費馬最後定理的影響

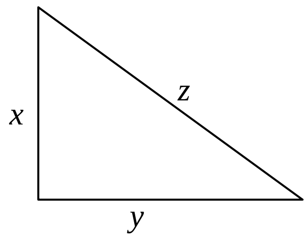
唐創時・邵慰慈

香港浸會大學數學系副教授

此文刊登於二零零五年八月十五日文匯報：破解世紀尋寶圖

尚智的古希臘人熱愛數學，畢達哥拉斯(Pythagoras，「數字之父」)在公元前六世紀創立了首個且為最有名的數學學校—畢氏學派，這學派主張『萬物皆數』，提出『大自然的奧秘可用數學去描述』。他們當時所指的數是現今我們所說的整數和分數（數學上稱為有理數）。畢氏學派最有名的定理就是畢氏定理（古中國稱為『勾股定律』，是現今初中生必學的課題：任何直角三角形的斜邊長度之平方，等於該三角形其餘兩邊長度的平方和。用數學的語言可表達為

$$x^2 + y^2 = z^2$$



有趣的是上述方程式有非零整數解，如 $3^2+4^2=5^2$，$5^2+12^2=13^2$ 等等。他們還證明了有無限多組解。公元前三世紀，歐基里德(Euclid)還把所有的解都完全描述出來，即 $x=k(r^2-s^2)$，$y=2krs$ 和 $z=k(r^2+s^2)$，其中 r 和 s 為兩互質的非零整數，k 為任意非零整數。換句說話，某些特別的平方數可寫成另外兩個平方數之和。

一個很自然的問題，就是有沒有一個立方數可寫成兩個立方數的和呢？有沒有一個四次方數可寫成兩個四次方數的和呢？如此類推，五次、六次、以至 n 次又如何？

自古希臘滅亡後，數學便陷入黑暗時期，直至文藝復興才回復生機。十七世紀法國數學家費馬(Pierre de Fermat, 1601-1665)，正職是檢控官，業餘研究數學，但他對數學的貢獻良多，所以被稱為『業餘數學家之王』。他的淡泊名利，研究成果不急於發表，很多評論多寫在廢紙堆、書本的空白處或致友人的書信中，直至他死後才由他的兒子匯集成書，1679 年出版。約在 1637 年，費馬在丟番圖(Diophantus，公元三世紀希臘數學家，人稱「代數之父」)所著【算術】(Arithmetica)一書中第二卷第八個命題看到畢氏定理方程式 $x^2+y^2=z^2$ 有無窮多組解的敘述，他便在這書旁寫了一段評語，主要是說：「當 n 為大於 2 的整數時，方程式 $x^n+y^n=z^n$ 沒有正整數解。我確信已發現了一個美妙的證明，可惜這裏沒有足夠的空間，寫不下了。」這就是著名的「費馬最後定理」(以下稱「定理」)。當他去世後，後人在他的遺物中怎樣也找不出這定理的證明。

費馬給卡爾卡維(Carcavi)的一信中提到使用無窮遞減法(method of infinite descent)證明 $n=4$ 的情形，但沒有細節，之後福蘭尼可(Frénicle de Bessy, 1605-1670)依從費馬的提示在 1676 年證明 $n=4$ 的情形是對的，但此時費馬已去世十一年了。

自此「定理」提出後，不少數學家企圖去證明或找出反例，1738 年歐拉(Euler, 1707-1783，「史上最偉大的數學家」)證明 $n = 3$ 的情形，1827 年樂強德(Legendre, 1752-1833)證明 $n = 5$ 的情形，1839 年拉梅(Lamé, 1795-1870)證明 $n = 7$ 的情形。

三百多年來，除上述幾個情形和一些特殊情況外，「定理」的證明一直都沒有什麼突破。直至 1963 年，一位出生於英國劍橋的十歲小男孩在某書中看到此問題，他便立志要去解決它。三十年後，他成功了，於 1993 年 6 月 23 日在英國劍橋的安頓數學研究所發表他的成果，雖然被人指出了證明有漏洞，但其後在他與他的學生泰勒(Taylor)的共同努力下，終在 1994 年 9 月得到法爾廷斯(Faltings)等數論專家的確認，他就是懷爾斯(Andrew Wiles)。

有人會問，費馬最後定理有何用？表面來看，一個證明某些特性不存在的定理似乎沒有什麼用，其實費馬最後定理的重要性在於它激發起數學家為了解決它而不斷探索，不斷發掘新的方法，創造新的巧技和新的觀念，這些新的東西豐富了整個數學界，並且應用在其他的科學領域上，以下讓我舉幾個例子。

歐拉證明 $n = 3$ 的情形時用到當時不被重視的虛數(imaginary numbers)，現今虛數在工程學上是不可缺少的概念和工具。

拉梅證明 $n = 7$ 的情形後，於 1847 年宣布完全解決了費馬最後定理。但在他的證明中用到分圓整數環(ring of integers of cyclotomic field)有唯一分解性，這是其中的一個漏洞（筆者相信費馬當時也犯了同樣的錯）。德國人庫默爾(Kummer, 1810-1893)指出在 1844 年他已知道不是任何分圓整數環都有唯一分解性，並於 1846 年創立了理想數(ideal numbers)的概念，以彌補分圓整數環沒有唯一分解性的缺憾，利用這些理想數可證明費馬最後定理在更多的情形是對的。理想數的提出開闢了代數數論這個新的領域，從而影響抽象代數的發展。現今抽象代數在物理、化學和分子生物學上有非常廣泛的應用。

說到懷爾斯，他的想法是繞過證明谷山豐、志村五郎和韋伊(Taniyama, Shimura, Weil)所提出的猜想來證明費馬最後定理。他把橢圓曲線(elliptic curve)和模型式(modular form)拉上關係，從而得證谷山－志村－韋伊猜想，費馬最後定理就此解決了。橢圓曲線（與橢圓沒多大關係，只是一直沿用了這名稱而已）是兩千多年前已被廣泛研究，它是代數拓撲學上一個重要的領域，現今常應用於密碼學上。而模型式是十九世紀的產品，是代數數論和解析數論中的一門熱門研究對象，它有很好的對稱性。

二十世紀以來，數學已變得高度專門化，每個領域都是個孤島和堡壘，不同領域的數學家難以融合。懷爾斯在橢圓曲線和模型式上建立了一道橋，這使我們對在 1960 年代朗蘭茲(Langlands)所提出的數學大整合計劃燃點著希望，也許，數學終有一日可成為萬用語言，成就畢達哥拉斯的理想—『大自然的奧秘可用數學去描述』。