点集拓扑作业 (3)

> Problem 1 记 $\mathcal{C}=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$. 证明 : $\mathcal{C}$ 生成的拓扑是 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑.

记 $\mathcal{T}=\{U\subseteq\mathbb{R}|\forall x\in U,\exists\delta>0,(x-\delta,x+\delta)\in U\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的标准拓扑, $\mathcal{T}_1=\left\{\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}}U\middle|\mathcal{U}\subseteq\mathcal{C}\right\}$.
只需要证明 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}_1$ 且 $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}$. 对于前者, $\forall V\in\mathcal{T},\exists\delta_x>0,(x-\delta_x,x+\delta_x)\in V$. 于是
$V=\bigcup\limits_{x\in V}\{x\}\subseteq\bigcup\limits_{x\in V}(x-\delta_x,x+\delta_x)\subseteq V$, 所以 $V=\bigcup\limits_{x\in V}(x-\delta_x,x+\delta_x)\in\mathcal{T}_1$. 对于后者,
$\forall W=\bigcup\limits_{\alpha\in J}U_\alpha\ (\forall\alpha\in J,U_\alpha\in\mathcal{C}),\forall w\in W,\exists\alpha_0,w\in U_{\alpha_0}=(x,y)$, 取 $\delta=\frac{1}{2}\min\{w-x,y-w\}$ 满足条件. 于是 $W\in\mathcal{T}$.
综上, 命题成立.

> Problem 2 X 是非空集合, 子集族 $\mathcal{T}=\{U|X\backslash U\text{ is infinite set or }\phi\text{ or }X\}$. 试问 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑吗?

不是, 反例如下 : $X=\mathbb{N},E=\mathbb{N}\backslash\{0\},F=\mathbb{N}\backslash\{1\}$. 注意到 $E,F\in\mathcal{T}$ 但
$\mathbb{N}\backslash(E\cap F)=\{0,1\},E\cap F\notin\mathcal{T}$.

> Problem 3 列举两元集合上的所有拓扑.

设 $X=\{a,b\},a\neq b$. 则 $\{\phi,X\},\{\phi,\{a\},X\},\{\phi,\{b\},X\},\mathscr{P}(X)$ 都是它的拓扑.

> Problem 4 证明 $\mathbb{R}_f$ 的拓扑与 $\mathbb{R}_K$ 的拓扑不可比较.

对于 $0\in(-1,1)\backslash K\in\mathbb{R}_K$, 如果 $\exists[a,b)\in\mathscr{B}'$, 使得 $0\in[a,b)\subseteq(-1,1)\backslash K$, 则
$b>0,a\geq 0.\exists N\in\mathbb{N}_+,\dfrac{1}{N}\in(0,b)\subseteq[a,b)\subseteq(-1,1)\backslash K$. 矛盾! 所以 $(-1,1)\backslash K\notin\mathbb{R}_f$.
对于 $x\in[x,y)\in\mathbb{R}_f$, 如果 $\exists M=(a,b)$ 或 $(a,b)\backslash K$, 使得 $x\in M\subseteq[x,y)$, 则 $a<x$, 于是
$\exists a<z<x,z\in M\subseteq[x,y)$, 矛盾! 所以 $[x,y)\notin\mathbb{R}_f$.
所以二者不可比较.