微積分 II 演習

― 第 9 回 ―

担当：佐藤 弘康

□ 前回の復習と捕捉

◇ **問題 4.3** (前回のプリント (p.5) で構成した閉区間の単調減少列 $\{I_n\}$ の共通部分 $\cap_n I_n = \{c\}$ が集合 A の集積点になること)： $I_n = [a_n, b_n]$ の幅 $|a_n - b_n|$ が 0 に収束することから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ が存在し，$I_{n_\varepsilon} \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon) = U_\varepsilon(c)$ を満たす．I_{n_ε} は A の元を無限個含むので，$(I_{n_\varepsilon} \cap A) \cap (U_\varepsilon(c) \backslash \{c\}) \neq \emptyset$．したがって，$A \cap (U_\varepsilon(c) \backslash \{c\}) \neq \emptyset$ を満たすので，c は A の集積点である．

◇ **問題 5.1(2)** (一様連続でないことの証明)：一様連続の否定命題

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in \mathbf{R},\ |x-y| < \delta \text{かつ} |x^2 - y^2| \geq \varepsilon$$

を示す．$\varepsilon = 1, y = x + l$ $(l < \delta)$ とおいて，上の条件を満たすような x, l を求めよう．まず $|x^2 - y^2| \geq 1$ を仮定して左辺を計算すると

$$1 \leq |x^2 - (x+l)^2| = 2xl + l^2. \tag{9.1}$$

したがって，(9.1) を満たすための x の条件は

$$x \geq \frac{1-l^2}{2l}.$$

そこで，任意の $\delta > 0$ に対して $x = \frac{1}{\delta}, y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ (つまり $l = \frac{\delta}{2}$) とおけば，

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta,\ \text{かつ}\ |x^2 - y^2| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

したがって，関数 $f(x) = x^2$ は一様連続ではない．

◇ **問題 7.1** (1)

$$\left|xy \log(x^2+y^2)\right| = 2\sqrt{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}\ \left|(\sqrt{x^2+y^2}) \log \sqrt{x^2+y^2}\right|.$$

ここで，例題 8. の結果から $\varepsilon' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$ に対して δ' が存在し，$\sqrt{x^2+y^2} < \delta'$ ならば $\sqrt{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} < \varepsilon'$ が成り立つ．また，$\displaystyle\lim_{x \to 0} x \log x = 0$ より，上の ε' に対して δ'' が存在し，$\sqrt{x^2+y^2} < \delta'$ ならば $\left|(\sqrt{x^2+y^2}) \log \sqrt{x^2+y^2}\right| < \varepsilon'$ が成り立つ．そこ

で，$\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ とおくと，$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ ならば $|xy\log(x^2+y^2)| < \varepsilon$ が成り立つ．

($\lim_{x\to 0} x\log x = 0$ の証明)：

$$x\log x = \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

であるから，L'Hopital の定理を用いると

$$\lim_{x\to 0} x\log x = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

(2)

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \le |x+y| \le |x|+|y|$$

したがって，$\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$ ならば，$|x|, |y| < \varepsilon$ であるから，$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| < 2\varepsilon$ が成り立つ．

◇ **問題 7.2**　(2)

$$\begin{aligned}|(x^2+y^2)-(a^2+b^2)| &= |(x-a)^2+2a(x-a)+(y-b)^2+2b(y-b)| \\ &\le (x-a)^2+(y-b)^2+2|a||x-a|+2|b||y-b|.\end{aligned}$$

したがって，勝手な $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta = \sqrt{\varepsilon+(|a|+|b|)^2}-(|a|+|b|)$ とおくとき，$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ ならば，

$$|(x^2+y^2)-(a^2+b^2)| < \delta^2+2(|a|+|b|)\delta = \varepsilon.$$

したがって，関数 $f(x,y) = x^2+y^2$ は点 (a,b) で連続である．

◇ **問題 7.4**　(2) $(a,b) \in A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > 0\}$ ならば，$a \ne 0$ かつ $b \ne 0$ だから，$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|a|,|b|\} > 0$ とおけば，$U_\varepsilon(a,b) \subset A$ となる．実際，$a, b > 0$ を仮定すると，$(x,y) \in U_\varepsilon(a,b)$，すなわち $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \varepsilon$ ならば，$|x-a| < \frac{a}{2}$，すなわち $\frac{a}{2} < x$．同様に $\frac{b}{2} < y$．したがって，$xy > \frac{ab}{2} > 0$ であるから，$(x,y) \in A$ となる．$a, b < 0$ のときも同様に示せる．以上のことから，A は開集合である．

