（１変数）関数とは

- ２つの変数 x, y がある.

  （変数とは, いろいろな値をとる文字のこと）
- 変数 x の値を決めると, それに応じて y の値が決まるとき,

  「y は x の（１変数）関数である」

  という. このとき, $\begin{cases} x & \text{を独立変数} \\ y & \text{を従属変数} \end{cases}$ という.
- 関数 y が独立変数 x の関数であることを, 一般的に $y = f(x)$ と書く.
  - f は「x に対して, $y(= f(x))$ を対応させる規則」と解釈できる.
  - 「x の関数」とは「x で記述される式 $f(x)$」と考えてよい.

（２変数）関数とは

- ３つの変数 x, y, z がある.
- 変数 x と y の値を決めると, それに応じて z の値が決まるとき,

  「z は x, y の２変数関数である」

  という. このとき, $\begin{cases} x, y & \text{を独立変数} \\ z & \text{を従属変数} \end{cases}$ という.
- 関数 z が独立変数 x, y の関数であることを, 一般的に $z = f(x, y)$ と書く.
  - f は「x, y に対して, $z(= f(x, y))$ を対応させる規則」.
  - 「x, y の関数」とは「x, y で記述される式 $f(x, y)$」.

★ x, y を xy-平面内の点の座標 (x, y) と思うと, ２変数関数とは,

「平面の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して, 数 $f(x, y)$ を対応させること」

と考えることができる（$z = f(\mathrm{P})$ と書くこともある）.

定義域と値域

関数 $z = f(x, y)$ に対し,

- $f(x, y)$ に代入してよい点 $\mathrm{P}(x, y)$ 全体からなる領域のことを, 「関数 $f(x, y)$ の定義域」という.
- 点 $\mathrm{P}(x, y)$ を関数 $f(x, y)$ の定義域内の点とするとき, z がとる値の範囲のことを「関数 $f(x, y)$ の値域」という.

  関数 $f(x, y)$ の $\begin{cases} \text{定義域は} & \text{平面内の領域} \\ \text{値域は} & \text{数直線上の区間} \end{cases}$

２変数関数の可視化（グラフと等高線）

- ２変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフとは, $(a, b, f(a, b))$ と表される空間内の点全体のこと（ただし, (a, b) は関数 f の定義域内の点）.
  - $f(a, b)$ は (a, b) 地点における「標高」と解釈できる.
  - $z = f(x, y)$ のグラフは「曲面」となる.
  - 点 (a, b, c) が $z = f(x, y)$ のグラフ上の点である.

    （または, $z = f(x, y)$ のグラフが点 (a, b, c) を通る）

    $\Longleftrightarrow (a, b, c)$ が関係式 $c = f(a, b)$ を満たす.
- ２変数関数 $z = f(x, y)$ の等高線とは, 同じ高さの点の集まりでできる曲線のこと.
  - 方程式 $f(x, y) = h$ を満たす平面内の点 (x, y) の全体（h は定数）.

１変数関数の微分

- 関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数とは, 数

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

  のこと.
- 上の極限が存在するとき, 「$y = f(x)$ は $x = a$ で微分可能である」という.
- 関数 $y = f(x)$ の導関数とは, x に対して $f'(x)$ を対応させる関数のこと;

$$f'(x) := \lim_{h \to} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

  - 記号：$f'(x), \quad y', \quad \dfrac{df}{dx}(x), \quad \dfrac{dy}{dx}$
  - 導関数を求めることを関数を「微分する」という.

２変数関数の偏微分

- ２変数関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数とは, ２つの変数のうち一方を定数と見なして，もう一方の変数に関して微分した関数のこと.
  - 「x に関する偏導関数」とは, y を定数とみなして, x で微分した関数

    記号：$f_x(x, y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad z_x, \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}$
  - 「y に関する偏導関数」とは, x を定数とみなして, y で微分した関数

    記号：$f_y(x, y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad z_y, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}$
  - 偏導関数を求めることを「関数を偏微分する」という.
- 【注意】
  - ２変数関数についても，「偏微分係数」「偏微分可能性」の概念が定義できる.
  - $f(x, y)$ がある領域で偏微分可能であるとき, 偏導関数が定義される.