

数学クォータ科目「応用解析」第4回 / ベクトル解析 (4)

線積分

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回のキーワードと今回の授業で理解してほしいこと

前回のキーワード

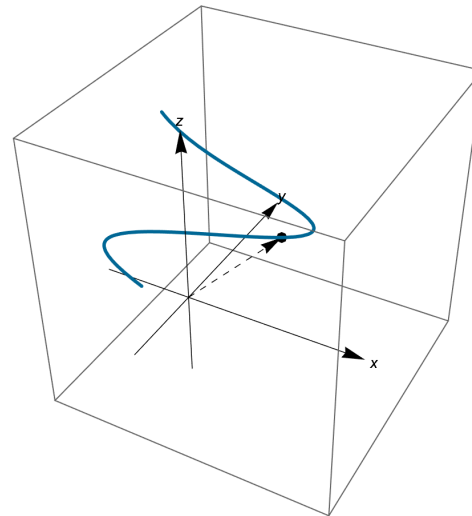
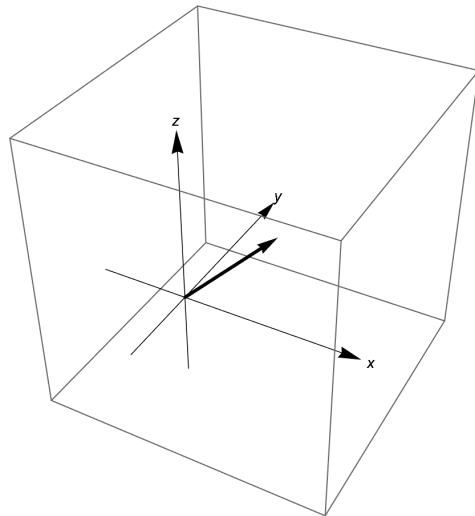
- ベクトル場の発散と回転，ベクトルの外積

今回の授業で理解してほしいこと

- 空間曲線の弧長と線素
- スカラー場の線積分
- ベクトル場の線積分

【再掲】 1 変数ベクトル関数のホドグラフ (空間曲線)

- 変数 t の値を決めると, その値に応じてベクトル $A(t)$ がただ一つ定まるとき, $A(t)$ を独立変数 t のベクトル関数という.
- ベクトル関数 $A(t) = A_x(t) i + A_y(t) j + A_z(t) k$ の成分は, 1 変数関数.
- ベクトル関数 $A(t)$ の始点を定点 O に固定すると, $A(t)$ の終点 P は一般に 1 つの曲線を描く. この曲線を $A(t)$ のホドグラフという.
- ベクトル関数と曲線を同一視し, $r(t) = x(t) i + y(t) j + z(t) k$ と表す.

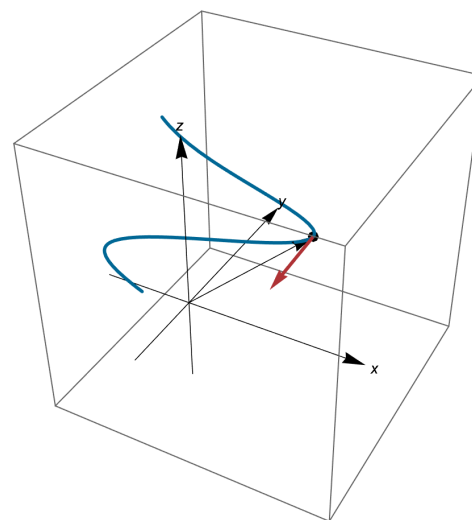
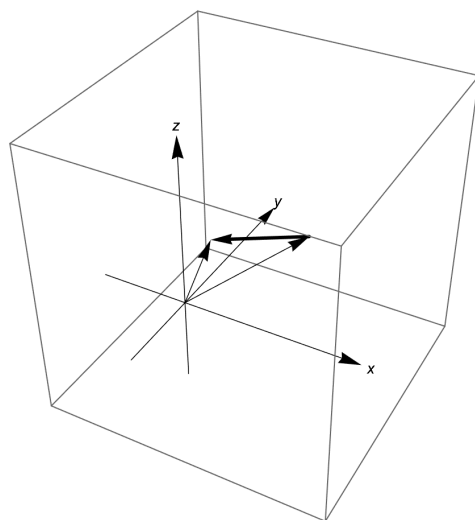


【再掲】 1 変数ベクトル関数の微分（接ベクトル）

- ベクトル関数 $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ の微分；

$$r'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

- $r'(t)$ を 始点が $r(t)$ のベクトル 考えると, $r'(t)$ は曲線 $r(t)$ に接するベクトル（接ベクトル）である.
- 特に, ベクトル $\mathbf{t}(t) := \frac{1}{|r'(t)|} r'(t)$ を接単位ベクトルという.



