Sperner 引理及其應用

潘建強　　邵慰慈

一、　背景

一九一一年，L. Brouwer [3] 發表了一個著名的不動點定理，它對分析、拓樸等多方面都有深刻的影響。此定理表述為：

對任意一連續函數 $f: B_n \to B_n$，其中 B_n 是 n 維球體，則 f 必定在 B_n 中存在著不動點（即存在 $x \in B_n$ 使得 $f(x) = x$）。

在一維的情況下，B_1 即是實數線上的一個閉區間 $[a, b]$，其中 $a < b$。我們很容易由中間值定理 (Intermediate value theorem) 得出上述結果。可是在高維度的情況下，就必須應用較為成熟的數學方法來證明。

一九二八年，一位年青的德國數學家 E. Sperner（當時他只得 25 歲）發現了一個相當簡單的證明，他利用組合學的方法證明了 Brouwer 不動點定理（見 [1, 7]）。他的證明可說是相當優美，其應用也不單於此。本文將簡單介紹 Sperner 引理及應用它去證明對 Brouwer 不動點定理在二維空間中的情況（讀者可利用數學歸納法由二維情況推廣到高維的情況），同時亦應用 Sperner 引理證明一則數學遊戲必存在唯一的勝方和在帶寬問題上的一則應用。

在證明這些結論的過程中，我們必須要利用一些圖論的知識，有興趣的讀者可參考 [2] 或其他圖論的書。

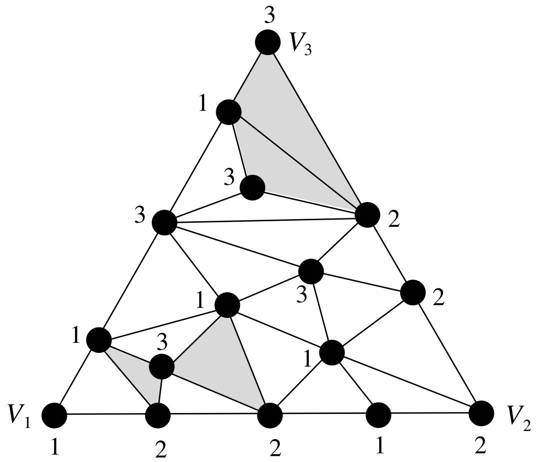
二、　Sperner 引理及其證明

Sperner 引理 [7]：給定一個‘大’三角形 $V_1V_2V_3$，並將它三角化（把它畫分成有限多個較‘細’的三角形且每個‘細’三角形的邊都是另一個‘細’三角形的邊或落在‘大’三角形的邊上）。若將各頂點以下述的規定標記：

- 頂點 V_i 的標號為 i，$i = 1, 2, 3$；
- 在 V_iV_j 邊上的頂點只可以用 i 或 j 作為標號；
- 不在‘大’三角形邊上的頂點可隨意以 1，2 或 3 作為標號；

則至少存在一個‘細’三角形其三個頂點的標號分別為 1，2 及 3。

以下是一個已標號的三角化三角形的例子。劃上陰影的‘細’三角形就是 Sperner 引理結論中所說的三角形。



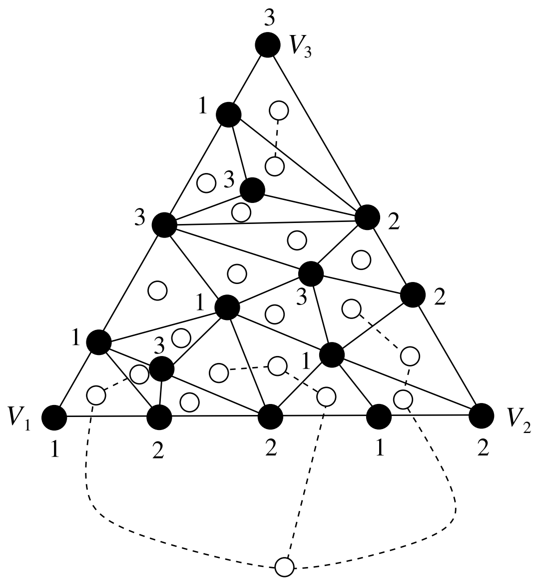
要證明這個引理是不太困難的，我們只須以下一個引理，這個引理在一般的圖論書上是第一個出現的定理，我們不妨稱它為握手引理。

