問題 1.1. 次のベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ の (i) 長さ $|\vec{u}|, |\vec{v}|$, (ii) 内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ および (iii) $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角 θ の余弦 $(\cos\theta)$ の値を求めなさい．

(1) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に対し，$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = -2\vec{a} - \vec{b}$

問題 1.2. 次の空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を計算しなさい．また，内積 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$ および $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}$ を計算しなさい．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

問題 1.3. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ に対し，次を計算しなさい．

(1) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ (2) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (3) $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

問題 1.4. 次の空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交し，長さが 1 のベクトルを求めなさい．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

問題 1.5. 零ベクトルでないベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，次の問に答えなさい．[*1]

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ を 2 辺とする三角形の面積が $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ に等しいことを示しなさい．

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積が $|\vec{a}\times\vec{b}|$ に等しいことを示しなさい．

[*1] ヒント：$\triangle$OAB の面積は $\frac{1}{2}|\mathrm{OA}|\cdot|\mathrm{OB}|\sin\theta$ である（ただし $\theta = \angle\mathrm{AOB}$）．(1) はこれと内積の性質 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$，三角関数の性質 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて示せ．(2) はベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を成分表示し，$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ を示せばよい．