# 線形代数 II 演習

− 第 7 回 余因子行列，クラメールの公式 −

担当：佐藤 弘康

**例題 1.** 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

の行列式と余因子行列を求めよ．

**解.** 第 1 列について $|A|$ を余因子展開すると

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) + (-1) \times (-12) = 6.$$

次に，余因子行列を求める．各小行列 $A_{ij}$ の行列式は

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -12, \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9, \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6, \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

となるので，余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 9 \\ -4 & 8 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

また，定理 3.51(教科書 p.84) より，逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である (第 1 回プリントの問題 1.1)．

**問題 7.1.** 次の行列の行列式と余因子行列を求め，$A \cdot \widetilde{A} = |A|E_3$ が成り立つことを確認せよ．さらに，正則なら逆行列を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**例題 2.** 次の連立方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{cases} \tag{7.1}$$

**解.** 連立方程式 (7.1) を行列を用いて書き直すと

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．クラーメルの公式より，

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}.$$

各行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -26, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 26, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -52, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -26$$

であるから，(7.1) の解は $x = 1, y = -1, z = 2$.

**問題 7.2.** クラメールの公式を用いて，次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 12 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + z = 11 \end{cases}$$

問題. 次の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

解. 各列が 1 から $n$ までの自然数をそれぞれ 1 個ずつ成分に持つことに着目し，第 2 列から第 $n$ 列を第 1 列に加える：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

「第 $i$ 行に第 $(i-1)$ 行を $(-1)$ 倍して加える」という操作を $i=n$ から 2 まで (下の行から順番に) 行っていくと

$$= \frac{n(n+1)}{2} \left|\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 0 & 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right|$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

ここで,

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

であるから，問題 3.4(2) の結果を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-1}(n+1)$$

を得る.