握手引理：設 G 為一圖，則 G 的所有頂點的度數之和等於兩倍邊的數目。（註：頂點的度數定義為該點所連接邊的數目。）

證明： 由於G中每一條邊都被相關聯的兩個端點計算了兩次，因此G中所有頂點的度數之和必等於邊數的兩倍，所以證畢。

現在我們可證明Sperner引理了。

Sperner 引理的證明：設T爲已三角化的三角形$V_1V_2V_3$，其頂點的標記方法是根據Sperner引理中所要求的。考慮T的半對偶圖T'，其中T'的頂點是T的面，爲了表示T'的點，我們在T中每一個‘細’三角形和無限面內劃一個小圓點（如下圖的白圓點），兩白圓點有一連線當且僅當這兩點所代表的面其公共邊的兩端點分別標著1和2。見下圖：



我們很容易看出半對偶圖T'中的頂點，除對應著無限面的頂點外，其度數不超過2。在T'中度數爲1的頂點對應著T中標著1，2及3的‘細’三角形所組成的面；度數爲2的頂點對應著T中只標著1及2的‘細’三角形所組成的面；度數爲0的頂點只對應著T中不同時標著1和2的‘細’三角形所組成的面。因爲在V_1V_2邊上只得單數多條邊的兩端點是分別記號爲1及2的，所以，在半對偶圖中對應著無限面的頂點的度數是單數。若T'中沒有度數爲1的頂點，那麼其頂點度數之和必爲單數，這與握手引理相矛盾。

因此，結論就是必定存在一‘細’三角形其三個頂點的標號分別爲1，2及3。命題證畢。

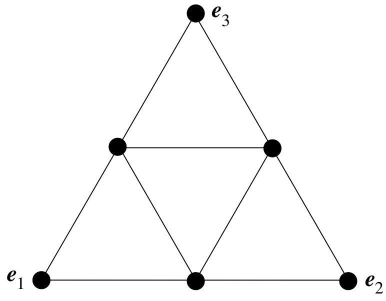
註：從握手引理及上述的證明不難看出Sperner引理結論中所說的三角形有奇數個。

三、 Sperner引理與Brouwer不動點定理的聯繫

以下就Brouwer不動點定理在二維的情形作出證明。考慮在$\mathbb{R}^3$中的一個三角形Δ，其頂點分別爲$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$，$\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$及$\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$。因爲$\Delta$和$B^2$是同構，所以我們只須證明任何連續函數$f:\Delta \to \Delta$都存在一不動點便可。我們利用反證法，假設$f:\Delta \to \Delta$中沒有不動點。若$T$代表三角形$\Delta$經三角化後所得的圖。以$\delta(T)$代表$T$中所有‘細’三角形之中最大之邊長。

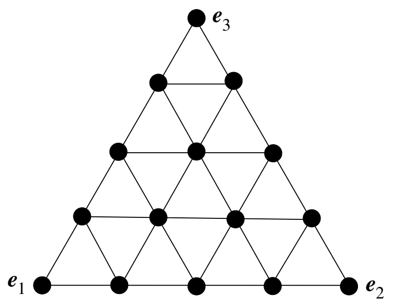
我們可利用以下的三角化方法找出$\Delta = T_1, T_2, T_4, \cdots$，使$\delta_n = \delta(T_{2^n}) \to 0$。

T_2是將Δ分割爲兩層且由四個全等的三角形組成，各三角形的邊長是原三角形Δ邊長的$\frac{1}{2}$。



T_2

T_4是將Δ分割爲四層且由十六個全等的三角形組成，其邊長是原三角形Δ邊長的$\frac{1}{4}$。



T_4

如此類推，我們很容易觀察到 $\delta_n = \delta(T_{2^n}) \to 0$。

對於在 T_{2^k} 上任意一頂點 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$，記 $f(\boldsymbol{v}) = (f(\boldsymbol{v})_1, f(\boldsymbol{v})_2, f(\boldsymbol{v})_3)$，我們有 $0 \le v_i, f(\boldsymbol{v})_i \le 1$，$i = 1, 2, 3$。我們給予 $\boldsymbol{v}$ 以下的一個標號:

