点集拓扑作业 (12)

> Problem 1 证明 $\mathbb{R}$ 的单点紧致化同胚于 $\mathbb{S}^1$.

先证明 $\mathbb{R}$ 同胚于 $\mathbb{S}^1-\{(0,1)\}$. 注意到函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1-\{(0,1)\}, f(x)=\left(\dfrac{2x}{x^2+1},\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ 是同胚映射. 接下来证明 $\overline{\mathbb{S}^1-\{(0,1)\}}=\mathbb{S}^1$. 只需证明 $\mathbb{S}^1-\{(0,1)\}$ 不是闭集, 即 $\{(0,1)\}$ 不是开集, 这是显然的, 否则 $\exists B$ 是基元素, $B\subseteq\{(0,1)\}, B=\{(0,1)\}$, 这与基元素的定义矛盾. 因此根据同胚意义下单点紧致化唯一, 所以命题成立.

> Problem 2 描述 $(0,1)\cup(2,3)$ 的单点紧化, 并证明你的结论.

$(0,1)\cup(2,3)$ 非紧, 局部紧且 Hausdorff, 于是存在单点紧致化. 已知 $(0,1),(2,3),\mathbb{R}$ 与去单点圆周同胚, 所以 $(0,1)\cup(2,3)$ 同胚于
$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}|(x-1)^2+y^2=1 \text{ or } (x+1)^2+y^2=1\}$, T 的单点紧致化为
$T\cup\{(0,0)\}$, 即两相切的圆周.

> Problem 3 按照如下步骤证明 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧致的 :
>
> 1. 设 C 为 $\mathbb{Q}$ 的紧子集, 证明 C 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集.
> 2. 设 C 为 $\mathbb{Q}$ 的紧子集且 $(q-\varepsilon,q+\varepsilon)\cap Q\subseteq C$, 证明 $[q-\varepsilon,q+\varepsilon]\subseteq C$, 从而 $\mathbb{Q}$ 不局部紧致.

注意到映射 $id:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}, id(x)=x,\forall x\in\mathbb{Q}$. $\forall V$ 是 $\mathbb{R}$ 的开集, $id^{-1}(V)=V\cap\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的开集, 所以 id 连续, 进而 $id(C)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的紧子集, 而 $\mathbb{R}$ 是 Hausdorff 空间, 所以 C 是 $\mathbb{R}$ 的闭集.
只需证明 $\overline{(q-\varepsilon,q+\varepsilon)\cap\mathbb{Q}}=[q-\varepsilon,q+\varepsilon]$. 这是显然的. 于是根据 C 是 $\mathbb{R}$ 的闭集, 所以 $\exists r\notin\mathbb{Q}$, 使得 $r\in[q-\varepsilon,q+\varepsilon]\subseteq C\subseteq\mathbb{Q}$, 矛盾! 所以不存在包含 q 的邻域的紧子集, 进而 $\mathbb{Q}$ 不局部紧致.

> Problem 4 设 $f:X\to Y$ 为映射, $\mathcal{T}$ 为 X 上的拓扑. 证明 : $\mathcal{F}=\{U\subseteq Y|f^{-1}(U)\in\mathcal{T}\}$为 Y 上的拓扑, 且相应于这两个拓扑 f 为连续映射.

~~这道题为什么出现在这里~~
先验证 $\mathcal{F}$ 是拓扑. $f^{-1}(\phi)=\phi, f^{-1}(Y)=X$, 于是 $\phi,Y\in\mathcal{F}$. 设 $\forall\alpha\in J, U_\alpha\in\mathcal{F}$, 则 $f^{-1}(U_\alpha)\in\mathcal{T}$. 于是 $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in J}U_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in J}f^{-1}(U_\alpha)\in\mathcal{T}$, 所以 $\bigcup\limits_{\alpha\in J}U_\alpha\in\mathcal{F}$. 设 $\forall i=1,\cdots,n, U_i\in\mathcal{F}$, 则 $f^{-1}(U_i)\in\mathcal{T}$, 于是 $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i=1}^n U_i\right)=\bigcap\limits_{i=1}^n f^{-1}(U_i)\in\mathcal{T}$, 所以 $\bigcap\limits_{i=1}^n U_i\in\mathcal{F}$. 于是 $\mathcal{F}$ 是拓扑. 连续映射由定义立刻可得.

> Problem 5 在 $X=[0,1]$ 上定义等价关系为 $a\sim a,\forall a\in[0,1]. 0\sim 1, 1\sim 0$. 证明 : $X/\sim$ 同胚于 $\mathbb{S}^1$.

注意到映射 $f: X/\sim -\{0,1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \tan\dfrac{\pi(2a-1)}{2}, \forall x \in X/\sim -\{0,1\}$, 其中 $a \in x$. 这是同胚映射, 于是 $X/\sim -\{0,1\}$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚, 又 $\overline{X/\sim -\{0,1\}} = X/\sim$, 于是 $X/\sim$ 同胚于 $\mathbb{S}^1$.

> problem 6 设 X 为紧致 Hausdorff 空间, $f: X \to X$ 为连续映射, 且 $\forall x \in X, f(x) \neq x$. 求证 : $\forall x \in X, \exists x$ 的开邻域 W 满足 $W \cap f(W) = \phi$.

~~为什么没用到紧致性~~
$\forall x \in X$, 根据 X 是 Hausdorff 空间, $\exists U, V$ 是开集, $x \in U, f(x) \in V, U \cap V = \phi$. 记
$W = U \cap f^{-1}(V)$ 是开集, $x \in W$. 于是
$W \subseteq U, f(W) = f(U \cap f^{-1}(V)) \subseteq f(U) \cap f(f^{-1}(V)) \subseteq f(U) \cap V \subseteq V$. 因此
$W \cap f(W) \subseteq U \cap V = \phi, W \cap f(W) = \phi$.