１変数関数の極値

- 極値とは？
  → 局所的な最大値, または最小値のこと.
- $f(a)$ が関数 $f(x)$ の極大値 $\iff$ 「$0<|h|<\varepsilon$ ならば, $f(a)>f(a+h)$」
  $f(a)$ が関数 $f(x)$ の極小値 $\iff$ 「$0<|h|<\varepsilon$ ならば, $f(a)<f(a+h)$」
- 極大値と極小値を合わせて「極値」という.
- 極値とは, 「関数の増減が入れかわる点」と解釈できる.
- $f(x)$ が $x=a$ で極大値をとるとする. $h>0$ に対し,
  - $a-h<x<a$ においては, $f(x)$ は増加関数なので, $f'(x)>0$
  - $a<x<a+h$ においては, $f(x)$ は減少関数なので, $f'(x)<0$

  よって, このとき, $f'(a)=0$ である（極小の場合も同様）.

定理 1. (i)　「$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる」 $\implies$ $f'(a)=0$

関数の増減とその導関数の符号

定義　関数 $f(x)$ が区間 $[\alpha,\beta]$ で単調増加（減少）関数である.
$\iff \alpha \leqq x_1 < x_2 \leqq \beta$ ならば, $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ である.

- $x=a$ のまわりで $f(x)$ が増加関数ならば,
  - $h>0$ ならば $f(a)<f(a+h)$, つまり $0<\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)$
  - $h<0$ ならば $f(a+h)<f(a)$, つまり $0<\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)$

  $\therefore f'(a)>0$
- したがって, ある区間で $f'(x)\begin{cases} >0 \implies & f(x) \text{ は増加関数} \\ <0 \implies & f(x) \text{ は減少関数} \end{cases}$
- 同様に, ある区間で $f''(x)\begin{cases} >0 \implies & f'(x) \text{ は増加関数} \\ <0 \implies & f'(x) \text{ は減少関数} \end{cases}$

⋮

１変数関数の極値（判定条件）

定理 1. (i)　「$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる」 $\implies$ $f'(a)=0$

- 主張の逆『$f'(a)=0 \implies$「$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる」』は正しくない！

例）$f(x)=x^3$ は $f'(0)=0$ を満たすが, 単調増加関数（教科書 p.33）

- $f'(a)=0$ のとき, テイラーの定理より, $x=a$ のまわりで

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(c_x)}{2}(x-a)^2$$

  - c_x は, a と x の間にある数.（平均値の定理を思い出そう）
  - x が a に十分近い値ならば, c_x も当然 a に十分近い値である.
  - $f''(a)<0$ ならば, $f''(x)$ の連続性より, $f''(c_x)<0$.　$\therefore f(x)<f(a)$

定理 1. (ii)　$f'(a)=0$ かつ $\begin{cases} f''(a)<0 \implies & f(a) \text{ は極大値} \\ f''(a)>0 \implies & f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$

２次導関数の符号と関数の凸（凹）性

- ある区間で $f''(x)\begin{cases} >0 \implies & f(x) \text{ は凸関数（下に凸）} \\ <0 \implies & f(x) \text{ は凹関数（上に凸）} \end{cases}$　(p.70 定理 2.)

（「関数の凹凸」の定義と幾何的な意味は, 教科書 p.70 を参照）

- 関数の凹凸が入れかわる点 $(a, f(a))$ を「$y=f(x)$ の変曲点」という.

２変数関数の極値

- $f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の極大値
  $\iff$ 「$0<|h|,|k|<\varepsilon$ ならば, $f(a,b)>f(a+h,b+k)$」
  $f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の極小値
  $\iff$ 「$0<|h|,|k|<\varepsilon$ ならば, $f(a,b)<f(a+h,b+k)$」
- $f(a,b)$ が関数 $f(x,y)$ の極値
  $\iff$（任意の h,k に対し）$F(t)=f(a+ht,b+kt)$ は, $t=0$ で極値をとる.

定理 1. を上の $F(t)$ に適用してみる.（定理 2. [I]）

(i)（任意の h,k に対し）$F(t)$ が $t=0$ で極値をとる.
$\implies$（任意の h,k に対し）$F'(0)=0$
$\iff$（任意の h,k に対し）$f_x(a,b)\,h+f_y(a,b)\,k=0$
$\iff f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$

２変数関数の極値（判定条件）

定理 1. を上の $F(t)$ に適用してみる.（定理 2. [II]）

(ii)（任意の h,k に対し）$F'(0)=0$ かつ $\begin{cases} F''(0)<0 \implies & F(0) \text{ は極大値} \\ F''(0)>0 \implies & F(0) \text{ は極小値} \end{cases}$

- 合成関数の微分の公式より,

$$\begin{aligned} F''(0) &= f_{xx}(a,b)\,h^2+2f_{xy}(a,b)\,hk+f_{yy}(a,b)\,k^2 \quad (\leftarrow \text{平方完成する}) \\ &= f_{xx}(a,b)\left\{\left(h+\frac{f_{xy}(a,b)}{f_{xx}(a,b)}\cdot k\right)^2-\frac{\{f_{xy}(a,b)\}^2-f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)}{\{f_{xx}(a,b)\}^2}\cdot k^2\right\} \end{aligned}$$

- $D(a,b)>0$ のとき：h,k の選び方によって $F''(0)$ を正にも負にもできる.
- $D(a,b)<0$ のとき：$f(a,b)$ は極値となる.
- $D(a,b)=0$ のとき：$f(a,b)$ が極値か否かは判定できない.
  例）$f(x,y)=x^4\pm y^4$（$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ かつ $D(0,0)=0$ を満たす）.