目录

北京科技大学 2010 年..2
北京科技大学 2011 年..9
北京科技大学 2012 年.. 15
北京科技大学 2013 年.. 20
北京科技大学 2014 年《计算方法》 26
北京科技大学 2015 年.. 32
北京科技大学 2016 年《计算方法》 40
北京科技大学 2017 年《计算方法》 46
《计算方法》试题库...54

北京科技大学 2010 年

《科学与工程计算》

研究生考试试题答案

一、填空题(每空题 2 分，共 20 分)

1.为使 $\sqrt{80}$ 的近似值的相对误差限不超过 10^{-3}，则近似值至少需要取 **3** 位有效数字.

注：

$\sqrt{80} \approx 8.944271908$ $\frac{(8.944271908\text{-}8.9)}{8.944271908}=0.0049>10^{-3}$ $\frac{(8.944271908\text{-}8.94)}{8.944271908}=0.000477<10^{-3}$

2.为了提高数值计算精度，当数 x 非常接近 0 时，应将 $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ 改写为 $\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

3.设 $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1$=**10**，$\|A\|_\infty$=**9**。

4. 若使用二分法求解方程 $xe^x=1$ 在[0,1]上的根，要求误差小于 0.5×10^{-3}，则至少需要迭代__**10**__步。

注：二分 k 步误差小于 $\frac{b-a}{2^{k+1}}$ $\frac{1}{2^{k+1}} \le 0.5\times10^{-3} \to 2^k \ge 1000 \to k \ge 10$

5．已知函数 $f(-1)=-5$, $f(1)=0$, $f(2)=7$,用此函数表作牛顿插值多项式，那么插值多项式 x^2 的系数是__**7/2** _.

6.设 $f(x)=5x^7+4x^4+3x^3+2x+1$，则差商 $f[0,1,2,3,4,5,6,7]$=**5**。

$f[-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5]$=**0**

7．求解初值问题 $y'=-10y+x^2, y(0)=1$ 时，若用改进欧拉方法的绝对稳定域中步长h不超过.**0.2**。

8. 设 $S(x)=\begin{cases} (x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+1 & 0\le x<1 \\ 3x^3-2x & 1\le x\le 2 \end{cases}$ 是[0, 2]上的三次样条函数，那么 a=_**9**_

二、 (20 分) 分别用 Jacobi 迭代与高斯-赛德尔迭代法解线性方程组，

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 30 \end{bmatrix}$$

给出迭代格式与迭代矩阵，说明上述迭代是否收敛，若全两者均收敛问哪种方法收敛快。

解：本问题的 Jacobi 迭代格式为
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+5 \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{3}x_1^{(k)}+\dfrac{4}{3}x_3^{(k)}-1 \\ x_3^{(k+1)}=-\dfrac{2}{7}x_1^{(k)}-\dfrac{4}{7}x_3^{(k)}+\dfrac{30}{7} \end{cases}$$
（2 分）

迭代矩阵为 $B_J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & 0 \end{bmatrix}$ **（2 分）**

$$|\lambda I-B_J|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \lambda & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2-\frac{1}{3} & \lambda & 2\lambda-\frac{4}{3} \\ \frac{4}{7}\lambda+\frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \lambda+\frac{8}{7} \end{vmatrix}=\left(\lambda^2-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda+\frac{8}{7}\right)-\left(\frac{4}{7}\lambda+\frac{2}{7}\right)\left(2\lambda-\frac{4}{3}\right)$$

$=\lambda^3-\dfrac{1}{7}\lambda$ **（4 分）**

$\rho(B_J)=\sqrt{\dfrac{1}{7}}<1$ **（1 分）** Jacobi 迭代收敛 **（1 分）**

本问题的高斯-赛德尔迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+5 \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{3}x_1^{(k+1)}+\dfrac{4}{3}x_3^{(k)}-1=\dfrac{1}{3}x_2^{(k+1)}+\dfrac{2}{3}x_3^{(k)}+\dfrac{2}{3} \\ x_3^{(k+1)}=-\dfrac{2}{7}x_1^{(k+1)}-\dfrac{4}{7}x_3^{(k+1)}+\dfrac{30}{7}=-\dfrac{10}{21}x_2^{(k)}+\dfrac{4}{21}x_3^{(k)}+\dfrac{52}{21} \end{cases}$$
（2 分）

迭代矩阵为 $B_S=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{10}{21} & \frac{4}{21}\end{pmatrix}$ **（2 分）**

$$|\lambda I-B_J|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 2\\ 0 & \lambda-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{10}{21} & \lambda-\frac{4}{21}\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda^2-\frac{11}{21}\lambda+\frac{13}{21}\right)$$ **（3 分）**

