

# Trabalho Prático: Transição de Fase no Problema 3-SAT e 5-SAT

Professor: Prof. Dr. Alexandre Arruda  
Disciplina: Lógica para Computação

## Observações

- Limite de Participantes: até 3 (mais que isso haverá penalização 20% por cada novo membro).
- Linguagem de programação: Python
- Data limite para entrega: 25/02/2025

## Objetivo

O objetivo deste trabalho é investigar o fenômeno de **transição de fase** no problema da satisfazibilidade booleana (SAT), com foco nos casos 3-SAT e 5-SAT. Os alunos deverão identificar o ponto crítico  $\alpha_c$  (razão cláusulas/variáveis) onde ocorre a transição de fase, analisando como a probabilidade de uma instância ser satisfazível varia em função de  $\alpha$ .

## Contexto Teórico

### O Problema SAT

O problema SAT consiste em determinar se existe uma atribuição de valores verdadeiros (verdadeiro ou falso) para as variáveis de uma fórmula booleana que a torne verdadeira. No caso do  $k$ -SAT, a fórmula está na forma normal conjuntiva (CNF), com exatamente  $k$  literais por cláusula. Por exemplo:

- No 3-SAT, cada cláusula tem exatamente 3 literais (e.g.,  $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$ ).
- No 5-SAT, cada cláusula tem exatamente 5 literais.

### O Fenômeno de Transição de Fase

Um fenômeno interessante observado no  $k$ -SAT é a **transição de fase**. Esse fenômeno ocorre em função da razão  $\alpha = \frac{m}{n}$ , onde:

- $m$  = número de cláusulas,
- $n$  = número de variáveis.

À medida que  $\alpha$  aumenta, o comportamento do problema muda drasticamente:

### 1. Fase Subcrítica ( $\alpha < \alpha_c$ ):

- Para valores baixos de  $\alpha$ , há poucas cláusulas em relação ao número de variáveis.
- Nessa fase, as instâncias são **quase sempre satisfazíveis**, pois é mais fácil encontrar uma atribuição que satisfaça todas as cláusulas.

### 2. Fase Supercrítica ( $\alpha > \alpha_c$ ):

- Para valores altos de  $\alpha$ , há muitas cláusulas em relação ao número de variáveis.
- Nessa fase, as instâncias são **quase sempre insatisfazíveis**, pois as cláusulas entram em conflito, tornando impossível satisfazer todas simultaneamente.

### 3. Ponto Crítico ( $\alpha = \alpha_c$ ):

- Existe um valor crítico  $\alpha_c$  onde ocorre uma **transição abrupta** entre as duas fases.
- Nesse ponto, a probabilidade de uma instância ser satisfazível cai rapidamente de quase 1 para quase 0.

Esse comportamento é análogo às transições de fase em sistemas físicos, como a mudança de estado da água de líquido para sólido. No contexto do SAT, a transição de fase tem implicações importantes para a complexidade computacional: instâncias próximas ao ponto crítico  $\alpha_c$  são geralmente as mais difíceis de resolver.

## Tarefas

### 1. Geração de Instâncias

- Implemente um gerador de instâncias aleatórias para o 3-SAT e o 5-SAT. O gerador deve receber como entrada:
  - O número de variáveis  $n$ .
  - O número de cláusulas  $m$ .
  - O valor de  $k$  (3 para 3-SAT, 5 para 5-SAT).
- Certifique-se de que as cláusulas sejam geradas aleatoriamente, sem repetições e sem literais contraditórios na mesma cláusula.

### 2. Resolução das Instâncias

- Utilize o solver **PySAT**, em Python, para determinar se cada instância gerada é satisfazível ou não.
- Para cada valor de  $\alpha$ , gere um conjunto de instâncias (por exemplo, 30 instâncias) e calcule a probabilidade de satisfazibilidade.
- Rode seu algoritmo para  $n = 50$ ,  $n = 100$ ,  $n = 150$  e  $n = 200$ . Variando a quantidade de cláusulas para cada um conforme o valor de  $\alpha$ .

### 3. Análise da Transição de Fase

- Varie  $\alpha$  em um intervalo adequado (por exemplo, de 1 a 10 para o 3-SAT e de 1 a 20 para o 5-SAT, com incrementos de 0.1) e plote um gráfico da probabilidade de satisfazibilidade em função de  $\alpha$ .
- Identifique visualmente o ponto crítico  $\alpha_c$  onde ocorre a transição de fase.

- Calcule o tempo médio de execução para cada  $\alpha$  usado.
- Compare os resultados obtidos para o 3-SAT e o 5-SAT. Como o valor de  $\alpha_c$  varia entre os dois casos?

#### 4. Relatório

- Elabore um relatório contendo:
  - Descrição do método utilizado para gerar e resolver as instâncias.
  - Gráficos da probabilidade de satisfazibilidade em função de  $\alpha$  para o 3-SAT e o 5-SAT.
  - Discussão sobre os resultados, incluindo a estimativa do ponto crítico  $\alpha_c$  para ambos os casos.
  - Tempo médio de execução para cada  $\alpha$  testado. Faça um gráfico do tempo.
  - Reflexão sobre as diferenças observadas entre o 3-SAT e o 5-SAT.

## Entregáveis

1. Código fonte do gerador de instâncias e do resolvidor SAT utilizado.
2. Gráficos da probabilidade de satisfazibilidade em função de  $\alpha$ .
3. Gráfico do tempo médio para cada  $\alpha$ .
4. Relatório descritivo com análise dos resultados.

## Critérios de Avaliação

- Corretude e eficiência do gerador de instâncias.
- Qualidade da análise e dos gráficos apresentados.
- Clareza e profundidade do relatório.
- Originalidade e criatividade na abordagem.

## Dicas

- Comece com um número pequeno de variáveis ( $n = 50$ ) para testar seu código.
- Consulte a literatura para comparar seus resultados com valores teóricos conhecidos.