点集拓扑作业 (14)

> Problem 1 $[0,1]^\omega$ 在箱拓扑和积拓扑下是否紧致?

先给出结论, $[0,1]^\omega$ 在箱拓扑下不紧致, 在积拓扑下紧致.
对于箱拓扑而言, 注意到 $\{0,1\}^\omega=[0,1]^\omega-(0,1)^\omega$ 是 $[0,1]^\omega$ 上的闭子集, 子空间拓扑为离散拓扑. 因此所有 $\{0,1\}^\omega$ 的单点集构成其开覆盖, 它显然没有有限子覆盖, 进而不紧. 但紧致空间的闭子集也紧致, 由此可知 $[0,1]^\omega$ 在箱拓扑下不紧. 对于积拓扑而言, 由于 $[0,1]$ 紧致, 进而其可数积 $[0,1]^\omega$ 紧致.

> Problem 2 有序矩形的拓扑是否可度量化?

有序矩形 I_0^2 紧进而可分, 只需证明它并非第二可数即可 (因为可度量化空间可分与第二可数等价).
注意到 $\big\{\{x\}\times I_0|\forall x\in I_0\big\}$ 是 I_0 的不可数开集族且两两交集为空. 对 I_0^2 的任意基 $\mathcal{B}=\{B_n|\forall n\in\mathbb{N}_+\}$, 由于 $\exists B_x\in\mathcal{B},B_x\subseteq\{x\}\times I_0$, 因此 $\mathcal{B}$ 不可数, 进而不第二可数.

> Problem 3 设 $\{X,d\}$ 是度量空间, $\forall A\subseteq X,\varepsilon>0$, 令 $U(A,\varepsilon)=\{x\in X|d(x,A)<\varepsilon\},\mathcal{H}$ 是 X 所有有界闭子集的族. $\forall A,B\in\mathcal{H},D(A,B)=\inf\{\varepsilon|A\subseteq U(B,\varepsilon),B\subseteq U(A,\varepsilon)\}$. 证明 D 是 $\mathcal{H}$ 的度量.

正定性, 对称性是显然的, 只需要验证三角不等式.
$\forall A,B,C\in\mathcal{H}$, 设 $D(A,B)=\alpha,D(B,C)=\beta$, 需要证明 $D(A,C)\le\alpha+\beta.\forall\delta_1>0,\exists\varepsilon_1>0$, 使得 $\alpha\le\varepsilon_1<\alpha+\delta_1,A\subseteq U(B,\varepsilon_1),B\subseteq U(A,\varepsilon_1)$. 同样的, $\forall\delta_2>0,\exists\varepsilon_2>0$, 使得 $\beta\le\varepsilon_2<\beta+\delta_2$ 且 $B\subseteq U(C,\varepsilon_2),C\subseteq U(B,\varepsilon_2)$. 因此, $\forall a\in A,\exists b\in B,d(a,b)<\varepsilon_1.\exists c\in C,d(b,c)<\varepsilon_2$. 故 $d(a,c)\le d(a,b)+d(b,c)<\varepsilon_1+\varepsilon_2$，即 $A\subseteq U(C,\varepsilon_1+\varepsilon_2)$. 同理可知 $C\subseteq U(A,\varepsilon_1+\varepsilon_2)$. 于是, $D(A,C)\le\varepsilon_1+\varepsilon_2<\alpha+\beta+\delta_1+\delta_2$. 令 $\delta_1,\delta_2\to0,D(A,C)\le\alpha+\beta$，即 $D(A,C)\le D(A,B)+D(B,C)$. 命题得证.