$$\lambda(\boldsymbol{v}) = \min\{i : f(\boldsymbol{v})_i < v_i\},$$

換句話說，$\lambda(\boldsymbol{v})$ 就是最小的指標 i 使 $f(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}$ 的第 i 項座標值爲負數。$\lambda(\boldsymbol{v})$ 是良好定義的(well-defined)，因爲 $\boldsymbol{v}$ 和 $f(\boldsymbol{v})$ 都在 Δ 中，所以 $\boldsymbol{v}$ 和 $f(\boldsymbol{v})$ 是在平面 $x + y + z = 1$ 上，因此 $v_1 + v_2 + v_3 = 1$ 及 $f(\boldsymbol{v})_1 + f(\boldsymbol{v})_2 + f(\boldsymbol{v})_3 = 1$。但由我們的假設，$f$ 在 Δ 中沒有不動點，因此 $f(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}$ 不是零向量，又因爲 $\sum_{i=1}^{3}(f(\boldsymbol{v})_i - v_i) = 0$，那麼，至少存在某指標 i 使 $f(\boldsymbol{v})_i - v_i < 0$。

事實上，$\lambda(\boldsymbol{v})$ 滿足Sperner引理的要求，其理由如下：首先由於 $f(\boldsymbol{e}_i) - \boldsymbol{e}_i$ 只可在第 i 個座標上爲負數，故 $\boldsymbol{e}_i$ 的標號必爲 i；再者，若 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{e}_i$ 的對邊上，則 $v_i = 0$。所以 $f(\boldsymbol{v})_i - v_i$ 不可能是負數，換句話說，$\boldsymbol{v}$ 的標號不可能是 i。

根據Sperner引理，在 T_{2^k} 中必存在一‘細’三角形其頂點 $\{\boldsymbol{v}^{k:1}, \boldsymbol{v}^{k:2}, \boldsymbol{v}^{k:3}\}$ 的標號分別爲1，2及3。不失一般性，設 $\lambda(\boldsymbol{v}^{k:i}) = i$，$i = 1, 2, 3$。$\boldsymbol{v}^{k:1}$，$\boldsymbol{v}^{k:2}$ 及 $\boldsymbol{v}^{k:3}$ 的距離最多是 δ_k。因 Δ 是一緊緻(compact)集合，在 $\{\boldsymbol{v}^{k:1}\}_{k \ge 1}$ 中必存在一子集合收斂於 $\boldsymbol{v}^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*) \in \Delta$。在該子集合中，當 $k \to \infty$ 時，$\delta_k \to 0$，即 $\boldsymbol{v}^{k:1}$，$\boldsymbol{v}^{k:2}$ 和 $\boldsymbol{v}^{k:3}$ 同時趨向於 $\boldsymbol{v}^*$。

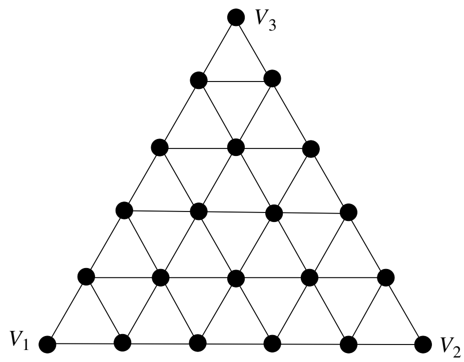
由於 $f(\boldsymbol{v}^{k:1})_i < (\boldsymbol{v}^{k:1})_i$ 及 f 是連續的，我們有 $f(\boldsymbol{v}^*)_1 \le v_1^*$。同樣地，$f(\boldsymbol{v}^*)_2 \le v_2^*$，$f(\boldsymbol{v}^*)_3 \le v_3^*$。又 $\sum_{i=1}^{3}(f(\boldsymbol{v})_i^* - v_i^*) = 0$，所以 $f(\boldsymbol{v}^*)_i = v_i^*$，因而 $f(\boldsymbol{v}^*) = \boldsymbol{v}^*$。矛盾，命題證畢。

四、 一則在三角形棋盤上的遊戲

在上一節中已看到Sperner引理的威力吧。在這一節中，我們介紹一個在三角形棋盤上的遊戲，同時利用Sperner引理證明該遊戲必存在唯一的勝利者。

所謂三角形棋盤，就是一個大三角形板，其頂點爲 V_1，V_2 及 V_3。把這個三個形板畫分成一些全等的‘細’三角形且這些‘細’三角形的邊與該三角形板之邊平行。我們記 T_l 爲有 l 層的三角形棋盤。

