Отчет по лабораторной работе №5

Модель хищник-жертва

Ширяев Кирилл Владимирович

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Ознакомиться с моделью “хищник-жертва” и построить графики по этой модели.

Задание

Вариант 39

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.67x(t) + 0.067x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.66y(t) - 0.065x(t)y(t) \end{cases}$$

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 9$, $y_0 = 19$. Найти стационарное состояние системы.

#Теоретическая справка Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях: 1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории) 2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает 3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными 4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается 5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, ñ - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения)(рис. @fig:001).

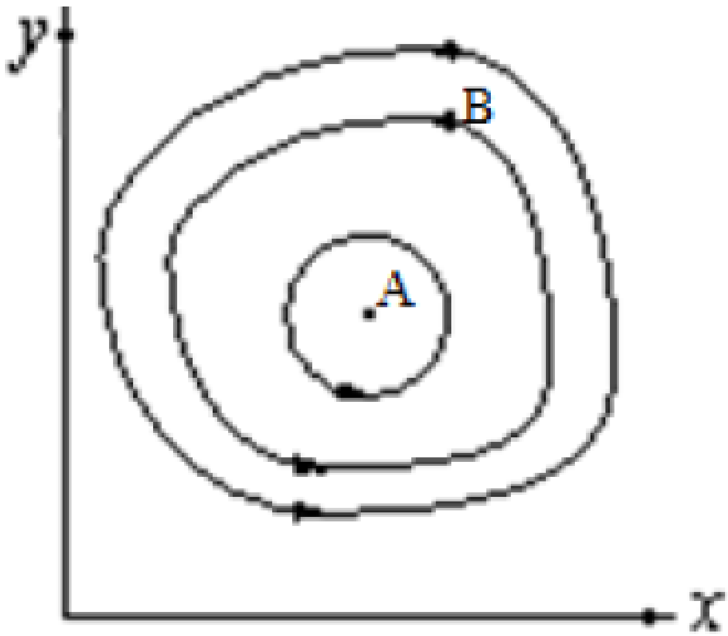

Рис. 0.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}$, $y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0)$,$y(0)$. Колебания совершаются в противофазе. При малом изменении модели

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y), \quad \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3 (рис. @fig:002).

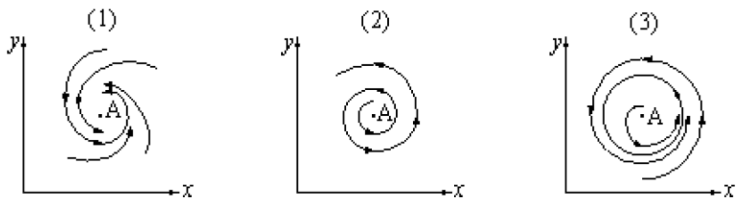

Рис. 0.2: Мягкая модель борьбы за существование

В случае 1 равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием A с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости

Выполнение лабораторной работы

Библиотеки

Подключаю все необходимые библиотеки

```
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

Значения

Ввод значений из своего варианта (39 вариант)

```
a=0.67
b=0.067
c=0.66
d=0.065
x0=np.array([9,19])
t=np.arange(0,400,0.1)
```

Решение

Решение системы

```
def syst(x,t):
    dx_1=-a*x[0]+b*x[0]*x[1]
    dx_2=c*x[1]-d*x[0]*x[1]
    return [dx_1, dx_2]

