線形代数I演習

－ 第 13 回 連立 1 次方程式 －

担当：佐藤 弘康

基本問題 以下のことを確認せよ．

(1) 斉次連立 1 次方程式の自明解，非自明解（自明でない解）とは何か説明せよ．

(2) 斉次連立 1 次方程式の基本解とは何か説明せよ．

(3) 連立 1 次方程式の解の自由度とは何か説明せよ．

例題 **1.** 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = -4 \\ -x - y + 3z = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \tag{13.1}$$

の解を求めよ．

解．$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，連立一次方程式 (13.1) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表すことができる (行列表示)．ここで，行列 $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[E_1(-1)P_{12}E_{12}(3)E_{32}(-2)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 11 & 11 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_2\left(\frac{1}{3}\right)E_{13}(-1)E_{23}(4)E_3\left(\frac{1}{3}\right)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[P_{23}E_{13}(1)E_{32}(2)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

と変形できる．これより，(13.1) の解が $x = -2, y = 0, z = 1$ であることがわかる．

(別解) 行列 A の逆行列が存在し，$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ であるから，

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例題 2. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 2 \\ 2x + 3y + 7z = 1 \\ 3x + 5y + 3z = 3 \end{cases} \tag{13.2}$$

の解を求めよ．

解．$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，連立一次方程式 (13.2) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と行列表示することができる．ここで，行列 $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-2)E_{31}(-3)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_2(-1)E_{12}(2)E_{32}(-1)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と簡約階段行列に変形できる．これは (13.2) が方程式

$$\begin{cases} x + 26z = -4 \\ y - 15z = 3 \end{cases} \tag{13.3}$$

に簡約化できることを意味する（(13.2) の解の集合と (13.3) の解の集合は等しい）．$z = k$ とおくと $x = -4 - 26k$，$y = 3 + 15k$，つまり方程式 (13.2) の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } k \in \mathbf{R})$$

であり，解の自由度は 1 である．

問題 13.1. 次の方程式が解をもつかどうか調べ，解が存在するなら解を求めよ．また，解の自由度も求めよ．

(1) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ -3x+2y+2z=-1 \\ 5x+y-3z=-2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y-3z-4w=-6 \\ 2x+y+5z+w=-6 \\ 2x+2y+2z-3w=-10 \\ 3x+6y-2z+w=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=4 \\ 3x-2y+z=1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+2y+3z+4w=0 \\ 5x+6y+7z+8w=0 \\ 9x+10y+11z+12w=0 \\ 13x+14y+15z+16w=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x-2y-3z+w=3 \\ 2x+y-z=1 \\ -x-3y-2z+w=2 \\ 4x+7y+3z-2w=-3 \end{cases}$

問題 13.2. 次の方程式が解をもつための条件と，そのときの解を求めよ．

(1) $\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 2x+7y-4z=3 \\ 3x+7y-6z=a \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+z-w=a \\ -x+y-z+2w=b \\ -3x+2y-3z+5w=c \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-4y+10z=1 \\ 3x-2y-z=a \\ 5x-4y+2z=b \end{cases}$ (4) $\begin{cases} ax-by-z=0 \\ x+y-az=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

問題 13.3. 次のことを証明せよ．

(1) $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ が斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解ならば，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$，$c\boldsymbol{v}(c\in\mathbf{R})$ も $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}$ が $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解，$\boldsymbol{u}$ が $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解ならば，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解であることを示せ．

問題 13.4. 次の方程式が自明でない解をもつための条件を求めよ．

(1) $\begin{cases} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \end{cases}$

問題 13.5. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) $k = 1, 2, 3$ とするとき，各 k に対して方程式 $A\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}$ の自明でない解 $\boldsymbol{v}_k$ を一つ求めよ．

(2) (1) で求めたベクトル $\boldsymbol{v}_k$ を並べてできる 3 次正方行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP$ を求めよ．