例如：



T_5

定義一: 線段的相交點稱爲該三角形棋盤的**頂點**。

定義二: 將三角形板的周界分解爲 P_1，P_2 及 P_3 三直線段使得 $V_i \notin P_i$，即

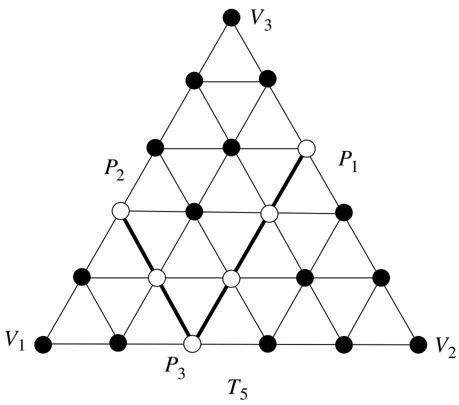
$$P_1 = (V_2, \ldots, V_3)$$
$$P_2 = (V_1, \ldots, V_3)$$
$$P_3 = (V_1, \ldots, V_2)$$

定義三：設 S 爲該三角形棋盤頂點的子集。將 S 的點聯同以 S 的點作爲兩端點的邊所組成的圖稱爲 S **的衍生子圖**。

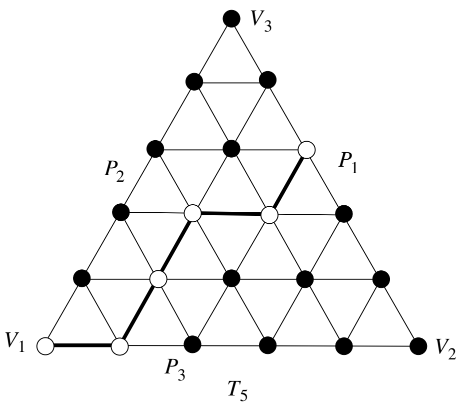
定義四：設 S 爲該三角形棋盤頂點的子集。如果 S 至少包含著 P_1，P_2 及 P_3 中各一頂點及其衍生子圖是連通圖，則 S 稱爲**連通集**。

以下是兩連通集（白色的點）的例子：

例一：



例二：



遊戲的玩法：

用具：(1) 三角形棋盤 T_l ($5 \leq l \leq 10$ 中等程度；$l > 10$ 高等程度)。

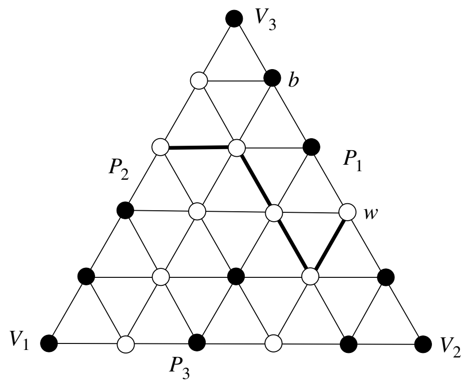
(2) 兩種顏色的棋子(白色及黑色)。

玩法：此乃二人遊戲，每人分別使用不同顏色的棋子。各人輪流將棋子放在三角形棋盤的頂點上，若其中一人的棋子能組成一連通集(見定義四)，那人就是得勝者。

這遊戲的規則簡單，但原來背後也和 Sperner 引理有關呢！

定理一：在三角形棋盤 T_l 上下棋，若以上述的遊戲規則，則總有一位且只有一位得勝者（換句話說，這遊戲沒有和局）。

證明：我們首先證明黑棋子和白棋子不能同時爲連通集。不然的話，設 B 爲黑棋子的連通集，W 爲白棋子的連通集。因此在 P_1 上，存在一頂點 $b \in B$ 及 $w \in W$。不失一般性，設 b 在 V_3 及 w 之間。



由於 W 是連通的，我們可找到一條以 W 的點爲頂點所組成的路徑使得它連接在到 P_2 上，這條路徑把 T_l 分成上下兩部分，那麼集 B 就不可能連通了(不能連接點 b 與 P_3 上的頂點)。

