点集拓扑作业 (8)

> Problem 1 A 是拓扑空间 X 的子集, Y 是Hausdorff空间, $f: A \to Y$ 是连续映射. 假设存在两个连续映射 $g_i : \overline{A} \to Y, i = 1, 2$ 满足 $g_i|_A = f$, 证明 : $g_1 = g_2$.

定义 $\varphi : \overline{A} \to Y \times Y, \varphi(x) = (g_1(x), g_2(x))$, 则 φ 连续, 于是 $\varphi^{-1}(\Delta)$ 是闭集, 其中 $\Delta = \{(x, x)|x \in Y\}$.
记 $M = \varphi^{-1}(\Delta) = \{t \in \overline{A}|g_1(t) = g_2(t)\}$. 于是 $A \subseteq M \subseteq \overline{A}$. 接下来用反证法证明 : $M = \overline{A}$. 假设 $\exists x \in \overline{A}, x \notin M$, 则 $x \notin A$. 所以 $g_1(x) \neq g_2(x)$, Y 是Hausdorff空间, 所以 $\exists U, V$ 是 Y 中的开集, 满足 $g_1(x) \in U, g_2(x) \in V, U \cap V = \phi$. $x \in g_1^{-1}(U) \cap g_2^{-1}(V)$ 是开集. 根据 $\overline{A} = A \cup A'$, 所以 $x \in A'$. 因此 $\exists y \in A, y \neq x, y \in g_1^{-1}(U) \cap g_2^{-1}(V)$, 即 $g_1(y) \in U, g_1(y) = g_2(y) \in V$. 这与 $U \cap V = \phi$ 矛盾! 命题成立.

> Problem 2 给定拓扑空间 X, 若 $\exists J, X = \bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha$, 则称 $\{A_\alpha|\alpha \in J\}$ 是 X 的覆盖. 若 $\forall x \in X, \exists U$ 是 x的开邻域, 且 U 仅和有限个 A_α 交集非空, 则称该覆盖为局部有限覆盖. 现设 $\{A_\alpha|\alpha \in J\}$ 是局部有限覆盖且 $\forall \alpha \in J, A_\alpha$ 是闭集.若 $f: X \to Y$ 在每个 A_α 上的限制均连续, 证明 : f 连续.

记 $f_\alpha : A_\alpha \to Y$ 是 f 在 A_α 上的限制. $\forall U$ 是 Y 上的闭集, 注意到 $f_\alpha^{-1}(U)$ 是子空间 A_α 上的闭集, 所以 $\exists W_\alpha$ 是 X 中的闭集, 使得 $f_\alpha^{-1}(U) = W_\alpha \cap A_\alpha$ 是 X 上的闭集.
接下来先证明 : 局部有限的任意闭集族的并均为闭集. 设 $W = \bigcup\limits_{\alpha \in J_0} A_\alpha, \forall J_0 \subseteq J$. $\forall x \in X - W$, 都 $\exists V_x$ 是 x 的开邻域, 使得 $J_x = \{\alpha \in J|V_x \cap A_\alpha \neq \phi\}$ 是有限集. 由于 $x \notin A_\alpha, \forall \alpha \in J_0$, 于是 $x \in V_x - \left(\bigcup\limits_{\alpha \in J_x - J_0} A_\alpha\right) = \bigcap\limits_{\alpha \in J_x - J_0} (V_x - A_\alpha)$ 是开集的有限交, 且 $V_x - \left(\bigcup\limits_{\alpha \in J_x - J_0} A_\alpha\right) \subseteq X - W$. 所以 $X - W$ 是开集, 进而 W 是闭集. 于是记 $J_U = \{\alpha \in J|A_\alpha \cap f^{-1}(U) \neq \phi\}$, 则 :

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap X = \bigcup_{\alpha \in J}(f^{-1}(U) \cap A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in J_U}(f^{-1}(U) \cap A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in J_U} f_\alpha^{-1}(U)$$

后者是局部有限的闭集族的并, 因而是闭集. 所以 f 连续.

> Problem 3 设 $A_\alpha(\alpha \in J)$ 是 X 的一族连通子空间, A 是 X 的连通子空间, 且 $A \cap A_\alpha \neq \phi(\forall \alpha \in J)$. 证明 : $A \cup \left(\bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$ 是连通的.

采用反证法, 假设 $I = A \cup \left(\bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$ 不连通, 则 $\exists M, N$ 是 I 上的非空开集, $M \cap N = \phi, M \cup N = I$. 由于 A 是 I 的连通子集, 不妨设 $A \subseteq M$. 又 $\forall \alpha \in J, A_\alpha$ 均为连通子空间, 所以 $A_\alpha \subseteq M$ 或 $A_\alpha \subseteq N$. 若为后者, 则 $A_\alpha \cap A = \phi$, 矛盾! 所以 $A_\alpha \subseteq M$. 于是 $N = \phi$, 矛盾! 所以 I 是连通的.

> Problem 4 设 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 是拓扑空间, $f:X\to Y$ 是映射, 问 : X 上是否存在使得 f 连续的最粗糙拓扑?

我们证明 $\mathcal{T}_X=\{f^{-1}(U)|U\subseteq\mathcal{T}_Y\}$ 即为所求.
首先验证 $\mathcal{T}_X$ 是一个拓扑. $\phi=f^{-1}(\phi)\in\mathcal{T}_X, X=f^{-1}(Y)\in\mathcal{T}_X$. 接着, 设 $\forall\alpha\in J, A_\alpha=f^{-1}(U_\alpha)\in\mathcal{T}_X$,都有 $\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in J}f^{-1}(U_\alpha)=f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in J}U_\alpha\right)\in\mathcal{T}_X$. 最后, 设 $A_i=f^{-1}(U_i)\in\mathcal{T}_X(\forall i\le n)$, 满足 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\right)\in\mathcal{T}_X$. 假设 $\mathcal{T}$ 是 X 的拓扑, 使得 f 连续, 则 $\forall U=f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X$, 都有 $U\in\mathcal{T}$. 因此 $\mathcal{T}_X\subseteq\mathcal{T}$. 故而得证.