点集拓扑作业 (2)

> *Problem 1* 证明有理数集是可数集.

我们证明存在一个满射 $\varphi:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, 由于 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 是可数集, 进而 $\mathbb{Q}$ 是可数集.
$\forall(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\varphi(m,n)=\begin{cases}0, & n=0\\ \frac{m}{n}, & n\neq 0\end{cases}$. 对 $\forall q\in\mathbb{Q}$, 可以写成
$\frac{a}{b}=\varphi(a,b),(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N},(a,b)=1)$
因此 φ 是满射, 命题得证.

> *Problem 2* 设 A 是不可数集, B 是 A 的可数子集, 证明存在 A 到 $A\backslash B$ 的 1-1 映射.

不妨设 B 是无限集. 首先, $A\backslash B$ 是不可数集 (否则 A 可数). 于是取 $C\subset A\backslash B$ 满足 C 是可数集.
记 $B=\{b_n\}_{n=0}^{+\infty},C=\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$, 其中 b_n,c_n 各自互不相同.
则映射 $\varphi(x)=\begin{cases}c_{2n+1} & x=b_n\in B\\ c_{2n} & x=c_n\in C\\ x & \text{others}\end{cases}$ 是 $A\to A\backslash B$ 的 1-1 映射.

> *Problem 3* 设 $\sim$ 是 X 上的等价关系, 定义 $[a]=\{x\in X|x\sim a\}$. 设 $[a]\cap[b]\neq\phi$, 证明 $[a]=[b]$.

设 $x_0\in[a]\cap[b]$, 则 $x_0\sim a,x_0\sim b.\forall x\in[a],x\sim a\sim x_0\sim b\Rightarrow x\in[b]$, 因此 $[a]\subset[b]$. 同理 $[b]\subset[a]$
, 进而 $[a]=[b]$.

> *Problem 4* 称 X 的子集族 $\mathcal{F}$ 是 X 的划分, 如果满足如下条件:
> (1) $\forall A\in\mathcal{F},A\neq\phi$. (2) $\forall A,B\in\mathcal{F},A\neq B$ 都有 $A\cap B=\phi$. (3) $\forall x\in X,\exists A\in\mathcal{F},x\in A$.
> 证明: 任意 X 的划分 $\mathcal{F}$, 都存在 X 的等价关系 $\sim$ 使得 $X/\!\sim\,=\mathcal{F}$.

定义关系 $\sim=\{(a,b)\in X\times X|\exists A\in\mathcal{F},a,b\in A\}$ 满足自反性和对称性. 如果 $a\sim b,b\sim c$, 则
$\exists A,B\subset\mathcal{F},a,b\in A,b,c\in B$. 由于 $b\in A\cap B$, 所以 $A\cap B\neq\phi,A=B$. 于是 $a,c\in A,a\sim c$.
所以 $\sim$ 是等价关系. 接下来证明 $X/\!\sim\,=\mathcal{F}$.
$\forall[a]\in X/\!\sim,\exists M\in\mathcal{F},a\in M.\forall b\in[a],\exists N\in\mathbb{F},a,b\in N.M\cap N\neq\phi\Rightarrow M=N\Rightarrow b\in M\Rightarrow[a]\subset M.$
$\forall x\in M,a\sim x\Rightarrow x\in[a]\Rightarrow M\subset[a]\Rightarrow[a]=M\Rightarrow X/\!\sim\,\subset\mathcal{F}.$
$\forall F\in\mathbb{F},f\in F,[f]=\{x\in X|\exists A\in\mathbb{F},x,f\in A\}=\{x\in X|x\in F\}=F.F=[f]\in X/\!\sim\,\Rightarrow\mathbb{F}\subset X/\!\sim$
.
这样我们就证明了 $X/\!\sim\,=\mathcal{F}$.

> *Problem 5* 给出向量的严格定义.

设 $\mathcal{F}$ 是标量域, $n\in\mathbb{N}_+,I_n=\{1,2,\cdots,n\}$. n 维向量 $v:=\{(i,a_i)|i\in I_n,a_i\in\mathcal{F}\}$, (a,b) 是有序对.
通常简记为 $v=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.