点集拓扑

摘要

按照Munkres的《拓扑学》写的课程讲义，顺序略有调整。

目录

1 集合论

拓扑学是在几何学和集合论之上发展而来，研究拓扑空间以及拓扑空间之间连续映射的学科。点集拓扑侧重于从集合论的角度阐述拓扑的基本概念和它们之间的逻辑关系。本章我们讨论一些集合论的知识，并约定今后的记号。

1.1 基本概念

1. 集合的记号和运算

按照朴素的理解，集合就是一些确定对象构成的总体。关于集合的严格理论参看附录。用$\emptyset$表示空集，即没有任何元素的集合。用$a \in A$表示a是A的元素，也读作a属于A或者a在A中. 用$a \notin A$表示a不属于A, $a \in A$与$a \notin A$恰有一个成立。两个集合相等当且仅当它们有完全相同的元素，例如$\{a,a,b\} = \{a,b\} = \{b,a\}$, 一般而言，集合中的元素只用列举一次其且不用考虑顺序。用$\mathbb{N}$表示自然数，$\mathbb{N}^*$或者表示正整数，即$\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$, $\mathbb{N}^* = \{1,2,...\}$. 用$[n]$表示集合$\{1,2,...,n\}$, 当$n = 0$时约定其为空集。通常我们用刻画集合中元素特征的方式来定义集合，例如可定义$X = \{$由不超过10个字母构成的英文单词$\}$, $Y = \{n \in \mathbb{N}^* | n$可以写成三个整数的平方和$\}$.

给定集合A, B, 定义$A \bigcap B = \{x \in A$且$x \in B\}$, 定义$A \bigcup B = \{x \in A$或者$x \in B\}$. 对有限个集合$A_i (1 \le i \le n)$, 类似定义$\bigcap_{i=1}^n A_i$和$\bigcup_{i=1}^n A_i$. 定义$A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$.

若A的元素都是X的元素，则称A是X的子集，或者X包含A, 记为$A \subseteq X$或者$X \supseteq A$. A不是X的子集记为$A \nsubseteq X$. 若A是X的子集且$A \neq X$, 则称A为X的真子集，或者X真包含A,记为$A \subsetneqq X$. X的所有子集构成的集合称为幂集，记为$P(X)$. $P(X)$的子集称为X上的子集族，例如$X = \{a,b,c\}$, 则$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$是$X$上的子集族。当我们既要考虑集合$X$的元素，也要考虑子集族的元素的时候，可将$X$的元素称为点以为区别。若$\mathcal{F}$是子集族，则$\mathcal{F}$的子集还是子集族，而其元素是子集。对子集族$\mathcal{F}$, 定义 $\bigcup \mathcal{F} = \{x \in X | \exists A \in \mathcal{F}, x \in A\}$. $\bigcup \emptyset = \emptyset$. 当$\mathcal{F}$非空时，定义$\bigcap \mathcal{F} = \{x \in X | \forall A \in \mathcal{F}, x \in A\}$. 稍直观的记号是$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$和$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$. 当不指明$X$时，子集族就称为集族。

例 1.1.1. *1. 若$\mathcal{F} = \{A, B\}$, 则$\bigcup \mathcal{F} = A \bigcup B, \bigcap \mathcal{F} = A \bigcap B$.*
2. 若$\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$, $\bigcup \mathcal{F} = \{a,b,c\}, \bigcap \mathcal{F} = \{a\}$.

设A, B是集合，任取$a \in A, b \in B$, (a,b)称为有序对，这样的有序对的全体称为A, B的笛卡尔积，记为$A \times B$. 类似可定义n个集合的笛卡尔积：设$A_i (1 \le i \le n)$是n个集合，任取$x_i \in A_i (1 \le i \le n)$, 记$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, x称为$n-$元有序组，x_i称为x的第i个分量。这样的$n-$元有序组的全体称为$A_1, A_2, ..., A_n$的笛卡尔积，记为$\Pi_{i=1}^n A_i = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in A_i, i = 1, 2, ..., n\}$, $\Pi_{i=1}^n A_i$或者$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

2. 映射的定义

若$f \subseteq A \times B$满足：对任意A中元素a, 存在唯一的B中元素b使得$(a,b) \in f$, 则称f为A到B的映射，用$f : A \to B$表示。我们把这个唯一的b记为$f(a)$, 称为a在映射f下的像。从而映射可以理解为：对A中每个元素a, 指定了唯一的B中元素b. A称为映射f的定义域，B称为余定义域。任给A的子集C, 令$f|_C = \{(a,b) \in f | a \in C\}$, 则$f$为$C$到$B$的映射，称为$f$在$C$上的限制。$D = \{f(a) | a \in C\}$称为$C$在映射$f$下的像集，记为$f(C)$, $f(A)$也称为映射f的像集。对B的子集V, $U = \{a \in A | f(a) \in V\}$称为$V$在映射$f$下的原像集，记为$f^{-1}(V)$. 由定义可知$f(C) \subseteq D \Longleftrightarrow C \subseteq f^{-1}(D)$. 对单点集$y$, $f^{-1}(\{y\})$通常记为$f^{-1}(y)$. 给定$y_0 \in B$, $f(x) \equiv y_0$的映射称为常值映射，记为c_{y_0}, 它的像是单点集$\{y_0\}$. 若$f(a) = f(b)$推出$a = b$则称f为单射；若$f(A) = B$,

则称f为满射。既单又满的映射称为1-1映射。设A是X的子集，定义映射$f: A \to X$为$f(a) = a, \forall a \in A$, 则$f$为单射，称为包含映射。$X$到自身的包含映射称为恒同映射，记为$id_X$.

设$f: A \to B, g: B \to C$为映射，则$(g \circ f)(x) = g(f(x))$是A到B的映射，称为f, g的复合。复合满足结合律：$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$. 若$f$为1-1映射，则存在唯一的映射$h: B \to A$满足$f \circ h = id_B, h \circ f = id_A$. 在这种情况下，$V$的原像集即为$h(V)$, 特别地，$f^{-1}(y) = \{h(y)\}$. 因此我们将$h$记为$f^{-1}$而不会引起歧义。

引理 1.1.2. *设$f: A \to B, g: B \to C$为映射，若$g \circ f$为1-1映射，且g为单射，则f为1-1映射。*

证明. 因为$g \circ f$为满射，所以g为满射，从而g为$1-1$映射，因此f为1-1映射。 □

3. 一族元素与一族集合

$\mathbb{N}^*$到集合A的映射x称为A中的序列，记$x(n)$为x_n, 则该序列也记为$(x_n)_{n=1}^{\infty}$. 若$A = P(X)$, 则A中的序列称为一列X的子集。给定集合J, 设x为J到集合A的映射。类似于数列，有时我们想更直观地把映射x的像表示出来，那么会采用如下记号：对$\alpha \in J$, 将$x(\alpha)$为x_α, 称为x的第α个坐标。映射x本身则用$(x_\alpha)_{\alpha \in J}$表示，称为（指标集为$J$的）一族$A$的元素。“一族元素”的概念是$n-$元有序组和序列的推广。给定集合$J, X$, J到$P(X)$的映射f称为（指标集为J的）一族X的子集，对$\alpha \in J$, 记$f(\alpha)$为A_α, 则这样的一族子集也记为$(A_\alpha)_{\alpha \in J}$. 此时$f(J)$为$P(X)$的子集，从而为$X$上的子集族（我们用映射和映射的像区分“子集族”与“一族子集”这两种说法，虽然在有些场合它们之间并没有本质不同）。对任意子集族$\mathcal{F}$，令$J = \mathcal{F}$, $f: J \to P(X)$为含入映射，则$f(J) = \mathcal{F}$. 因此我们也用$\{A_\alpha | \alpha \in J\}$表示子集族（作为集合其中重复的元素只出现一次），这种表示显得直观一些。对一族子集$(A_\alpha)_{\alpha \in J}$，记$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$为所有$A_\alpha$中的并集，即$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup f(J)$, 类似定义$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap f(J)$. 当不指明$X$时，一族子集就称为一族集合。

例 1.1.3 (符号使用示例). *给定X上的子集族 $\mathcal{F}$(即$\mathcal{F} \subseteq P(X)$), 则一族$\mathcal{F}$的元素就是一族$X$的子集。其中蓝色的$\mathcal{F}$是符号，红色部分是其含义，如有必要可给出如紫色部分的定义。使用任何记号，都要明确其含义。*

定义 1.1.4. *设$\mathcal{F}$是X上的子集族，若对任意$A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$, 则称$\mathcal{F}$在有限交运算下封闭，简称有限交封闭。若对任意一族$\mathcal{F}$中元素$(A_\alpha)_{\alpha \in J}$，都有$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \in \mathcal{F}$, 则称$\mathcal{F}$在任意并运算下封闭，简称任意并封闭。等价的陈述为：对$\mathcal{F}$的任意非空有限子集$\mathcal{E}$, $\bigcap E \in \mathcal{F}$, 则称$\mathcal{F}$有限交封闭。若对$\mathcal{F}$的任意子集$\mathcal{E}$, $\bigcup \mathcal{E} \in \mathcal{F}$, 则称$\mathcal{F}$任意并封闭。*

注 1.1.5. *上面的两种陈述是“具体的描述性记号”与“简洁的抽象记号”的对比。这种对比有很多，例如之前的“一族A的元素”的具体描述是$(x_\alpha)_{\alpha \in J}$，抽象记号则是映射$x: J \to A$. 我们根据需要采用这两种记号，通常陈述的时候用后者，证明的时候用前者。*

引理 1.1.6. *1. 若对$\mathcal{F}$中任两个元素A, B, $A \bigcap B \in \mathcal{F}$, 则$\mathcal{F}$有限交封闭。*

2. 任给子集族$\mathcal{F}$, 令$\tilde{\mathcal{F}} = \{\bigcap \mathcal{E} | \mathcal{E}$是$\mathcal{F}$的非空有限子集$\}$, 则$\tilde{\mathcal{F}}$有限交封闭

3. 若$\mathcal{F}$有限交封闭，令

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{\bigcup \mathcal{E} | \mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}\},$$

则$\tilde{\mathcal{F}}$仍然有限交封闭，且任意并也封闭。

证明. 第一条归纳即得，第二条由交运算即得。我们证明第三条。

对$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \tilde{\mathcal{F}}$, 令

$$\mathcal{E} = \{A \bigcap B | A \in \mathcal{E}_1, B \in \mathcal{E}_2\},$$

则$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$且

$$(\bigcup \mathcal{E}_1) \bigcap (\bigcup \mathcal{E}_2) = \bigcup \mathcal{E} \in \tilde{\mathcal{F}}.$$

设$\mathcal{E}_\alpha (\alpha \in J)$是$\tilde{\mathcal{F}}$中的一族子集，则$\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{E}_\alpha \subseteq \mathcal{F}$, 且

$$\bigcup_{\alpha \in J} (\bigcup \mathcal{E}_\alpha) = \bigcup \mathcal{E}.$$

□

设$(A_\alpha)_{\alpha\in J}$是一族集合，定义$\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha=\{x:J\to\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha|x(\alpha)\in A_\alpha,\forall\alpha\in J\}$, 称为这一族集合的笛卡尔积。由一族元素的记号，$\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha$中的元素$x$可记为$(x_\alpha)_{\alpha\in J}$. 任给$\alpha_0\in J$, 定义$\pi_\beta:\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha\to A_\beta$为$\pi_\beta(x)=x(\beta)$, 称为向第$\beta$个分量的投影（映射）。若$A_\alpha=A$, 则将$\Pi_{\alpha\in J}A$记为$A^J$. $J=[n]$时，$\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha$即为$A_1\times A_2\times...\times A_n$, 此时$\pi_i\big((x_1,x_2,...,x_n)\big)=x_i$.

思考题 1.1.7. *集合$A_1\times A_2$与$A_2\times A_1$相同吗？有什么关系？如何用一族集合的笛卡尔积理解(此时指标集$J=[2]$)？*

练习 1.1.8. *对任意两个集合A,B，定义$\tilde{A}=A\times\{1\},\tilde{B}=B\times\{2\}$, 称$\tilde{A}\bigcup\tilde{B}$为$A,B$的无交并，记为$A\sqcup B$. 求证：$\tilde{A}\bigcap\tilde{B}=\emptyset$, 且存在$A\sqcup B$到$A\bigcup B$的满射。*

对一族集合$(A_\alpha)_{\alpha\in J}$, 令$\tilde{A}_\alpha=A_\alpha\times\{\alpha\}$, 类似定义$\sqcup_{\alpha\in J}A_\alpha=\bigcup_\alpha\tilde{A}_\alpha$. 求证：当$\alpha\neq\beta$时，$\tilde{A}_\alpha\neq\tilde{A}_\beta$, 且存在$\sqcup_{\alpha\in J}A_\alpha=\bigcup_\alpha\tilde{A}_\alpha$到$\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$的满射。

1.2 可数集和不可数集

定义 1.2.1. *给定集合A, 若存在某个自然数n, 使得A到$[n]$有1-1对应，则称A为有限集。其中n称为A的基数，记为$|A|$. 不是有限集的集合称为无限集。*

定义 1.2.2. *和自然数集$\mathbb{N}$有一一对应的集合称为可数无限集，有限集和可数无限集统称为可数集。不是可数集的集合称为不可数集。*

命题 1.2.3. *设A是非空集合，则以下等价：*

- *A是可数集*
- *存在满射$f:\mathbb{N}\to A$*
- *存在单射$g:A\to\mathbb{N}$*

证明. $i)\implies ii)$: A是有限集或者$\mathbb{N}$到A有1-1对应。
$ii)\implies iii)$: 定义$g(a)=f^{-1}(a)$的最小元。
$iii)\implies i)$: 可设A是$\mathbb{N}$的无限子集，往证$\mathbb{N}$到A有1-1对应。归纳定义映射$f:\mathbb{N}\to A$满足

$$f(0)=A\text{的最小元},f(n)=A\setminus f(\{0,1,...,n-1\})\text{的最小值}\},\forall n\in\mathbb{N}.$$

下证f为1-1映射。对$n<m$, $f(m)\notin A\setminus f(\{0,1,...,m-1\})$, 而$n\in\{0,1,...,m-1\}$, 所以$f(m)\neq f(n)$. 再证$f$为满射。 $\forall a\in A$, $\{n\in\mathbb{N}|f(n)\geq a\}$非空($f(a)\geq a$), 设其最小元为$n_0$, 则$f(n_0)\geq a$. 又$f(i)<a,\forall i\in\{0,1,...,n_0-1\}$, 所以$a\in A\setminus f(\{0,1,...,n_0-1\})$, 从而$f(n_0)\leq a$, 所以$f(n_0)=a$. □

命题 1.2.4. *以下结论成立：*

- *可数集的子集是可数集。*
- *设A,B是可数集，则$A\times B$是可数集。有限个可数集的笛卡尔积是可数集。*
- *设$(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$是一列可数集，则$\bigcup_{i=1}^\infty A_i$是可数集。*

可数个可数集的笛卡尔积一般不是可数集，除非除有限个外是单元素集。

命题 1.2.5. *A为任意集合，不存在A到$P(A)$的满射。从而$P(\mathbb{N}^*)$是不可数集。*

证明. 任给映射$\phi:A\to P(A)$, 令$B=\{a\in A|a\notin\phi(a)$, 则$B\in P(A)$. 下面证明$B$不在$\phi$的像中。假设$B=\phi(a_0)$, 若$a_0\in B$, 则由$B$的定义$a_0\notin\phi(a_0)$, 矛盾！若$a_0\notin B=\phi(a_0)$, 同样由$B$的定义，$a_0\in B$, 也矛盾！ □

