解析 I 演習 (2 学期：ベクトル解析)

－ 第 2 回 ベクトルの外積 －

担当：佐藤 弘康

◇ **外積**　2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \tag{2.1}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**(または**ベクトル積**) と呼ぶ．$\mathbf{R}^3$ の標準的な正規直交基底

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \quad \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$$

を用いて，形式的に

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

と表すこともできる．特に，標準基底については

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

が成り立つ．また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta \tag{2.3}$$

がなりたつ．(2.3) の右辺は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を 2 辺にもつ平行四辺形の面積に等しい．

◇ **スカラー 3 重積**　3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \rangle$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の**スカラー 3 重積**と呼び $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ で表す．$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3), \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ のとき，

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

となる．また，$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ の絶対値は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺にもつ平行六面体の体積に等しい．

□ **外積に関する基本事項**　以下のことを確かめよ．

(1) (歪対称性)：$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

(2) (双線形性)：$(\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2) \times \boldsymbol{b} = \lambda_1(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}) + \lambda_2(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}), \quad (\lambda_2, \lambda_2 \in \mathbf{R})$

(3) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \rangle = 0$

(4) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \rangle$

問題 2.1. $\boldsymbol{a} = (1,2,3), \boldsymbol{b} = (2,-1,1), \boldsymbol{c} = (3,1,-2)$ に対し，$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ と $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ を計算せよ.

問題 2.2. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$ を満たす零でないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は互いに直交することを示せ.

問題 2.3. 与えられたベクトル $\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ に対し,

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle, \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$

が成り立つとする．このとき，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ が成立するかどうか考察せよ.

問題 2.4. 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し,

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]\boldsymbol{e}_1 + [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_3]\boldsymbol{e}_2 + [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}]\boldsymbol{e}_3$$

が成り立つことを示せ.

問題 2.5. 次の等式を証明せよ.

(1) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \boldsymbol{b} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{c}$

(2) $\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \rangle - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{d} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$

(3) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] \cdot [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}] = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{y} \rangle & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{z} \rangle \\ \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \rangle & \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{z} \rangle \\ \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \rangle & \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{z} \rangle \end{vmatrix}$

問題 2.6. $\boldsymbol{a}' = A_{11}\boldsymbol{a} + A_{12}\boldsymbol{b} + A_{13}\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}' = A_{21}\boldsymbol{a} + A_{22}\boldsymbol{b} + A_{23}\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}' = A_{31}\boldsymbol{a} + A_{32}\boldsymbol{b} + A_{33}\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表されるとき,

$$[\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'] = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$$

が成り立つことを示せ.

問題 2.7. 四面体の各面の直交する外向きのベクトルで，長さがそれぞれの面の面積に等しい 4 つのベクトルの和は零になることを示せ.

□ **レポート問題** (提出期限：9 月 28 日)

問題 2.8. $\boldsymbol{a} = (1, -1, 1), \boldsymbol{b} = (2, 4, 2), \boldsymbol{c} = (1, 1, 2)$ に対して，次の関係式を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle = 0.$$

問題 2.9. 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}}{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]}, \quad \boldsymbol{b}' = \frac{\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}}{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]}, \quad \boldsymbol{c}' = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})]} \tag{2.5}$$

とおく．このとき，

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ は次の関係を満たすことを示せ：

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}' \rangle = 1, \\ \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}' \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}' \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}' \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}' \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}' \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}' \rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し

$$\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}' \rangle \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}' \rangle \boldsymbol{b} + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}' \rangle \boldsymbol{c}$$

が成り立つことを示せ.

(3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し (2.6) を満たすベクトルの組 $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ はただ 1 つ存在することを示せ.

問題 2.10. 三角形 ABC の面積を S，この三角形の座標平面への正射影した三角形の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とするとき，

$$S^2 = {S_1}^2 + {S_2}^2 + {S_3}^2$$

が成り立つことを示せ.