点集拓扑作业 (10)

> Problem 1 利用拓扑学家的正弦曲线构造一个道路连通但不局部道路连通的空间.

记 $S=\{(x,\sin\frac{1}{x})|x\in(0,1]\}, T=\{(0,y)|y\in[-1,1]\}, L$ 是连接 $(0,0)$ 与 $(1,\sin 1)$ 且与 $S\cup T$ 无交的弧线. 拓扑学家的正弦曲线为 $\overline{S}=S\cup T$, 令 $C=\overline{S}\cup L$. 我们证明 C 道路连通但不局部道路连通.
$\forall x,y\in C$, 若 $x,y\in L\cup T$, 显然存在道路. 于是接下来只需考虑 $x=(t_x,\sin\frac{1}{t_x})\in S, y\in L\cup T$, 显然存在 x 到 $(1,\sin 1)$ 和 $(1,\sin 1)$ 到 y 的道路, 进而存在 x 到 y 的道路, 进而 C 道路连通.
考虑 $(0,1)$ 的一个极小开邻域 $U, U\cap C=U\cap\overline{S}$. 但 $\overline{S}$ 在 $(0,1)$ 处不局部连通, 进而不局部道路连通, 所以不存在道路连通邻域 $V\subseteq U$, 于是 C 不局部道路连通.

> Problem 2 若对于 $x\in X$ 的任意开邻域 $U, \exists X$ 的连通子空间 $V\subseteq U$, 且 $\exists W\subseteq V$ 是 x 的开邻域, 则称 X 在 x 处弱局部连通. 证明 : 若 X 在每一点处都弱局部连通, 则 X 局部连通.

对 X 的任意开集 U 的任意分支 $C, \forall x\in C, \exists$ 连通空间 V_x 和 x 的开邻域 W_x 满足
$x\in W_x\subseteq V_x\subseteq C$.
于是 $C=\bigcup\limits_{x\in C}\{x\}\subseteq\bigcup\limits_{x\in C}W_x\subseteq C$. 即 $C=\bigcup\limits_{x\in C}W_x$ 是开集. 所以 X 局部连通.

> Problem 3 证明 $\mathbb{R}^n$ 不紧.

记 d 是 $\mathbb{R}^n$ 上的欧式度量, $B_n=\{x\in\mathbb{R}^n|d(x,(0,\cdots,0))<n\}$. 开覆盖 $\{B_n\}$ 无全集的有限子覆盖.

> Problem 4 证明 : $A=\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}_+\}\cup\{0\}$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子空间是紧的.

设 $\mathcal{C}$ 是 A 的开覆盖, 则 $\exists C_0\in\mathbb{C}, 0\in C_0$. 于是仅有有限个 $\frac{1}{n}\notin C_0$. 对这样的每个 n 都取一个 $\mathbb{C}$ 中的元素, 与 C_0 组成了 A 的有限开子覆盖, 所以 A 是紧的.