推论 1.2.6. *$[0,1]$是不可数集合。*

证明. 记$\mathcal{F}=\{A|A\text{是}\mathbb{N}^*\text{的无限子集}\}$, $\mathcal{F}$为$P(\mathbb{N}^*)$的不可数子集。对$A=\{a_n|n=1,2,...\}$, 令$f(A)=\sum_{n=1}^\infty 2^{-a_n}$, 则$f$为$\mathcal{F}$到$[0,1]$的单射。反过来，对任意$x\in(0,1]$, 通过2进制展开，存在$A$使得$f(A)=x$. 所以$f:\mathcal{F}\to(0,1]$为1-1映射。 □

1.3 序关系和等价关系

X为集合，$X \times X$的子集R称为X上的二元关系，将$(a,b) \in R$记为aRb. 设Y为X的子集，则$R \bigcap Y \times Y$为Y上的二元关系，称为R在Y上的限制。

定义 1.3.1. *设X上的二元关系R满足:*

- $\forall a \in R, aRa$不成立
- 若aRb, bRc, 则aRc

则称R是X上的偏序关系，一般将偏序关系记为$<$. 定义了偏序关系的集合称为偏序集，如果为了明确偏序关系，则称$(X,<)$称为偏序集。

这里“偏”的意思是部分，也就对可能存在两个不同元素a,b, $a<b, a<b$均不成立。若Y是X的子集上，则偏序关系$<$在Y上的限制也是偏序关系，记为$<_Y$或者仍记为$<$. 给定偏序关系$<$, 可定义$a \leq b$为$a<b$或者$a=b$. 则$\leq$也是二元关系，且满足

- $\forall a \in X, a \leq a$
- 若$a \leq b$, $b \leq a$, 则$a=b$
- 若$a \leq b, b \leq c$, 则$a \leq c$

练习 1.3.2. *设X上的二元关系R满足:*

- $\forall a \in X, aRa$
- 若aRb, bRa, 则$a=b$
- 若aRb, bRc, 则aRc

定义子集”$<$”为$\{(a,b)|aRb,$ 且$a \neq b\}$, 则$<$为X上的偏序关系。

定义 1.3.3. *若偏序集X中任何两个不同元素均可比较，即$a<b, a=b, b<a$至少一个成立，则称$<$为全序关系。定义了全序关系的集合称为全序集，同样地，如果为了明确全序关系，则称$(X,<)$称为全序集。*

设A是全序集X的非空子集，若存在$M \in A$使得$\forall a \in A, a \leq M$, 则称$M$为$A$的最大元，类似可定义最小元。若$c \in X$满足: $\forall a \in A, a \leq c$, 则称$c$为$A$的上界。若$A$的上界构成的子集有最小元，则称其为$A$的上确界，记为$\sup A$.

定义 1.3.4. *若全序集X的任何一个有上界的非空子集都有上确界，则称X具有上确界性质。*

引理 1.3.5. *设$(P_1,<_1),(P_2,<_2)$是两个偏序集，在$P_1 \times P_2$上定义如下关系$<$:*

$$(a_1,b_1)<(a_2,b_2)\text{当且仅当}a_1<a_2\text{或}a_1=a_2\text{且}b_1<b_2,$$

那么$<$为$P_1 \times P_2$的偏序关系。若$<_1,<_2$均为全序关系，则$<$为全序关系。

以上的序称为字典序。

定义 1.3.6. *X是一个集合，$\sim$是X上的二元关系，假设其满足:*

- $\forall a \in X, a \sim a$;
- 若$a \sim b$, 则$b \sim a$;
- 若$a \sim b$, $b \sim c$, 则$a \sim c$,

那么称$\sim$为等价关系。

设$\sim$为X上的等价关系，定义$[a]=\{x \in X | x \sim a\}$，称为$a$所在的等价类。

引理 1.3.7. *以下结论成立:*

- $a \in [a]$
- $[a]$与$[b]$的交非空当且仅当$[a]=[b]$.

定义 1.3.8. $\{[a]|a\in X\}$称为X在等价关系$\sim$下的等价类集合，记为$X/\sim$. 定义映射$\pi: X\to X/\sim$为$\pi(a)=[a]$, 称π为关于等价关系$\sim$的自然投射。

$X/\sim$中的元素是一个等价类，也就是X的一个子集。对任意$U\in X/\sim$, U中的任何元素称为该等价类的代表元: $\forall a\in U, [a]=U$.

例 1.3.9. $X=\{1,2,3\}$，等价关系为$a\sim a, b\sim b, c\sim c, b\sim c, c\sim b$. 则$[a]=\{a\}, [b]=[c]=\{b,c\}$.

当X上有某种运算时，我们希望该运算能诱导出$X/\sim$上的运算。

引理 1.3.10. 给定映射$m: X\times X\to X$, 则存在映射$\bar{m}: (X/\sim)\times(X/\sim)\to X/\sim$满足$\bar{m}(\pi(a),\pi(b)=\pi(m(a,b)), \forall a,b\in X$当且仅当若$a\sim a', b\sim b'$, 则$m(a,b)\sim m(a',b')$.

通常我们用“交换图表”：

$$\begin{tikzcd} X\times X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\pi\times\pi"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ (X/\sim)\times(X/\sim) \arrow[r, "\bar{m}"] & X/\sim \end{tikzcd}$$

表示$\bar{m}(\pi(a),\pi(b)=\pi(m(a,b)), \forall a,b\in X$.

例 1.3.11. 在$\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\}$上定义关系$\sim$为$(a,b)\sim(c,d)$当且仅当$ad=bc$, 则$\sim$为等价关系。

$\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$在如上等价关系下的等价类就是有理数集合$\mathbb{Q}$, 将$[(a,b)]$记为$\frac{a}{b}$. 在集合$\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$上定义运算$m((a,b),(c,d))=(ac,bd)$, 则$m$满足引理1.3.10的条件，从而诱导$\mathbb{Q}$上的运算，即通常的乘法。加法可类似定义。

2 拓扑空间和连续映射

2.1 实数上的连续函数

数学分析中用$\epsilon-\delta$语言给出了连续函数的定义，我们用另一种方式定义连续函数，并证明其等价性。

定义 2.1.1. 若实数的子集A满足：$\forall x\in A$，存在$\delta>0$, 使得$(x-\delta,x+\delta)\subseteq A$, 则称$A$为开集。

命题 2.1.2. 记$\mathcal{F}=\{U|U是开集\}$, 则

- $\emptyset,\mathbb{R}$均在$\mathcal{F}$中,
- 若$(U_\alpha)_{\alpha\in J}$是一族$\mathcal{F}$的元素，则$\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha\in\mathcal{F}$,
- 若$U,V\in\mathcal{F}$，则$U\bigcap V\in\mathcal{F}$.

定义 2.1.3. 给定$x\in\mathbb{R}$, 若$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足：对包含$f(x)$的任意开子集$V$，存在包含$x$的开子集$U$使得$f(U)\subseteq V$, 则称$f$在$x$处连续。若$f$在每点处均连续，则称$f$连续或$f$为连续函数。

引理 2.1.4. f在x处连续当且仅当$\forall\epsilon>0$，存在$\delta>0$使得当$|x'-x|<\delta$时，$|f(x')-f(x)|<\epsilon$.

引理 2.1.5. f连续当且仅当对任意开集V，$f^{-1}(V)$是开集。

证明. $\Leftarrow$: 对任意$x\in\mathbb{R}$, 以及包含$f(x)$的开子集V, 则$f^{-1}(V)$是开子集，而显然$x\in f^{-1}(V)$, 从而取$U=f^{-1}(V)$即可。
$\Rightarrow$: 任取开集V, 往证$f^{-1}(V)$是开子集。对任意$x\in f^{-1}(V)$, 由f在x点处连续知存在开子集U_x使得$f(U_x)\subseteq V$, 即$U_x\subseteq f^{-1}(V)$. 从而$f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}U_x$, 因此$f^{-1}(V)$是开子集。 □

命题 2.1.6. 设f,g为两个连续函数，则$f\circ g$是连续函数。

连续映射不局限于实数到实数的映射，本课程的主要任务之一就是将连续映射的映射推广到更一般的集合（拓扑空间）上。映射$f: X\to Y$是连续的大概说的是当一点x'在另一点x附近时，$f(x')$在$f(x)$附近。“附近”的严格定义就是开邻域，下面给出拓扑空间的定义并推广连续映射的概念。

2.2 拓扑空间

连续的概念依赖于开集，定义连续首先要定义开集。实数上开集的定义并不能推广到一般的集合上，我们用公理化的方式来描述开集的全体，即用开集满足的性质来定义开集。

定义 2.2.1. X是集合，$\mathcal{T}$是X上的子集族，若$\mathcal{T}$满足：

- $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$任意并封闭，即若$(U_\alpha)_{\alpha\in J}$是一族$\mathcal{F}$中元素，则$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \in \mathcal{F}$.
- $\mathcal{T}$有限交封闭，即若$U, V \in \mathcal{T}$， $U\bigcap V \in \mathcal{T}$

则称$\mathcal{T}$是X上的拓扑。定义了拓扑的集合称为拓扑空间，如果为了明确拓扑，则称$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间。拓扑中的元素称为拓扑空间的开集或者开子集。开集的补集称为闭集或者闭子集。

给定拓扑就是给出全部的开集，每提到开集都必须是某个确定拓扑中的开集，包含点x的开集也称为x的开邻域（本讲义中不使用“邻域”这一名称）。我们都假设拓扑空间是非空的。

引理 2.2.2. 设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间，U为X的子集，若对U中任意点x, 存在x的开邻域U_x满足$U_x \subseteq U$, 则U为开集。

例 2.2.3. 任给集合X. $P(X)$是X上的拓扑，称为离散拓扑。$\{\emptyset, X\}$是X上的拓扑，称为平凡拓扑。$\mathcal{T} = \{U|U\text{的补集是有限集}\}\bigcup\{\emptyset\}$是拓扑，称为余有限拓扑。

一般而言，集合X上的拓扑是不唯一的。为了明确拓扑，我们会像定义中那样说“拓扑空间$(X,\mathcal{T})$...”，或者“在拓扑$\mathcal{T}$下，X...”或者“赋予X拓扑$\mathcal{T}$, X...”.

定义 2.2.4. 设$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$均为$X$上的拓扑，若$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$则称$\mathcal{T}_1$比$\mathcal{T}_2$粗糙，$\mathcal{T}_2$比$\mathcal{T}_1$精细。

引理 2.2.5. 给定集合X，设$(\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$是$X$上的一族拓扑, 则$\bigcap \mathcal{T}_\alpha$是$X$上的拓扑。

练习 2.2.6. 设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间，$f: X \to Y$为*1-1*映射，令$\tau = \{f(U)|U \in \mathcal{T}\}$, 则$\tau$是$Y$上的拓扑。

2.3 基和子基

引理 2.3.1. 给定集合X，对X上的任意子集族$\mathcal{C}$，存在包含$\mathcal{C}$的最小拓扑。

证明. 考虑集合$\mathcal{F} = \{\mathcal{T}|\mathcal{T}\text{是拓扑且}\mathcal{T} \supseteq \mathcal{C}\}$. 则$\mathcal{F}$是非空集合，$\bigcap \mathcal{F}$即为所求。 □

将该拓扑记为$\mathcal{T}(\mathcal{C})$, 称为由$\mathcal{C}$生成的拓扑。对一般的$\mathcal{C}$, $\mathcal{T}(\mathcal{C})$并没有简单的描述，虽然容易看出: 若$\mathcal{C} = \{U_\alpha|\alpha \in J\}$, 先对有限个$U_\alpha$取交，再对任意多个形如这样的集合取并，则所有如此得到的集合再加上全集X就是$\mathcal{T}(\mathcal{C})$(参照引理1.1.6).

定义 2.3.2. 若子集族$\mathcal{C}$满足：

- $\forall x \in X, \exists C \in \mathcal{C}$, *s.t.*, $x \in C$
- 任给$C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, 若$x \in C_1 \bigcap C_2$, 则存在$C_3 \in \mathcal{C}$使得$x \in C_3 \subset C_1 \bigcap C_2$.

则称$\mathcal{C}$是X上的一个基。$\mathcal{C}$中的元素称为基元素（是X的一个子集）。

命题 2.3.3. 设$\mathcal{C}$是X上的一个基，则$U \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$当且仅当$\forall x \in U$, 存在$C \in \mathcal{C}$使得$x \in C \subseteq U$.

证明. 定义$\mathcal{T} = \{U \subseteq X|\forall x \in U, \exists C \in \mathcal{C}, s.t. x \in C \subseteq U\}$. 由定义可以验证$\mathcal{T}$是拓扑。再证明$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{C})$. 任给$U \in \mathcal{T}$, 对任意$x \in U$, 存在$C_x \in \mathcal{C}$使得$x \in C \subseteq U$. 从而$U = \bigcup_{x\in U} C_x$. 由定义$C_x \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$, 从而$\bigcup_{x\in U} C_x \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$. □

例 2.3.4. *1.* 对实数$\mathbb{R}$, $\mathcal{C}=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$是一个基。其生成的拓扑称为$\mathbb{R}$上的标准拓扑，该拓扑就是*2.1*节中的拓扑。
2. 对实数$\mathbb{R}$, $\mathcal{C}=\{[a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$是一个基。其生成的拓扑称为$\mathbb{R}$上的下限拓扑，用$\mathbb{R}_l$表示相应的拓扑空间。
3. 对实数$\mathbb{R}$, 记$K=\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}^*\}$, $\mathcal{C}=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}\bigcup\{(a,b)\setminus K\}$是一个基，其生成的拓扑称为$\mathbb{R}$上的$K$拓扑，用$\mathbb{R}_K$表示相应的拓扑空间。

定义 2.3.5. 设$\mathcal{T}$是X上的拓扑, 若基$\mathcal{C}$满足$\mathcal{T}(\mathcal{C})=T$. 则称$\mathcal{C}$是$\mathcal{T}$的基。

根据命题2.3.3的证明，开集都是基元素的并，反过来当然也成立。给定拓扑，它的基总存在，例如$\mathcal{C}=\mathcal{T}$, 但一般不唯一。下面的引理可以用来判断子集族$\mathcal{C}$是否是$\mathcal{T}$的基。

引理 2.3.6. 设$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{T}$, 则$\mathcal{C}$是$\mathcal{T}$的基$\Longleftrightarrow$对任意开集$U$，以及$x\in U$, 存在$C\in\mathcal{C}$使得$x\in C\subseteq U$.

证明. $\Longrightarrow$: 命题2.3.3.
$\Longleftarrow$: 对任意$x\in X$, 由假设存在$C\in\mathcal{C}$使得$x\in C\subseteq X$，基的第一条得证. 设$x\in C_1\bigcap C_2$, 因为C_1,C_2均为开集，所以$C_1\bigcap C_2$为开集，由假设存在$C\in\mathcal{C}$使得$x\in C\subseteq C_1\bigcap C_2$，基的第二条得证。从而$\mathcal{C}$是基，再由由命题2.3.3, $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{C})$. 又$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{T}$, 所以$\mathcal{T}(\mathcal{C})\subseteq\mathcal{T}$.

□

引理 2.3.7. 设$\mathcal{B},\mathcal{B}'$分别是拓扑$\mathcal{T},\mathcal{T}'$的基，则$\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}'$当且仅当对任意$x\in X$以及任意包含$x$的$B\in\mathcal{B}$, 存在$B'\in\mathcal{B}$使得$x\in B'\subseteq B$.

定义 2.3.8. 若子集族$\mathcal{S}$满足$\bigcup\mathcal{S}=X$, 则称$\mathcal{S}$是一个子基。若$\mathcal{T}(\mathcal{S})=\mathcal{T}$, 则称$\mathcal{S}$是$\mathcal{T}$的子基。

任取子集族$\mathcal{C}$, 则$\mathcal{S}=\mathcal{C}\bigcup\{X\}$是子基，且$\mathcal{T}(\mathcal{C})=\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

引理 2.3.9. 设$\mathcal{S}$是一个子基，则$\tilde{\mathcal{S}}=\{U_1\bigcap U_2\bigcap\ldots\bigcap U_k|U_i\in\mathcal{S},k\in\mathbb{N}^*\}$是一个基，且$\mathcal{T}(\mathcal{S})=\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{S}})$.

