線形代数 II 演習 期末試験

担当：佐藤 弘康

注意事項

(1) すべての答案用紙の表に名前，学籍番号を忘れずに記入してください．

(2) すべての答案用紙の右上に，全体の中で何枚目かを記入してください (例えば，1/2 のように)．

(3) 答案用紙は裏を使用しても構いません．解答が表裏にまたがる場合は「裏へ続く」と書くなどしてください．

(4) 解答は結果だけでなく，計算のプロセスや思考の過程などをできるだけ丁寧に記述するようにしてください．

(5) 終了時間前に解答が済んだ場合は途中退席しても構いません（その際は挙手をしてその旨を伝えてください）．

問 1.　n 次正方行列 A, B に関する関係式

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\cdot\det(A-B) \qquad (*)$$

について次の各問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，にたいして $(*)$ 式が成り立つことを示せ．

(2) 任意の n 次正方行列 A, B にたいして $(*)$ 式が成り立つことを示せ．

問 2.　n 次の置換 σ にたいし，n 次正方行列 A_σ を $A_\sigma \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{\sigma(i)}$ を満たす行列と定義する．ただし，$\boldsymbol{e}_i$ は i-成分が 1 でその他の成分が 0 のベクトルとする．

行列 A_σ が

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるな置換 σ を互換の積で表せ．

問 3.　クラメールの公式を使って，次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 9x + y + 4z = 4 \end{cases}$$

問 4.　次の 4 つの命題の中から 3 つを選び，正しいものには 証明 を与え，正しくないものには 反例 を与えよ．(命題の行列 A, B はすべて正方行列とする）．

(1) AB が正則ならば，A も B も正則である．

(2) $\det(-A) = -\det(A)$.

(3) 行列 A の固有値のひとつが 0 ならば，A は正則ではない．

(4) A の成分はすべて整数であるとする．このとき,「A は正則で，A^{-1} の成分はすべて整数である」ことと「$\det(A) = \pm 1$」は同値である．

問 5.　線形代数 II の講義と演習で学習した中で深く印象に残ったこと (概念，定理，方法など) をひとつ挙げよ．また，それを挙げた理由（どのようなところが面白いと思ったかなど）を具体的かつ簡潔に述べよ．