Subject: Date:

تمرین سری اول یادگیری ماشین - شیوا وفادار - 810899074

"بخش تئوری"

الف) رگرسیون خطی یک روش آماری برای مدلسازی رابطه بین یک متغیر وابسته و یک یا چند متغیر مستقل است. این مدل به دنبال یافتن بهترین خطی است که از نقاط داده عبور می‌کند. به دنبال یافتن معادله‌ای خطی است که به بهترین وجه، داده‌ها را پیش‌بینی کند. $y = ax + b + \epsilon$

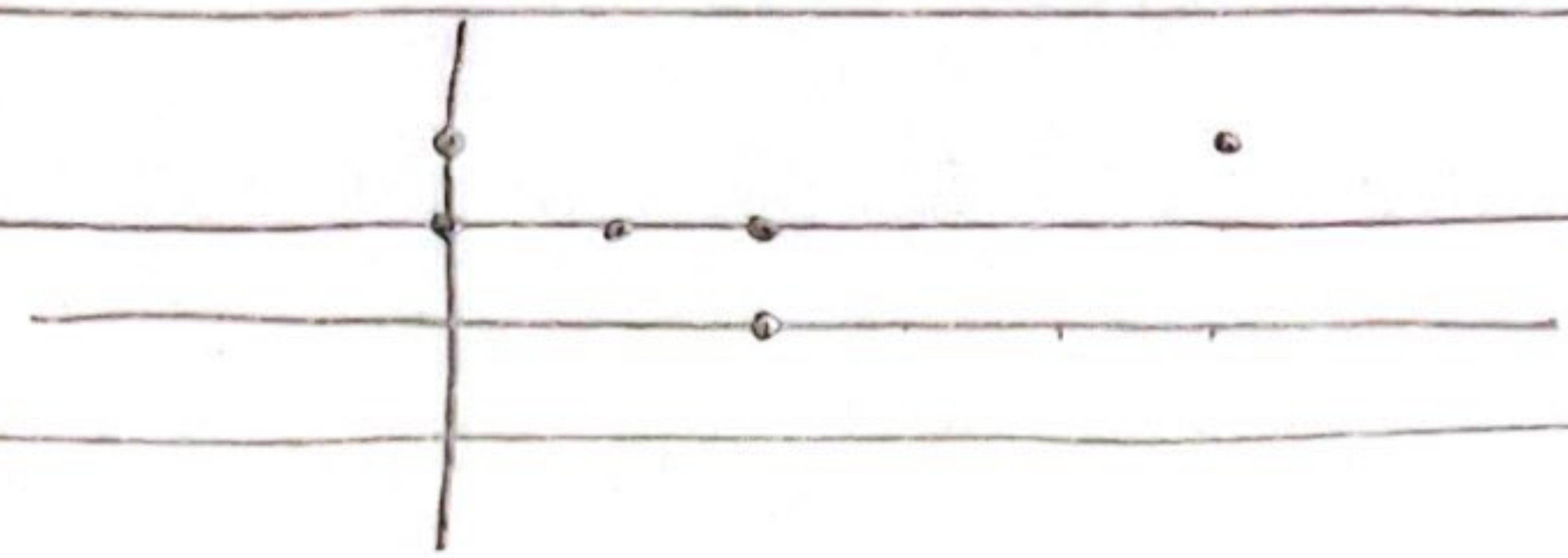
از رگرسیون خطی می‌توان برای پیش‌بینی مقادیر متغیر وابسته بر اساس مقادیر متغیر مستقل استفاده کرد، برای مثال مثل قیمت یک خانه براساس مساحت آن، درآمد یک شرکت براساس تعداد کارمندان آن، میزان بارندگی براساس دما.