称$\tilde{\mathcal{S}}$为$\mathcal{S}$生成的基。

2.4 度量空间

定义 2.4.1. 设X为非空集合，若$d:X\times X\to\mathbb{R}$满足

- $d(x,y)\geq 0,\forall x,y\in X$且$d(x,y)=0$当且仅当$x=y$.
- $d(x,y)=d(y,x),\forall x,y\in X$
- $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y),\forall x,y,z\in X$

则称d为X上的度量。$d(x,y)$称为在度量d下x,y之间的距离。

设d为X上的度量，对$a\in X,r>0$, 记$B_d(x,r)=\{y\in X|d(x,y)<r\}$, 称为球心在$x$, 半径为$r$的（度量）球. 定义

$$\mathcal{C}=\{B_d(x,r)|x\in X,r>0\},\mathcal{C}_\epsilon=\{B_d(x,r)|x\in X,\epsilon\geq r>0\}.$$

引理 2.4.2. $\mathcal{C}$是基。进一步，对任意$\epsilon>0$, $\mathcal{C}_\epsilon$是基，且和$\mathcal{C}$生成相同的拓扑。

我们将其生成的的拓扑称为d诱导的度量拓扑，不同的度量可以对应相同的拓扑。

例 2.4.3. *1.* 在$\mathbb{R}$上定义$d(x,y)=|x-y|$, 则d为度量，诱导的拓扑即标准拓扑。
2. 对$x=(x_1,x_2,...,x_n),y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$上定义$d_2(x,y)=(\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$, 则$d_2$称为$\mathbb{R}^n$上的欧氏度量，诱导的拓扑称为标准拓扑或欧氏拓扑，相应的拓扑空间称为欧氏空间。
3. 设d是X上的度量，A是X的非空子集, 则$d|_{A\times A}$是A上的度量。

定义 2.4.4. 设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间，若存在X上的度量d，其诱导的拓扑等于$\mathcal{T}$，则称拓扑$\mathcal{T}$是可度量化的。若拓扑空间X上的拓扑是可度量化的，对任何一个诱导其拓扑的度量d, 称(X,d)为度量空间。

并不是所有的拓扑都是可度量化的，寻找可度量化的充要条件曾是点集拓扑学中的重要课题。

引理 2.4.5. 设d是X上的度量，定义$\bar{d}(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$. 则$\bar{d}$也是度量，并且和$d$诱导相同的拓扑。

$\bar{d}$称为标准有界度量，在该度量下任意两点距离不超过给定值。

定义 2.4.6. 设d是X上的度量，若$D=\sup\{d(x,y)|x,y\in X\}<\infty$, 则称$d$是有界度量，$D$称为$X$在度量$d$下的直径（简称为直径），记为$diam\,(X,d)$或$diam\,X$.

若A是X的子集，则d在A上的限制也是度量，称为A上的诱导度量，记为d_A. $diam\,(A,d_A)$称为子集A的直径，也记为$diam\,A$.

练习 2.4.7. 给定集合X, d为X上的度量，其诱导的拓扑为$\mathcal{T}$. 设$\mathcal{T}'$是X上另一个拓扑，$\mathcal{C}'$是它的基。求证：

1) $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}'\Longleftrightarrow$对任意度量球$B_d(x,r)$, 存在$\mathcal{C}'$中元素$U$, 满足$U\subseteq B_d(x,r)$.

2) $\mathcal{T}'\subseteq\mathcal{T}\Longleftrightarrow$对任意点$x$以及$x$的包含$x$的$\mathcal{C}'$中元素$U$, 存在$r>0$, 使得$B_d(x,r)\subseteq U$.

2.5 拓扑空间的构造：子拓扑和积拓扑

定义 2.5.1. 设$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，A是X的子集。定义$\mathcal{T}_A=\{U\bigcap A|U\in\mathcal{T}\}$, 则$\mathcal{T}_A$是$A$上的拓扑，称为$A$上的子空间拓扑或者子拓扑。定义了这种拓扑的$A$称为$X$的子空间，$\mathcal{T}_A$中的元素称为$A$的相对开集。如果为了明确子拓扑的来源，则称$\mathcal{T}_A$为$\mathcal{T}$诱导的子拓扑，或者$A$从拓扑空间$X$继承的子拓扑。

引理 2.5.2. 任给X上子集族$\mathcal{S}$, 定义$\mathcal{S}_A=\{U\bigcap A|U\in\mathcal{S}\}$. 若$\mathcal{S}$是$X$上拓扑的基或者子基，则$\mathcal{S}_A$是$A$上子拓扑的基或者子基。

证明. 先考虑$\mathcal{S}$是基的情况。因为$\mathcal{S}_A$已经是子拓扑中开集了，所以由引理2.3.6只需证明：任给相对开集U以及$x\in U$, 存在$D\in\mathcal{S}_A$使得$x\in D\subseteq U$. 由相对开集定义，存在X中开集V使得$V\bigcap A=U$, 从而$x\in V$. 因为$\mathcal{S}$是拓扑的基，所以存在$C\in\mathcal{S}$使得$x\in C\subseteq V$. 取$D=C\bigcap A$即证。

再考虑$\mathcal{S}$是子基的情况。由定义和集合的运算易知$\mathcal{S}_A$也是子基，还需证明其生成子拓扑。记$\mathcal{S}$生成的基为$\mathcal{C}$, 则由集合的交运算易知$\mathcal{S}_A$生成的基为$\mathcal{C}_A$. 所以$\mathcal{S}_A$生成的拓扑和$\mathcal{C}_A$生成的拓扑相同，再由基的情况知$\mathcal{C}_A$生成的拓扑和子拓扑相同，得证。 □

例 2.5.3. $\mathbb{Q}$是拓扑空间$\mathbb{R}$的子集, $(-\infty,\sqrt{2})\bigcap\mathbb{Q}$是$\mathbb{Q}$的相对开集。

命题 2.5.4. 关于子拓扑有如下性质：

- 拓扑空间X的子空间的子空间仍然是X的子空间。
- 设A是空间X的子空间，则C是A的相对闭集当且仅当存在X中闭集B，使得$B\bigcap A=C$.
- 设A是空间X中开（闭）集，则A中的相对开（闭）集是X中的开（闭）集。

定义 2.5.5. 设$(X_i,\mathcal{T}_i)(i=1,2)$是两个拓扑空间，令$\mathcal{C}=\{U_1\times U_2|U_i\in\mathcal{T}_i\}$, 则$\mathcal{C}$是$X_1\times X_2$上的基（一般并不是拓扑），其生成的拓扑称为$\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$的乘积拓扑或积拓扑，对应的空间称为乘积空间。

今后在$X_1\times X_2$上我们都默认取乘积拓扑。

任取$x_2\in X_2$, 将子集$X_1\times\{x_2\}$与X_1等同，则$X_1\times\{x_2\}$相对于乘积空间$X_1\times X_2$的子拓扑=X_1上的拓扑。

引理 2.5.6. 设$\mathcal{C}_i$是$X_i(i=1,2)$上拓扑的基，令$\mathcal{F}=\{U_1\times U_2|U_i\in\mathcal{C}_i,i=1,2\}$, 则$\mathcal{F}$是$X_1\times X_2$上乘积拓扑的基。

证明. 用引理2.3.6和乘积拓扑的定义即可。 □

记$\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$为投影，记$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U)|U$是$X_1$中开集$\}\bigcup\{\pi_2^{-1}(U)|U$是$X_2$中开集$\}$，则$\mathcal{S}$是$X_1 \times X_2$上积拓扑的子基。

例 2.5.7. $\mathbb{R}^2$上的乘积拓扑和度量拓扑相同。

引理 2.5.8. *设A_i为X_i的子空间，$i = 1, 2$. 则$A_1 \times A_2$从乘积空间$X_1 \times X_2$继承的子空间拓扑等于A_1, A_2上子空间拓扑的乘积拓扑。换句话说，子空间的乘积是积空间的子空间。*

引理 2.5.9. *关于度量空间如下结论成立:*

- *设(X, d)为度量空间，A为X的子集，则A上诱导度量d_A的度量拓扑等于A作为X的子空间拓扑。*
- *设$(X_i, d_i)(i = 1, 2)$为度量空间, 则$\rho_1(x, y) = d_1(x, y)+d_2(x, y), \rho_2(x, y) = \sqrt{d_1^2(x, y) + d_2^2(x, y)}$, $\rho_\infty(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$均为$X_1 \times X_2$上的度量，且均诱导乘积拓扑。*

2.6 序拓扑

设X是一个含有不止一个元素的全序集，定义$(-\infty, a)_X = \{x \in X|x < a\}, (a, +\infty)_X = \{x \in X|a < x\}$, $(-\infty, a)_X$简记为$(-\infty, a)$. 则$\mathcal{S} = \{(-\infty, a), (a, +\infty)|a \in X\}$是$X$上的一个子基，其生成的拓扑称为序拓扑。

引理 2.6.1. *任给$a, b \in X$, 定义$(a, b) = \{x \in X|a < x < b\}$. 则$(a, b)$是序拓扑中的开集。若$m$是$X$的最小元，则$[m, b)$是序拓扑中的开集。若$M$是$X$的最大元，则$(a, M]$是序拓扑中的开集。这3类开集（后两类的存在需要$X$有最大元或者最小元）的全体就是序拓扑的基。*

练习 2.6.2. *赋予全序集X序拓扑，a, b为X中两点，设$a < b$, U为a的开邻域，则存在$c \in (a, b]$使得$[a, c) \subseteq U$.*

例 2.6.3. *1. $\mathbb{R}$上的序拓扑等于标准拓扑。*
2. 在$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$上赋予字典序：$(a, b) < (c, d)$当且仅当$a < c$或者$a = c, b < d$. 令$\mathcal{C} = \{(p, q)\}|p, q$两点的横坐标相同$\}$, 则$\mathcal{C}$是序拓扑的基。
3. $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$上的字典序拓扑对应的空间称为有序矩形，记为$I_o^2$.

设Y为全序集$(X, <)$的子集，则$(Y, <)$也为全序集。此时Y上既有序拓扑也有子拓扑。

例 2.6.4. *考虑有序矩形I_o^2, 则图中蓝色线段和I^2的交集是子拓扑中开集，但不是序拓扑中开集。*

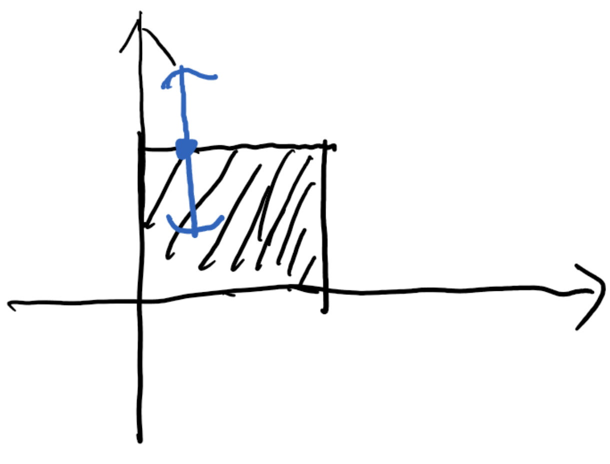

图 1: 子拓扑与序拓扑比较

一般而言，Y上子拓扑总是比Y上的序拓扑细：任给序拓扑的子基中元素$(-\infty,a)_Y=\{x\in Y|x<a\}$, 则$(-\infty,a)_Y=(-\infty,a)\bigcap X$.

定义 2.6.5. 设Y为全序集X的子集，若对Y中任意两点y_1,y_2,都有$(y_1,y_2)\subseteq Y$, 则称Y为凸子集。

命题 2.6.6. 设Y为X的凸子集，则Y的序拓扑等于Y的子拓扑。

证明. 给定子拓扑的子基中元素$(-\infty,a)\bigcap Y$, 若$a\in Y$, 则$(-\infty,a)\bigcap Y=(-\infty,a)_Y$. 若$a\notin Y$, 我们证明$(-\infty,a)\bigcap Y=\emptyset$或者$Y$. 设$(-\infty,a)\bigcap Y\neq\emptyset,\neq Y$, 取$x\in(-\infty,a)\bigcap Y, y\in Y\setminus(-\infty,a)$, 则$y<a<x$. 由凸的定义，$a\in Y$, 矛盾。 □

2.7 闭集和闭包

完全等价的，我们可以用闭集来描述拓扑，并且在某些问题中用闭集更方便。

定义 2.7.1. 给定拓扑空间X, 包含子集A的所有闭集的交称为A（在X中）的闭包，记为$\bar{A}_X$, 简记为$\bar{A}$. 即

$$\bar{A}=\bigcap\{B|B\text{为包含}A\text{的闭集}\}.$$

因为闭集的交是闭集，所以闭包是包含该子集的最小闭集。由定义可知A为闭集当且仅当$A=\bar{A}$.

命题 2.7.2. 设Y是X的子空间，$A\subseteq Y$, 则A在Y中的闭包等于A在X中的闭包与Y的交集。

证明. 即证$\bar{A}_Y=\bar{A}\bigcap Y$. 首先$\bar{A}\bigcap Y$是$Y$中包含$A$的相对闭集，所以$\bar{A}_Y\subseteq\bar{A}\bigcap Y$. 反之，设$\bar{A}_Y=B\bigcap Y$, 其中$B$为$X$中闭集，则$B\supseteq A$, 从而$B\supseteq\bar{A}$. 因此$B\bigcap Y\supseteq\bar{A}\bigcap Y$. □

例 2.7.3. 考虑具有标准拓扑的实数的子集$\mathbb{R}$, $Y=(0,1]$, 则$A=(0,\frac{1}{2})$在Y中的闭包为$(0,\frac{1}{2}]$.

引理 2.7.4. 设$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，$\mathcal{C}$是拓扑$\mathcal{T}$的基，A是X的子集。则$x\in\bar{A}$当且仅当对$\mathcal{C}$中任意元素U, 若$x\in U$, 则$U\bigcap A\neq\emptyset$.

证明. 首先证明$x\in\bar{A}\Longleftrightarrow$对任意包含$x$的开集$U$, $U\bigcap A\neq\emptyset$. 我们证明等价的逆否命题：存在包含x的开集U, $U\bigcap A\neq\emptyset\Longleftrightarrow x\notin\bar{A}$.
$\Longrightarrow$: 若$x\in U$, 但是$U\bigcap A=\emptyset$, 则$A\subseteq X\setminus U$, 从而$\bar{A}\subseteq X\setminus U$. 所以$x\notin\bar{A}$.
$\Longleftarrow$: 若$x\notin\bar{A}$, 取$U=X\setminus\bar{A}$, 则$x\in U$且$U\bigcap A=A\setminus\bar{A}=\emptyset$.
再证明以下两条等价

- $i)$ 对任意$\mathcal{C}$中元素U, 若$x\in U$, 则$U\bigcap A\neq\emptyset$
- $ii)$ 对任意开集U, 若$x\in U$, 则$U\bigcap A\neq\emptyset$

显然只需$i)\implies ii)$. 因为任何开集U必可写成$\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha$的形式，若$x\in U$, 则$x\in U_\alpha$对某个$\alpha\in J$成立，从而由$U_\alpha\bigcap A\neq\emptyset$推出$U\bigcap A\neq\emptyset$. □

思考题 2.7.5. 引理中的基可以换成子基吗？

例 2.7.6. *1.* $\mathbb{R}$（标准拓扑）的子集$A=(0,1)$, $\bar{A}=[0,1]$.
2. $\mathbb{R}$的子集$\mathbb{Q}$的闭包为$\mathbb{R}$. 一般若$\bar{A}=X$, 则称A是稠密的。

定义 2.7.7. 设A是拓扑空间X的子基，若对包含x的任意开子集U, $U\bigcap A\backslash\{x\}\neq\emptyset$, 则称$x$是$A$的聚点，$A$的全部聚点构成的集合记为$A'$, 称为$A$的导集。

命题 2.7.8. 对任意子集都有$\bar{A}=A\bigcup A'$.