$\rho(B_s)=\sqrt{\frac{13}{21}}<1$ **（1 分）** Seidel 迭代收敛 **（1 分）**

$\rho(B_J)=\sqrt{\frac{1}{7}}<\rho(B_s)=\sqrt{\frac{13}{21}}$ Jacobi 迭代收敛的快 **（1 分）**

三、（10 分）给定数据（$f(x)=\sqrt[4]{x}$），

x	**1**	*2*
f(x)	**1**	**1.1892**
f'(x)	**0.25**	

试用 hermite 插值多项式计算 $f(1.75)$ 的近似值，并估计误差。

解：**方法 1**

首先构造差商表：

x	**1**	**1**	**2**
f(x)	**1**	**1**	**1.1892**
	0.25	**0.1892**	
	-0.0608		

那么，**（每个插商 2 分）**

$$N(x)=1+0.25(x-1)-0.0608(x-1)^2$$ **（1 分）**

最后计算可以得到 $f(1.75)\approx N(1.75)=1.1533$。 **（1 分）**

$f(x)=\sqrt[4]{x}\quad f'''(x)=\frac{21\sqrt[4]{x}}{64x^3}\quad \max_{1\le x\le 2}|f'''(x)|\le\frac{21}{64}$

$R(1.75)\le\frac{21}{64}\times\frac{1}{6}\left|(1.75-1)(1.75-1)(1.75-2)\right|=\frac{63}{8192}=0.0076904296875$ （误差 2 分）

方法 2 待定系数法

$G(x)=a+bx+cx^2\quad G'(x)=b+2cx$

$G(1)=a+b+c=1$ （1 分） $G(2)=a+2b+4c=1.1892$ （1 分）

$G'(2)=b+2c=0.25$ （1 分）

解得 $a=0.6892,b=0.3716,c=-0.0608$ （3 分）

$N(x)=0.6892+0.3716x-0.0608x^2$ （1 分）

最后计算可以得到 $f(1.75)\approx G(1.75)=1.1533$。 （1 分）

误差同方法 1

方法 3 基函数法

$G(x)=a(x)+1.1892b(x)+0.25c(x)$

$a(1)=1,a(2)=0,a'(1)=0\quad b(1)=0,b(2)=1,b'(1)=0\quad c(1)=0,c(2)=0,c'(1)=1$

$a(x)=(x-2)(A+Bx)\quad a(1)=-A-B=1\quad a'(1)=A=0\quad\rightarrow a(x)=-(x-2)x$ （2 分）

$b(x)=C(x-1)^2\quad b(2)=C=1\quad\rightarrow b(x)=(x-1)^2$ （2 分）

$c(x)=D(x-1)(x-2)\quad c'(x)=D(2x-3)\quad c'(1)=-D=1\quad\rightarrow c(x)=-(x-1)(x-2)$ （2 分）

$G(x)=-(x-2)x+1.1892(x-1)^2-(x-1)(x-2)$ （1 分）

最后计算可以得到 $f(1.75)\approx G(1.75)=1.1533$。 **（1 分）**

误差同方法 1

四、(15 分)已知数据表

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-17	-14	-10	20	52

求最小二乘法求其二阶拟合多项式并计算平方误差。计算中间数值及结果保留6位小数。

解：$y=a+bx+cx^2$ $\quad\varphi_0=1,\varphi_1=x,\varphi_2=x^2$

$(\varphi_0,\varphi_0)=5\quad(\varphi_0,\varphi_1)=\sum x_i=0\quad(\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_1,\varphi_1)=\sum x_i^2=10$

$(\varphi_1,\varphi_2)=\sum x_i^3=0\quad(\varphi_2,\varphi_2)=\sum x_i^4=34\quad(\varphi_0,y)=\sum y_i=31$

$(\varphi_1,y)=\sum x_iy_i=172\quad(\varphi_2,y)=\sum x_i^2y_i=146$

解方程 $\begin{pmatrix}5&0&10\\0&10&0\\10&0&34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31\\172\\146\end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-29/5\\86/5\\6\end{pmatrix}$ **（每个非 0 系数 1 分，共 6 分）**

二阶拟合多项式为 $y=\dfrac{-29+86x+30x^2}{5}$ **（a,b,c 系数 1 分）**

近似值 $y(-2)=\dfrac{-81}{5}=-17+\dfrac{4}{5}\quad y(-1)=-17=-14+3\quad y(0)=-\dfrac{29}{5}=-10+\dfrac{21}{5}$