現在假設出現和棋的情況，即在 T_l 上每個頂點都放滿了棋子，但 W 和 B 都不是連通集。對任意的頂點 v，至少存在著一條直線段 P_1，P_2 或 P_3 使 v 不能透過和本身同顏色的棋子到達。我們定義各頂點 $v \in T_l$ 的標號爲

$$\lambda(v) = \min\{i : v \text{ 不能透過和本身相同顏色的棋子到達 } P_i\}。$$

這樣，我們對每一個T_l上的頂點都以1，2或3作了標記。很容易觀察到其標號滿足Sperner引理的要求。根據此引理，在棋盤上存在一‘細’三角形其頂點分別以1，2及3爲標號。由白鴿巢原理得知這三個頂點中至少有2個頂點的棋子顏色是相同。不失一般性，我們設標號爲1，2的頂點上棋子的顏色爲黑色，並且記這兩頂點分別爲a_1及a_2。根據定義，a_1不能透過黑色的棋子通往P_1而a_2則可。因a_1與a_2是相鄰，而a_2上的棋子也是黑色的。那麼a_1能通過a_2，再由a_2通過一些黑色的棋子到達P_1。矛盾，命題證畢。

我們留下一個問題讓讀者想想，先下棋者是否有利？若是，他的必勝策略如何？

上述的遊戲還可以加以變化，下棋者不一定要在開始比賽前預先選定好棋子的顏色，棋手可以在每下一步棋時才選用他認爲最有利的顏色棋子，誰下一棋子後得到一個同色的連通集便是勝方，這樣的比賽會更加有趣。

根據上述定理，同樣不會和局。同樣地，我們留下上述的問題給讀者，希望不久的將來有人提出解答來。

五、 三角形棋盤上的帶寬問題

隨著電腦科技的發展，爲了提高矩陣在電腦中計算的速度，如方陣的行列式(determinant)，矩陣相乘等等，工程界在1950年代中提出了方陣中帶寬(bandwidth)的重要性。給定一方陣M，所謂方陣的帶寬問題就是找一對稱排列矩陣M'，使所有非零項m'_{ij}的最大的$|i-j|$值最小，這裏所說的方陣對稱排列是指將方陣M的行(column)重排後，將它的列(row)也相應地重排。換句話說，就是希望找一排列使在矩陣中非零的數項集中排在主對角線附近，這可使電腦的記憶需求降低，同時也可增快其計算的效率。

相對於方陣的帶寬問題，圖的帶寬問題起源自1962年的Jet Propulsion Laboratory。當時L.H. Harper和A.W. Hales在考慮一些在超正方體(hypercube)上的編碼方法。及後，R.R. Korfhage [5]對圖的帶寬問題作了一系列的研究。1967年，F. Haray在Prague的圖論會議上發表了圖的帶寬問題的理論及其研究方向。Papadimitriou [6]在1976年證明了圖及方陣的帶寬問題是NP-Complete。現今很多圖論專家對圖的帶寬的上界和下界作出了不少的研究，並且精確地計算出一些特殊圖的帶寬。

現在從基本定義及記號開始。給定一個無向圖$G=(V,E)$，其中V爲點集，E爲邊集，且假設點的數目是n，即$|V|=n$。對任意一個對射$f:V\to\{1,2,\ldots,n\}$都稱爲在V上的一個**標號**。對某標號f，所有邊的兩端的最大標號差定義爲

$$B(G,f)=\max_{xy\in E}|f(x)-f(y)|,$$

xy表示以x及y爲端點的邊。$B(G,f)$稱爲**圖G在標號f下的帶寬**，而

$$B(G)=\min_f B(G,f)$$

則稱爲圖G的**帶寬**。(註：若考慮圖G的鄰接矩陣(adjacent matrix) M，則圖的帶寬問題就等價於方陣M的帶寬問題。)

