【復習】１変数関数のべき級数展開

テイラー展開　関数 $f(x)$ が $x=a$ のまわりで連続かつ微分可能で，収束半径が ρ であるとする．このとき，$a-\rho<x<a+\rho$ ならば，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

マクローリン展開　特に，$a=0$ のまわりで級数展開すると

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

今回の目的

１変数関数のマクローリン展開と合成関数の考え方を利用して，２変数関数をべき級数展開する．

２変数関数のべき級数展開（考え方）

２変数関数 $f(x,y)$ に対し，

1) $x(t)=a+ht$, $y(t)=b+kt$（a,b,h,k は定数）との合成関数を考える;
$F(t):=f(a+ht,b+kt)$

2) $F(t)$ をマクローリン展開する;
$$F(t)=F(0)+F'(0)\,t+\frac{F''(0)}{2}t^2+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n+\cdots$$

3) $t=1$ を代入する;
$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\cdots$$
$$\to\ f(a+h,b+k)=f(a,b)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\cdots$$

問　$F^{(n)}(0)$ は，どのように表されるだろうか？

合成関数 $F(t)=f(a+ht,b+kt)$ の導関数

合成関数の微分（p.59 定理 2.）

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t))=f_x(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)$$

$F(t)=f(a+ht,b+kt)$,　　（a,b,h,k は定数）

$$\begin{aligned}F'(t)&=f_x(a+ht,b+kt)\cdot(a+ht)'+f_y(a+ht,b+kt)\cdot(b+kt)'\\&=f_x(a+ht,b+kt)\,h+f_y(a+ht,b+kt)\,k\\\therefore\ F'(0)&=f_x(a,b)\,h+f_y(a,b)\,k\end{aligned}$$

合成関数 $F(t)=f(a+ht,b+kt)$ の２次導関数

合成関数の微分（p.59 定理 2.）

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t))=f_x(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)$$

$F(t)=f(a+ht,b+kt)$,　　（a,b,h,k は定数）

$F'(t)=f_x(a+ht,b+kt)\,h+f_y(a+ht,b+kt)\,k$,　$F'(0)=f_x(a,b)\,h+f_y(a,b)\,k$

$$\begin{aligned}F''(t)&=\frac{d}{dt}\{f_x(a+ht,b+kt)\}\,h+\frac{d}{dt}\{f_y(a+ht,b+kt)\}\,k\\&=\{f_{xx}(a+ht,b+kt)\,h+f_{xy}(a+ht,b+kt)\,k\}\,h\\&\quad+\{f_{yx}(a+ht,b+kt)\,h+f_{yy}(a+ht,b+kt)\,k\}\,k\\&=f_{xx}(a+ht,b+kt)\,h^2+2f_{xy}(a+ht,b+kt)\,hk+f_{yy}(a+ht,b+kt)\,k^2\\\therefore\ F''(0)&=f_{xx}(a,b)\,h^2+2f_{xy}(a,b)\,hk+f_{yy}(a,b)\,k^2\end{aligned}$$

合成関数 $F(t)=f(a+ht,b+kt)$ の高次導関数

- $F(t)=f(a+ht,b+kt)$,　　（a,b,h,k は定数）
- $F'(t)=f_x(a+ht,b+kt)\,h+f_y(a+ht,b+kt)\,k$
- $F'(0)=f_x(a,b)\,h+f_y(a,b)\,k$
- $F''(t)=f_{xx}(a+ht,b+kt)\,h^2+2f_{xy}(a+ht,b+kt)\,hk+f_{yy}(a+ht,b+kt)\,k^2$
- $F''(0)=f_{xx}(a,b)\,h^2+2f_{xy}(a,b)\,hk+f_{yy}(a,b)\,k^2$

→ $F''(t)$, および $F''(0)$ の右辺において，２次の偏導関数の係数に着目すると，$(h+k)^2$ の各項であることに気づく．

⋮

- 一般に，$F^{(n)}(0)=\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}{}_nC_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j}f(a,b)$

２変数関数のテイラー展開，マクローリン展開

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)&=f(a,b)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\cdots\\&=f(a,b)+f_x(a,b)\,h+f_y(a,b)\,k\\&\quad+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)\,h^2+2f_{xy}(a,b)\,hk+f_{yy}(a,b)\,k^2\right)+\\&\quad+\cdots\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+\cdots\end{aligned}$$

↓（$a+h=x, b+k=y$ とおくと）

テイラー展開　$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)\,(x-a)+f_y(a,b)\,(y-b)+\cdots$

↓（$a=0, b=0$ とおくと）

マクローリン展開　$f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)\,x+f_y(0,0)\,y+\cdots$