ب) مفروضات رگرسیون خطی اعم از: خطی بودن، مستقل بودن، پیروی از توزیع نرمال، و هم اینکه واریانس خطاها باید در طول دامنه متغیرهای مستقل ثابت باشد.
همچنین ویژگی‌های مورد نظر ما در رگرسیون خطی اعم از: درست بودن مدلسازی، قابلیت تعمیم، سادگی و

ج) یک روش استفاده شده در آمار برای مدلسازی روابط بین یک متغیر وابسته دودویی با متغیرهای مستقل است. این روش برای پیش‌بینی احتمال وقوع یا عدم وقوع یک رویداد دو دسته‌ای استفاده می‌شود. تفاوت اصلی این است که لجستیک برای متغیرهای وابسته دودویی است ولی رگرسیون خطی برای متغیرهای پیوسته است. مفروضات مهم: وابستگی خطی، برابری واریانس خطاها، انحراف استاندارد خطاها

د) MLE برای تخمین پارامترهای یک مدل احتمالاتی استفاده می‌شود. این روش با استفاده از داده‌های مشاهده شده، پارامترهای مدل را طوری تنظیم می‌کند که احتمال مشاهده داده‌ها با استفاده از مدل بیشینه شود. در لجستیک از MLE: $p(y=1|X) = \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\dots)}}$
تابع درستنمایی سیستم را می‌نویسیم.
سپس با استفاده از داده‌های مشاهده شده، آن را max می‌کنیم و در نهایت به احتمال وقوع رویداد دودویی را پیش‌بینی می‌کنیم

x	y
5	2
0	1
2	1
1	1
2	0



$y = a + bx \qquad b = r\,\frac{S_y}{S_x} \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}$

$\bar{x} = \frac{10}{5} = 2 \qquad \bar{y} = \frac{5}{5} = 1$

x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
5	2	3	1	3	9	1
0	1	-2	0	0	4	0
2	1	0	0	0	0	0
1	1	-1	0	0	1	0
2	0	0	-1	0	0	1
				3	14	2

Subject : Date : 2) ٢٠١٧

$$r = \frac{\Sigma((x-\bar{x})(y-\bar{y}))}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{\underset{4\times7}{14\times2}}} = \frac{3}{2\sqrt{7}} = 0,56$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7} = 2,64$$

$$b = 0,56\,\frac{0,71}{2,64} = 0,15 \qquad a = 1 - 0,15(2) = 0,7$$

$$y = 0,7x - 0,15$$

Subject: Date:

③ $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

$\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i - \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot \bar{y}}{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ $\Rightarrow \bar{y} \cdot \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})$

$n\bar{x} - n\bar{x} = 0$

$\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$

$\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \Rightarrow$

$= \dfrac{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}) \beta_0 + \beta_1 \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}) x_i + \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

$\hat{\beta}_1 = \beta_1 \cdot \dfrac{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}) x_i}{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} + \dfrac{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \dfrac{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

$E(\hat{\beta}_1) = E\left[\beta_1\right] + E\left[\dfrac{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}\right]$

Subject: Date:

$$\beta_1 + E_x\left[E\left[\frac{\sum_1^n (x_i-\bar{x})u_i}{\sum_1^n (x_i-\bar{x})^2} \middle| x\right]\right] = 0$$

$$\beta_1 + E_x\left[\frac{1}{\sum_1^n (x_i-\bar{x})^2} \cdot E\left[\sum_1^n (x_i-\bar{x})u_i \mid x\right]\right]$$

$$= \beta_1 + E_x\left[\underbrace{\frac{1}{\sum_1^n (x_i-\bar{x})^2} \cdot \overbrace{\sum_1^n E\left[(x_i-\bar{x}) \cdot \underbrace{u_i \mid x}_{E[u_i \mid x]=0}\right]}^{=0}}_{=0}\right]$$

$$\rightarrow \beta_1 + \underbrace{E_x[0]}_{0}$$

$$\rightarrow \hat{\beta}_1 = \beta_1 \quad \boxed{\checkmark}$$

PRESTIGE