例 2.7.9. $X=\{a,b,c\},\mathbb{T}=\{\emptyset,\{a,b\},\{c\},X\}$, 则对$A=\{a\}$, $A'=\{b\},\bar{A}=\{a,b\}$.

和子集的闭包对偶的概念是子集的内部。

定义 2.7.10. 任给子集A, 包含在A中的所有开集的并称为A的内部，记为A^o. 若$x\in A^o$, 我们也称A是x的邻域。

2.8 极限与分离公理

对于实数序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到x当且仅当任意包含x的开集U, 存在$N\in\mathbb{N}^*$使得当$n\geq N$时，$x_n\in U$. 从而我们可以在一般的拓扑空间中如下定义：

定义 2.8.1. *设X为拓扑空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为X中序列，称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到$x\in X$如果对任意包含x的开集U, 存在$N\in\mathbb{N}^*$使得当$n\geq N$时，$x_n\in U$.*

如此定义的收敛有如下问题：1. 极限可能不唯一 2. 极限存在的条件比较苛刻。关于第一个问题，我们给出极限唯一的充分条件。

定义 2.8.2. *1. 若拓扑空间X中任一单点集为闭集，则称X为T_1空间。*
2. 若对拓扑空间中任意不同两点x,y, 都存在不交开集U,V使得$x\in U,y\in V$, 则称X为T_2空间或者Hausdorff空间。

T_2空间一定是T_1空间。

引理 2.8.3. *Hausdorff空间中若极限存在，则极限唯一。*

引理 2.8.4. *设X为T_1空间，A为X的子集，则$x\in A$当且仅当对任意包含x的开集U, $U\bigcap A$是无限集。*

引理 2.8.5. *以下结论成立*

- *序拓扑是T_2空间。*
- *T_1空间的乘积是T_1空间。T_2空间的乘积是T_2空间。*
- *T_1空间的子空间是T_1空间。T_2空间的子空间是T_2空间。*

以上极限定义的第二个问题关于定义的适用性，在度量空间中，该定义是适用的。

命题 2.8.6. *设(X,d)为度量空间，则*

- *X是T_2空间*
- *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到x当且仅当对任意$\epsilon>0$存在$N\in\mathbb{N}^*$使得当$n\geq N$时，$d(x_n,x)<\epsilon$.*
- *设$A\subseteq X$, 则$x\in\bar{A}$当且仅当存在序列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$满足$x_i\in A$且$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$收敛到x. $x\in A'$当且仅当存在序列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$满足$x_i\in A,x_i\neq x$且$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$收敛到x.*

可以将上述命题第三点稍微推广到如下满足所谓A_1公理（第一可数公理）的空间：

定义 2.8.7. *给定拓扑空间中一点x, 若存在一列包含x的开集$U_n(n=1,2,...)$使得任何包含x的开集必然包含U_n中的某一个，则称X在x点处满足第一可数公理。如果X在每点处均满足第一可数公理，则称X满足第一可数公理或者A_1公理。*

在该定义中，令$V_n=U_1\bigcap U_2\bigcap...\bigcap U_n$, 则可设$U_n$为单调递减的序列：$U_1\supseteq U_2\supseteq U_3....$

命题 2.8.8. *设X在x处满足第一可数公理，则*

- *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到x当且仅当对任意$m>0$存在$N\in\mathbb{N}^*$使得当$n\geq N$时，$x_n\in U_m$.*
- *设$A\subseteq X$, 则$x\in\bar{A}$当且仅当存在序列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$满足$x_i\in A$且$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$收敛到x. $x\in A'$当且仅当存在序列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$满足$x_i\in A,x_i\neq x$且$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$收敛到x.*

2.9 连续映射

定义 2.9.1. *设f为拓扑空间X到拓扑空间Y的映射，给定$x\in X$, 若对包含$f(x)$的任意开集V, 存在包含x的开集U, 使得$f(U)\subseteq V$(等价于$U\subseteq f^{-1}(V)$), 则称f在x处连续。若f在每点处都连续，则称f连续或者f为连续映射（函数）。*

引理 2.9.2. *设f为拓扑空间X到拓扑空间Y的映射，以下等价*

- *f连续*

- 对Y中任意开集V, $f^{-1}(V)$是开集。
- 对Y中任意闭集B, $f^{-1}(B)$是闭集。
- 对X的任意子集A, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

证明. $i) \iff ii)$: 任给开集V, 任取$x \in f^{-1}(V)$, 因为f在x处连续，所以存在包含x的开集U_x使得$f(U_x) \subseteq V$, 即$U_x \in f^{-1}(V)$, 从而$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$, 所以$f^{-1}(V)$是开集。
$ii) \iff iii)$: 由$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$即可。
$iii) \iff iv)$: $\overline{f(A)}$是闭集，从而$f^{-1}(\overline{f(A)})$是闭集。而$f^{-1}(\overline{f(A)}) \supseteq A$, 所以$f^{-1}(\overline{f(A)}) \supseteq \bar{A}$. 反过来，对闭集$B$, 取$A = f^{-1}(B)$, 则$f(A) \subseteq B, \overline{f(A)} \subseteq B$. 因此$\bar{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \subseteq f^{-1}(B)$. 所以$\bar{A} = A$. □

由等价的第二条可知连续映射的复合是连续映射。

引理 2.9.3. 设f为拓扑空间X到拓扑空间Y的映射，$\mathcal{S}$是Y的拓扑的子基，则f连续当且仅当对任意$V \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(V)$是开集。

证明. 记$\mathcal{S}$生成的基为$\mathcal{C} = \{\bigcap_{i=1}^{k} U_i | U_i \in \mathcal{S}, k \in \mathbb{N}^*\}$, 而$f^{-1}(U_1 \bigcap U_2 \bigcap ... \bigcap U_k) = \bigcap_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i)$, 从而对任意$\mathcal{C}$中成员$C$, $f^{-1}(C)$为开集。Y中任意开集U均可写成$\mathcal{C}$中若干成员的并，而$f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in J} C_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(C_\alpha)$，从而任意开集$U$的原像为开集。 □

引理 2.9.4. 设$(X,d),(Y,\rho)$为度量空间，$f: X \to Y$为映射，则f在x处连续当且仅当对任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$使得当$d(x', x) < \delta$时，$\rho(f(x), f(x')) < \epsilon$.

设(X,d)为度量空间，A为X的非空子集，定义$d(x, A) = \inf\{d(x,a) | a \in A\}$, 称为$x$到$A$的距离。函数$d(\cdot, A)$满足$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$, 由此可知$d(\cdot, A)$为连续函数。

定义 2.9.5. 设f为拓扑空间X到拓扑空间Y的1-1映射，若f和f^{-1}均连续，则称f为X到Y的同胚（映射），X和Y是同胚的。拓扑空间到自身的同胚称为自同胚。

例 2.9.6. 1. 任意非空开区间(a,b)与$(0,1)$同胚，$(0,1)$与$\mathbb{R}$同胚。
2. 在单位圆盘D内任取$2n$个不同的点$A_1, ..., A_n; B_1, B_2, ..., B_n$, 则存在$D$的自同胚将$A_i$映成$B_i$.
3. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$与环面同胚。
4. 考虑乘积空间$X_1 \times X_2$，任取$x_2 \in X_2$, 则X_1与$X_1 \times X_2$的子空间$X_1 \times \{x_2\}$同胚。

f^{-1}连续等价于f为开映射：若U为X中开集，则$f(U)$是Y中开集。连续的1-1映射并不一定是同胚，例如$\mathbb{R}_l$到$\mathbb{R}$的恒同映射。在同胚下不变的性质称为拓扑性质，第三章中的连通性和紧性都是拓扑性质。

定义 2.9.7. 设f为拓扑空间X到拓扑空间Y的单射，若f是连续单射且X与$(f(X),$子拓扑$)$同胚，则称f为嵌入（映射）。

例 2.9.8. $f: [0,1) \to \mathbb{R}^2, f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$不是嵌入。

2.10 连续映射的性质

命题 2.10.1. 连续函数有如下简单性质：

- 常值映射为连续映射：若存在$y_0 \in Y$使得$f(x) \equiv y_0$, 则$f(x)$连续
- 设A是X的子空间，则包含映射连续
- 设$f: X \to Y$连续，则$f|_A : A \to Y$连续，这里A赋予子拓扑（即X的子空间）
- 给定映射$f: X \to Y$则f连续当且仅当$f: X \to f(X)$连续，这里$f(X)$赋予子拓扑（即Y的子空间）
- 设$f: X \to Y$为映射，$U_\alpha (\alpha \in J)$是X上一族开集且$X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$，则$f$连续当且仅当$f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to Y$对所有的$\alpha$都连续

命题 2.10.2 (黏结引理). 设$f: X \to Y$为映射，$A_i(1 \leq i \leq n)$是有限个闭集且$X = \bigcup_{i=1}^n A_i$，则f连续当且仅当$f|_{A_i}: A_i \to Y$对所有的i都连续。

证明. "$\Longrightarrow$"已证。反过来，只需证明对每个闭集B，$f^{-1}(B)$是闭集。而$f^{-1}(B)$是闭集当且仅当$f^{-1}(B)\bigcap A_i$均为闭集：$f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(B)\bigcap A_i$. 因为$f|_{A_i}$连续，所以$f^{-1}(B)\bigcap A_i$为$A_i$中的相对闭集，而$A_i$为闭集，所以$f^{-1}(B)\bigcap A_i$为$X$中闭集。证毕。

□

引理 2.10.3. 设X_1, X_2, Y为拓扑空间，在$X_1 \times X_2$上赋予乘积拓扑，映射$f: Y \to X_1 \times X_2$连续当且仅当$\pi_i \circ f (i = 1, 2)$连续。

证明. 由乘积拓扑的定义，可知$\{\pi_1^{-1}(U), U$是X_1中开集$\}\bigcup\{\pi_2^{-1}(V), V$是$X_2$中开集$\}$是积拓扑的子基。 $\Longrightarrow$: 由上述的子基以及连续函数的定义，知π_1, π_2连续，因此$\pi_i \circ f$连续。

$\Longleftarrow$: 由引理2.9.3, 只需证明对X_i中开集U，$f^{-1}(\pi_i^{-1}(U))$为开集。而$f^{-1}(\pi_i^{-1}(U)) = (f \circ \pi_i)^{-1}(U)$, 因为$f \circ \pi_i$连续，所以$f \circ \pi_i)^{-1}(U)$是开集，得证。

□

利用该引理和实数上加法，乘法的连续性: 作为$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$的映射，可以得到如下结论：设$f, g$为$X$到$\mathbb{R}$的连续映射，定义$(f+g)(x) = f(x)+g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, 则$f+g, f \cdot g$也是连续函数。

证明. 记$p: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$为加法，$m: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$为乘法，令 $F: X \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$为$F(x) = (f(x), g(x))$，则由引理知$F$连续。而$p \circ F = f + g, m \circ F = f \cdot g$, 从而均为连续函数。 □

3 连通性和紧致性

在数学分析中，关于连续函数有两个基本结论：介值定理和极值定理。本章我们将引入连通性和紧致性两个重要的概念，由此将上述定理推广到拓扑空间中。无论是连通性还是紧致性，我们都需要回答两方面的问题，1. 为什么这个性质是重要的？ 2. 如何得到这些性质？回答第一个问题就是要从这些性质推出其它我们关心的性质，回答第二个问题就是证明或者构造一些空间满足这些性质。

3.1 连通性定义和基本性质

定义 3.1.1. 设X为拓扑空间，U, V上X上不交的非空开集，若$X = U\bigcup V$，则称U, V是X的分割。如果X上没有分割，则称X是连通的（空间）。若X的子集Y在子拓扑下（不）连通，则称Y（不）连通。

由定义可知，X不连通当且仅当存在非空的既开又闭的子集。设Y是X的子空间，则不交的非空子集A, B是Y的分割当且仅当$A\bigcup B = Y$且$A'\bigcap B = B'\bigcap A = \emptyset$. 连通性是拓扑性质：若$X, Y$同胚，$X$连通当且仅当$Y$连通。

定义 3.1.2. $\mathbb{Q}$是不连通的。

引理 3.1.3. 若C, D是X的分割，Y是X的连通子集，则$Y \subseteq C$或$Y \subseteq D$.

命题 3.1.4. $A_\alpha(\alpha \in J)$是X的一族连通子集，设存在$x \in X$满足$x \in A_\alpha, \forall \alpha \in J$, 则$\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$连通。

命题 3.1.5. 设A是连通子集，$A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, 则$B$是连通的。

证明. 设C, D是B的分割，由引理$A \subseteq C$或者$A \subseteq D$. 不妨设$A \subseteq C$, 则$\bar{A} \subseteq \bar{C}$. 由分割的定义，$C$是$B$中相对闭集，从而$C = \bar{C}\bigcap B$. 因此$C \supseteq \bar{A}\bigcap B = B$. 与分割的定义矛盾！ □

命题 3.1.6. 设$f: X \to Y$为连续映射，X连通，则$f(X)$连通。

证明. 设$f(X)$有分割$U\bigcap f(X),V\bigcap f(X)$, 其中$U,V$是$X$中开集。则$f^{-1}(U\bigcap f(X))=f^{-1}(U),f^{-1}(V\bigcap f(X))=f^{-1}(V)$是$X$上的分割，与$X$连通矛盾！ □

命题 3.1.7. 设X,Y均连通，则乘积空间$X\times Y$连通。

证明. $X\times Y$中的"十字形"：$X\times\{y\}\bigcup\{x\}\times Y$连通，而$X\times Y=\bigcup_{x\in X}(X\times\{y\}\bigcup\{x\}\times Y)$, 所以也连通。

□

命题 3.1.8. 设Y为序拓扑，X连通，$f:X\to Y$为连续映射。若$a,b\in f(X)$, $c\in(a,b)$, 则$c\in f(X)$

3.2 序拓扑的连通性

定义 3.2.1. 设$(L,<)$为不止一个元素的全序集，且L满足：

- L有上确界性质：对L的任意非空子集A，若存在$b\in L$使得$\forall a\in A,a\le b$(称b为A的一个上界，A有上界)，则存在$c\in L$使得c是L的上界且任何比c小的元素都不是A的上界（c称为A的上确界，记为$\sup\ A$.）
- 若$x<y$, 则存在$z\in L$使得$x<z<y$.

则称L为线性连续统。

定理 3.2.2. L为线性连续统，则L的任意凸子集在序拓扑（和子拓扑相同）下是连通的。

证明. 首先我们注意序拓扑的如下性质：对L中子集$[a,b]$其中$a<b$, 设$c\in[a,b)$, U为$[a,b]$中包含c的相对开集，则存在$x\in(a,b]$使得$[a,x)\subseteq U$. 类似地，若设$c\in(a,b]$, U为$[a,b]$中包含c的相对开集，则存在$x\in[a,b)$使得$(x,c]\subseteq U$.

设Y是任意凸子集，假设其不连通，则存在分割U,V, 取$a\in U,b\in V$, 不妨设$a<b$, 则$[a,b]$有分割$U\bigcap[a,b],V\bigcap[a,b]$, 仍记为$U,V$. 令$c=\sup\ U$, 则要么$c\in U$，要么$c\in V$.