$y(1)=\dfrac{87}{5}=20-\dfrac{13}{5}\quad y(2)=\dfrac{263}{5}=52+\dfrac{3}{5}$

平方误差=$\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+(3)^2+\left(\dfrac{21}{5}\right)^2+\left(\dfrac{13}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{172}{5}$ **（误差1分）**

五、(10 分)用牛顿法求 $\sqrt[3]{5}$ 的近似值，取初始值 $x_0=1$，要求误差 $<10^{-5}$

解：$\sqrt[3]{5}$ **为** $x^3-5=0$ **的根**利用牛顿法构造递推公式 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^3-5}{3x_k^2}=\dfrac{2}{3}x_k+\dfrac{5}{3x_k^2}$，**（2 分）**

$x_0=1$，计算结果如下，$x_1 := 2.333333334$ **1 分** $x_2 := 1.861678005$ **1 分**

$x_3 := 1.722001880$ **1 分**

$x_4 := 1.710059736$ **2分** $x_5 := 1.709975951$ **2分**

$|x_5-x_4|<10^{-4}$ $x^*\approx 1.709975951$（1 分）

六、(15 分) 用改进的欧拉方法求解初值问题

$$\begin{cases} y'=-0.9y/(1+2x) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

取步长 h=0.25，计算 $y(0.5)$，并与准确值 $y=(1+2x)^{-0.45}$ 比较.

解：

$k_1=f(x_n,y_n)=\dfrac{-0.9y_n}{1+2x_n}$，$k_2=f(x_{n+1},y_n+k_1h)=\dfrac{-0.9(y_n+k_1h)}{1+2x_{n+1}}$，$y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}[k_1+k_2]$

公式 2 分

$y_0=0$，$x_0=0$，$x_1=0.1$，$k_1=-0.9$ **(2分)** $k_2=-0.465$ **(2分)**，$y_1=0.829375$，**(2分)**

真实值0.8332185564**(1分)**

$x_1=0.25$，$x_2=0.5$，$k_1=-0.497625$ **(1 分)**，$k_2=-0.3172359375$ **(1 分)**，$y_2=0.7275173828$ **(1分)**真实值0.7320428480**(1分)**

y_1 误差约为0.0038435564，**(1分)** y_2 误差约为0.0045254652**(1分)**

七、(10 分) 已知某连续可微函数 $f(x)$ 的几点函数值如下表

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1
f(x)	1	0.9961	0.9843	0.9646	0.9368	0.9006	0.8554	0.8006	0.7351

使用复化梯形求积公式及其外推公式估计 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，使估计值尽可能准确（注：每步计算结果保留小数点后 6 位。）

解：（1）$T_1=\dfrac{1-0}{2}[1+0.7351]=0.85755$ （1 分）

$T_2=\dfrac{1}{2}T_1+\dfrac{1}{2}\times 0.9368=0.902175$ （1 分）

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}(0.9843+0.9368+0.8554)=0.911025$$ （1 分）

$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}(0.9961+0.9646+0.9006+0.8006)=0.91324375\approx 0.913244$$ （1 分）

外推第一层

$S_1=T_2+\frac{T_2-T_1}{3}\approx 0.913717$ （1 分） $S_2=T_4+\frac{T_4-T_2}{3}\approx 0.913958$ （1 分）

$S_4=T_8+\frac{T_8-T_4}{3}\approx 0.913988$ （1 分）

外推第二层

$C_1=S_2+\frac{S_2-S_1}{15}\approx 0.913974$ （1 分） $C_2=S_4+\frac{S_4-S_2}{15}\approx 0.913990$ （1 分）

外推第三层

$R_1=C_2+\frac{C_2-C_1}{63}\approx 0.913990$ （1 分）

北京科技大学 2011 年

《科学与工程计算》
研究生考试试题答案

一、填空题(每空题 2 分，共 20 分)

1. $x=1.6491$ 是精确值 $\sqrt{e}$ 的近似值,则其有 **4** 位有效数字.

   1.6487212707001281468486507878142

2.为了提高数值计算精度，当数 x 非常大时，应将 $\ln(x)-\ln(\sqrt{x^2-1})$

改写为 $\underline{-\frac{1}{2}\ln(1-\frac{1}{x^2})}$.