曲線の長さ（弧長）

- $r = r(t)$ を, $a \leq t \leq b$ で定義された曲線とする.
- $A = r(a), B = r(b)$ を端点とする弧 AB の長さを次のようにして考える.
 - (1) 区間 $a \leq t \leq b$ を適当に分割する: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$.
 - (2) 対応する曲線上の点を $A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = B$ とする.
 - (3) 弧 AB の長さを折れ線の長さで近似する: $s_n := \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$
 - (4) 極限值 $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ をこの曲線の弧長とよぶ.
- 実際には, 以下の式で計算できる.

$$s = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

線素

- 曲線 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ($a \leq t \leq b$) に対し, $|r'(t)| dt$ を線素とよぶ.
- 線素はパラメーターのとり方に依らない.
 - $t = \psi(u)$ とおくと, $a = \psi(\alpha), b = \psi(\beta)$ であり, $t = \psi(u)$ により閉区間 $a \leq t \leq b$ と $\alpha \leq u \leq \beta$ は一対一に対応しているとする.
 - $\bar{r}(u) = (\bar{x}(u), \bar{y}(u), \bar{z}(u)) = (x(\psi(u)), y(\psi(u)), z(\psi(u)))$ とおくと, 線素は

$$\begin{aligned} |\bar{r}'(u)| du &= \sqrt{(\bar{x}'(u))^2 + (\bar{y}'(u))^2 + (\bar{z}'(u))^2} du \\ &= \sqrt{(x'(\psi(u))\varphi'(u))^2 + (y'(\psi(u))\varphi'(u))^2 + (z'(\psi(u))\varphi'(u))^2} du \\ &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \psi'(u) du = |r'(t)| dt \end{aligned}$$

曲線のパラメーター

- 曲線 $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ に対し, $t = \psi(u)$ を合成した曲線 $\bar{r}(u) = r(\psi(u)) = x(\psi(u))i + y(\psi(u))j + z(\psi(u))k$ を考える.
- ベクトル関数としては異なるが, 同じ曲線を与えることは明らかである.
- このようにすることを, 「曲線のパラメーターを変える」と言うことがある.

定義

曲線 $r(s) = x(s)i + y(s)j + z(s)k$, $a \leq s \leq b$ に対し, $|r'(s)| = 1$ ならば, $a \leq s \leq c (< b)$ に対応する弧の長さは, $c - a$ となる. このとき, 「 s は弧長パラメーターをもつ」または「 s は弧長パラメーターである」と言う.

曲線のパラメーター

事実

任意の曲線は弧長パラメーターをもつように、パラメーターを変えることができる.

- 曲線 $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, $a \leq t \leq b$ に対し, $r(a)$ から $r(t)$ までの
弧長を対応させる t の関数を $s(t) = \int_a^t |r'(t)| dt$ とおく.
- この関数の逆関数を $t = \phi(s)$ とし, これと $r(t)$ と合成して $\bar{r}(s) = r(\phi(s))$ とおくと, s は弧長パラメーターとなる.

空間曲線の例

例) 次の曲線の線素を求め, t が弧長パラメーターか否か調べなさい

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \alpha \cos t \mathbf{i} + \alpha \sin t \mathbf{j} + \beta t \mathbf{k}, \quad (\text{ただし, } \alpha, \beta \text{ は定数})$$

(解) $\mathbf{r}'(t) = -\alpha \sin t \mathbf{i} + \alpha \cos t \mathbf{j} + \beta \mathbf{k}$ より

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\alpha \sin t)^2 + (\alpha \cos t)^2 + \beta^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

よって, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$ のときに限り, t は弧長パラメーターである.

注 $s(t) = t \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ の逆関数 $t = \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ を合成したもの

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(s) = \alpha \cos \left(\frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \mathbf{i} + \alpha \sin \left(\frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \mathbf{j} + \frac{\beta s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \mathbf{k}$$

のパラメーター s は弧長パラメーターである.

スカラー場の線積分

定義

曲線 $C : \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$ とスカラー場 $\varphi(x, y, z)$ に対し,

$$\int_C \varphi ds := \int_a^b \varphi(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

を「曲線 C に沿っての φ の（線素に関する）**線積分**」と言う.

ベクトル場の線積分

定義

曲線 $C : \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$ とベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z)$ に対し,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{A}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

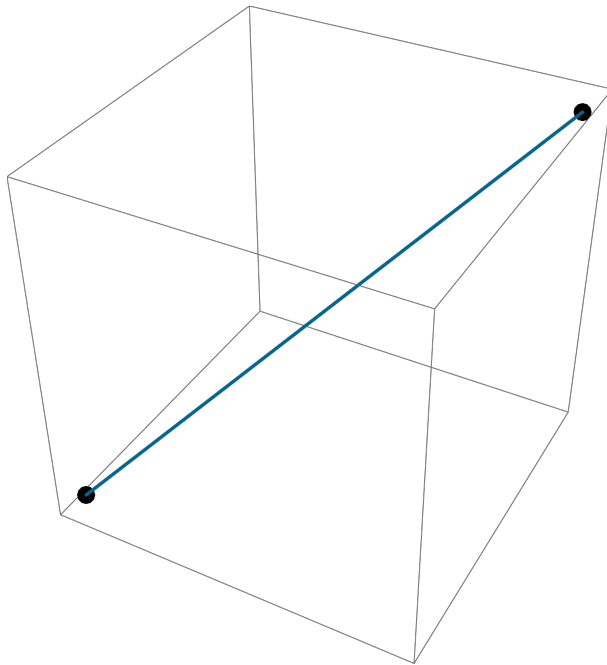
を「曲線 C に沿っての \mathbf{A} の線積分」と言う.

