行列の転置

- 行列 A の 行と列を入れ替えた行列 を「A の転置行列」といい, ${}^t\!A$ と書く.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{転置}]{} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  - ${}^t\!A$ の第 j 行は, A の第 i 列.
  - ${}^t\!A$ の第 i 列は, A の第 j 行.
  - A が $m \times n$ 型ならば, ${}^t\!A$ は $n \times m$ 型.
- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 = {}^t\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$.
- 「${}^t\!A = A$」 を満たす行列 A を対称行列という.
- 「${}^t\!A = -A$」 を満たす行列 A を交代行列という.

逆行列（１）

- 正方行列 A に対し,

$$AB = BA = E$$

を満たす行列 B を, 「A の逆行列」といい, $B = A^{-1}$ と書く.

- 【２次正方行列の場合】$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し, $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくと,

$$E = AA^{-1} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & az+bw \\ cx+dy & cz+dw \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} az + bw = 0 \\ cz + dw = 1 \end{cases}$$

２つの連立方程式を解くことにより, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を得る.

逆行列（２）

- A が正方行列ならば, 必ず逆行列 A^{-1} が存在するだろうか？
  - 零行列の逆行列が存在しないことは明らか.
  - 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は存在しない.

事実 $AB = O, A \neq O, B \neq O$ を満たす行列 A, B は逆行列を持たない.

$\because$ A^{-1} が存在すると仮定. $AB = O$ の両辺に左から A^{-1} をかけると,

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}O = O$$

となり, $B \neq O$ の矛盾する.（背理法）

- 正方行列 A の逆行列が存在するとき, A を正則行列とよぶ.
- 【２次正方行列の場合】$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則 $\iff$ $ad - bc \neq 0$

逆行列（３）応用例：連立方程式の解法

- （前回）連立方程式は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表すことができる.
ただし, A は係数行列, $\boldsymbol{b}$ は定数項ベクトル.

事実 A が正方行列, かつ正則（つまり, A^{-1} が存在）のとき, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ によって与えられる.

$\because$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

行列の例（３）

(6) 基本行列：３種類の特別な正方行列

（a）$A(i, j : c)$：(i, j) 成分が c で, 他は単位行列と同じ.

（b）$P(i, j)$：(i, j) 成分と (j, i) 成分は 1, (i, i) 成分と (j, j) 成分は 0, 他は単位行列と同じ.

（c）$M(i : c)$： (i, i) 成分が c で, 他は単位行列と同じ.

行列の基本変形

基本行列 M を行列 A に左（右）からかけた行列 MA（AM）は, A の

(a) 第 j 行（第 i 列）の c 倍を第 i 行（第 j 列）に加えた行列
(b) 第 i 行（列）と第 j 行（列）を入れ換えた行列
(c) 第 i 行（列）を c 倍した行列