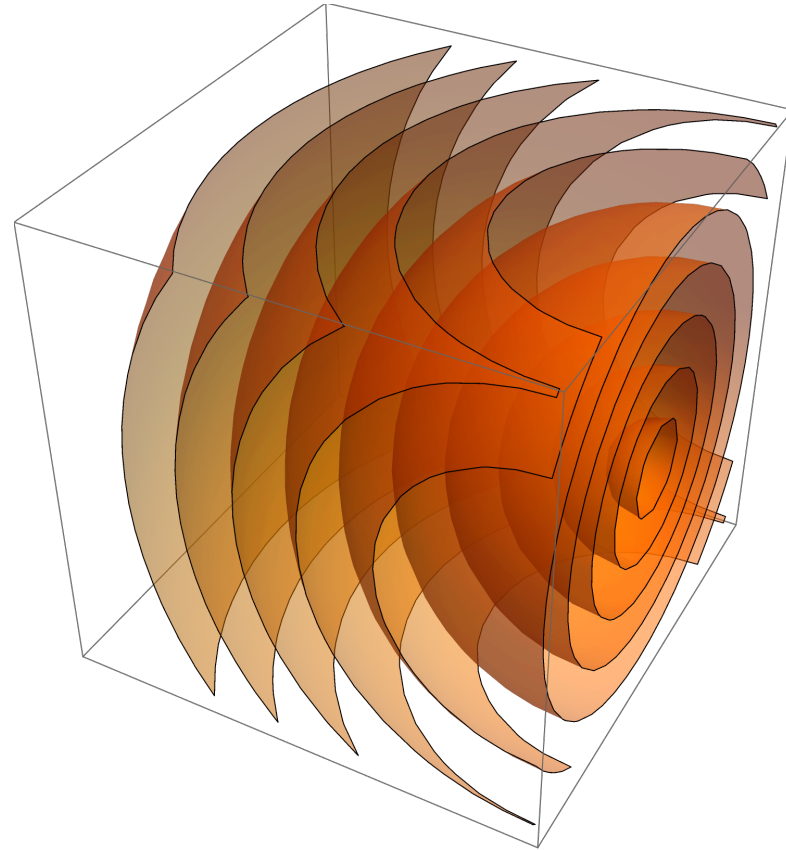
定義

空間内のある領域 Ω 内の任意の点 $P(x, y, z)$ に対し、ベクトル $A(x, y, z)$ が対応するとき、この対応を Ω 上の **ベクトル場** という。

注 $A(x, y, z)$ は空間ベクトルなので、 $A(x, y, z) = A_x i + A_y j + A_z k$ と基本ベクトル表示できる。各成分の値は、点 $P(x, y, z)$ に対して決まるので、 A_x, A_y, A_z は3変数関数である。つまり、ベクトル場とは、**3変数関数の三つ組**のことである。

スカラー場の等位面

例) $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$



定義

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ と定数 c に対し, $\varphi(x, y, z) = c$ を満たす点 (x, y, z) の全体は, 一般に空間内の曲面となる. これをスカラー場の等位面という.

スカラー場の勾配とナブラ演算子 ∇

定義

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ に対し,

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} i + \frac{\partial\varphi}{\partial y} j + \frac{\partial\varphi}{\partial z} k$$

で定まるベクトル場を, $\varphi(x, y, z)$ の勾配という.

注 ベクトル微分演算子 $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ を導入すると, 次のような形式的な計算が可能である.

$$\nabla\varphi = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = i \frac{\partial\varphi}{\partial x} + j \frac{\partial\varphi}{\partial y} + k \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