下面分情况讨论

- 如果$c\in U$, 则$c<b$. 由U是开集和如上性质知存在$d>c$使得$[c,d)\subseteq U$. 由线性连续统的假设，存在$z\in(c,d)$. 从而$\sup\ U\ge z>c$, 矛盾！
- 如果$c\in V$, 则$a<c$. 由V是开集，存在$d<c$使得$(d,c]\subseteq V$. 从而$U\subseteq[a,d]$, 因此$\sup\ U\le d<c$, 矛盾！

□

例 3.2.3. *1.* 实数是线性连续统，从而$[0,1]$是连通的。
*2.*有序矩形是线性连续统。

3.3 道路连通性

定义 3.3.1. 设x,y是拓扑空间X两点，若连续映射$\gamma:[0,1]\to X$满足$\gamma(0)=x,\gamma(1)=y$，则称γ为连接x,y的道路。若X中任意两点都有道路连接，则称X是道路连通的。若子集Y在子拓扑下道路连通，则称Y道路连通。

道路连通也是拓扑性质，且道路连通的空间一定是连通的。

命题 3.3.2. $A_\alpha(\alpha\in J)$是X的一族道路连通子集，设存在$x\in X$满足$x\in A_\alpha,\forall\alpha\in J$, 则$\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$道路连通。

命题 3.3.3. 设$f:X\to Y$为连续映射，X道路连通，则$f(X)$道路连通。

命题 3.3.4. 设X,Y均道路连通，则乘积空间$X\times Y$道路连通。

例 3.3.5. *1.* $\mathbb{S}^n$道路连通
2. $\mathbb{R}^1$与$\mathbb{R}^n(n\geq 2)$不同胚
3. 有序矩形连通但不是道路连通
4. 拓扑学家正弦曲线$\{(x,\sin\frac{1}{x})|x\in(0,1]\}\bigcup\{(0,y)|y\in[-1,1]\}$连通但不是道路连通

证明. 设γ是连接$(0,0)$和$(1,\sin 1)$的道路，记$\gamma(t)=(x(t),y(t))$. 不妨设$t>0$时$x(t)>0$. 下面构造单调递减的序列t_n使得$y(t_n)=(-1)^n$. 令$x_n=\frac{1}{2n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}}$, 则$x_n$为$[0,1]$中单调递减序列。由介值定理，存在$t_1\in[0,1]$使得$x(t_1)=x_1$, $t_2\in[0,t_1]$使得$x(t_2)=x_2$,...,$x(t_n)=x_n$. 因此$\gamma(t_n)$没有极限（$n\to\infty$). □

3.4 连通分支和局部连通性

定义 3.4.1. 设x是拓扑空间X中一点，包含x的所有（道路）连通子集的并称为（X中）包含x的（道路）连通分支。

引理 3.4.2. 设P是包含x的（道路）连通分支，$y\in P$, 则P也是包含y的（道路）连通分支。若在X上定义$x\sim y$: 若存在连通子集A使得$x\in A,y\in A$, 则连通分支即为该等价关系下的等价类。类似地，若在X上定义$x\approx y$为存在连接x,y的道路, 则道路连通分支即为该等价关系下的等价类。

引理 3.4.3. 连通分支都是闭集。每个连通分支是若干个道路连通分支的并。

例 3.4.4. 拓扑学家正弦曲线有两个道路连通分支。

定义 3.4.5. 设x是拓扑空间X中一点，若对包含x的任意开集U都存在（道路）连通开集V满足$x\in V\subseteq U$, 则称X在x点处局部（道路）连通。

引理 3.4.6. X局部（道路）连通$\Longleftrightarrow$任意开集的所有（道路）连通分支都是X中开集。

证明. 只证明连通，道路连通类似证明。

$\Longrightarrow$: 设U为开集，P为U的连通分支，任取$x\in P$, 由假设存在包含x的连通开集$W\subseteq U$, 从而$W\subseteq P$, 所以P是开集。
$\Longleftarrow$: 任给x的开邻域U，取U中包含x的连通分支即可。 □

命题 3.4.7. 设X局部道路连通，则连通分支是道路连通分支。

证明. 设C是连通分支，则C是开集，从而C的道路连通分支均为开集：$C=\bigcup_{\alpha\in J}P_\alpha$, P_α是道路连通分支。若J不是单元素集，则$P_{\alpha_0}\bigcup_{\alpha\in J\setminus\{\alpha_0\}}P_\alpha$为$C$的分割，与$C$的连通性矛盾！ □

3.5 紧致性定义和基本性质

给定集合X上的子集族$\mathcal{A}$, 若$\bigcup\mathcal{A}=X$则称$\mathcal{A}$为X的覆盖。若X是拓扑空间，由若干开集构成的X的覆盖称为X的开覆盖。给定子集A, 若集合X上的子集族$\mathcal{A}$满足$\bigcup\mathcal{A}\supseteq A$, 则称$\mathcal{A}$为$A$的覆盖。

定义 3.5.1. 如果对X的任意开覆盖$\mathcal{A}$, 存在$\mathcal{A}$的有限子集也是X的覆盖，则称X是紧致的（空间）或紧的。

定义中的有限子集也称为$\mathcal{A}$的有限子覆盖。

引理 3.5.2. 子空间A是紧致的$\Longleftrightarrow$任何一族由X中开集构成的A的覆盖有有限子覆盖。如果$\mathcal{C}$是X上拓扑的基，则这也等价于任何一族由X中基元素构成的A的覆盖有有限子覆盖。

证明. 先证明子空间A是紧致的$\Longleftrightarrow$任何一族由X中开集构成的A的覆盖有有限子覆盖。

$\Longrightarrow$: 任给A的开覆盖$\mathcal{F}=\{U_\alpha\}$, 则$\{U_\alpha\bigcap A\}$是A子拓扑中的开覆盖。

$\Longleftarrow$: 设$A=\bigcup_{\alpha\in J}V_\alpha$, 其中$V_\alpha$是$A$的相对开集。设$V_\alpha=U_\alpha\bigcap A$, 则$\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha$是由$X$中开集构成的覆盖。

设$\mathcal{C}$是拓扑的基，任给A的由X中开集构成的覆盖$\mathcal{F}$, 将每个$U \in \mathcal{F}$写成基元素的并，则可得由基元素构成的覆盖，从而有子覆盖，那么原来的开覆盖$\mathcal{F}$也有子覆盖。 □

命题 3.5.3. 紧空间的闭子集是紧的。

命题 3.5.4. 紧空间在连续映射下的像是紧的。

定理 3.5.5. 设X为紧空间，Y为序拓扑，$f : X \to Y$连续，则存在$c \in X, d \in X$使得$\forall x \in X$有$f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

证明. $f(X)$是Y的紧子集，若$f(X)$没有最大元，则$f(X) \subseteq \bigcup_{c \in f(X)}(-\infty, c)$, 而该覆盖没有有限子覆盖，矛盾！同理可证有最小元。 □

定理 3.5.6. 设X_1, X_2为紧空间，则乘积空间$X_1 \times X_2$是紧空间。

证明. 假设$\mathcal{A}$是由一些基元素$U \times V$构成的开覆盖：$\mathcal{A} = \{U_\alpha \times V_\alpha | \alpha \in J\}$. 任给$y \in X_2$, 由于$\mathcal{A}$覆盖了$X_1 \times \{y\}$, 从而存在有限集$I_y \subseteq J$, 使得$\{U_\alpha \times V_\alpha | \alpha \in I_y\}$覆盖了$X_1 \times \{y\}$, 从而$\bigcup_{\alpha \in I_y} U_\alpha = X_1$. 不妨设$\forall \alpha \in I_y, y \in V_\alpha$, 令$V_y = \bigcap_{\alpha \in I_y} V_\alpha$, 则$\bigcup_{\alpha \in I_y} U_\alpha \times V_\alpha \supseteq X_1 \times V_y$. 再对$X_2$的开覆盖$V_y$取有限子覆盖即可。 □

由定理的证明可得到如下结论

引理 3.5.7 (管状邻域)**.** 设X_1为紧空间，y为X_2中一点，W为$X_1 \times \{y\}$的开邻域，则存在y的开邻域V，使得$X_1 \times V \subseteq W$.

紧致性同样可以用闭集来描述。设$\mathcal{F}$是由X中闭集构成的非空子集族，若对$\mathcal{F}$任意有限子集$\mathcal{B}$, $\bigcap \mathcal{B}$都非空，则称$\mathcal{F}$具有有限交性质。

引理 3.5.8. X紧致当且仅当任意具有有限交性质的闭集族$\mathcal{F}$满足$\bigcap \mathcal{F}$非空。

3.6 序拓扑的紧致性

定理 3.6.1. 设X为具有上确界性质的全序集，则X的闭区间$[a, b]$在序拓扑（和子拓扑相同）下是紧致的。

证明. 任给$[a, b]$的开覆盖$\mathcal{A}$, 证明其有有限子覆盖。定义集合$I = \{c \in [a, b] | 存在\mathcal{A}的有限子集覆盖[a, c]\}$, 下面证明$I = [a, b]$或者等价地$b \in I$. 首先存在开集$U \in \mathcal{A}$使得$a \in U$, 从而存在$d > a, (a, d) \subseteq U$, 再取开集$V$包含$d$, 则$\{U, V\}$覆盖了$[a, d]$, 因此$d \in I$. 令$c = \sup I$, 则$c > a$. 我们先证明$c \in I$. 取包含$c$的开集$U \in \mathcal{A}$, 以及$e < c$满足$(e, c] \subseteq U$. 则$e \in I$, 取$[a, e]$的有限覆盖，再加上$U$, 即为$[a, c]$的有限覆盖，从而$c \in I$. 再证明$c = b$, 否则$c < b$, 取包含$c$的开集$U \in \mathcal{A}$, 以及$b \geq f > c$使得$[c, f) \subseteq U$, 再取一个包含$f$的开集$V$, 则$[a, c]$的有限覆盖加上$U, V$覆盖了$[a, f]$, 因此$c < f \in I$与$c = \sup I$矛盾！ □

例 3.6.2. *1.* $[0, 1]$是紧致的。

2. 良序集具有上确界性质，从而其闭区间紧致。

推论 3.6.3. 记欧氏空间$\mathbb{R}^n$上的欧氏度量为d_2, 则子集A是紧致的当且仅当它是闭集且$diam(A, d_2)$有限。

3.7 紧性与分离性

引理 3.7.1. *Hausdorff空间的紧集是闭集。设C_1, C_2为Hausorff空间中不相交的紧致子集，则存在不交开集U_1, U_2满足$C_i \subseteq U_i, i = 1, 2.$*

从而紧致的Hausdorff空间是正规空间。

命题 3.7.2. *设$f : X \to Y$是1-1的连续映射，X为紧致空间，Y为Hausdorff空间，则f是同胚。*

证明. 只需证明对X的闭集B, $f(B)$是闭集。因为X紧致且B是闭集，所以B紧致，因而$f(B)$紧致。又因为Y是Hausdorff空间，所以$f(B)$是闭集。 □

定义 3.7.3. *若$\{x\}$是开集，则称x是孤立点。*

命题 3.7.4. *设X为紧致的Hausdorff空间，若X没有孤立点，则X不可数。*

证明. 用反证法，假设$X = \{x_i | i = 1, 2, ...\}$, 我们设法构造一列单调递减的非空闭集$C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3$...使得$C_i = \bar{U}_i$且$x_i \notin C_i$, 从而$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \emptyset$, 矛盾!

C_1构造： x_1, x_2可用开集U_1, U_2分开, $U_2 \subseteq X \setminus U_1$, 令$C_1 = \bar{U}_2$.

C_{n+1}构造：设$C_1, C_2, ..., C_n = \bar{U}_n$已经取好，因为$X$中无孤立点，所以$U_n \neq \{x_{n+1}\}$, 在$U_n$中取不同于$x_{n+1}$的点$y$. 取不相交的开集$W_1, W_2$分别包含$x_{n+1}, y$, 那么$y \in U_{n+1} = U_n \bigcap W_2 \subseteq X \setminus W_1$, 且$\bar{U}_{n+1} \subseteq \bar{U}_n \bigcap X \setminus W_1$, 从而$x_{n+1} \notin \bar{U}_{n+1} \neq \emptyset$, 令$C_{n+1} = \bar{U}_{n+1}$即可。 □

以上证明实际上可以得到如下的Baire纲定理：

命题 3.7.5. *设X为紧致的Hausdorff空间，若$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, 其中$B_i$是闭集，则必有一个$B_i$的内部非空。*

证明. 只需在如上证明中将$U_n \neq \{x_{n+1}\}$改成$U_n \not\subseteq B_{n+1}$. □

3.8 单点紧致化

定义 3.8.1. *给定空间X中一点x, 若存在紧子集C和包含x的开集U满足$U \subseteq C$, 则称X在x点处局部紧。*

引理 3.8.2. *设X为Hausdorff空间，则X在x处局部紧当且仅当对包含x的任意开集U存在开集V满足$x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$且$\bar{V}$紧致。*

证明. 由假设存在紧子集C和包含x的开集W满足$W \subseteq C$. X是Hausdorff的，所以$\bar{W} \subseteq C$. 对x的开邻域U, 取分离x和$C \setminus U$的开集V_1, V_2, 则$\overline{V_1 \bigcap W} \subseteq \bar{V}_1 \bigcap \bar{W} \subseteq X \setminus V_2 \bigcap C \subseteq U$. □

定理 3.8.3. *设X为Hausdorff空间，若X是局部紧致的，则存在紧致Hausorff空间Y满足*

- *存在X到Y的嵌入，记为$i : X \to Y$,*
- *$Y \setminus i(X)$是单元素集.*

更进一步这样的Y在同胚意义下唯一，即若Y'是另一个满足条件的拓扑空间，则Y'与Y同胚。

证明. 先证唯一性。假设Y存在，将X等同成Y的子空间$i(X)$，则$Y \setminus X$为单点集，记为P. 此时X为Y中开子集，Y中的开集U要么为X中开集，要么为包含P的开集。对后者，$Y \setminus U$为X的紧子集。反过来，任取X的紧子集K, 则K为Y的闭集，从而$Y \setminus K = \{X \setminus K \bigcup \{P\}$是$Y$的开集。令$\mathcal{T} = \{U | U$是$X$中开集$\} \bigcup \{X \setminus K \bigcup \{P\} | K$是$X$中紧集$\}$. 那么$\mathcal{T}$是$Y$上的拓扑，所以$Y$上的拓扑唯一。

再证存在性。因为X是Hausdorff的，所以紧集是闭集。在集合$Y = X \bigcup \{P\}$上如上定义$\mathcal{T}$，直接验证$\mathcal{T}$是拓扑：$\bigcup (X \setminus K_\alpha) = X \setminus (\bigcap K_\alpha), U \bigcup X \setminus K = X \setminus (K \setminus U), X \setminus K_1 \bigcap X \setminus K_2 = X \setminus (K_1 \bigcup K_2), U \bigcap X \setminus K = U \setminus K$. 由定义，容易知道$Y$是紧致的，并且$X$到$Y$的含入映射是嵌入。下面用局部紧性证明$Y$是Hausdorff的。只需对$P$和$X$中一点$x$证明存在分离它们的开集。取$x$的开邻域$V$使得$\bar{V}$是紧致的。则$Y \setminus \bar{V} = X \setminus \bar{V} \bigcup \{P\}$是$P$的开邻域，且$Y \setminus \bar{V} \bigcap V = \emptyset$. □

习惯上记$Y \setminus i(X)$为$\{\infty\}$. 若X紧致，则∞为孤立点.

