点集拓扑作业 (4)

> Problem 1: 设集合 X 非空, d_1, d_2 是其上的两个度量, 证明 : d_1 诱导的拓扑细于 d_2 诱导的拓扑 $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall r > 0, \exists s > 0, B_{d_1}(x, s) \subseteq B_{d_2}(x, r)$.

我们记 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 分别是 d_1, d_2 诱导的拓扑, $\mathcal{B}_i = \{B_{d_i}(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon > 0\}(i = 1, 2)$ 是 $\mathcal{T}_i$ 的基.
$\Leftarrow$: $\forall B_0 = B_{d_2}(x, r) \in \mathcal{B}_2, \forall x_0 \in B_0, \exists r_{x_0} > 0, B_{d_2}(x_0, r_{x_0}) \subseteq B_0$. 于是根据题意,
$\exists s_{x_0} > 0, B_{d_1}(x_0, s_{x_0}) \subseteq B_{d_2}(x_0, r_{x_0})$. 于是我们有 :

$$B_0 = \bigcup_{x_0 \in B_0} \{x_0\} \subseteq \bigcup_{x_0 \in B_0} B_{d_1}(x_0, s_{x_0}) \subseteq \bigcup_{x_0 \in B_0} B_{d_2}(x_0, r_{x_0}) \subseteq B_0 \ \Rightarrow B_0 = \bigcup_{x_0 \in B_0} B_{d_1}(x_0, s_{x_0}).$$

这意味着 $\mathcal{B}_2$ 中的基元素是 $\mathcal{B}_1$ 中的若干基元素的并. 只需要注意到 $\mathcal{T}_2$ 中的元素是 $\mathcal{B}_2$ 中基元素的并, 进而是 $\mathcal{B}_1$ 中基元素的并, 所以同样是 $\mathcal{T}_1$ 中的元素. 所以 $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. 充分性成立.
$\Rightarrow$: 由于 $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1, \forall x \in X, \forall r > 0, B_0 = B_{d_2}(x, r) \in \mathcal{T}_2$, 于是 $\exists J, \forall \alpha \in J, B_\alpha \in \mathcal{B}_1, B_0 = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$. 设 $x \in B_{\alpha_0}$, 于是 $\exists s > 0, B_{d_1}(x, s) \subseteq B_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha = B_0 = B_{d_2}(x, r)$. 必要性得证.

> Problem 2: 设 d_1, d_2 是集合 X 上的两个度量, 试问 : $D(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$ 与 $d(x, y) = \min\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$ 是否也一定是度量?

先说结论, D是度量, d 不是度量.
对于 D 而言, $D(x, y) \geq 0$ 是显然的, $D(x, y) = 0 \Leftrightarrow d_1(x, y) = d_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. 对称性显然.
注意到 $d_1(x, z) \leq \max\{d_1(x, z), d_2(x, z)\}$, 则有 :

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\} \leq \max\{d_1(x, z) + d_1(z, y), d_2(x, z) + d_2(z, y)\} \\ &\leq \max\{\max\{d_1(x, z), d_2(x, z)\} + \max\{d_1(z, y), d_2(z, y)\}, \\ &\quad \max\{d_1(x, z), d_2(x, z)\} + \max\{d_1(z, y), d_2(z, y)\}\} \\ &= \max\{d_1(x, z), d_2(x, z)\} + \max\{d_1(z, y), d_2(z, y)\} \\ &= D(x, z) + D(z, y). \end{aligned}$$

因此 D 是 X 的度量. 对于 d 而言, 反例如下 : $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, 定义度量如下, 容易验证是度量.

d_1	x_1	x_2	x_3		d_2	x_1	x_2	x-3
x_1	0	1	3		x_1	0	3	1
x_2	1	0	3		x_2	3	0	3
x_3	3	3	0		x_3	1	3	0

$3 = d(x_2, x_3) \geq d(x_2, x_1) + d(x_1, x_3) = 2$ 显然违反三角不等式, 于是不是度量.

> Problem 3: 证明离散拓扑是可度量化的.

只需证明 : 度量 $d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ 所诱导的拓扑 $\mathcal{T}$ 是 X 的离散拓扑 $\mathscr{P}(X)$. 显然 $\mathcal{T}\subseteq\mathscr{P}(X)$.
$\forall U\in\mathscr{P}(X)$, 即 $U\subseteq X$, 注意到 $\forall x\in X, B(x,1)=\{x\}$. 于是 $U=\bigcup\limits_{x\in U}\{x\}=\bigcup\limits_{x\in U}B(x,1)\in\mathcal{T}$. 于是 d 诱导的拓扑就是离散拓扑, 即离散拓扑是可度量化的.

> Problem 4: 设 (X,d) 是度量空间, A 是 X 的非空子集. 记 d 在 $A\times A$ 上的限制为 d_A. 证明 : d_A 诱导的拓扑等于 A 上的子拓扑.

记 d 诱导的拓扑是 $\mathcal{T}_0$, 在 A 上的子空间拓扑为 $\mathcal{T}_A=\{U\cap A|U\in\mathcal{T}_0\}$. d_A 诱导的拓扑记为 $\mathcal{T}$, 基为 $\mathcal{B}$.
$\forall U=\bigcup\limits_{\alpha\in J}B_\alpha\in\mathcal{T}$, 其中 $\forall\alpha\in J, B_\alpha\in\mathcal{B}\subseteq\mathcal{B}_0$. 又 $B_\alpha\subseteq A$, 于是
$\bigcup\limits_{\alpha\in J}B_\alpha\in\mathcal{T}_0, U=U\cap A\in\mathcal{T}_A, \mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}_A$.
$\forall U\in\mathcal{T}_A$, 记 $U=V\cap A, V\in\mathcal{T}_0$. 于是 $\exists K, \forall\beta\in K, B_\beta\in\mathcal{B}_0, V=\bigcup\limits_{\beta\in K}B_\beta$.
注意到 $B_{d_A}(x,r)=B_d(x,r)\cap A$. 于是 $U=V\cap A=\bigcup\limits_{\beta\in K}(B_\beta\cap A)\in\mathcal{T}$. 于是 $\mathcal{T}_A\subseteq\mathcal{T}$. 命题成立.