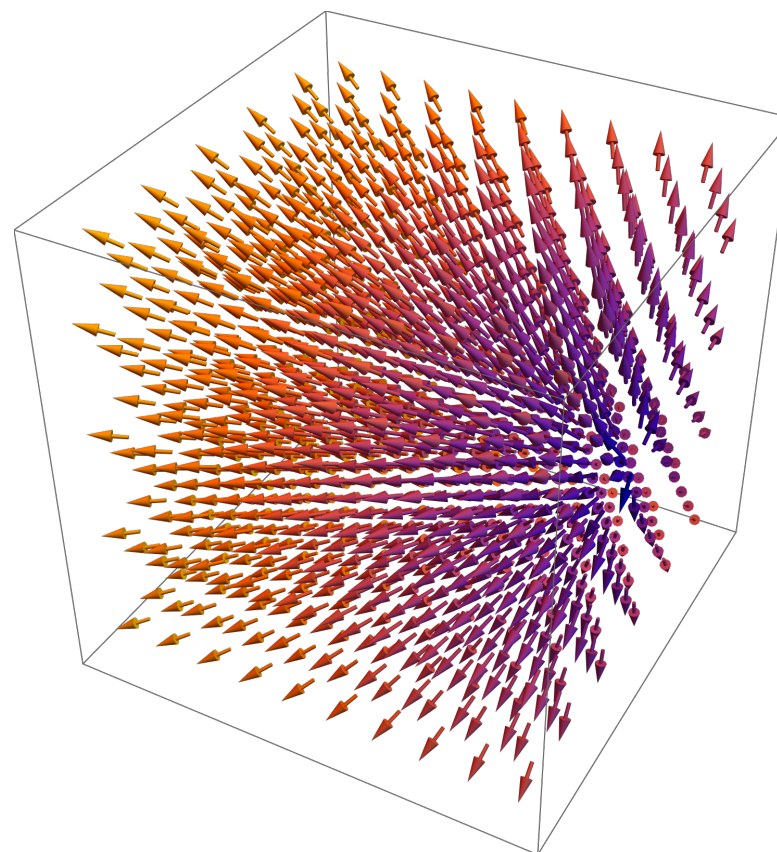
よって, $\varphi(x, y, z)$ の勾配を $\nabla\varphi$ と書くこともある.

スカラー場の勾配とナブラ演算子 ∇

例) $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ の勾配は

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= i\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) + j\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2) + k\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= 2x\,i + 2y\,j + 2z\,k\end{aligned}$$

となる.



スカラー場の勾配の性質

定理

$\varphi(x, y, z)$ をスカラー場とし, その勾配を $\nabla\varphi$ と書く.

- (1) $\nabla\varphi(P)$ を, 点 P を始点とするベクトルと考えると, $\nabla\varphi(P)$ は点 P を通る等位面に対して垂直である.

(証明は省略)

- (2) スカラー場 φ の値は, 勾配 $\nabla\varphi$ の方向に沿って増加する.

(スライド p.10 の 注 を参照)

スカラー場の方向微分係数

定義

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ の定義域内の点 $P(x, y, z)$ と,
単位ベクトル $u = u_x i + u_y j + u_z k$ に対し,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial u}(P) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(p + hu) - \varphi(p)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x - hu_x, y - hu_y, z - hu_z) - \varphi(x, y, z)}{h}\end{aligned}$$

をスカラー場 φ の点 P における u 方向への方向微分係数という.
(ただし, $p = \overrightarrow{OP} = xi + yj + zk$)

スカラー場の方向微分係数の意味と計算方法

- 点 $P(x, y, z)$ と単位ベクトル $u = u_x i + u_y j + u_z k$ を固定し、ベクトル関数 $A(t) = p + t u$ を考える.
- $A(t)$ のホドグラフは、点 P を通り、ベクトル u と平行な直線である.
- $\Phi(t) := \varphi(A(t))$ とおくと、 $t = 0$ における微分係数 $\Phi'(0)$ は

$$\begin{aligned}\Phi'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(0 + h) - \Phi(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x - hu_x, y - hu_y, z - hu_z) - \varphi(x, y, z)}{h} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(P)\end{aligned}$$

- 合成関数の微分の公式を利用して、 $\Phi'(0)$ を計算することにより

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(P) = \Phi'(0) = u_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) + u_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P) + u_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) = u \cdot \nabla \varphi(P)$$

スカラー場の方向微分係数の意味と計算方法

つまり, 方向微分係数 $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(P)$ は

- 点 P からベクトル u の方向に動いたときの **スカラー場の変化率** のことである.
- 偏微分係数を一般化したものである ;

$$\frac{\partial \varphi}{\partial i}(P) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial j}(P) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial k}(P) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P).$$

- $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(P) = u \cdot \nabla \varphi(P)$

注 方向微分係数の値が最大となるのは, u が勾配 $\nabla \varphi$ と同じ方向のときである.

まとめと復習（と予習）

- スカラー場とは何ですか？
 - スカラー場の等位面とは何ですか？
 - スカラー場の勾配とは何ですか？（ナブラ演算子とは？）
 - スカラー場の方向微分係数とは何ですか？
 - スカラー場の方向微分係数と勾配の関係は？
- ベクトル場とは何ですか？

教科書 p.80～84

問題集 190, 191, 192, 193, 194

予 習 2次と3次の行列式 「数学」