線形代数I演習

－ 第 11 回 行列の基本変形 －

担当：佐藤 弘康

基本問題　以下のことを確認せよ (定義を述べよ).

(1) 基本行列 $P_{ij}, E_{ij}(c), E_i(c)$ の定義を確認せよ.

(2) 行列 A に基本行列を左からかけることにより，A はどのように変化（変形）するか.

(3) 基本行列 $P_{ij}, E_{ij}(c), E_i(c)$ の逆行列を求めよ.

(4) 階段行列とはどのような行列か説明せよ.

(5) 簡約階段行列とはどのような行列か説明せよ.

例題 1.　行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を行基本変形により，簡約階段行列の形に変形せよ.

解.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{12}\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-2)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{31}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{23}\times]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{12}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{3}(1/4)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

問題 11.1. 次の行列を行基本変形により簡約階段行列の形に変形せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ **(5) 宿題 :** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

> **例題 2.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ を基本行列の積で表せ.

解. 行基本変形により, 行列 A は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-3)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(1)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2\left(-\frac{1}{2}\right)\times]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. これから

$$E_2\left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot E_{12}(1) \cdot E_{21}(-3) \cdot A = E_2 \tag{11.1}$$

が成り立つことがわかる. したがって,

$$\begin{aligned} A =& E_{21}(-3)^{-1} \cdot E_{12}(1)^{-1} \cdot E_2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-1} \\ =& E_{21}(3) \cdot E_{12}(-1) \cdot E_2(-2) \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また, (11.1) 式より, $A^{-1} = E_2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot E_{12}(1) \cdot E_{21}(-3)$ となることがわかる.

問題 11.2. 次の行列を基本行列の積で表せ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$