一般の平面への透視投影（直交座標）

視点が $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$，投影面が $\pi : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ の透視投影を $\Phi_S : \mathbf{R}^3 \to \pi$ とする．このとき，点 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ の像 $\Phi_S(A)$ は

$$\Phi_S(A) = \begin{pmatrix} \frac{\delta(a_1-s_1)+\beta(s_1a_2-s_2a_1)+\gamma(s_1a_3-s_3a_1)}{\alpha(a_1-s_1)+\beta(a_2-s_2)+\gamma(a_3-s_3)} \\ \frac{\delta(a_2-s_2)+\alpha(s_2a_1-s_1a_2)+\gamma(s_2a_3-s_3a_2)}{\alpha(a_1-s_1)+\beta(a_2-s_2)+\gamma(a_3-s_3)} \\ \frac{\delta(a_3-s_3)+\alpha(s_3a_1-s_1a_3)+\beta(s_3a_2-s_2a_3)}{\alpha(a_1-s_1)+\beta(a_2-s_2)+\gamma(a_3-s_3)} \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

で与えられる．

問題 7.5. 投影面が平面 $z = 0$ の場合，投影像は直交座標でどのようにを表されたか確認しなさい（授業ノートを参照しなさい）．さらに，(7.1) 式と比較しなさい（$\alpha = 1, \beta = \gamma = \delta = 0$ のとき，式が一致することを確かめなさい）．

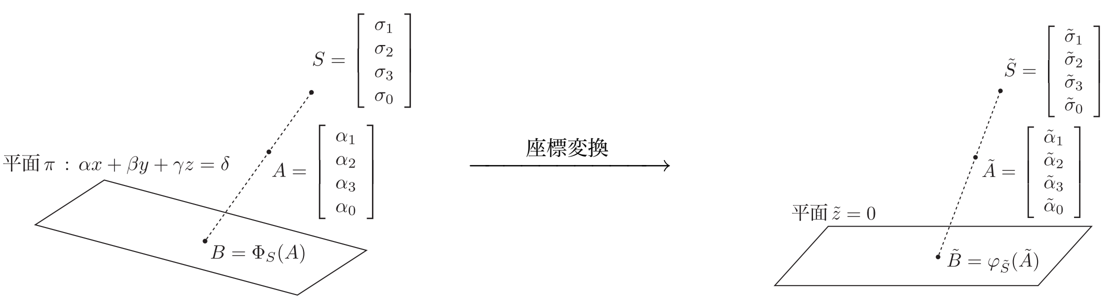
一般の平面への透視投影（同時座標：考え方）

(1) $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ が $\tilde{z} = 0$ となるように座標変換する；

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \vec{v} \iff \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & P & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ \tilde{X}_0 \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

(2) $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標で平面 $\tilde{z} = 0$ へ透視投影する．

(3) (1) の座標変換の逆変換により xyz-座標に戻す．



一般の平面への透視投影（同時座標：手順）

(1) 視点 S を $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標で表す；$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & P & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_0 \end{bmatrix}$．つまり，

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & {}^tP & & -{}^tP\vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_0 \end{bmatrix}.$$

(2) 点 A も同様に $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標で表す．

(3) $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-座標における平面 $z = 0$ への透視投影を表す 4 次正方行列をつくる；

$$\varphi_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_3 & 0 & \tilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_3 & \tilde{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_0 & -\tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix}.$$

(4) $\tilde{B} = \varphi_{\tilde{S}}(\tilde{A})$ を求める．

(5) $\tilde{B}$ を逆変換で xyz-座標に戻す．

xyz-座標における点 A の同次座標表示を $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$ とすると，(2)〜(4) の手順は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & P & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_3 & 0 & \tilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_3 & \tilde{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_0 & -\tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} & {}^tP & & -{}^tP\vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

を計算していることに他ならない．

問題 7.6. 視点が $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$，投影面が方程式 $3x + 2y + 2z = -1$ で与えられる平面の透視投影を Φ_S とする．問題 7.4 の 6 個の点 A, B, C, D, E, F を Φ_S で移した像の座標を求めなさい．