点集拓扑作业 (6)

> Problem 1 赋予全序集 X 序拓扑, $a,b\in X, a<b, U$ 是 a 的开邻域. 证明 : $\exists c\in(a,b], [a,c)\subseteq U$.

由于 U 是 a 的开邻域, 因此 $a\in U, U$ 是开集. 记 $\mathcal{B}$ 是序拓扑的基, 则 $\exists J,\forall\alpha\in J, B_\alpha=(s_\alpha,t_\alpha)\in\mathbb{B}$, 满足 $U=\bigcup\limits_{\alpha\in J}B_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in J}(s_\alpha,t_\alpha)$. 其中 s_α,t_α 可能为 $-\infty,+\infty$, 分别表示 $[m,t_\alpha),[s_\alpha,M)$ 的情形, m,M 是 X 的最小值和最大值, 如果存在的话. 任取 $\alpha_0\in J, a\in B_{\alpha_0}$ 记 $t=\min\{t_{\alpha_0},b\}$, 则 $t\in(a,b]$ 且 $[a,t)\subseteq[a,t_{\alpha_0})=B_{\alpha_0}\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in J}B_\alpha=U$. 命题得证.

> Problem 2 证明或否定 : 设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间, $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{T}$ 的子基, $A\subseteq X$. 则 $x\in\overline{A}$ 当且仅当 $\forall U\in\mathcal{C}$, 若 $x\in U$, 则 $U\cap A\neq\phi$.

命题的必要性依然成立, 充分性不再成立.
必要性 : $x\in\overline{A}\Rightarrow\forall U\in\mathcal{T}, x\in U$ 则 $U\cap A\neq\phi$. 由于子基中的元素均为开集, 所以命题成立.
充分性 : 取 $X=\{a,b,c\}$ 是三元素集合, $\mathcal{C}=\big\{\{a,b\},\{a,c\}\big\}$ 是一个子基. 取 $A=\{b,c\}$. 由于 $A=X-\{a\}$, 而 $\{a\}=\{a,b\}\cap\{a,c\}$ 是开集, 所以 A 是闭集, $A=\overline{A}, a\notin\overline{A}$. 但是逐一验证便可得到, $\forall U\in\mathcal{C}$, 都有 $U\cap A\neq\phi$. 这说明充分性不成立.

> Problem 3 $X=\{a,b,c\}$ 上是否存在使得 $A=\{a\}, A'=\{a,b\}$ 的拓扑?

不存在. 否则, 由于 $a\in A'$, 于是 $\forall U$ 是开集, $a\in U$, 都有 $\phi\neq U\cap A\backslash\{a\}=U\cap\phi=\phi$. 矛盾!

> Problem 4 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 证明 : $\mathring{A}=X\backslash\overline{X\backslash A}, \overline{A}=X\backslash(X\overset{\circ}{\backslash}A)$.

记 $\mathcal{T}$ 是 X 的拓扑. 则有 $\mathring{A}=\bigcup\limits_{\substack{U\subseteq A\\U\in\mathcal{T}}}U$. 于是可以得到 : $X\backslash\mathring{A}=X\left\backslash\left(\bigcup\limits_{\substack{U\subseteq A\\U\in\mathcal{T}}}U\right)\right.=\bigcap\limits_{\substack{U\subseteq A\\U\in\mathcal{T}}}X\backslash U$. 由于 $X\backslash A\subseteq X\backslash U$, 只需证明 $X\backslash U$ 遍历包含 $X\backslash A$ 的闭集, 即 U 遍历包含于 A 的开集, 这就是 U 的取法.

同样地, $X\backslash(X\overset{\circ}{\backslash}A)=X\left\backslash\left(\bigcup\limits_{\substack{U\subseteq X\backslash A\\U\in\mathcal{T}}}U\right)\right.=\bigcap\limits_{\substack{U\subseteq X\backslash A\\U\in\mathcal{T}}}X\backslash U$. 由上知, $\bigcap\limits_{\substack{U\subseteq X\backslash A\\U\in\mathcal{T}}}X\backslash U=\overline{X\backslash X\backslash A}=\overline{A}$. 得证.

> Problem 5 证明 : $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 和 $\bigcup\limits_{\alpha\in J}\overline{A_\alpha}\subseteq\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha}$.

记 $\mathcal{B}$ 是拓扑的基, 先证明后一个命题. $\forall x\in\bigcup\limits_{\alpha\in J}\overline{A_\alpha}, \exists\alpha_0\in J, x\in\overline{A_{\alpha_0}}$. 于是

$\forall x\in B\in\mathcal{B}, A_{\alpha_0}\cap B\neq\phi$.
于是 $B\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha\right)\neq\phi$. 因此 $x\in\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha}$. 所以 $\bigcup\limits_{\alpha\in J}\overline{A_\alpha}\subseteq\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha}$.

注意到 $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$ 是上式的特殊情况, 只需证明, $\forall x\in\overline{A\cup B}, x\in\overline{A}\cup\overline{B}$. 注意到 $\overline{A},\overline{B}$ 是闭集, 所以 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 是闭集且 $A\subseteq\overline{A}, B\subseteq\overline{B}$. 于是 $A\cup B\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$, 因为 $\overline{A\cup B}$ 是包含 $A\cup B$ 的最小闭集, 所以 $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$. 综上, 命题成立.

