微積分 III 演習

− 未解答問題の略解，ヒント −

担当：佐藤 弘康

問題 3.4　$m > n$ に対し，

$$\begin{aligned}|a_m - a_n| &= \left|\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}\right| \\ &> \left|\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}\right| \\ &= \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m}\end{aligned}$$

が成り立つ．$\{a_n\}$ が Cauchy 列でないことを示したいので，「勝手に与えた $N \in \mathbf{N}$ に対し，十分大きな $m, n > N$ を適当にとれば，$|a_m - a_n| \geq C$ となるような $C > 0$ が存在する」ことを示せばよい ($\exists C > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists m, n \in \mathbf{N};\ m > n > N$ かつ $|a_m - a_n| \geq C$)．C を具体的に与えてみて，上の性質を満たす自然数 n, m がとれるかどうか考察せよ．

問題 4.3 次の問いに答えよ（以下の手順で 4.3 は証明できる）．

(1) $g(x) = f(x) - x$ とおく．$g(x)$ が連続関数になることを確かめよ．
(2) $g(0) \geq 0$，$g(1) \leq 0$ であることを確かめよ．
(3) $g(x)$ に中間値の定理を適用し，$g(x_0) = 0$ となる x_0 が存在することを示せ．

問題 4.4　区間 I で定義された連続関数 $f(x), g(x)$ に対して $h(x) = f(x) - g(x)$ とおく．そして，「I で定義された連続関数 $h(x)$ が，すべての有理数 $x \in I$ に対して $h(x) = 0$ ならば，I 上 $h \equiv 0$ である」ことを示せばよい．無理数 $x \in I$ に対して，x に収束する有理数の数列 $\{a_n\}$ を構成 する．関数の連続性から数列 $\{h(a_n)\}$ は $h(x)$ に収束する．しかし $h(x)$ の定義から $h(a_n)0$ であるから，$\{f(a_n)\}$ が 0 に収束することは明らか．したがって，$h(x) = 0$

問題 5.1 (2)（問題 5.5 の結果を用いた証明）　$x_n = \sqrt{n+1}$，$y_n = \sqrt{n}$ とおくと，

$$x_n - y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty).$$

したがって，$f(x) = x^2$ が一様連続なら $(f(x_n) - f(y_n))$ も 0 に収束するはずだが，実際には $f(x_n) - f(y_n) = (n+1) - n = 1$ となる．これは問題 5.5 の主張と矛盾する．したがって，$f(x) = x^2$ は一様連続ではない．

問題 5.1 (4)

$$x > 0 \text{ ならば } 1 - e^{-x} < x \tag{7.1}$$

を用いて，$\left|e^{-|x|} - e^{-|y|}\right| < |x-y|$ となることを示す．

i) $x > y \geq 0$ のとき

$$\left|e^{-|x|} - e^{-|y|}\right| = e^{-|y|}\left|1 - e^{-|x|+|y|}\right| = e^{-y}\left(1 - e^{-(x-y)}\right) < 1 \cdot (x-y)$$

ii) $0 \geq x > y$ のときは i) の場合と同様にできる（示せ）．

iii) $x > 0 > y$ のとき

$$\begin{aligned}\left|e^{-|x|} - e^{-|y|}\right| &= \left|e^{-x} - e^{y}\right| = \left|e^{-x} - 1 + 1 - e^{y}\right| \\ &\leq \left|1 - e^{-x}\right| + \left|1 - e^{y}\right| = \left(1 - e^{-x}\right) + \left(1 - e^{y}\right) \\ &< x - y\end{aligned}$$

問題 7.1. 関数 $f(x) = e^{-x}$ に平均値の定理を適用することにより，(7.1) 式が成り立つことを証明せよ．

問題 5.1 (5) $|x-y| < \varepsilon^2$ ならば $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$ である．実際，$x < y + \varepsilon^2$ であるから，$x > y$ と仮定すると

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \sqrt{y + \varepsilon^2} - \sqrt{y} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{y+\varepsilon^2} + \sqrt{y}} < \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2}} = \varepsilon.$$

問題 5.1 (6)

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= \left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}\right| = \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} \\ &< \frac{|x+y||x-y|}{|x|+|y|}.\end{aligned}$$

i) $x, y \geq 0$ または $x, y \leq 0$ のとき，$|x+y| = |x| + |y|$．したがって，$|f(x) - f(y)| < |x-y|$．

ii) $x > 0 > y$ のとき，$|x-y| = |x| + |y|$ かつ $|x+y| < |x-y|$．したがって，$|f(x) - f(y)| < |x-y|$．

以上のことから，$|x-y|<\varepsilon$ ならば $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ である．

問題 5.3 $f(x)=(\sin x)^2$ が一様連続であることの証明は，例題 5.1 を参考にせよ．$g(x)=\sin(x^2)$ が一様連続でないことの証明は，上の問題 5.1(2) の解を参考にせよ．

問題 5.3 「$|x-y|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$」が成り立っているとする．このとき，開区間 (a,b) の点 x は $I_1=(a,a+\delta)$，$I_2=[a+\delta,b-\delta]$，$I_3=(b-\delta,b)$ のいずれかの区間に含まれる．一様連続の条件から，$x\in I_1$ または $x\in I_3$ のとき $f(x)$ は有界であることが示せる．また，最大値の定理から，$f(x)$ を閉区間 I_2 上に制限した関数は最大値，最小値をとるから，$f(x)$ は I_2 上でも有界である．したがって，f は開区間 (a,b) 上で有界である．以上の議論は，$a<a+\delta<b-\delta<b$ の場合．a,b,δ の大小関係で場合分けが必要である．

問題 5.4 $f(x)$ は I 上一様連続なので，勝手な $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在し

$$|x-y|<\delta\ (x,y\in I)\Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon \tag{7.2}$$

が成り立つ．$\{x_n\}$ を I 上の収束列（つまり $x_n\in I$）とすると，$\{x_n\}$ は Cauchy 列であるから (7.2) 式の δ に対して，ある $n_\delta\in\mathbf{N}$ が存在し，$m,n>n_\delta$ ならば

$$|x_m-x_n|<\delta \tag{7.3}$$

が成り立つ．(7.2)，(7.3) から，任意の $m,n>n_\delta$ に対して

$$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$$

となる．これは $\{f(x_n)\}$ が Cauchy 列（つまり収束列）であることに他ならない．n_δ は δ から定まる自然数であるが，δ は ε から決まるので，結局 n_δ は ε に依存する．

問題 5.5 上の問題 5.4 の解を参考にして証明せよ．

問題 6.2 有理数の稠密性から $\overline{S}(f)=1$，$\underline{S}(f)=0$ となることがわかる．したがって，リーマン積分可能ではない．