定义 3.8.4. *X为拓扑空间，若拓扑空间Y满足Y是紧致的$Hausdorff$空间，Y有子空间A和X同胚且$\bar{A} = Y$，则称Y为X的紧化。若$Y \setminus A$为单点集，则称Y为X的单点紧化。*

当X为非紧的局部紧致Hausdorff空间时，单点紧化存在，并且在同胚意义下唯一。

例 3.8.5. *$\mathbb{R}^n$的单点紧致化为$\mathbb{S}^n$.*

命题 3.8.6. *设X是局部紧致的$Hausorff$空间，A是X的开集或闭集，则A也是局部紧致的。*

证明. 若A是开集，由引理3.8.2即得。

若A是闭集，任给$x \in A$，由X在x处局部紧知有x的开邻域U以及紧子集满足$U \subseteq C$. 那么$x \in U \bigcap A \subseteq C \bigcap A$，而$U \bigcap A$为包含$x$的相对开集，$C \bigcap A$是$C$的相对闭集，从而也是紧集。由定义，$A$在$x$处局部紧。 □

4 点集拓扑选讲部分

4.1 笛卡尔积上的拓扑：积拓扑与箱拓扑

设$(X_\alpha)_{\alpha \in J}$是一列拓扑空间，在$\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$上我们可以定义乘积拓扑（推广了两个拓扑空间的乘积拓扑概念）：

定义 4.1.1. *$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in J} \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) | U_\alpha$是$X_\alpha$中开集$\}$是$\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$上的子基，生成的拓扑称为乘积拓扑，相应的空间称为乘积空间。*

引理 4.1.2. *给定映射$f : X \to \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$，则$f$连续当且仅当$\forall \alpha \in J, \pi_\alpha \circ f$均连续。*

证明. 用引理2.9.3. □

定义 4.1.3. *$\mathcal{C} = \{\Pi_{\alpha \in J} U_\alpha | U_\alpha$是$X_\alpha$中开集$\}$是$\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$上的基，生成的拓扑称为箱拓扑。*

箱拓扑总是比积拓扑细，一般而言，两者不同：

引理 4.1.4. *设J为无限集，则$\mathbb{R}^J$上的箱拓扑严格比积拓扑细。*

将$\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$记为$\mathbb{R}^\omega$, 即$\mathbb{R}^\omega = \{(x_i)_{i=1}^\infty | x_i \in \mathbb{R}\}$.

例 4.1.5. *考虑映射$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$, $f(t) = (t, t, t, ...)$. 若赋予$\mathbb{R}^\omega$箱拓扑，则f不是连续映射。*

回忆之前的定义：

定义 4.1.6. *拓扑空间$(X, \mathcal{T})$是拓扑空间，若存在X上的度量d使得其诱导的拓扑等于$\mathcal{T}$，则称$(X, \mathcal{T})$是可度量化的。*

引理 4.1.7. *$\mathbb{R}^\omega$上的箱拓扑不可度量化。*

证明. 根据命题2.8.6, 只需证明存在A,以及$x \in \bar{A}$但是A中没有序列收敛到x. 令$A = \{(x_i)_{i=1}^\infty | x_i > 0\}$, 则$\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0, ...) \in \bar{A}$: 任意包含$\mathbf{0}$的形如$U = U_1 \times U_2 \times ...$的基元素必然满足$0 \in U_i$, 从而$U \bigcap A \neq \emptyset$. 任取$A$中序列$x_i$, 设$x_i = (x_i^1, x_i^2, ...)$, 令$U = (-x_1^1, x_1^1) \times ... \times (-x_i^i, x_i^i) \times ...$, 则$U$为包含$\mathbf{0}$的开集，但$x_i \notin U$. □

根据下节的命题4.2.1, $(\mathbb{R}^\omega,$ 积拓扑$)$是可度量化的，从而$(\mathbb{R}^\omega,$ 积拓扑$)$和$(\mathbb{R}^\omega,$ 箱拓扑$)$不同胚。

以下性质对积拓扑和箱拓扑均成立：

命题 4.1.8. *在$\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$上赋予积拓扑或箱拓扑，以下成立：*

1. 设A_α是X_α的子空间，则$\Pi_{\alpha \in J} A_\alpha$是$\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$的子空间

2. 设X_α为$T_i (i = 1, 2)$空间，则$\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$为$T_i (i = 1, 2)$空间

3. 设A_α是X_α的子集，则$\overline{\Pi_{\alpha \in J} A_\alpha} = \Pi_{\alpha \in J} \bar{A}_\alpha$

证明. 只证明3. 设$x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\overline{\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha}$, 任取$x_\alpha$的开邻域$U_\alpha$, 则无论在积拓扑还是箱拓扑中，$\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$都是$x$的开邻域，从而$\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)\bigcap\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha\neq\emptyset$, 由此可得$U_\alpha\bigcap A_\alpha\neq\emptyset$, 所以$x_\alpha\in\bar{A}_\alpha$.

反过来对$x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}$, 设$x_\alpha\in\bar{A}_\alpha$, 任取$x$在积拓扑或者箱拓扑中的开邻域$U$, U一定包含形如$\Pi_{\alpha\in J}U_\alpha$的开集，其中$U_\alpha$为$x_\alpha$的开邻域。则$U_\alpha\bigcap A_\alpha\neq\emptyset$, 从而 $\Pi_{\alpha\in J}U_\alpha\bigcap\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha\neq\emptyset$. □

4.2 度量空间的乘积

命题 4.2.1. 设$(X_i,d_i)(i=1,2,...)$是一列度量空间，则乘积空间$\Pi_{i=1}^\infty X_i$可度量化。

证明. 对$x=(x_i)_{i=1}^\infty, y=(y_i)_{i=1}^\infty$ 令$D(x,y)=\sup\{\frac{\bar{d}_i(x_i,y_i)}{i}|i=1,2,...\}$. 对每个度量球$B_D(x,r)$，当$N\geq\frac{1}{r}$时，该球包含$\Pi_{i=1}^N B_{\bar{d}_i}(r,x_i)\Pi_{i=N+1}^\infty X_i$这个开集。反过来，设$x\in\Pi_{i=1}^N U_i\Pi_{i=N+1}^\infty X_i$, 可取$r$充分小使得其包含$B_D(x,r)$. □

引理 4.2.2. 设J为不可数集，则$\mathbb{R}^J$上的积拓扑不可度量化。

证明. 同样根据命题2.8.6, 只需证明存在A,以及$x\in\bar{A}$但是A中没有序列收敛到x. 令 $A=\{f\in\mathbb{R}^J|$存在有限集$I\subseteq J$使得对$j\notin J, f(j)=1\}$. 则$\mathbf{0}\in\bar{A}$, 但是任取A中序列f_i, 设$I_i=\{j|f_i(j)\neq 1\}$, 则I_i为有限集，从而$\bigcup_{i=1}^\infty I_i$为可数集，取$\alpha\notin J$, 则$f_i(\alpha=1)$. 此时$U=\pi_\alpha^{-1}(-0.5,0.5)$为包含$\mathbf{0}$的开集，而$f_i\notin U$. □

定义 4.2.3. 设$(X_\alpha,d_\alpha)(\alpha\in J)$是一族度量空间，令$\bar{d}_\alpha=\min\{d_\alpha,1\}$, 在$\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha$上定义如下度量：

$$\bar{\rho}((x_\alpha),(y_\alpha))=\sup\{\bar{d}_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)|\alpha\in J\},$$

称为一致度量，相应的拓扑称为一致拓扑。

命题 4.2.4. 设$(X_\alpha,d_\alpha)(\alpha\in J)$是一族度量空间，则积拓扑粗于一致拓扑，一致拓扑粗于箱拓扑。

一致拓扑的特殊情况为$(X_\alpha,d_\alpha)\equiv(X,d)$, 此时$\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha=X^J$, 从而$X^J$上有一致拓扑。因为一致拓扑是度量拓扑，所以序列$(f_i)_{i=1}^\infty$在一致拓扑中收敛到$f$当且仅当$\forall\epsilon\in(0,\frac{1}{2})$, 存在$N\in\mathbb{N}^*$使得当$i\geq N$时，$\bar{\rho}(f_i,f)\leq\epsilon$, 即对任意$p\in J$, $d(f_i(p),f(p))\leq\epsilon$. 此时我们也称$(f_i)_{i=1}^\infty$一致收敛到$f$.

命题 4.2.5. 进一步假设J是拓扑空间，则$\mathcal{C}=\{f\in X^J|f \text{ 连续}\}$是$X^J$在一致拓扑下的闭子集。

证明. 只需证明当一列连续函数$(f_i)_{i=1}^\infty$一致收敛到f时，f是连续的。任给X中开集V以及$p\in f^{-1}(V)$, 往证存在p的开邻域U使得$U\subseteq f^{-1}(V)$. 设$f(p)=x$且对某个$\epsilon>0$, $B_d(x,\epsilon)\subseteq V$. 由一致收敛性，存在$N\in\mathbb{N}^*$, $d(f_N(q),f(q))<\frac{\epsilon}{2}$对所有$q\in J$成立. 由$f_N$的连续性，$f_N^{-1}(B_d(x,\frac{\epsilon}{2}))$为开集。下面验证：$p\in f_N^{-1}(B_d(x,\frac{\epsilon}{2}))\subseteq f^{-1}(B_d(x,\epsilon))$.首先 $d(f_N(p),f(p))<\frac{\epsilon}{2}$, 从而 $p\in f_N^{-1}(B_d(x,\frac{\epsilon}{2}))$. 再任取$f_N^{-1}(B_d(x,\frac{\epsilon}{2}))$中一点$q$, $d(f(q),x)\leq d(f(q),f_N(q))+d(f_N(q),x)<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$. □

4.3 紧致度量空间

定理 4.3.1. 设(X,d_X)为紧致度量空间，(Y,d_Y)为度量空间，$f:X\to Y$连续，则f一致连续：$\forall\epsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\epsilon)>0$使得当$d_X(x_1,x_2)<\delta$时，$d_Y(f(x_1),f(x_2))<\epsilon$.

引理 4.3.2 (Lebesgue数引理)**.** 设(X,d)为紧致度量空间，$\mathcal{A}$为X的开覆盖，则存在$\delta>0$, 使得X的每个半径δ的球包含在$\mathcal{A}$的某个成员中。

因为半径r的球直径不超过$2r$, 直径不超过r的子集包含在某个半径为r的球中，所以可将球换成直径不超过δ的子集。

证明. 取$\mathcal{A}$的有限子覆盖$\{U_i|i=1,2,...,n\}$, 记$C_i=X\setminus U_i$, 考虑函数

$$f(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d(x,C_i),$$

设其最小值为$\delta>0$. 对每个半径为δ的球$B_d(x,\delta)$, 由$f(x)\geq\delta$可知存在某个i, 使得$d(x,C_i)\geq\delta$, 从而$B_d(x,\delta)\subseteq U_i$. □

定理证明. 给定$\epsilon>0$, $\forall x\in X$, 存在x的开邻域U_x使得当$x'\in U_x$时，$d_Y(f(x),f(x'))<\epsilon$. 对开覆盖$\{U_x|x\in X\}$用Lebesgue数引理即可。 □

定义 4.3.3. 若对空间X的任意无限子集A，$A'\neq\emptyset$, 则称X是极限点紧致的。若对空间X的任意序列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$都有收敛子列，则称X列紧。

定理 4.3.4. 设(X,d)为度量空间，则X紧$\Longleftrightarrow$ X极限点紧致$\Longleftrightarrow$ X列紧。

证明. 紧$\Longrightarrow$ 极限点紧：这对所有的拓扑空间成立。设$A'=\emptyset$, 则A为闭集，从而为紧集。任取$x\in A$, 因为$x\notin A'$, 存在包含x的开集U_x满足$U_x\bigcap A=\{x\}$. $\{U_x|x\in A\}$是A的开覆盖，从而有有限子覆盖，因此A是有限集。
列紧$\Longrightarrow$ 极限点紧：这也对所有的拓扑空间成立。设A为无限集，任取A中序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$且x_n两两不同。由列紧定义存在收敛子列$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 设其收敛到$a$, 则$a\in A'$.
极限点紧$\Longrightarrow$ 列紧: 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为X中序列，若$\{x_n|n\in\mathbb{N}^*\}$是有限集，则必有无限个x_n为同一点，从而为收敛子列。若为无限集，则有聚点a. 依次取$x_{n_1}\in B_d(a,1),x_{n_2}\in B_d(a,\frac{1}{2}),...$且$n_1<n_2<n_3<...$, 则$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$为收敛子列。
列紧$\Longrightarrow$ 紧: 首先我们证明列紧时引理4.3.2成立：任给(X,d)的开覆盖$\mathcal{A}$, 则存在$\delta>0$, 使得X的每个直径不超过δ的子集包含在$\mathcal{A}$的某个成员中。用反证法，假设对任意$n\geq 1$, 存在直径小于$\frac{1}{n}$的子集C_n，不包含在$\mathcal{A}$的任何一个成员中。任取$x_n\in C_n$, 考虑序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的极限a, 则存在$\mathcal{A}$中成员U, 使得$x\in U$, 当n充分大时，$C_n\subseteq U$, 矛盾！接下来证明对任意$\epsilon>0$, 存在由有限个半径为ϵ的球构成的覆盖。同样用反证法，假设对某个$\epsilon>0$, 不存在由有限个半径为ϵ的球构成的覆盖。任取X中点x_1, 因为$B_d(x_1,\epsilon)$不能覆盖X, 取$x_2\in X\backslash B_d(x_1,\epsilon)$, 类似地$B_d(x_1,\epsilon)\bigcup B_d(x_2,\epsilon)$不能覆盖$X$, 取$x_2\in X\setminus B_d(x_1,\epsilon)\bigcup B_d(x_2,\epsilon)$. 以此类推，我们得到序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足$x_n\in X\setminus B_d(x_1,\epsilon)\bigcup B_d(x_2,\epsilon)\bigcup...\bigcup B_d(x_{n-1},\epsilon)$, 即$d(x_i,x_j)\geq\epsilon,\forall i\neq j$. 因此$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$没有子序列收敛，矛盾！现在我们从列紧推出紧。任给$(X,d)$的开覆盖$\mathcal{A}$，首先存在$\delta>0$, 使得$X$的每个直径不超过$\delta$的子集包含在$\mathcal{A}$的某个成员中。再取$\epsilon=\frac{\delta}{4}$, 并用有限个半径$\epsilon$的球覆盖$X$. 因为半径$\epsilon$的球直径不超过$2\epsilon<\delta$, 从而每个这样的球包含在某个$\mathcal{A}$的成员中，这有限个成员为$\mathcal{A}$的有限子覆盖。 □

对于一般拓扑空间以上等价性不成立。

例 4.3.5. $\mathbb{N}$赋予离散拓扑，$\{0,1\}$赋予平凡拓扑，则乘积空间 $\mathbb{N}\times\{0,1\}$是极限点紧的，但不是列紧的，也不是紧的。
S_Ω是极限点紧致的（实际上列紧），但不是紧的。

证明. 任给S_Ω的无限子集A, 取其可数无限子集$A_1=\{a_1,a_2,...\}$, 则A_1在S_Ω中有上界，即存在$b\in S_\Omega$使得$a_i\leq b,i=1,2,...$: 否则$\bigcup_{i=1}^{\infty}S_{a_i}=S_\Omega$为可数集，其中$S_{a_i}$为$a_i$处的截。从而$A_1\subseteq[m,b]$, 其中$m$为最小元，而$[m,b]$是紧致的，所以$A_1'$非空，进而$A'$也非空。 □

下面考虑度量空间紧致的条件。

定义 4.3.6. 设(X,d)为度量空间，称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为X中序列，如果对任意$\epsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}^*$使得当$n,m\geq N$时，$d(x_n,x_m)<\epsilon$, 则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为*Cauchy*序列。如果任意*Cauchy*序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$都收敛，则称(X,d)是完备的。

定义 4.3.7. 设(X,d)为度量空间，如果对任意$\epsilon>0$, 存在有限个半径为ϵ的球覆盖X, 则称(X,d)是完全有界的。

定理 4.3.8. (X,d)是紧致的当且仅当(X,d)是完备和完全有界的。

证明. 设(X,d)紧致，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为Cauchy序列，由列紧性知有子列收敛到a, 则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到a. 完全有界已证。

下面假设(X,d)完备且完全有界，往证列紧，这只需对任意序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$找出Cauchy子列。根据完全有界性，依次用半径, $\frac{1}{2},...,\frac{1}{n}$...的球覆盖$X$. 则有半径为1的球$B_1$包含$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中的无限项，又有半径$\frac{1}{2}$的球$B_2$包含这无限项中的无限项，依此类推，由对角线即可取出Cauchy子列。 □

引理 4.3.9. 设(X,d)为度量空间，则子集A在诱导度量下一致有界$\iff \forall\epsilon>0$, 存在有限个X中半径ϵ的球覆盖A.

