微積分 II 演習

— 第 3 回 関数の連続性 —

担当：佐藤 弘康

未発表問題： 1.3(1)(3), 1.7, 2.1, 2.2〜2.14

例題 5.　$\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x) = e^x$ が連続関数であることを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ．

解. $a \in \mathbf{R}$ で関数 $f(x)$ が連続とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つ $\delta > 0$ が存在することだから，与えられた ε に対して δ をどう定めるか考えれば良い．指数関数の性質から

$$|e^x - e^a| = e^{\min\{x,a\}}(e^{|x-a|} - 1) \leq e^a(e^{|x-a|} - 1)$$

だから，δ を $e^a(e^\delta - 1) = \varepsilon$ を満たすように定めれればよい．すなわち

$$\delta = \log(1 + e^{-a}\varepsilon).$$

問題 3.1. 「一様連続関数」の定義を述べよ．一般の「連続関数」との違いは何か?

問題 3.2. 次の関数 $f(x)$ が連続関数であることを示せ．また，一様連続かどうか考察せよ．

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad (x > 0)$

(2) $f(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbf{R})$

(3) $f(x) = \log x \qquad (x > 0)$

(4) $f(x) = e^{-|x|} \qquad (x \in \mathbf{R})$

(4) のヒント： 指数関数の性質：「$x \geq 0$ ならば，$0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$」を用いる．

例題 6. $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x) = \sin x$ が一様連続であることを証明せよ.

解. 任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対して,

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq |x-y|$$

が成り立つから,与えられた ε に対し $\delta = \varepsilon$ を選べば,一様連続の定義の条件を満たすことがわかる.

問題 3.3. 関数 $\sin^2 x$ は一様連続だが,関数 $(\sin x)^2$ は一様連続ではないことを証明せよ.

問題 3.4. $\mathbf{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対して

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{3.1}$$

を満たすとする.このとき,$f(x)$ がある点 $p \in \mathbf{R}$ で連続ならば,$f(x)$ は一様連続であることを示せ.

問題 3.5. 関数 $f(x)$ が開区間 (a, b) で一様連続ならば,$f(x)$ はこの区間で有界であることを証明せよ.

問題 3.6. 連続な関数 $f(x)$ が閉区間 $[0, 1]$ 上で $0 \leq f(x) \leq 1$ を満たすならば,$x_0 = f(x_0)$ を満たす $x_0 \in [0, 1]$ が少なくとも 1 つ存在することを示せ.
ヒント: 中間値の定理を用いる.

問題 3.7. ある区間で定義された 2 つの連続関数 $f(x)$, $g(x)$ が,すべての有理数 x に対して $f(x) = g(x)$ ならば,その区間全体で $f(x) = g(x)$ であることを示せ.

問題 3.8. I を区間とする.もし,I で連続なすべての関数が I で最大値をとれば,I は有界閉区間であることを証明せよ.

□ レポート問題の解説

◇ **問題 1.8 について**　一般に，数列 $\{a_n\}$ が収束すれば，$\{|a_n|\}$ も収束するが，逆は成り立たない．例えば,

(1) 振動する数列：$a_n = (-1)^n,\ a_n = (-1)^n k,\ a_n = \sin(n\pi - \frac{\pi}{2}) = (-1)^{n-1},\ a_n = \sin(\theta + n\pi)$ など

(2) $b\ (\neq 0)$ に収束する数列 b_n と振動する数列 a_n との積.

などが考えられる．

◇ **問題 2.9 の解**　(2) $a \leq b$ の両辺に $((-a)+(-b))$ を加えると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= a + ((-a)+(-b)) = (a+(-a)) + (-b) = 0 + (-b) = -b \\
(\text{右辺}) &= b + ((-a)+(-b)) = b + ((-b)+(-a)) \\
&= (b+(-b)) + (-a) = 0 + (-a) = -a
\end{aligned}
$$

より，$-b \leq -a$ を得る．また同様に，$-b \leq -a$ の両辺に $(a+b)$ を加えることにより，$a \leq b$ を得る．

(3) (2) において $b = a$，$a = 0$ とすれば (3) の主張が得られる．

(4) これは公理群 II そのもの．この条件は「$a \geq 0,\ b \geq 0$ ならば，$ab \geq 0$」と同値である．