□ レポート問題の解

◇ **問題 7.6**

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}\cdot|x| \le \frac{|x|}{2}.$$

したがって，$\sqrt{x^2+y^2} < \delta = 2\varepsilon$ ならば，$|x| < 2\varepsilon$ であるから，$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$．したがって，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

◇ **問題 8.5** 問題 8.1 の結果から，$U_{\bar{\varepsilon}}(a,b) \subset U_{\varepsilon}(0,0)$ を満たす，$\bar{\varepsilon} > 0$ が存在する．また，

$$U'_{\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}}(a,b) \subset U_{\bar{\varepsilon}}(a,b), \quad U''_{\bar{\varepsilon}}(a,b) \subset U_{\bar{\varepsilon}}(a,b)$$

が成り立つので，$\varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}$, $\varepsilon'' = \bar{\varepsilon}$ とすればよい．

□ 問題の解 (その 2)

◇ **問題 5.2** 関数 $f(x)$ は一様連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{9.2}$$

が成り立つ．今，2 つの数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ を満たすとすると，上の δ に対してある $n_\delta \in \mathbf{N}$ が存在し，

$$n \geq n_\delta \implies |x_n - y_n| < \delta \tag{9.3}$$

が成り立つ．(9.2), (9.3) より，任意の $n \geq n_\delta$ に対して $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$，つまり，$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ が成り立つ．

注意：n_δ は δ に対して決まる数だが，δ は ε に依存して決まるので，結局 n_δ も ε に依存して決まる数である．

◇ **問題 7.1** (3)

$$\log(1 + x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \cdot \log\left(1 + x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2y^2}}.$$

$1 < (1+x)^{\frac{1}{x}} < 3$ より，$\left|\log\left(1 + x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2y^2}}\right| < \log 3$．したがって，例題 8 の結果より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\sqrt{x^2+y^2} < \delta = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\log 3}}$ ならば，

$$\left|\log(1 + x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right| < \frac{\varepsilon}{\log 3} \cdot \log 3 = \varepsilon$$

となり，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = 0$ を得る．対数関数の連続性から，$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = 1$.

(4)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| &= \left|\frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(1+\cos(x^2+y^2))}\right| \\
&= \left|\left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right)^2 \cdot \frac{x^2+y^2}{1+\cos(x^2+y^2)}\right| \leq x^2+y^2.
\end{aligned}$$

したがって，$\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\varepsilon}$ ならば，$|f(x,y)| < \varepsilon$ であるから，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0$.

(5) $f_n(x,y) := f(x,y)$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
f_n(x,y) &= \frac{x(1-y^n) - y(1-x^n) - x^n + y^n}{(1-x)(1-y)(x-y)} \\
&= \frac{(x-y) - x^n(1-y) + y^n(1-x)}{(1-x)(1-y)(x-y)} \\
&= \frac{1}{(1-x)(1-y)} - \frac{x^n}{(1-x)(x-y)} + \frac{y^n}{(1-y)(x-y)}
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f_n(x,y)-f_{n-1}(x,y) &= \frac{x^{n-1}(1-x)}{(1-x)(x-y)} - \frac{y^{n-1}(1-y)}{(1-y)(x-y)} \\ &= \frac{x^{n-1}-y^{n-1}}{x-y} \\ &= x^{n-2}+x^{n-3}y+\ldots+xy^{n-3}+y^{n-2} = \sum_{k+l=n-2,\ k,l\geq 0} x^k y^l. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} f_n(x,y) &= f_n(x,y)-f_1(x,y) \\ &= (f_n(x,y)-f_{n-1}(x,y)) + (f_{n-1}(x,y)-f_{n-2}(x,y)) + \ldots + (f_2(x,y)-f_1(x,y)) \\ &= \sum_{p=0}^{n-2}\left(\sum_{k+l=p,\ k,l\geq 0} x^k y^l\right) \end{aligned}$$

を得る．よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 1+2+\ldots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

♢ **問題 7.2** (1) $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ ならば，$|x-a|, |y-b| < \frac{\varepsilon}{2}$ であるから

$$|(x+y)-(a+b)| \leq |x-a|+|y-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

したがって，$f(x,y)=x+y$ は $\mathbf{R}^2$ 上連続である.