证明. 只需证明若$\forall\epsilon>0$, 存在有限个半径ϵ的球覆盖A, 则A在诱导度量下一致有界。设n个开球$B_d(x_i,\epsilon)$覆盖了A，不妨$B_d(x_i,\epsilon)\bigcap A\neq\emptyset$, 任取$a_i\in B_d(x_i,\epsilon)\bigcap A$, 则$B_d(a_i,2\epsilon), 1\leq i\leq n$覆盖了$A$. □

命题 4.3.10. 设(X,d)是完备度量空间，则子集A的闭包紧致$\iff \forall\epsilon>0$, 存在有限个半径ϵ的球覆盖A.

设X为拓扑空间，(Y,d)为度量空间，在函数空间Y^X上赋予一致度量，记$\mathcal{C}=\{f\in Y^X|f \text{ 连续}\}$. 设$\mathcal{F}$是一族$X$到$Y$的连续函数，即$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$在Y^X中的闭包何时紧致是分析中一个基本的问题。

定义 4.3.11. 设X为拓扑空间，(Y,d)为度量空间，$\mathcal{F}$是一族X到Y的连续函数，$x_0\in X$, 若对任意$\epsilon>0$, 存在x_0的开邻域U, 使得对任意$x\in U$以及任意$f\in\mathcal{F}$, $d(f(x),f(x_0))<\epsilon$, 则称$\mathcal{F}$在x_0处等度连续。如果$\mathcal{F}$每点都等度连续，则称$\mathcal{F}$等度连续。

定理 4.3.12 (Ascoli定理的特殊情形). 设X紧致，Y为欧氏空间$\mathbb{R}^n$. 则 $\mathcal{F}$的闭包紧致$\iff\mathcal{F}$等度连续，并且$\forall x\in X, \mathcal{F}_x=\{f(x)|f\in\mathcal{F}\}$是$\mathbb{R}^n$中有界集。

推论 4.3.13. 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$为$[0,1]$到$\mathbb{R}$的一列连续函数，等度连续且一致有界(存在正数M使得$\forall x\in[0,1]$, $|f_n(x)|\leq M$), 则$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$有子列一致收敛。

4.4 正则空间和正规空间

定义 4.4.1. X是T_1空间。若X还满足：对一点x和闭集A，$x\notin A$，存在开集U,V满足$x\in U, A\subseteq V$且$U\bigcap V=\emptyset$, 则称X为正则（T_3）空间。若X还满足：对两个不相交的闭集A,B, 存在开集U,V满足$A\subseteq U, B\subseteq V$且$U\bigcap V=\emptyset$, 则称$X$为正规（$T_4$）空间。

引理 4.4.2. X是T_1空间，则X正则$\iff$任给X中点x以及x的开邻域U，存在x的开邻域V满足$\bar{V}\subseteq U$. 类似地，X正则$\iff$任给X的任意闭集A以及包含A的开邻域U，存在包含A的开邻域V满足$\bar{V}\subseteq U$.

命题 4.4.3. 正则（正规）空间的子空间是正则（正规）空间。正则空间的乘积是正则空间。

命题 4.4.4. 度量空间是正规空间。

证明. 设A,B是度量空间中(X,d)不交闭集，考虑函数$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$, 则$f$为连续函数。因为$f|_A$恒为0, $f|_B$恒为1, 所以$U=f^{-1}(-\infty,\frac{1}{3}), V=f^{-1}(\frac{2}{3},+\infty)$分别为包含$A,B$的开集。 □

4.5 Urysohn引理

定理 4.5.1. 设X为正规空间，A,B是X中两个不交的闭集，则存在连续映射$f:X\to[0,1]$使得$f|_A$恒为0, $f|_B$恒为1.

证明. 证明的办法是对每个$[0,1]$中的有理数q, 构造开集U_q, 使得当$p<q$时，$\bar{U}_p\subseteq U_q$. 然后定义函数$f(x)=\inf\{p|x\in U_p\}$.记$\boldsymbol{Q}_I=\mathbb{Q}\bigcap[0,1]$.

第一步 归纳构造开集族 $\{U_r:r\in\boldsymbol{Q}_I\}$, 使得

- (i) 当 $r<r'$ 时, $\bar{U}_r\subset U_{r'}$;
- (ii) $\forall r\in \boldsymbol{Q}_I, A\subset U_r\subset B^c$.

将 $\boldsymbol{Q}_I$ 排列为 $\{r_1,r_2,\cdots\}$, 使得 $r_1=1,r_2=0$. 然后对 n 归纳地构造 U_{r_n}. 取 $U_{r_1}=B^c$, 它是 A 的开邻域. 由引理4.4.2, 可构造 U_{r_2} 是 A 的开邻域, $\bar{U}_{r_2}\subset U_{r_1}$. 设 $U_{r_1},U_{r_2},\cdots,U_{r_n}$ 已构造, 它们满足 (i) 和 (ii). 记 $r_{i(n)}=\max\{r_l\mid l\leqslant n, r_l<r_{n+1}\}, r_{j(n)}=\min\{r_l\mid l\leqslant n, r_l>r_{n+1}\}$, 则 $r_{i(n)}<r_{j(n)}$. 因此 $\bar{U}_{r_{i(n)}}\subset U_{r_{(n)}}$. 作 $U_{r_{n+1}}$ 是 $\bar{U}_{r_{i(n)}}$ 的开邻域, 并且 $\bar{U}_{r_{n+1}}\subset U_{r_{j(n)}}$. 容易验证 $U_{r_1},U_{r_2},\cdots,U_{r_n},U_{r_{n+1}}$ 仍满足(i)和(ii).

第二步 规定函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 为:

$$f(x)=\sup\{r\in\boldsymbol{Q}_I\mid x\notin U_r\}=\inf\{r\in\boldsymbol{Q}_I\mid x\in U_r\},\forall x\in X.$$

这里给出 $f(x)$ 的两个定义式, 如果 $\forall r, x\notin\bar{U}_r$, 则用第一式; 如果 $\forall r, x\in U_r$, 则用第二式; 余下的情形, 两式的值是相等的。因为 $A\subseteq U_r,\forall r\in\boldsymbol{Q}_I$, 所以 f 在 A 上各点的值都为 0 ; 类似地, f 在 B 上各点取值 1.

下面证明f的连续性。根据f的定义, $\forall r\in\boldsymbol{Q}_I$, (a) 若 $x\in U_r$, 则 $f(x)\leqslant r$; (b) 若 $x\notin U_r$, 则 $f(x)\geqslant r$. 从 f 的定义还可看出, $0\leqslant f(x)\leqslant 1,\forall x\in X$. 设 $x\in f^{-1}(a,b)$, 即 $a<f(x)<b$. 要证 x 有开邻域包含在 $f^{-1}(a,b)$ 中。如果 $f(x)\neq 0,1$, 则可取 $r,r',r''\in\boldsymbol{Q}_I$, 使得 $a<r'<r''<f(x)<r<b$. 由 (a) 知, $x\notin U_{r''}$, 从而 $x\notin\bar{U}_{r'}$; 由 (b) 知, $x\in U_r$, 因此 $U_r\setminus\bar{U}_r$, 是 x 的开邻域. $\forall y\in U_r\setminus\bar{U}_r^c$, (a) 与 (b) 说明 $a<r'\leqslant f(y)\leqslant r<b$, 因此 $U_r\setminus\bar{U}_{r'}^c\subseteq f^{-1}(a,b)$. 如果 $f(x)=0$, 则 $a<0$, 取 $r<b$, 则 $x\in U_r\subseteq f^{-1}(a,b)$. 如果 $f(x)=1$, 则 $b>1$, 取 $a<r'<r''$, 则 $x\in X\setminus\bar{U}_{r'}\subseteq f^{-1}(a,b)$. □

4.6 Tietze扩张定理

定理 4.6.1. *设X为正规空间，F是X中闭集，$f:F\to\mathbb{R}$为连续映射，则存在连续映射$\tilde{f}:X\to\mathbb{R}$使得$\tilde{f}|_F=f$.*

证明. 证明的办法是构造一致收敛的连续函数序列s_n，使得ϕ_n在F上的限制越来越接近f. 我们分两步证明: 先对有界连续函数证明, 然后推广到一般连续函数。

第一步 设 $f:F\to\mathbb{R}$ 连续, 且 $f(F)\subset[-1,1]$. 记 $A=f^{-1}([-1,-1/3]), B=f^{-1}([1/3,1])$, 则 A,B 是 F 的不相交闭子集. 因为 F 是 X 的闭集,所以 A,B 也是 X 的闭集. 用 Urysohn引理有映射$\varphi_1:X\to[-1/3,1/3]$, 并且 φ_1 在 A 和 B 上分别取值 $-1/3$ 和 $1/3$. 令 $f_1=f-\varphi_1:F\to\mathbb{R}$, 则 $f_1(F)\subset[-2/3,2/3]$. 用 f_1 替代 f, 重复以上过程, 构造出 X 上连续函数 φ_2, 使得 $\varphi_2(X)\subset[-2/9,2/9]$, F 上的连续函数 $f_2=f_1-\varphi_2=f-\varphi_1-\varphi_2$ 满足 $f_2(F)\subset[-4/9,4/9]$. 不断重复以上做法, 归纳地作出 X 上的连续函数序列 $\{\varphi_n\}$, 使得

(i) $\varphi_n(X)\subseteq\left[-\frac{2^{n-1}}{3^n},\frac{2^{n-1}}{3^n}\right]$; (ii) $|f(x)-\sum_{i=1}^n\varphi_i(x)|\leqslant\frac{2^n}{3^n},\forall x\in F$.

根据 (i), 函数 $\tilde{f}:=\sum_{n=1}^\infty\varphi_n$ 有定义, 连续, 并且 $|\tilde{f}(x)|\leqslant 1,\forall x\in X$. 根据 (ii), $\tilde{f}(x)=f(x),\forall x\in F$, 即 $\tilde{f}$ 是 f 的扩张.

第二步 设 f 是 F 上的连续函数, 不一定有界. 规定 $f':F\to\mathbb{R}$ 为 $f'(x)=\frac{2}{\pi}\arctan(f(x))$, $\forall x\in F$, 则 $f'(F)\subset(-1,1)$. 由 (1), 有 f' 的扩张 $\tilde{f}':X\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}'$ 连续, 且 $\tilde{f}'(X)\subseteq[-1,1]$. 记 $E=\left(\tilde{f}'\right)^{-1}(\{-1,1\})$, 则 E 是 X 的闭集, 并且 $F\cap E=\emptyset$. 根据Urysohn引理存在连续函数h在 E 和 F 上分别取值 0 和 1. 于是对 $\forall x\in X, h(x)\tilde{f}'(x)\in(-1,1)$, 因此可规定 $\tilde{f}:X\to\mathbb{R}$ 为

$$\tilde{f}(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}h(x)\tilde{f}'(x)\right),\quad\forall x\in X,$$

则 $\tilde{f}$ 连续, 并且当 $x\in F$ 时, 因为 $h(x)=1$, 所以

$$\tilde{f}(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}\tilde{f}'(x)\right)=\tan(\arctan(f(x)))=f(x),$$

即 $\tilde{f}$ 是 f 的扩张。

□

A　逻辑基础

数学是可以看成建立在公理和定义之上的演绎体系。公理虽然是人为选择的，但是要满足两个条件：1. 逻辑上要无矛盾的，而且要足够简单 2. 能导出有意思的数学，也就是说由这些公理可以描述丰富的对象（数学研究的对象是形式化的，所以公理和定义告诉我们的是“操作”的方法）。现代数学中最基本的概念是集合（自然数可以用集合论定义），关于集合的公理就是现代数学需要的全部公理。

A.1　ZF公理系统

如果对集合的使用不加限制，会产生罗素悖论。公理集合论能够避免该问题并能为现代数学提供必要的逻辑基础，其中的原始概念是集合，原始关系是$\in$（给定两个集合a,b，若$a\in b$，则称a是b的元素），原始概念和原始关系通过以下公理约束：

公理 0. *存在集合X满足$\forall x, x\notin X$，即存在不包含任何元素的集合。*

公理 1 (外延公理)**.** $\big(\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge\forall x(x\in B\to x\in A)\big)\to(A=B)$.

由外延公理，公理0中的集合是唯一的，称为空集，记为$\emptyset$. 若$x\in A\to x\in B$，则称A是B的子集（或B包含A），记为$A\subseteq B$或$A\subset B$.

公理 2 (内涵公理)**.** *任给公式ϕ和集合A, 存在集合$B=\{x\in A|\phi(x)\}$：$\forall A\big(\exists B(x\in B\leftrightarrow(x\in A\wedge\phi(x))\big)$.*

任给集合A,B, 由内涵公理存在集合$C=\{x\in A|x\in B\}$, 记为$A\bigcap B$. 由外延公理$A\bigcap B=B\bigcap A$. 给定非空集合A，任取$a_0\in A$, 定义$\bigcap A=\{x\in a_0|\forall a\in A(x\in A)\}$, 即$x\in\bigcap A\longleftrightarrow\forall a\in A(x\in a)$. (不定义$\bigcap\emptyset$)

公理 3 (无序对公理)**.** *任给集合A,B，存在集合C满足：$x\in C\leftrightarrow x=A$或$x=B$. 记$C=\{A,B\}$（若$A=B$, 则$C=\{A\}$).*

对集合a,b，由无序对公理，存在集合$\{\{a\},\{a,b\}\}$, 称为有序对，记为(a,b). 由无序对公理知存在集合$\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset\},\emptyset\}$.

公理 4 (并集公理)**.** *任给集合A, 存在集合$B=\{x|$存在$y\in A$使得$x\in y\}$，记$B=\bigcup A$.*

任给集合A,B, 由无序对公理和并集公理，存在集合$\bigcup\{A,B\}$, 记为$A\bigcup B$. 由定义$x\in A\bigcup B$当且仅当$x\in A$或$x\in B$. 由此知存在集合$\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\bigcup\{\{\{\emptyset\},\emptyset\}\}=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\},\emptyset\}\}$... 记$0=\emptyset,1=\{\emptyset\},2=\{\phi,\{\phi\}\},3=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\},4=....$

公理 5 (幂集公理)**.** *任给集合A，存在集合$B=\{x|x\subseteq A\}$, 记$B=P(A)$.*

给定集合A,B，由幂集公理，存在集合$P(P(A\bigcup B))$. 由内涵公理，存在集合

$$C=\{x\in P(P(A\bigcup B))|\exists a\in A\exists b\in B(x=(a,b))\},$$

称为A和B的笛卡尔积，记为$A\times B$. 定义映射$\pi_1:A\times B\to A$为$\pi_1(a,b)=a$: $\pi_1=\{((a,b),c)\in(A\times B)\times A|a=c\}$, 称$\pi_1$为$A\times B$向第一个分量的投影，类似可定义向第二个分量的投影。$A\times A$的任意子集R称为A上的二元关系，将$(a,b)\in R$记为aRb.

定义 A.1.1. *若$F\subseteq A\times B$满足$\forall a\in A,\exists!b\in B\,s.t.(a,b)\in F$, 则称$F$为$A$到$B$的映射，这个唯一的$b$记为$F(a)$. 称$A$为$F$的定义域，$B$称为余定义域，记为$dom(F)=A,codom(F)=B$.*

由内涵公理，X到Y的映射全体是集合，记为Y^X. 若$X=\emptyset$, 则$Y^X=\{\emptyset\}$.

引理 A.1.2. *存在$P(X)$到2^X的1-1对应。*

证明. 定义映射$\phi:P(X)\to 2^X$为

$$\phi(A)(x)=\begin{cases}0\quad,\quad x\notin A\\1\quad,\quad x\in A\end{cases}\tag{A.1}$$

□

$\phi(A)$称为A的示性函数，通常记为χ_A.

