1 変数関数の積分：不定積分

不定積分

- 関数 $f(x)$ に対し, $F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ のことを「$f(x)$ の**原始関数**」という.
- $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば, 任意の定数 C を加えた関数 $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である.
（つまり, $f(x)$ の原始関数は一意には決まらず, 無数にある）
- $F(x) + C$ のことを「$f(x)$ の不定積分」とよび, $\int f(x)\,dx$ と書く;

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (C \text{ を積分定数とよぶ})$$

1 変数関数の積分：定積分（リーマン和）

リーマン和

- $f(x)$：区間 $[a, b]$ で定義された有界な関数（つまり, $|f(x)| < K$ を満たす）
- 区間 $[a, b]$ を n 個の小区間に分割
  - 区間内に $(n-1)$ 個の分点を選ぶ；$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
  （このような大小関係をもつ点を「$[a, b]$ の分割」とよび, Δ と書く）
  - $[a, b]$ は $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ に分割される.
  分割 Δ のノルム $\|\Delta\| := \max_k (x_k - x_{k-1})$（小区間の幅の最大値）
- 各小区間 I_k から ξ_k を適当に選ぶ（つまり, $x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k$）.
- 次の和を**リーマン和**という；

$$R(\Delta; \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$$

1 変数関数の積分：定積分（定義）

定積分

- $f(x)$ のリーマン和の極限

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} R(\Delta; \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$$

が, 分割 Δ と点 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ の選び方に依らずに一定値 I に収束するとき, この I を「$f(x)$ の $[a, b]$ における**定積分**」とよび,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

と書く.

- $f(x) \geqq 0$ かつ連続関数ならば, $\int_a^b f(x)\,dx$ は, 「平面内の曲線 $y = f(x)$ と, 3 つの直線 $x = a, x = b, x$ 軸で囲まれた領域」の**面積**と解釈できる.

1 変数関数の積分：定積分（計算方法）

微分積分学の基本定理

$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおく. このとき, $S'(x) = f(x)$ が成り立つ. つまり,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

- このことから, $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数のひとつであることがわかる.
つまり, $S(x) = F(x) + C$ と書ける（$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数. C は定数）.
- （定義から）$S(a) = 0$ と定めると, $C = -F(a)$ である. したがって,

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

2 変数関数の積分：2 重積分の定義

- $f(x, y)$：領域 Ω で定義された有界な関数 $(|f(x, y)| < K)$
- 領域 Ω を m 個の小領域 $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ に分割.
- 各小領域 Ω_k から 点 (ξ_k, η_k) を適当に選ぶ.
- 次の和をリーマン和という；

$$R(\Delta; \{(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_m, \eta_m)\}) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k, \eta_k)\,S(\Omega_k)$$

- Ω の分割 Δ を限りなく細かくしていくとき, このリーマン和が分割の仕方と点 (ξ_k, η_k) の選び方に依らずに一定値 I に近づくとき, この I を「領域 Ω における $f(x, y)$ の **2 重積分**」とよび,

$$I = \iint_\Omega f(x, y)\,dxdy$$

と書く.

2 変数関数の積分：累次積分（2 重積分の計算）

- 2 重積分は**累次積分**によって求めることができる.
- **累次積分**とは, 1 変数関数の定積分の繰り返し行うこと.

2 重積分の計算

- 領域 Ω が $a \leqq x \leqq b, \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)$ と表されるならば,

$$\iint_\Omega f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right\} dx.$$

- 領域 Ω が $\psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y), \alpha \leqq y \leqq \beta$ と表されるならば,

$$\iint_\Omega f(x, y)\,dxdy = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx \right\} dy.$$