(3)

$$\begin{aligned} |\sqrt{xy}-\sqrt{ab}| &= \frac{xy-ab}{\sqrt{xy}+\sqrt{ab}} \\ &\leq \frac{|x-a|(|y-b|+|b|)+|a||y-b|}{\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

したがって，$\varepsilon > 0$ に対し，$\delta = \min\left\{1, \frac{\sqrt{ab}}{1+|a|+|b|}\varepsilon\right\}$ とおけばよい (第 7 回プリント, 例題 9 参照).

♢ **問題 7.3** (1) 対数関数 $\log x$ は $x>0$ に対して定義可能なので，$f(x,y)=\log(2x-x^2-y^2)$ は $D=\{(x,y) \mid 2x-x^2-y^2>0\}$ が定義域となる.

$$2x-x^2-y^2>0 \iff (x-1)^2+y^2<1$$

であるから，D は $(1,0)\in\mathbf{R}^2$ を中心とする半径 1 の円の内部 (境界を含まない) なので開集合である.

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-|x|-|y|}$ の定義域は $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 1-|x|-|y|\geq 0\}$ である．D は $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ を頂点とするひし形の境界とその内部からなる集合なので閉集合である.

♢ **問題 7.4** (1) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|\leq a, |y|>b\}$ の閉包は $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|\leq a, |y|\geq b\}$ であるから，A は閉集合ではない．また，$(a,2b)\in A$ に対し，どんな ε をとっても $U_\varepsilon(a,2b)\subset A$ とすることはできないので，開集合でもない.

(3) $A=\{(x,0)\in\mathbf{R}^2 \mid a<x<b\}$ の閉包は $\{(x,0)\in\mathbf{R}^2 \mid |a\leq x\leq b\}$ であるから閉集合ではない．また，$\left(\frac{a}{2},0\right)\in A$ に対し，どんな ε をとっても $U_\varepsilon\left(\frac{a}{2},0\right)\subset A$ とすることはできないので，開集合でもない.

◇ **問題 7.5** 集合 A の閉包は，$A \cup \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ である．A の各点が A の集積点であることは明らかであろう．ここでは $\{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ の各点が A の集積点であることを示す．

$y_0 \in [-1,1]$ に対し，$A_{y_0} = \left\{(x,y_0) \;\middle|\; y_0 = \sin\frac{1}{x}\ ,\ 0 < x \leq \frac{1}{2\pi}\right\} \subset A$ とおく．$(x,y_0) \in A_{y_0}$ ならば，

$$\begin{aligned} y_0 = \sin\frac{1}{x} &= \sin\left(2n\pi + \frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{x}{2n\pi x+1}}\right) \\ &= \sin\left((2n+1)\pi - \frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{x}{(2n+1)\pi x-1}}\right) \end{aligned}$$

であるから，A_{y_0} はある $x_0 \in \mathbf{R}$ を使って

$$A_{y_0} = \left\{\left(\frac{x_0}{2n\pi x_0+1}, y_0\right) \;\middle|\; n \in \mathbf{N}\right\} \cup \left\{\left(\frac{x_0}{(2n+1)\pi x_0-1}, y_0\right) \;\middle|\; n \in \mathbf{N}\right\}$$

と書ける．ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_0}{2n\pi x_0+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_0}{(2n+1)\pi x_0-1} = 0$$

であるから，$(0,y_0)$ は A_{y_0} の集積点，すなわち A の集積点となることがわかる．y_0 は $[-1,1]$ の任意の点だから，$\{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ の各点は A の集積点である．