> Problem 6 (1) 证明 $\mathcal{C}=\{[a,b)|a,b\in\mathbb{Q}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的基, 并验证在该拓扑下 $(0,\sqrt{2}),(\sqrt{2},3)$ 的闭包.
> (2) 证明序拓扑中 $\overline{(a,b)}\subseteq[a,b]$. 并指明等号何时成立.

(1) $\forall x\in\mathbb{R}, a=[x], b=[x]+1, x\in[a,b)\in\mathcal{C}$. 其中 $[x]$ 是 x 的整数部分.
$\forall B_1=[a_1,b_1), B_2=[a_2,b_2)\in\mathcal{C}, \forall x\in B_1\cap B_2$ 有 $x\in B_3=[\max\{a_1,a_2\},\min\{b_1,b_2\})\in\mathcal{C}$, 且满足 $B_3\subseteq B_1\cap B_2$. 于是 $\mathcal{C}$ 是一个基.
接下来我们证明, $\overline{(0,\sqrt{2})}=[0,\sqrt{2}]$. 分为两部分, 验证 $0,\sqrt{2}$ 是闭包中的元素, 验证 $(-\infty,0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ 中没有闭包中的元素. $\forall 0\in B=[a,b)\in\mathcal{C}$, 则 $\min\{\frac{b}{2},1\}\in B\cap(0,\sqrt{2})$. 因此 $0\in\overline{(0,\sqrt{2})}$. 再者 $\forall\sqrt{2}\in B'=[a',b')\in\mathcal{C}$, 由于 $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, 于是 $a'<\sqrt{2}$. 取大于 a' 小于 $\sqrt{2}$ 的有理数 c, 例如 : $a'+[\sqrt{2}-a']$. 则 $\max\{c,1\}\in(0,\sqrt{2})\cap B'$. 因此 $\sqrt{2}\in\overline{(0,\sqrt{2})}$. 再来证明后半部分, $\forall x<0$, 注意到 $\exists t<x, s>x, t,s\in\mathbb{Q}, x\in[t,s)\in\mathcal{C}$ 但 $[x,\frac{x}{2})\cap(0,\sqrt{2})=\phi$. 故 $x\notin\overline{(0,\sqrt{2})}$. 同样地, $\forall x>\sqrt{2},\exists y\in(\sqrt{2},x)\cap\mathbb{Q}, x\in[y,[x]+1)\in\mathcal{C}$, 但 $[y,[x]+1)\cap(0,\sqrt{2})=\phi$. 故 $x\notin\overline{(0,\sqrt{2})}$.
再然后证明, $\overline{(\sqrt{2},3)}=[\sqrt{2},3)$. 同样是两方面的证明. $\forall\sqrt{2}\in B=[a,b)\in\mathcal{C},\exists c\in(\sqrt{2},b)\cap\mathbb{Q}$, 使得 $\min\{c,2\}\in(\sqrt{2},3)\cap B$. 于是 $\sqrt{2}\in\overline{(\sqrt{2},3)}$. 接下来 $\forall x<\sqrt{2},\exists t<x, x<s<\sqrt{2}, t,s\in\mathbb{Q}$, 满足 $x\in[t,s)\in\mathcal{C}$ 但 $[t,s)\cap(\sqrt{2},3)=\phi$. 故 $x\notin\overline{(\sqrt{2},3)}$. 接着, $\forall x\geq 3,\exists t>x, t\in\mathbb{Q}$, 都有 $[3,t)\cap(\sqrt{2},3)=\phi$. 故 $x\notin\overline{(\sqrt{2},3)}$.
(2) 对全序集 X 上的序拓扑 $\mathcal{T}$, 基为 $\mathcal{B}$. 只讨论 a,b 不是 X 的最值, 否则只需单列下文证明的一般.
只需证明, $\forall x<a, y>b, x,y\notin\overline{(a,b)}$. 取 $x\in(t,a)\in\mathcal{B}$, 其中 $t=\begin{cases}-\infty, \text{if } m=\min X\exists, x=m\\ y<x, \text{others}\end{cases}$. 但是 $(t,a)\cap(a,b)=\phi$. 因此 $x\notin\overline{(a,b)}$. 同样可证 y. 因此 $\overline{(a,b)}\subseteq[a,b]$.
等号成立当且仅当 $\forall c\in X, c>a,\exists t\in(a,c)\cap X. \forall d\in X, d<b,\exists s\in(d,b)\cap X$.
必要性 : $a\in\overline{(a,b)}\Rightarrow\forall\beta>a, a\in B=(\alpha,\beta)\in\mathcal{B},\exists t\in B\cap(a,b), a<t<\beta$. 同理可证关于 b 的情况.
充分性 : $\forall a\in B=(\alpha,\beta)\in\mathcal{B},\exists t\in(a,\min\{\beta,b\})=B\cap(a,b)$. 于是 $a\in\overline{(a,b)}$. 同理可证关于 b 的情况.