拡大と縮小

- $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  (1) $k > 1$ のとき，x 軸方向の拡大

  (2) $0 < k < 1$ のとき，x 軸方向の縮小

  (3) $k < 0$ のとき，x 軸方向に “裏返して” 拡大，縮小

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

  (1) $k > 1$ のとき，y 軸方向の拡大

  (2) $0 < k < 1$ のとき，y 軸方向の縮小

  (3) $k < 0$ のとき，y 軸方向に “裏返して” 拡大，縮小

せん断

行列 $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ によって定まる線形変換をせん断という（$k \in \mathbf{R}$）.

問題 3.4. *Mathematica* 実習で使ったノートブック `im3-ex3.2.nb` の 3.1) を利用し，せん断とはどのような変換か調べなさい.

$\mathbf{R}^2$ の原点を中心とする回転

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

問題 3.5. 三角関数の定義と性質を用いて，以下のことを確かめなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を原点を中心に θ だけ回転すると $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ となる.

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を原点を中心に θ だけ回転すると $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ となる.

問題 3.6. *Mathematica* 実習で使ったノートブック `im3-ex3.2.nb` の 3.2) を利用し，R_θ が回転変換となることを確かめなさい.

線形変換 R_θ が回転を表すことの説明

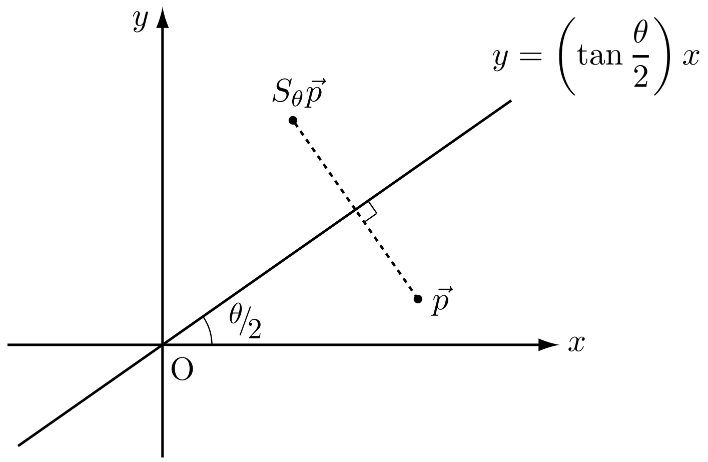
どんな平面ベクトル $\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ も基本ベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を用いて $\vec{p} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ と表すことができる．ここで

$$R_\theta \vec{p} = R_\theta(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) = R_\theta(a\vec{e}_1) + R_\theta(b\vec{e}_2) = aR_\theta\vec{e}_1 + bR_\theta\vec{e}_2$$

となるが，$aR_\theta\vec{e}_1$，$bR_\theta\vec{e}_2$ はそれぞれ $a\vec{e}_1$，$b\vec{e}_2$ を θ だけ回転させたベクトルだから（問題 3.4 より），その和 $(aR_\theta\vec{e}_1 + bR_\theta\vec{e}_2)$ も $(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2)$ を θ だけ回転させたベクトルである．したがって，R_θ は θ-回転を表す行列である．

直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ に関する鏡映変換

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$



問題 **3.7.** 鏡映変換[*1] S_θ とはどのような変換か？ その定義を述べなさい

[*1] 「反射」ともいう．*Mathematica* 実習で使ったノートブック `im3-ex3.2.nb` の 3.3) を参照．