◇ **問題 8.1** $(a',b') \in U_\varepsilon(a,b) \subset A$ とする．$\varepsilon' = \varepsilon - \sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2} > 0$ とおくとき，$U_{\varepsilon'/2}(a',b')) \subset U_\varepsilon(a,b) \subset A$．したがって，$(a',b')$ は A の内点である．

◇ **問題 8.2** (1) $p \in A_1 \cap A_2$ とする．$p \in A_1$ より，$U_{\varepsilon_1}(p) \subset A_1$ を満たす $\varepsilon_1 > 0$ が存在する．また，$p \in A_2$ より，$U_{\varepsilon_2}(p) \subset A_2$ を満たす $\varepsilon_2 > 0$ が存在する．$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと，$U_\varepsilon(p) \subset U_{\varepsilon_1}(p)$ かつ $U_\varepsilon(p) \subset U_{\varepsilon_2}(p)$ より，$U_\varepsilon(p) \subset A_1 \cap A_2$．したがって，$A_1 \cap A_2$ は開集合である．

また，$p \in A_1 \cup A_2$(すなわち $p \in A_1$ または $p \in A_2$) とする．$p \in A_1$ ならば，A_1 は開集合だから，ある $\varepsilon > 0$ が存在し $U_\varepsilon(p) \subset A_1 \subset A_1 \cup A_2$．したがって，$A_1 \cup A_2$ も開集合である ($p \in A_2$ のときも同様)．

(2) $p \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とすると，$p \in A_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が少なくとも一つ存在する．A_λ は開集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在し，$U_\varepsilon(p) \subset A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を満たす．したがって，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は開集合である．

一方，開集合系 $\left\{U_{1+\frac{1}{n}}(0,0)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対し，$\bigcap_n U_{1+\frac{1}{n}}(0,0) = Cl\left(U_1(0,0)\right)$ となり，これは閉集合である．

(3)(4) 補集合をとることにより，開集合は閉集合に，閉集合は開集合となる．さらに，

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c, \quad \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

が成り立つから，(3)(4) は (1)(2) に帰着される (ただし，A^c は集合 A の補集合を意味する)．

◇ **問題 8.3** (必要性)： f が原点で連続ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し，$(x,y) \in U_\delta(0,0)$ ならば $|f(x,y)| < 0$ が成り立つ．任意の $(x,y) \in C$ に対して $\left(\frac{\delta}{2}x, \frac{\delta}{2}y\right) \in U_\delta(0,0)$ であるから，

$$\varepsilon > \left|f\left(\frac{\delta}{2}x, \frac{\delta}{2}y\right)\right| = \frac{\delta}{2}|f(x,y)|,$$

すなわち，C 上では $|f(x,y)| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$ となる．

(十分性)： 任意の $(x,y) \in C$ に対して $|f(x,y)| < M$ が成り立つとする $(M > 0)$．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ とおけば，$0 \leq r < \delta$ に対して

$$|f(rx,ry)| = r|f(x,y)| < \delta M = \varepsilon,$$

つまり，$(x',y') \in U_\delta(0,0)$ ならば，$|f(x',y')| < \varepsilon$ が成り立つ．したがって，f は原点で連続である．

◇ 問題 8.4　示したいことは「任意の $(a,b) \in f^{-1}(I)$ に対し，$U_\delta(a,b) \subset f^{-1}(I)$ を満たす $\delta > 0$ が存在すること」である．また,「$U_\delta(a,b) \subset f^{-1}(I)$」は「$(x,y) \in U_\delta(a,b)$ ならば，$f(x,y) \in I$」と同値である．

$(a,b) \in f^{-1}(I)$ とする．I は開集合であるから，$U_\varepsilon(f(a,b)) \subset I$ を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する．f の連続性から，この ε に対して，ある $\delta > 0$ が存在し，$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$(すなわち $(x,y) \in U_\delta(a,b)$) ならば，$|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$ (すなわち $f(x,y) \in U_\varepsilon(f(a,b))$) が成り立つ．つまり，$U_\delta(a,b) \subset f^{-1}(I)$．したがって，$f^{-1}(I)$ は開集合である．