点集拓扑作业 (15)

> Problem 1 设 $(Xi, di), \forall i \in \mathbb{N}_+$ 为一列紧致度量空间, 证明乘积空间 $\prod X_i$ 紧致.
> 提示: 证明 $\prod X_i$ 在诱导乘积拓扑的度量下列紧.

首先, 度量 $d(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\overline{d_n}(x_n, y_n)}{2^n}$ 诱导乘积拓扑, 其中 $\overline{d_n}(x_n, y_n) = \min\{d_n(x_n, y_n), 1\}$.
取序列 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, 其中 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots) \in \prod X_i$. 因为 X_1 紧致, 所以存在子序列下标为 $n_k^{(1)}$, 使得 $x_k^{(n_k^{(1)})}$ 收敛于 $a_1 \in X_1$. 归纳地, $\forall i \geq 2$, 从子序列 $n_k^{(i-1)}$ 选子序列 $n_k^{(i)}$, 使得 $x_k^{(n_k^{(i)})}$ 收敛于 $a_i \in X_i$.
取对角线子序列 $n_k = n_k^{(k)}, \forall i \in \mathbb{N}_+, k \geq i, n_k \in n_m^{(i)}$, 故 $\lim\limits_{k \to \infty} x_i^{(n_k)} = a_i$.
令 $a = (a_i) \in \prod X_i$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 N 满足 $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. 对每个 $i \leq N$, 取 K_i 使 $k > K_i$, $d_i(x_i^{(n_k)}, a_i) < \frac{\varepsilon}{2N}$. 令 $K = \max\limits_{1 \leq i \leq N} K_i$, 则当 $k > K$ 时 :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} d(x^{(n_k)}, a) &= \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min(d_i(x_i^{(n_k)}, a_i), 1) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \min(d_i(x_i^{(n_k)}, a_i), 1) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 $\prod X_i$ 列紧, 进而紧致.

> Problem 2 记 X 至少 2 个元素, 赋予平凡拓扑, Y 为任意拓扑空间. 证明 $X \times Y$ 中任意非空子集 A 的极限点集非空.

假设 A 无极限点, 则 A 为闭集. 记 $B = \pi_Y(A) \subseteq Y$. 分情况讨论 :
若 $|B| = 1$, 则设 $B = \{y_0\}, A \subseteq X \times \{y_a\}$. 子空间 $X \times \{y_0\}$ 同胚于 X, 故 $A = X \times \{y_0\}$, 因为 A 闭且非空. 但 $|X| \geq 2$, 取 $p = (x_1, y_0) \in A, \forall p$ 的开邻域 $X \times V$, 都有 $p \neq (x_2, y_0) \in A$, 于是 $A \cap (X \times V) - \{p\} \neq \phi, p \in A'$, 矛盾 !
若 $|B| \geq 2$, 任取 $y_1, y_2 \in B, y_1 \neq y_2$. 若 $\exists y \in B$ 使 $A_y = \{x \in X \mid (x,y) \in A\} \neq X$, 则取 $x' \notin A_y, p = (x', y) \notin A$. 取 $a \in A$ 使 $\pi_Y(a) = y$, 则 $x_a \neq x'$, 故 $a \neq p$. 对 p 的任意开邻域 $X \times V$, 有 $a \in X \times V$ 且 $a \in A - \{p\}$, 故 p 为 A 的极限点, 矛盾 ! 若 $\forall y \in B, A_y = X$, 则 $A = X \times B$. 取 $q = (x_q, y_q) \in A$. 我们知道, $\exists V_{y_q} \subseteq Y$, 是开集且 $V_{y_q} \cap B = \{y_q\}$. 则 $X \times V_{y_q}$ 为 q 的开邻域, 且 $(X \times V_{y_q}) \cap A = X \times \{y_q\}$. 由于 $|X| \geq 2, \exists x' \neq x_q, (x', y_q) \in A - \{q\}$. 故 q 为极限点, 矛盾 !
因此命题成立.

> Problem 3 记 S_Ω 是最小的不可数良序集, 证明在序拓扑下它列紧.

私密马赛不会证明