# 点集拓扑作业 (7)

> Problem 1 设 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 是集合 $X$ 的拓扑, 证明 : $id_X : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ 连续当且仅当 $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

必要性 : 由于 $id_X$ 是连续映射, 于是 $\forall V \in \mathcal{T}_2, id_X(V) = V \in \mathcal{T}_1$, 即 $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.
充分性 : 因为 $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, 所以 $\forall V \in \mathcal{T}_2, id_X(V) = V \in \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, 因此 $id_X$ 是连续映射.

> Problem 2 称全序集 $X, Y$ 之间的映射 $f$ 是保序的, 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$. 证明 : 全序集之间的保序双射是同胚. 由此可知 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 上的单调连续映射为同胚.

先证明 $X$ 到 $Y$ 的保序双射 $f$ 连续, 由对称性可知 $f^{-1}$ 也连续, 进而 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 上的同胚.
我们首先证明 : $f^{-1}(a,b) = (f^{-1}(a), f^{-1}(b))$. 只需注意到
$x \in f^{-1}(a,b) \Leftrightarrow f(x) \in (a,b) = (f(f^{-1}(a)), f(f^{-1}(b))) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(a), f^{-1}(b))$.
$\forall V$ 是 $Y$ 中的开集, $\exists J, V = \bigcup\limits_{\alpha \in J} (a_\alpha, b_\alpha)$. 于是

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in J} (a_\alpha, b_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(a_\alpha, b_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in J} (f^{-1}(a_\alpha), f^{-1}(b_\alpha))$$

进而 $f^{-1}(V)$ 是 $X$ 上的开集. 于是命题成立.

> Problem 3 考虑积空间 $X_1 \times X_2$, 任意固定的 $x_2 \in X_2$, 证明 : $X_1, X_1 \times \{x_2\}$ 同胚.

我们证明 : 映射 $f : X_1 \to X_1 \times \{x_2\}, f(x) = (x, x_2)$ 是同胚. 首先, 这是一个双射是显然的.
接着, 参见作业 (5) Problem 1, 我们证明了 $\forall U$ 是 $X_1$ 的开集, $U \times \{x_2\}$ 是 $X_1 \times \{x_2\}$ 的开集, 这意味着 $f^{-1}$ 连续. 同时也证明了 $\forall V$ 是 $X_1 \times \{x_2\}$ 的开集, 都存在 $U$ 是 $X_1$ 的开集, 使得 $V = U \times \{x_2\}$ 且 $f^{-1}(V) = U$, 这意味着 $f$ 连续. 于是 $f$ 是同胚, 命题得证.

> Problem 4 设 $(X, d)$ 是度量空间, $A \subseteq X, A \neq \phi$. 定义 $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} d(x, a)$. 证明 : $\forall x \in X$, 都有 $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. 进而 $d(\cdot, A)$ 连续.

由度量的三角不等式, $\forall a \in A, d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a), d(y,a) \leq d(x,y) + d(x,a)$. 对上两式取下确界则有, $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A), d(y,A) \leq d(x,y) + d(x,A)$. 进而
$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.
$\forall U$ 是 $\mathbb{R}$ 上的开集, 令 $V = d^{-1}(U, A)$. 由于 $\forall x \in V, d(x, V) \in U$, 根据 $U$ 是开集和 $\mathbb{R}$ 的度量性质, $\exists \varepsilon_x > 0, \forall y \in B_{d(x,A)}(\varepsilon_x, \mathcal{T}_R), y \in U$, 即
$B_{d(x,A)}(\varepsilon_x, \mathcal{T}_R) \subseteq U, d^{-1}(B_{d(x,A)}(\varepsilon_x, \mathcal{T}_R), A) \subseteq d^{-1}(U, A) = V$. $\forall y \in B_x(\varepsilon_x, \mathcal{T}_d)$, 都有
$|d(x,A) - d(y,A)| < |d(x,y)| < \varepsilon_x$. 于是 $y \in d^{-1}(B_{d(x,A)}(\varepsilon_x, \mathcal{T}_R), A)$, 进而
$B_x(\varepsilon_x, \mathcal{T}_d) \subseteq d^{-1}(B_{d(x,A)}(\varepsilon_x, \mathcal{T}_R), A)$. 所以我们有 $V = \bigcup\limits_{x \in V} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x \in V} B_x(\varepsilon_x, \mathcal{T}_d) \subseteq V$. 即
$V = \bigcup\limits_{x \in V} B_x(\varepsilon_x, \mathcal{T}_d)$ 是 $X$ 上的开集. 所以 $d(\cdot, A)$ 是连续映射.

> Problem 5 证明 $\mathbb{R}_l$ 和有序矩形 $I_0^2$ 均满足第一可数性公理.

$\forall x \in \mathbb{R}$, 设 $U$ 是 $x$ 的开邻域, 我们证明, $\exists B_{x,n} = [x, x+\frac{1}{n}) \subseteq U$. 由于 $U$ 是开集, 所以
$\exists x \in [a,b) \subseteq U$.
于是取 $n = [\frac{1}{b-x}] + 1$ 即可. $\mathbb{R}_l$ 满足第一可数性公理.
所谓 $I_0^2$, 其实是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上字典序在 $[0,1] \times [0,1]$ 上的限制所诱导的拓扑. $\forall (x,y) \in I_0^2$,
设 $U$ 是其开集, 所以 $\exists ((a,b),(c,d)) \subseteq U$. 若 $y = 0$, 则只需取 $t = \min\{\frac{1}{1-b}, \frac{1}{d}\} + 1$, 此时
$B_{x,t} = ((x-1, 1-\frac{1}{t}), (x, \frac{1}{t})) \subseteq ((a,b),(c,d)) \subseteq U$. $y = 1$ 时同理. 若 $a = x$, 取 $t = [\frac{1}{y-b}] + 1$, 否
则, 取 $t = [\frac{1}{y}] + 1$, 同样可求出 $s$. $n = \min\{t, s\}$, 则
$(x,y) \in ((x, y-\frac{1}{n}), (x, y+\frac{1}{n})) \subseteq ((a,b),(c,d)) \subseteq U$.
命题得证.

> Problem 6 设拓扑空间 $X$ 满足第一可数性公理, $A \subseteq X, x \in A'$. 证明 $\exists \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq A \backslash \{x\}$ 收敛到 $x$.

由于 $X$ 满足第一可数性公理, 所以 $\exists \{B_{x,n}\}$ 是 $x$ 的一个可数基. $\forall U_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{x,n}, \exists x_n \neq x, x_n \in U_n$.
因此, $\forall U$ 是开集, $x \in U, \exists B_{x,N_0} \subseteq U. \forall n > N_0, x_n \in U_{N_0} \subseteq B_{x,N_0} \subseteq U$. 于是 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 $x$.

> Problem 7 举例说明 $X$ 上存在两个拓扑 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 满足 $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$, 且 $(X, \mathcal{T}_1)$ 与 $(X, \mathcal{T}_2)$ 同胚.

考虑 $\mathbb{R}$ 上的两种拓扑 $\mathcal{T}_2 = \{(-n,n) | n \in \mathbb{N}_+\} \cup \mathbb{R} \cup \phi, \mathcal{T}_1 = \{(-2n,2n) | n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{R} \cup \phi$. 显然
$\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$,定义 $f(x) = 2x$. 显然 $f$ 与 $f^{-1}$ 均为连续映射. 所以 $f$ 是同胚.