3.设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1$=$\underline{4}$，$\|A\|_2$=$\underline{\sqrt{6+\sqrt{20}}=\sqrt{5}+1}$。

4. 已知 $q_k(x)$ 为区间[0,1]上关于权函数 $\rho(x)=1-x$ 的首项系数为 1 的

正交多项式族，$q_0(x)=1$,则 $q_1(x)=\underline{x-\frac{1}{3}}$。

5.设 $f(x)=x^8-x^4+x+1$，则差商 $f[-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4]$=**1**。

$f[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]$=**0**

6．求解初值问题 $y'=-20y-x, y(0)=1$时，若用改进欧拉方法的

绝对稳定域中步长h不超过.**0.1**。

7. 设 $S(x)=\begin{cases} x^3+x^2 & 0\le x<1\\ 2x^3+ax^2+bx-1 & 1\le x\le 2\end{cases}$ 是[0, 2]上的三次样条函数，

那么 a=**-2**，b=**3** **.**

二、 **(10 分)用牛顿法求 $xe^x=1$ 的近似值，取初始值 $x_0=0.5$，**

要求误差 $<10^{-5}$

解：利用牛顿法构造递推公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k\exp(x_k)-1}{(x_k+1)\exp(x_k)}=x_k-\frac{x_k-\exp(-x_k)}{x_k+1}，（2 分）$$

$x_0=1$，计算结果如下， $x_1:=0.5710204398$ **2分**

$x_2:=0.5671555688$ **2分** $x_3:=0.5671432905$ **2分**

$x_4:=0.5671432904$ **2分** $|x_4-x_3|<10^{-5}$ $x^*\approx 0.5671432904$（1 分）

三、(10 分) 使用 Dolittle 三角分解求解线性方程组

$$\begin{bmatrix}3 & -13 & 9\\ -6 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -24\\ 8\end{bmatrix}$$

解：$A=\begin{bmatrix}3 & -13 & 9\\ -6 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -6/11 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -13 & 9\\ 0 & -22 & 19\\ 0 & 0 & 26/11\end{bmatrix}$

求解 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -6/11 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -24\\ 8\end{bmatrix}$ 得 $\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -16\\ -52/11\end{bmatrix}$

求解 $\begin{bmatrix}3 & -13 & 9\\ 0 & -22 & 19\\ 0 & 0 & 26/11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -16\\ -52/11\end{bmatrix}$ 得 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ -2\end{bmatrix}$

四、（10 分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{bmatrix}$ **其中 $a\neq\pm1$,给出求解 $Ax=b$ 的**

Gauss-Seidel 迭代矩阵，并给出 Gauss-Seidel 迭代收敛时 a 的范围。

解

：

$$G_s=-(D+L)^{-1}U=-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -a & 1 & 0\\ a^2 & -a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & a^2 & a\\ 0 & a^3 & -a^2\end{pmatrix}$$

$x_1^{(k+1)}=b_1-ax_2^{(k)}$

或由 $x_2^{(k+1)}=b_2-ax_1^{(k+1)}-ax_3^{(k)}=b_2-ab_1+a^2x_2^{(k)}-ax_3^{(k)}$ **导出迭代矩阵**

$x_3^{(k+1)}=b_3-ax_2^{(k+1)}=b_3-ab_2+a^2b_1-a^3x_2^{(k)}+a^2x_3^{(k)}$

$$|\lambda I-G_s|=\begin{vmatrix}\lambda & -a & 0\\ 0 & \lambda-a^2 & -a\\ 0 & -a^3 & \lambda+a^2\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda^2-2a^4\right)=0 \qquad \rho(G_s)=\sqrt{2}a^2$$

Gauss-Seidel 迭代收敛时， $\rho(G_s)=\sqrt{2}a^2<1 \qquad \rightarrow |a|<\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

五、(10 分)找到合适的 household 矩阵 H，使得 $H\begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，

其中 c 为某常数。

解：$v=(1,2,2,4)^T,\|v\|_2=\sqrt{1^2+2^2+2^2+4^2}=5$， $c=-5$

$w=v-ce_1=(6,2,2,4)^T,\|w\|_2^2=6^2+2^2+2^2+4^2=60$

令 $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|_2}$， $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T=I-2\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\|\boldsymbol{w}\|_2^2}=I-\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{30}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-6&-12&-12&-24\\-12&26&-4&-8\\-12&-4&26&-8\\-24&-8&-8&14\end{pmatrix}$

有 $\boldsymbol{H}v=v-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^Tv=-5e_1$。