引理 A.1.3. *如上设A_α为X中一族集合，且$\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha = X$. $f_\alpha : A_\alpha \to Y$为映射（$f_\alpha$究竟是什么？），若$f_\alpha|_{A_\alpha \bigcap A_\beta} = f_\beta|_{A_\alpha \bigcap A_\beta}, \forall \alpha, \beta \in J$, 则存在$f : X \to Y$使得$f|_{A_\alpha} = f_\alpha$.*

公理 6 (无限公理)**.** *存在集合X满足$\emptyset \in X$且$x \in X \to x \bigcup \{x\} \in X$.*

满足如上性质的集合称为归纳集。

引理 A.1.4. *存在归纳集$\mathbb{N}$，使得任意归纳集均包含$\mathbb{N}$.*

$\mathbb{N}$中的元素称为自然数。对$n \in \mathbb{N}$, 记$n \bigcup \{n\}$为$n + 1$.

命题 A.1.5. *设依赖于自然数k的命题$P(k)$满足：*

- $P(0)$*成立*
- $P(k) \to P(k + 1)$

则对任意自然数k, $P(k)$成立。

Peano公理. *自然数$\mathbb{N}$具有如下性质：*

- $0 \in \mathbb{N}$
- *存在单射$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$满足不存在$x$使得$S(x) = 0$. S称为后继(successor)。 $(S(x) = x + 1)$*
- *给定命题$P(k)$，设$P(0)$成立，且$P(k)$成立推出$P((k+1)$成立，则$P(k)$对所有自然数成立。*

命题 A.1.6. *给定自然数n, 则对任意$x \in n$, x是自然数。*

证明. 归纳证明$P(k) : \forall x \in k(x \in \mathbb{N})$. $P(0)$为虚真命题，设$P(k)$成立，对$x \in k + 1$, 则$x \in k$或者$x = k + 1$，对前者用归纳即可。 □

由此可知任意自然数n, 都有$n \subseteq \mathbb{N}$.

定义 A.1.7. *对自然数n, m，若$n \in m$，则称$n < m$.*

命题 A.1.8. *以下结论成立*

- *若$n \neq 0$，则$0 < n$*
- *若$n < m, m < l$, 则$n < l$*
- *任给自然数n, m, $n < m, m < n, m = n$三者恰有一个成立。*

证明. 1)考虑命题$P(k) : k = 0 \vee 0 < k$. 则$P(0)$成立. 设$P(k)$成立，往证$P(k+1)$成立。若$k = 0$，显然。若$0 < k$, 即$\emptyset \in k$，从而$\emptyset \in k \bigcup \{k\}$, 即$P(k + 1)$成立。
2)考虑命题$P(k) : n < m, m < k \to n < k$. $P(0)$为虚真命题。设$P(k)$成立，若$m < k + 1$, 则$m < k$或$m = k$. $m < k$即归纳假设，$m = k$则$n \in k \subseteq k + 1$.

□

由小于的定义，我们可记$n = \{0, 1, ..., n - 1\}$($n - 1$即为当$n \neq 0$时满足$m + 1 = n$的唯一自然数)。

命题 A.1.9. *设A为$\mathbb{N}$的非空子集，求证：A有最小元。*

证明. 任取$a \in A$, 则$B = \{x \in A | x \leq a\}$为$\{0, 1, ..., a\}$的非空子集。考虑命题$P(k) : \{0, 1, ..., k\}$的非空子集有最小元。 □

一类重要的构造定义在$\mathbb{N}$上的映射的方法称为归纳定义。

命题 A.1.10. *给定集合A和映射$G : \{f \subseteq \mathbb{N} \times A | \exists n, f$为$n \to A$的映射$\} \to A$, 则存在唯一的映射$g : \mathbb{N} \to A$满足$g(n) = G(g|_n)$.*

证明. 首先证明$P(k)$: 存在唯一映射$g_k : k+1 = \{0,1,...,k\} \to A$满足$g_k(n) = G(g_k|_n)(\forall n \le k)$. 对$P(0)$等价于令$g(0) = G(\emptyset)$. 设$P(k)$成立，先考虑$g_{k+1}$唯一性：由$P(k)$中的唯一性，$g_{k+1}|_{\{0,1,...,k\}} = g_k$, 从而由$g_{k+1}(k+1) = G(g_{k+1}|_{k+1})$知$g_{k+1}(k+1)$也唯一确定。以上讨论给出如下定义

$$g_{k+1}(n) = \begin{cases} g_k(n) & , \quad n \le k \\ G(g_k|_{k+1}) & , \quad n = k+1 \end{cases} \tag{A.2}$$

从而得到存在性， $P(k)$得证。根据以上证明，我们知道$g_k(n) = g_l(n), \forall n \le k, l$. 再证明$g$的存在性，作为$\mathbb{N} \times A$的子集，令$g = \{(n,a) \in \mathbb{N} \times A | \exists k \in \mathbb{N}(n \le k \wedge g_k(n) = a)\}$. 则由以上的唯一性知$g$是映射且$g(n) = g_k(n)(\forall n \le k)$. 任给$n \in \mathbb{N}$, 则由$g_n(n) = G(g_n|_n)$知$g(n) = G(g|_n)$. □

公理 7 (替换公理)**.** *设集合A和公式$\phi(x,y)$满足$\forall x \in A$, 存在唯一的y使得$\phi(x,y)$成立，则存在集合$B = \{y | \exists x \in A, \phi(x,y)\}$.*

公理 8 (正则公理)**.** $\forall X\big(X \neq \emptyset \to \exists Y(Y \in X \wedge Y \bigcap X = \emptyset)\big)$.

A.2 有限集和可数集

定义 A.2.1. *若存在X到n的单射，则称X为有限集。非有限集称为无限集。*

定理 A.2.2. *若X是有限集，则存在唯一的自然数n,使得X到n有1-1映射。*

引理 A.2.3. *设$a \in A$, 则A到$\{0,1,...,n\}$有1-1映射 $\iff$ $A \setminus \{a\}$到$\{0,1,...,n-1\}$有$1-1$对应。*

证明. $\Longrightarrow$: 设$f : A \to \{0,1,...,n\}$为1-1对应，若$f(a) = n$，则$f|_{A\setminus\{a\}} : A \setminus \{a\} \to \{0,1,...,n-1\}$为1-1对应。否则我们构造新的1-1对应$g$满足$g(a) = n$即可. 设$f(a) = m \neq n$, $b \neq a, f(b) = n$, 定义

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \notin \{a,b\} \\ n & , \quad x = a \\ m & , \quad x = b \end{cases} \tag{A.3}$$

则$g : A \to \{0,1,...,n\}$为1-1对应且$g(a) = n$. □

定理证明. 设$f : X \to n$为单射，则$f(X)$为$\{0,1,...,n-1\}$的子集，且X到$f(X)$有1-1对应，从而可假设X是$\{0,1,...,n-1\}$的子集。归纳证明$P(k)$: 若X为$k = \{0,1,...,k-1\}$的子集，则存在唯一的n使得X到n有$1-1$对应。 $P(0)$成立：此时$X = \emptyset$, 空集到空集有1-1映射。设$P(k)$成立，若$k \notin X$, 则$X \subseteq \{0,1,...,k-1\}$，由归纳假设即可。下面证明$k \in X$时的存在性和唯一性。此时$X \setminus \{k\} \subseteq \{0,1,...,k-1\}$, 由归纳假设，存在$n$使得$X \setminus \{k\}$到$n = \{0,1,...,n-1\}$有1-1映射。从而$X$到$n+1$有1-1映射。再证唯一性。假设$X$到$\{0,1,...,m\}$有1-1映射，由引理知$X \setminus \{k\}$到$\{0,1,...,m-1\}$有1-1映射。由归纳假设$m-1 = n$, 从而$m = n+1$, 唯一性得证。 □

这个唯一的n称为X的基数，记为$|X|$.

命题 A.2.4. *设X,Y为有限集，则以下成立:*

- *$|X| = |Y|$当且仅当X到Y有1-1映射*
- *若$X \subseteq Y$，则$|X| \le |Y|$且等号当且仅当$X = Y$.*

证明. 1)显然。2）对$|Y|$归纳，不妨设$Y = \{0,1,...,n-1\}$. 若$n-1 \notin X$, 直接归纳即可。若$n-1 \in X$, 考虑$X \setminus \{n-1\} \subseteq Y \setminus \{n-1\}$, 再用归纳假设。 □

命题 A.2.5. *设A,B是有限集，则$|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|, |A \times B| = |A| \cdot |B|$.*

证明. 记A,B的示性函数为χ_A,χ_B, 定义$t: 2^X \to \mathbb{N}$为$t(f)=\sum_{x\in X} f(x)$. 则$t(\chi_A)=|A|$. 往证：$\chi_A+\chi_B=\chi_{A\bigcup B}+\chi_{A\bigcap B}$.

对$|B|$归纳证明：$|A\times B|=|A|\cdot|B|$. 若$|B|=0$, 则$B=\emptyset$, 所以$A\times B=\emptyset$. 设$|B|=k-1$已证，当$|B|=k$时，设$B=B_1\bigcup\{b\},|B_1|=k-1$, 则$A\times B=(A\times B_1)\bigcup(A\times\{b\})$, 从而$|A\times B|=|A\times B_1|+|A|=|A|\times(k-1)+|A|=|A|\cdot k$. □

推论 A.2.6. *有限集的真子集到自身没有一一对应，因此$\mathbb{N}$是无限集。*

定义 A.2.7. *和$\mathbb{N}$有1-1对应的集合称为可数无限集。有限集和可数无限集统称为可数集。非可数集称为不可数集。*

命题 A.2.8. *设A是非空集合，则以下等价：*

- *A是可数集*
- *存在满射$f:\mathbb{N}\to A$*
- *存在单射$g:A\to\mathbb{N}$*

证明. $i) \implies ii)$: A是有限集或者$\mathbb{N}$到A有1-1对应。
$ii) \implies iii)$: 定义$g(a)=f^{-1}(a)$的最小元。
$iii) \implies i)$: 可设A是$\mathbb{N}$的无限子集，往证$\mathbb{N}$到A有1-1对应。令

$$G:\{f\subseteq \mathbb{N}\times A|\exists n, f\text{为}n\to A\text{的映射}\}\to A$$

为$G(f)=A\backslash f(\{0,1,...,n-1\})$的最小值。由归纳定义，存在映射$f:\mathbb{N}\to A$满足$f(n)=G(f|_n)$, 即

$$f(n)=A\setminus f(\{0,1,...,n-1\})\text{的最小值},\forall n\in\mathbb{N}.$$

下证f为1-1映射。对$n<m$, $f(m)\notin A\setminus f(\{0,1,...,m-1\})$, 而$n\in\{0,1,...,m-1\}$, 所以$f(m)\neq f(n)$. 再证$f$为满射。 $\forall a\in A$, $\{n\in\mathbb{N}|f(n)\geq a\}$非空($f(a)\geq a$), 设其最小元为$n_0$, 则$f(n_0)\geq a$. 又$f(i)<a,\forall i\in\{0,1,...,n_0-1\}$, 所以$a\in A\setminus f(\{0,1,...,n_0-1\})$, 从而$f(n_0)\leq a$, 所以$f(n_0)=a$. □

A.3 无限集和选择公理

我们想证明每个无限集都有一个子集和$\mathbb{N}$ 1-1对应。为了证明这个结论，我们需要一个新的公理。

公理 9 (选择公理). *设A是非空集合，则存在映射$c:\{B\in P(A)|B\neq\emptyset\}\to A$满足$c(B)\in B$. c称为选择函数。*

命题 A.3.1. *设A是无限集，求证：存在单射$f:\mathbb{N}\to A$.*

证明. 由归纳定义，存在映射$f:\mathbb{N}\to A$满足$f(n)=c\big(A\setminus f(\{0,1,...,n-1\})\big)$. 由定义$f$为单射。 □

定理 A.3.2. *设A是一个集合，则以下等价：*

- *存在单射$f:\mathbb{N}\to A$*
- *A与某个真子集存在$1-1$对应*
- *A是无限集*

证明. $i) \implies ii)$： $A=f(\mathbb{N})\bigcup A\setminus f(\mathbb{N})$, 而$\mathbb{N}$与偶数1-1对应
$ii) \implies iii)$：命题A.2.6
$iii) \implies i)$：命题A.3.1. □

命题 A.3.3. *以下等价*

- 选择公理
- 设$\mathcal{F}$是非空集合X上的子集族，且$\emptyset \notin \mathcal{F}$，则存在映射$c : \mathcal{F} \to X$使得$\forall A \in \mathcal{F}, c(A) \in A$
- 设$\mathcal{F}$是非空集合X上的子集族，$\emptyset \notin \mathcal{F}$，且$\forall A, B \in \mathcal{F}, A \bigcap B = \emptyset$，则存在映射$c : \mathcal{F} \to X$使得$\forall A \in \mathcal{F}, c(A) \in A$

证明. $iii) \implies i)$: 设X是非空集合，定义映射$f : \{B \in P(X) | B \neq \emptyset\} \to P(X \times P(X))$为$f(B) = \{(x, B) | x \in B\}$. 考虑$\mathcal{F} = f(\{B \in P(X) | B \neq \emptyset\})$，则存在映射$c : \mathcal{F} \to X \times P(X)$使得$c(f(B)) \in f(B)$. 则$\tilde{c} = \pi_1 \circ c \circ f : \mathcal{F} \to X$为选择函数。 □

选择公理有一些常用的等价形式，适用于不同的问题。

定义 A.3.4. 设A上的二元关系$<$满足：

- $a < a$不成立
- 若$a < b, b < c$，则$a < c$

则称$<$是A上的偏序关系，$(A, <)$为偏序集。若$c \in A$满足：不存在$a \in A$使得$c < a$，则称c是极大元。若A中任何两个不同元素均可比较，则称$<$为全序关系，$(A, <)$为全序集。

设$(A, <)$是偏序集，$B \subseteq A$，则$<$在B上的限制也是偏序集，若此时$(B, <)$是全序集，则称$(B, <)$是$(A, <)$的全序子集。

Zorn引理. 设偏序集$(A, <)$的任意全序子集都有上界：若$(B, <)$是全序子集，则存在$c \in A, s.t. \forall a \in B, a < c$或$a = c$，那么$(A, <)$有极大元。

将$a < c$或者$a = c$记为$a \leq c$.

定义 A.3.5. 设$(A, <)$为全序集，若A的任意非空子集有最小元：$\forall B \subset A$，若$B \neq \emptyset$，则存在$b \in B$使得$\forall x \in B, b \leq x$，则称$(A, <)$良序集。

良序公理. 任给非空集合A，存在A上的偏序关系$<$使得$(A, <)$是良序集。

设$(A, <)$为全序集，对$a \in A$，记$S_a = \{x \in A | x < a\}$，称为$A$在$a$处的截。根据良序公理可证明：

命题 A.3.6. 存在有最大元（记为Ω）的良序集，使得其在Ω处的截为不可数集，而在其它点处的都截是可数集。

证明. 任取一个不可数的集合（下节命题2.4.2）X，将其良序。若X的任意截都是可数的，任取不在X中的元素Ω，考虑集合$X \bigcup \{\Omega\}$，并规定Ω是最大元即可。若X在某些点处的截是不可数的，令$A = \{x \in X | S_x$是不可数集$\}$，则A是良序集X的非空子集，设Ω是其最小元。则$S_\Omega \bigcup \{\Omega\}$为满足要求的良序集。 □

今后记$S_\Omega \bigcup \{\Omega\}$为$\bar{S}_\Omega$.

引理 A.3.7. S_Ω的任意可数子集有上界。

选择公理、Zorn引理和良序公理是相互等价的。其中Zorn引理在代数证明中最为常见。