点集拓扑作业 (5)

> Problem 1 设 X_1, X_2 是拓扑空间, x_2 是 X_2 中的一点, 通过 $\tau : X_1 \times \{x_2\} \to X_1, \tau((x_1, x_2)) = x_1$ 将 $X_1 \times \{x_2\}$ 与 X_1 等同. 证明 : 在该等同下, $X_1 \times \{x_2\}$ 上关于 $X_1 \times X_2$ 的子拓扑与 X_1 的拓扑相同.

我们设 $X_1, X_2, X_1 \times X_2$ 上的拓扑分别为 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}, X_1 \times X_2$ 的基记为 $\mathcal{B} = \{U \times V | U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$. 记 $X_1 \times \{x_2\}$ 的子空间拓扑为 $\mathcal{T}_0 = \{U \cap (X_1 \times \{x_2\}) | U \in \mathcal{T}\}$, 基为 $\mathcal{B}_0$. 接下来证明 : $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1$.
一方面, $\forall U_0 \in \mathcal{T}_0, U = \{\tau((t, x_2)) | (t, x_2) \in U_0\}$. 于是需证明 $U \in \mathcal{T}_1$. 设 $U_0 = V \cap (X_1 \times \{x_2\}), V \in \mathcal{T}_0$. 由基的性质可知, $\exists J, \forall \alpha \in J, B_\alpha = W_{1,\alpha} \times W_{2,\alpha} \in \mathcal{B}, W_{i,\alpha} \in \mathcal{T}_i (i = 1, 2)$ 有 $V = \bigcup\limits_{\alpha \in J} B_\alpha$.
记 $J_0 = \{\alpha \in J | x_2 \in W_{2,\alpha}\}$. 从而 :

$$
\begin{aligned}
U_0 &= \left(\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha \right) \cap (X_1 \times \{x_2\}) = \bigcup_{\alpha \in J} ((W_{1,\alpha} \times W_{2,\alpha}) \cap (X_1 \times \{x_2\})) \\
&= \bigcup_{\alpha \in J} ((W_{1,\alpha} \cap X_1) \times (W_{2,\alpha} \cap \{x_2\})) = \bigcup_{\alpha \in J_0} (W_{1,\alpha} \times \{x_2\}) = \left(\bigcup_{\alpha \in J_0} W_{1,\alpha} \right) \times \{x_2\}.
\end{aligned}
$$

在 τ 等同意义下, 容易证明 (同样用 LHS 包含 RHS 反之也成立证明, 写出来太罗嗦了, 也不是重点直接显然跳过了) $U = \bigcup\limits_{\alpha \in J_0} W_{1,\alpha} \in \mathcal{T}_1$. 于是 $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1$.
另一方面, $\forall U \in \mathcal{T}_1$, 只需证明 $U_0 = \{(t, x_2) | t \in U\} = U \times \{x_2\} \in \mathcal{T}_0$ 即可. 这是显然的, 因为 $(U \times X_2) \cap (X_1 \times \{x_2\}) = (U \times X_1) \cap (X_2 \times \{x_2\}) = U \times \{x_2\} = U_0$, 而 $U \times X_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. 于是 $U_0 \in \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_0$.
综上, 在等同意义下, 命题成立.

> Problem 2 拓扑空间之间的映射 f 若把开集映成开集, 则称其为开映射. 设 X_1, X_2 是两个拓扑空间, 在 $X_1 \times X_2$ 上赋予积拓扑. 定义 $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i (i = 1, 2)$ 为 $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$. 证明 π_i 是开映射.

只证明 $i = 1$ 且沿用上题的基本记号. 我们需要证明 : $\forall W \in \mathcal{T}, \pi_1(W) \in \mathcal{T}_1$.
由基的性质 : $\exists J, \forall \alpha \in J, B_\alpha = U_\alpha \times V_\alpha \in \mathcal{B}, U_\alpha \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2$, 有 $W = \bigcup\limits_{\alpha \in J} B_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in J} (U_\alpha \times V_\alpha)$.
由于映射保集合并, 故 $\pi_1(W) = \pi_1 \left(\bigcup\limits_{\alpha \in J} (U_\alpha \times V_\alpha) \right) = \bigcup\limits_{\alpha \in J} \pi_1(U_\alpha \times V_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{T}_1$. 于是命题得证.

> Problem 3 设 $\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_i'$ 都是 X_i 上的拓扑, $i = 1, 2$. 证明 : 若 $\mathcal{T}_i' \subseteq \mathcal{T}_i$, 则 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 的积拓扑细于 $\mathcal{T}_1', \mathcal{T}_2'$ 的积拓扑. 并判断其逆命题是否成立.

记 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 的积拓扑为 $\mathcal{T}$, 基为 $\mathcal{B} = \{U \times V | U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$. $\mathcal{T}_1', \mathcal{T}_2'$ 的积拓扑为 $\mathcal{T}'$, 基为 $\mathcal{B}'$.
$\forall W \in \mathcal{T}', \exists J, \forall \alpha \in J, B_\alpha' = U_\alpha' \times V_\alpha' \in \mathcal{B}', U_\alpha' \in \mathcal{T}_1', V_\alpha' \in \mathcal{T}_2', W = \bigcup\limits_{\alpha \in J} B_\alpha' = \bigcup\limits_{\alpha \in J} (U_\alpha' \times V_\alpha')$. 由于 $\mathcal{T}_i' \subseteq \mathcal{T}_i$, 于是 $W = \bigcup\limits_{\alpha \in J} (U_\alpha' \times V_\alpha') \subseteq \left(\bigcup\limits_\alpha U_\alpha'\right) \times \left(\bigcup\limits_\alpha V_\alpha'\right) \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. 所以 $\mathcal{T}'$ 粗于 $\mathcal{T}$.
另一方面, 由于 $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, $\forall U_t' \in \mathcal{T}_1'$, 假设其不为空集, 则 :
$\exists (t_1, t_2) \in B_t' = U_t' \times V_t' \in \mathcal{B}', \exists B_t = U_t \times V_t \in \mathcal{B}, (t_1, t_2) \in B_t \subseteq B_t'$. 于是 $t_1 \in U_t \subseteq U_t'$. 于是 $U_t' = \bigcup\limits_{t_1 \in U_t'} \{t_1\} \subseteq \bigcup\limits_{t_1 \in U_t'} U_t \subseteq U_t'$. 因此 $U_t' = \bigcup\limits_{t_1 \in U_t'} U_t \in \mathcal{T}_1$. 于是 $\mathcal{T}_1' \subseteq \mathcal{T}_1$. 同理可证 $\mathcal{T}_2' \subseteq \mathcal{T}_2$.

> Problem 4 设 L 是平面上的直线, 描述 L 作为 $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ 的子空间拓扑.

注意到 $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ 的基分别为 $\{[a,b) \times (c,d) | a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ 与 $\{[a,b) \times [c,d) | a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$. 子空间拓扑的基是 L 与这些矩形区域的交, 是直线上的一段区间, 和 $\mathbb{R}$ 上的区间是等同的. 根据直线倾斜程度的不同, 得到的基也不同. 记 $\mathbb{R}_c$ 是以所有闭区间为基生成的拓扑.
其中需要注意到 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}_l \subseteq \mathbb{R}_c$.

	$\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$
$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$	$\mathbb{R}_l$	$\mathbb{R}_l$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_l$
$\alpha = (\frac{\pi}{2}, \pi)$	$\mathbb{R}_l$	$\mathbb{R}_c$