ベクトル場の線積分

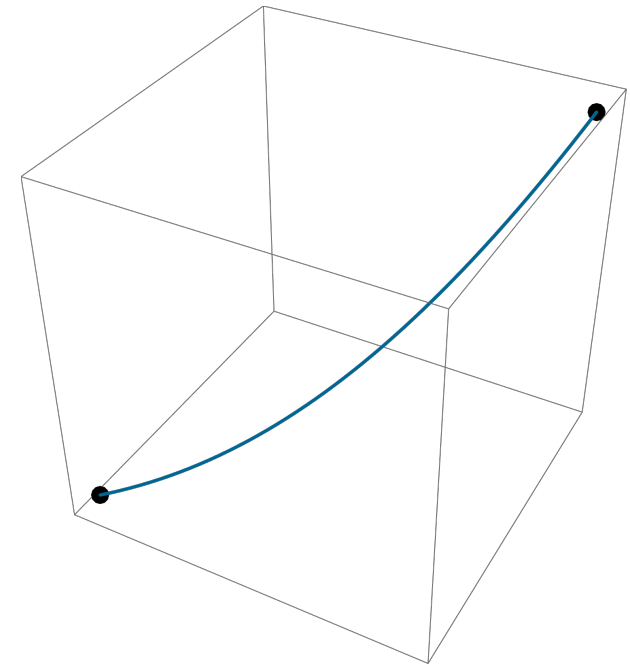
例題) ベクトル場 $A(x, y, z) = (3x^2y^2 + y^3z^2)\mathbf{i} + (2x^3y + 3xy^2z^2)\mathbf{j} + 2xy^3z\mathbf{k}$ について, 次の曲線 C に沿った線積分 $\int_C A \cdot t \, ds$ を求めなさい.

(1) $C : \mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$

(2) $C : \mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$



$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$



$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

ベクトル場の線積分

例題) ベクトル場 $A(x, y, z) = (3x^2y^2 + y^3z^2) \mathbf{i} + (2x^3y + 3xy^2z^2) \mathbf{j} + 2xy^3z \mathbf{k}$ について, 次の曲線 C に沿った線積分 $\int_C A \cdot \mathbf{t} ds$ を求めなさい.

(1) $C : \mathbf{r} = t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$

(解) $\mathbf{r}' = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $A(\mathbf{r}) = (3t^4 + t^5) \mathbf{i} + (2t^4 + 3t^5) \mathbf{j} + 2t^5 \mathbf{k}$ より,

$$A(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'(t) = 5t^4 + 6t^5.$$

したがって,

$$\int_C A \cdot \mathbf{t} ds = \int_0^1 A(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 (5t^4 + 6t^5) dt = \left[t^5 + t^6 \right]_0^1 = 2.$$

ベクトル場の線積分

例題) ベクトル場 $A(x, y, z) = (3x^2y^2 + y^3z^2) \mathbf{i} + (2x^3y + 3xy^2z^2) \mathbf{j} + 2xy^3z \mathbf{k}$ について, 次の曲線 C に沿った線積分 $\int_C A \cdot \mathbf{t} ds$ を求めなさい.

$$(2) C : \mathbf{r} = t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$$

(解) $\mathbf{r}' = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$, $A(\mathbf{r}) = (3t^4 + t^7) \mathbf{i} + (2t^4 + 3t^7) \mathbf{j} + 2t^6 \mathbf{k}$ より,

$$A(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'(t) = 5t^4 + 8t^7.$$

したがって,

$$\int_C A \cdot \mathbf{t} ds = \int_0^1 A(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 (5t^4 + 8t^7) dt = \left[t^5 + t^8 \right]_0^1 = 2.$$

ベクトル場の線積分の性質

定理

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ の勾配ベクトル場 $\nabla\varphi$ の線積分 $\int_C \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{t} \, ds$ の値は、曲線 C の端点にのみ依存する。特に、 $C : \boldsymbol{r}(t), a \leq t \leq b$ に対し、

$$\int_C \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{t} \, ds = \varphi(\boldsymbol{r}(b)) - \varphi(\boldsymbol{r}(a)).$$

注 前の例題の

- ベクトル場 \boldsymbol{A} はスカラー場 $\varphi(x, y, z) = x^3y^2 + xy^3z^2$ の勾配.
- 2つの曲線は、端点がともに原点 $(0, 0, 0)$ と点 $(1, 1, 1)$ である.
- よって、上の定理より $\int_C \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{t} \, ds = \varphi(1, 1, 1) - \varphi(0, 0, 0) = 1 + 1 = 2$.

まとめと復習（と予習）

- 曲線の弧長とは何ですか？
- 曲線の接単位ベクトルとは何ですか？
- 曲線の線素とは何ですか？
- スカラー場の（線素に関する）線積分に定義は？
- ベクトル場の 線積分に定義は？

教科書 p.89～96

問題集 199, 200, 201, 202, 203

予 習 2重積分 「数学」