確率測度空間の Fisher 情報計量と距離関数

伊藤　光弘　(筑波大学 数理物質系)[*1]
佐藤　弘康　(日本工業大学 工学部)[*2]

1. $(M, d\theta)$ を, 正規化体積測度 $d\theta$ をもつコンパクト連結 C^∞–多様体とする. M 上の確率測度空間 $\mathcal{P}^+(M)$ を M 上 $d\theta$–絶対連続な確率測度 μ で M 上正値連続な密度関数 $f = f(x)$, $x \in M$ をもつものからなるとする. $\mathcal{P}^+(M)$ の位相は, 埋め込み $\rho : \mathcal{P}^+(M) \to L^2(M, d\theta)$; $\mu = f(x)d\theta \mapsto 2\sqrt{f(x)}$ による誘導位相とする.

$\mathcal{P}^+(M)$ の各接空間 $T_\mu\mathcal{P}^+(M)$ には, 正定値計量である Fisher 計量 G が定義される. 計量 G の Levi-Civita 接続 ∇, Riemann 曲率テンソル R^∇ が求められ, $(\mathcal{P}^+(M), G)$ は, 測地的に完備でない曲率一定の空間(曲率 1/4) である ([2, 3, 4] 参照).

2. Fisher 計量 G に関する測地線および指数写像を調べることによって, 以下に述べる結果がえられたので報告いたします.

定理 1([3, 4]). μ, $\mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ を結ぶ, 弧長 $\ell = \ell(\mu, \mu_1)$ の測地線分 $\gamma : [0, \ell] \to \mathcal{P}^+(M); t \mapsto \gamma(t)$ が一意的に存在する. ここに, 弧長関数 $\ell : \mathcal{P}^+(M) \times \mathcal{P}^+(M) \to [0, \pi)$ は $\cos\dfrac{\ell(\mu,\mu_1)}{2} = \displaystyle\int_{x\in M}\sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu}}(x)d\mu(x)$ で与えられる.

注. 弧長関数 $\ell(\mu, \mu_1)$ は

$$\cos\frac{\ell(\mu,\mu_1)}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left|\sqrt{f_1} - \sqrt{f}\right|_{L^2}^2, \quad \mu = f(x)d\theta,\, \mu_1 = f_1(x)d\theta$$

をみたす.

定理 2. Fisher 計量 G に関する距離 $d_G(\mu, \mu_1)$, μ, $\mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ は, μ, μ_1 を一意的に結ぶ最短測地線分の長さ $\ell = \ell(\mu, \mu_1)$ で与えられる.

注. $\ell(\mu, \mu_1)$ が距離を与えるというコメントが [2] に述べられているが, 証明は与えられていない.

3. 全正規近傍存在定理, Gauss の補題, 最少弧長曲線定理が有限次元 Riemann 多様体上と同様に $\mathcal{P}^+(M)$ においても成立する ([1] 参照). 定理 1 および次に述べる諸命題を用いて定理 2 は示される.

指数写像 $\exp_\mu : T_\mu\mathcal{P}^+(M) \to \mathcal{P}^+(M)$ は接空間の ε–球近傍 $\mathcal{B}(\mu; \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \pi$ から $\mathbf{B}(\mu, \varepsilon) := \{\mu_1 \in \mathcal{P}^+(M) | \, \ell(\mu, \mu_1) < \varepsilon\}$ 上への全単射を与える. さらに L^2–norm を用いて $\mathbf{B}(\mu, \varepsilon)$ は

$$\mathbf{B}(\mu,\varepsilon) = \left\{\mu_1 = f_1(x)\,d\theta \;\middle|\; \left|\sqrt{f_1(x)} - \sqrt{f(x)}\right|_{L^2} < \sqrt{2}\sqrt{1-\cos(\varepsilon/2)}\right\},\ \mu = f(x)d\theta$$

と表される. L^2–norm の 3 角不等式から

[*1] 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1
e-mail: itohm@math.tsukuba.ac.jp
[*2] 〒345-8501 埼玉県南埼玉郡宮代町学園台 4-1
e-mail: hiroyasu@nit.ac.jp

命題 3.（全正規近傍存在定理） $W := \mathbf{B}(\mu, \varepsilon/4)$, $0 < \varepsilon < \pi$ は $\mu \in \mathcal{P}^+(M)$ における正規近傍を与える. すなわち W は, $\forall \mu_1 \in W$ について

(i) $W \subset \mathbf{B}(\mu_1, \varepsilon)$,

(ii) $\exp_{\mu_1} : \mathcal{B}(\mu_1, \varepsilon) \xrightarrow{\cong} \mathbf{B}(\mu_1, \varepsilon)$

をみたす. この性質をもつ正規近傍は全正規近傍と呼ばれる.

命題 4.（Gauss の補題） $f(t, \tau) := \exp_\mu(t\ \tau)$, $t > 0$, $\tau \in T_\mu \mathcal{P}^+(M)$, $|\tau|_G = 1$ とすると, 動径ベクトル $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ と t–一定束縛ベクトル $\dfrac{\partial f}{\partial \tau}$ は Fisher 計量 G について直交する;

$$G_{\gamma(t)}\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial \tau}\right) = 0.$$

ただし，$\gamma(t) := \exp_\mu(t\tau)$ は測地線.

命題 5.（最少弧長曲線定理） $\mathbf{B}(\mu, \varepsilon) := \exp_\mu \mathcal{B}(\mu, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \pi$ とする．$\gamma : [0, 1] \to \mathbf{B}(\mu, \varepsilon)$ は測地線, $\gamma(0) = \mu$，$c : [0, 1] \to \mathcal{P}^+(M)$ を任意の 区分的に C^1–曲線で, $c(0) = \gamma(0)$, $c(1) = \gamma(1)$ とする．このとき, 弧長不等式 $\mathcal{L}(\gamma) \leq \mathcal{L}(c)$ がいえる．等号成立は $\gamma([0, 1)) = c([0, 1])$ のときである．

参考文献

[1] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser Basel, 1992.

[2] T. Friedrich, Die Fisher-Information und symplektische Strukturen, Math. Nachr., **153** (1991), 273-296.

[3] 伊藤 光弘, 重心写像の Fisher 情報幾何, 東京理科大学連続講演記録, 2015.

[4] M. Itoh and H. Satoh, Geometry of Fisher information metric and the barycenter map, Entropy, **17** (2015), 1814-1849.