y=odeint(syst, x0, t)
```

Вывод графика №1

Вывод графика зависимости численности хищников от численности жертв(рис. @fig:003).

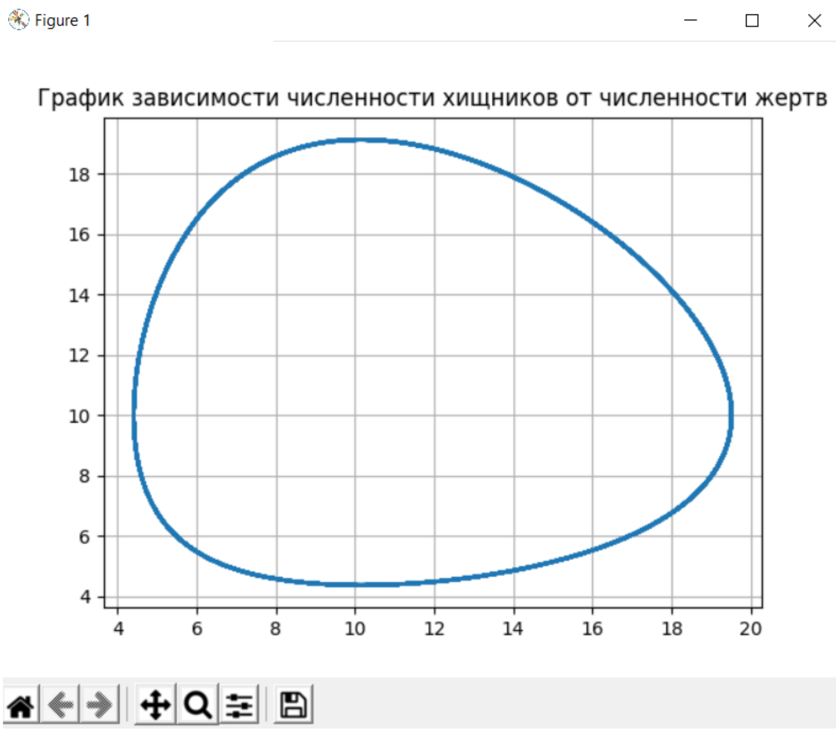

Рис. 0.1: Вывод графика №1

Вывод графика №2

Вывод графика изменения численности хищников(рис. @fig:004).

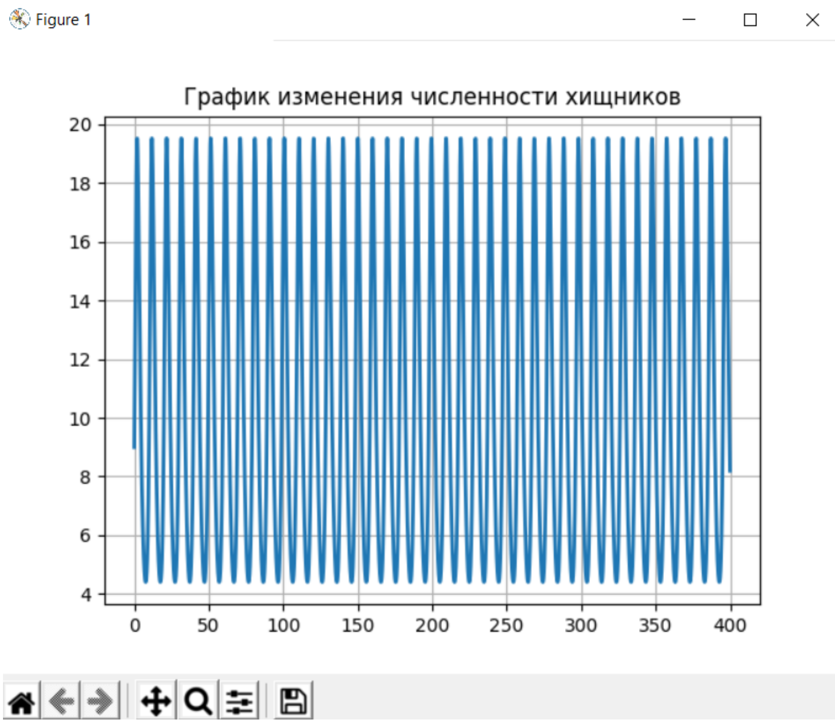

Рис. 0.2: Вывод графика №2

Вывод графика №3

Вывод графика изменения численности жертв(рис. @fig:005).

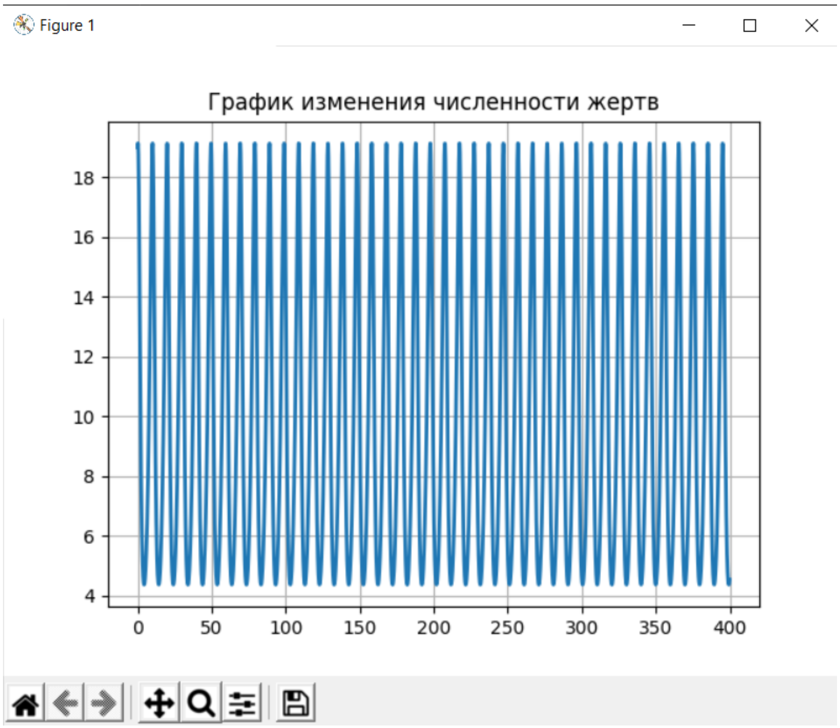

Рис. 0.3: Вывод графика №3

Стационарное состояние системы

Система будет стационарна в точке с координатами (10.153846153846153 10.0)

Выводы

Я ознакомился с моделью "хищник-жертва", построила графики по этой модели и нашла стационарное состояние системы.