点集拓扑作业 (13)

> Problem 1 设 $x_1, x_2 \cdots$ 是乘积空间 $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ 中的序列. 证明：该序列收敛到 x 当且仅当 $\forall \alpha\in J$, 序列 $\pi_\alpha(x_1), \pi_\alpha(x_2), \cdots$ 收敛到 $\pi_\alpha(x)$. 这对箱拓扑成立吗？

必要性：$\forall \alpha \in J, \forall V$ 是 X_α 的开集, $\pi_\alpha(x)\in V$, 于是 $x\in\pi_\alpha^{-1}(V)$ 是开集, 所以 $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n > N$, 都有 $x_n\in\pi_\alpha^{-1}(V)$. $\pi_\alpha(x_n)\in V$. 于是序列 $\pi_\alpha(x_1), \pi_\alpha(x_2), \cdots$ 收敛到 $\pi_\alpha(x)$.
充分性：对于 x 的基邻域 $B = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, 由于 $\pi_\alpha(x_n)$ 收敛到 $\pi_\alpha(x)$, 于是 $\exists N_i\in\mathbb{N}, \forall n_i > N_i$, 都有 $\pi_{\alpha_i}(x_{n_i})\in U_{\alpha_i}$, 进而取 $N = \max\{N_i\}, \forall n > N, x_n \in \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, 故 $x_n\in B$. 于是命题成立.
反例：在 $\mathbb{R}^\omega$ 中赋予箱拓扑并取序列 $x_n = (0, \cdots, 0, 1, \cdots)$, 其中有 n 个 0. 此时 $\pi_\alpha(x_n)$ 均收敛到 0. 在 $\mathbb{R}^\omega$ 中, 考虑 $\mathbf{0}$ 的邻域 $Y = \prod\limits_{m=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right), \forall n\in\mathbb{N}, \exists m > n, x_n$ 的第 m 个坐标

$1 \notin \left(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$.
于是不收敛到 $\mathbf{0}$. 命题不成立.

> Problem 2 记 $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots) \big| \left|\{i\in\mathbb{N}_+ | x_i\neq 0\}\right| < +\infty\}$. 求其在 $\mathbb{R}^\omega$ 积拓扑和箱拓扑下的闭包.

在积拓扑下, $\forall x = (t_1, t_2, \cdots)\in\mathbb{R}^\omega, \exists x_n = (t_1, \cdots, t_n, 0, \cdots)\in\mathbb{R}^\infty$, 由上题知 $x_n\to x$, 所以 $x\in\overline{\mathbb{R}^\infty}$. 进而 $\overline{\mathbb{R}^\infty} = \mathbb{R}^\omega$. 在箱拓扑下, $\forall x\in\mathbb{R}^\omega - \mathbb{R}^\infty$, 均有无限个坐标非零. $\forall U = \prod\limits_{i=1}^{+\infty} U_i$ 是 x 的基邻域, 若 $x_i\neq 0$, 则取 $U_i = (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$, 其中 $\varepsilon = \frac{|x_i|}{2}$, 于是 $0\notin U_i$. 进而 U 中所有元素均有无限个坐标非 0. 于是 $\forall n, x_n\notin U$, 故不存在序列 $x_n\in\mathbb{R}^\infty$ 收敛到 x. 于是 $\overline{\mathbb{R}^\infty} = \mathbb{R}^\infty$.

> Problem 3 证明 $\mathbb{R}^\omega$ 在积拓扑下连通, 并求其在箱拓扑下的连通分支.

$\forall x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots)\in\mathbb{R}^\omega$ 定义映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^\omega, \pi_i\circ f(t) = (1-t)x_i + ty_i$ 是连续映射, 于是在积拓扑下, f 连续, $f(0) = x, f(1) = y$. 于是 $\mathbb{R}^\omega$ 道路连通进而连通.
对于箱拓扑, 定义关系 $\sim: x\sim y \Leftrightarrow x - y$ 仅有有限个坐标非零. 容易验证这是等价关系. 接下来我们证明 $\mathbb{R}^\omega/\sim$ 是所有的连通分支. $\forall x\sim y$, 不妨设仅有第 $1, 2, \cdots, n$ 个坐标不同. 定义映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^\omega$ 满足当 $t\in\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ 时, $\pi_i\circ f(t) = (nt - i)(y_i - x_i) + y_i$, 其余坐标不变, 则 f 连续, 进而该等价类道路连通, 进而连通. 等价类是开集, 所以此即连通分支.

> Problem 4 设 X_α 是 $T_1 (T_2)$ 空间, 证明 $X = \prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ 在积拓扑和箱拓扑下均为 $T_1 (T_2)$ 空间.

对 T_1 空间, 设 $x, y\in X$. 由于 $\{x_\alpha\}$ 是 X_α 的闭集, 于是
$\overline{\{x\}} = \overline{\prod\limits_{\alpha\in J}\{x_\alpha\}} = \prod\limits_{\alpha\in J}\overline{\{x_\alpha\}} = \prod\limits_{\alpha\in J}\{x_\alpha\} = \{x\}$. 上式无关拓扑, 所以命题对 T_1 空间成立. 对 T_2 空间,

若 $x \neq y$, 则对积拓扑而言, 任取 $x_\alpha \neq y_\alpha$, 由于 $\exists U_\alpha, V_\alpha$ 分别是 x_α, y_α 的开邻域且 $U_\alpha \cap V_\alpha = \phi$. 于是取 x, y 的开邻域 $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 和 $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, 于是有 $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) = \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap V_\alpha) = \phi$. 于是 X 在积拓扑下是 T_2 的. 对箱拓扑而言, 若 $x_\alpha \neq y_\alpha$, 则 U_α, V_α 取法同上, 若 $x_\alpha = y_\alpha, U_\alpha = V_\alpha = X_\alpha$. 则 x, y 的开邻域 $\prod\limits_{\alpha \in J} U_\alpha, \prod\limits_{\alpha \in J} V_\alpha$ 的交集为空. 命题成立.