定理二： *設T_l是一三角形棋盤的圖（見第四節），其帶寬$B(T_l)=l+1$。*

要證明上述定理，我們必須利用以下的定理：

定理A： *考慮在三角形棋盤中所組成的圖，若在其頂點上分別記上兩種不同的顏色。那麼必存在一種且僅有一種顏色之頂點的集合為連通集。*

註：此定理的證明須用到Sperner引理。事實上在第四節中已給出了證明！

定理二的證明：設T_l的頂點集合爲V及其標號爲f。根據標號f的記號次序（以標號的大小作爲先後，小者爲先），當某頂點已被標號時，我們記該頂點爲黃色，所有和這些記爲黃色的頂點相鄰的頂點記爲紅色，其餘的頂點記爲藍色。所以若我們已把i個頂點標號爲$1, 2, \ldots, i$，$i \le |V|$時，以Y_i，R_i及B_i分別代表黃色，紅色及藍色的頂點的集合。

對任意一i，$1 \le i \le |V|$，所有在Y_i中的頂點其標號必少於或等於i。所以必存在一頂點$v' \in R_i$使得其標號至少等於$i + |R_i|$。(即$f(v') \ge i + |R_i|$)，而在Y_i中必存在一頂點v''和v'相鄰。那麼

$$|f(v') - f(v'')| \ge |R_i|$$

所以$B(T_l) \ge |R_i|$，$1 \le i \le |V|$。

現在設i是首個指標使Y_{i+1}爲一連通集（見第四節），即Y_i不是一連通集。設

$$v \in Y_{i+1}, f(v) = i + 1, Y_{i+1} = Y_i \cup \{v\}.$$

明顯地，$v \in R_i$，所以$B_i \cap Y_{i+1} = \varnothing$。根據定理A，$B_i$不是連通集，所以我們得出$B_i$及$Y_i$均不是連通集。由於沒有任何在$B_i$的頂點與$Y_i$相鄰，所以$B_i \cup Y_i$是不連通。根據定理A，$R_i$是一連通集。所以我們有$B(T_l) \ge |R_i| \ge$最小連通集的基數。

現在我們證明T_l中的最小連通集基數爲$l+1$。當$l = 1$時，設H爲該最小連通集的衍生子圖，則H爲一樹，且其頂點的基數爲$2 = l + 1$。所以當$l = 1$時，命題成立。

假設當$l = k$時命題成立。現設$l = k + 1$，設H'爲T_{k+1}的最小連通集的衍生子圖，則H'爲一樹且$P_j \cap H'$只得1個頂點$(j = 1, 2, 3)$，這裏的P_j的定義見第四節。設$x \in P_1 \cap H'$，則x的度數爲1。把x及它相連的邊從H中拿掉得出的圖記成$H' - x$，則$H' - x$是在T_l的最小連通集衍生子圖，根據歸納法假設$|H' - x| = k + 1$所以$|H'| = k + 2$。

根據數學歸納法，在T_l中的最小連通集的基數爲$l + 1$。所以$B(T_l) \ge l + 1$。

接下來，我們實際給出一個標號，標記的方法如下：最頂一層的一點標記爲1；第二層的兩點由左至右分別標記爲2及3；第三層的三點由左至右標記爲4，5及6；按這規律如此下去標記，直至第$l + 1$層爲止。我們不難看出T_l在這標號下的帶寬爲$l + 1$。這證明了$B(T_l) \le l + 1$。

綜合以上的結果我們得知$B(T_l) = l + 1$，定理證畢。

註：上述證明乃參照R. Hochberg，C. McDiarmid和M. Saks [4]的文章某定理的證明改寫過來。

本文第一作者潘建強(K.K. Poon)任教於香港教育學院數學系，研究興趣包括複分析、複動力系統及圖論等。第二作者邵慰慈(W.C. Shiu)爲香港浸會大學數學系副教授，研究興趣包括圖論、組合學、數論及代數學等。

參考書目

[1] M. Aigner and G.M. Ziegler, *Proofs From The Book*, Springer, 1999.

[2] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, New York: Macmillan, 1976.

[3] L. Brouwer, Uber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, *Math. Annalen*, **71** (1911), 97- 115.

[4] R. Hochberg, C. McDiarmid and M. Saks, On the bandwidth of triangulated triangles, *Discrete Math.*, **138** (1995), 261-265.

[5] R.R. Korfhage, Numberings of the vertices of graphs, *Computer Science De-*

partment Technical Report, **5**, Purdue University, Lafayette, IN, 1966.

[6] C.H. Papadimitriou, The NP-completeness of the bandwidth minimization problem. Computing 16 (1976), 263-270.

[7] E. Sperner, Neuer Beweis fur die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **6** (1928), 265-272.