例題 3.1. 方程式 $y = x+1$ で表される平面内の直線を l とする．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ を表現行列とする線形変換を f とする．f による l の像がどのような図形か調べなさい．

解. l の定義式において $x = t$ とすると $y = t + 1$ であるから，l 上の点は媒介変数 t を用いて $(t, t+1)$ と表すことができる（直線 l のパラメーター表示）．この点を f で線形変換すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に移る．これは点 $(2, -1)$ を通り，方向ベクトルが $(3, 1)$ の直線を表す（これを l' とおく）．ここで，l' の方程式を求めてみよう．l' 上の点を (x, y) とおくと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ t-1 \end{pmatrix},$$

つまり $x = 3t+2$, $y = t-1$ と書ける．この 2 式から t を消去すると $x - 3y = 5$ を得る．

以上のことから，<u>直線 $\boldsymbol{y = x + 1}$ は線形変換 $\boldsymbol{f}$ により直線 $\boldsymbol{x - 3y = 5}$ に移る</u>．

問題 3.2. 2 点 $A(2, 3)$, $B(3, 1)$ を通る直線を l とし，行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ を表現行列とする線形変換を f とする（つまり，$f(\vec{p}) = M\vec{p}$）．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 直線 l 上の点をパラメーター表示しなさい．

(2) 直線 l を f で線形変換するとどのような図形になるか調べなさい．また，l の f による像 l' が直線のとき，l' の方向ベクトルを答えなさい．

(3) 2 点 A, B の f による像 $f(A)$, $f(B)$ を求めなさい．

(4) 2 点 $f(A)$, $f(B)$ を通る直線を l'' とする．l'' 上の点を (x, y) とし，x と y の関係式（l'' の方程式）を求めなさい．

(5) l' と l'' が同じ直線であることを確かめなさい．

問題 3.3. 2 点 $(-2, 0)$, $(2, 2)$ を通る直線を l とおく．行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ を表現行列とする線形変換による l の像がどのような図形になるか調べなさい．