六、**(10 分)**已知函数 $f(x)$ 在[-1,1]上存在连续的五阶导数，

试求一个不超过 4 次多项式 $p(x)$,使得

$p(-1)=-10, p(0)=-5, p(1)=2$ 和 $p'(-1)=10, p'(1)=18$。

解：**方法 1**

首先构造差商表：

x	-1	-1	0	1	1
$f(x)$	-10	-10	-5	2	2
	10	5	7	18	
	-5	1	11		
	3	5			
	1				

那么，**（每个插商 1 分，总 9 分）**

$H(x)=-10+10(x+1)-5(x+1)^2+3(x+1)^2x+(x+1)^2x(x-1)=x^4+4x^3+2x-5$ **（1 分）**

方法 2 待定系数法

$H(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 \quad H'(x)=b+2cx+3dx^2+4ex^3$

$H(-1)=a-b+c-d+e=-10$ （1 分） $H(0)=a=-5$ （1 分）

$H(1)=a+b+c+d+e=2$ （1 分）

$H'(-1)=b-2c+3d-4e=10$ （1 分） $H(1)=b+2c+3d+4e=18$ （1 分）

解得 $a=-5,b=2,c=0,d=4,e=1$ （5 分） $H(x)=x^4+4x^3+2x-5$ （0 分）

或 $H(x)=-10+10(x+1)+a(x+1)^2+b(x+1)^3+c(x+1)^4$

$H(0)=-10+10+a+b+c=-5 \quad \to a+b+c=-5$

$H(1)=-10+20+4a+8b+16c=2 \quad \to a+2b+4c=-2$

$H'(1)=10+4a+12b+32c=18 \quad \to a+3b+8c=2$

解得 $a=-6,b=0,c=1 \quad H(x)=-10+10(x+1)-6(x+1)^2+(x+1)^4=x^4+4x^3+2x-5$

或先由 $H(-1)=-10,H(0)=-5,H(1)=2$ 构造出拉格朗日插值多项式

$$L_2(x)=-10\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}-5\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}+2\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}$$

$$=-5(x^2-x)+5(x^2-1)+x^2+x=x^2+6x-5$$

$q(x)=H(x)-L_2(x)$,由 $q(-1)=q(0)=q(1)=0$,且 $q(x)$ 的次数为 4,

所以 $q(x)=H(x)-L_2(x)=(x+1)x(x-1)(Ax+B)=(x^3-x)(Ax+B)$

$H(x)=q(x)+L_2(x)=(x^3-x)(Ax+B)+x^2+6x-5$

$H'(x)=(3x^2-1)(Ax+B)+(x^3-x)A+2x+6$

$H'(-1)=2(-A+B)+4=10 \qquad B=A+3 \qquad H'(1)=2(A+B)+8=18$

$A+B=5$

解得 $A=1,B=4 \qquad H(x)=(x^3-x)(x+4)+x^2+6x-5=x^4+4x^3+2x-5$

七、(10 分)已知数据表

x_i	0	1	2	3
y_i	3	3	5	14

用最小二乘法求二次拟合多项式 $y=a+bx+cx^2$ 。

解： $y=a+bx+cx^2 \qquad \varphi_0=1,\varphi_1=x,\varphi_2=x^2$

$(\varphi_0,\varphi_0)=4 \qquad (\varphi_0,\varphi_1)=\sum x_i=6$

$(\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_1,\varphi_1)=\sum x_i^2=14$

$(\varphi_1,\varphi_2)=\sum x_i^3=36 \quad (\varphi_2,\varphi_2)=\sum x_i^4=98$

$(\varphi_0,y)=\sum y_i=25 \quad (\varphi_1,y)=\sum x_i y_i=55 \quad (\varphi_2,y)=\sum x_i^2 y_i=149$

解方程 $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 \\ 55 \\ 149 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13/4 \\ -13/4 \\ 9/4 \end{pmatrix}$ **（每个非 0 系数 1 分，共 8 分）**

二阶拟合多项式为 $y=\dfrac{9-13x+13x^2}{4}$ **（2 分）**

八、(10 分)构造求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(x_1)+f(x_2)$，

使其代数精度尽可能高，(1)给出最高的代数精度

（2）使用此公式和 Simpson 求积公式计算 $\int_{-1}^{1}\cos x dx$，

对比两者误差并分析原因。

解：$f(x)=1$ 时 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=2=f(x_1)+f(x_2)=2$ 相等

$f(x)=x$ 时 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} xdx=0=f(x_1)+f(x_2)=x_1+x_2$

$f(x)=x^2$ 时 $\int_{-1}^{1} x^2dx=\dfrac{2}{3}=x_1^2+x_2^2$ 解得 $x_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3})+f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

当 $f(x)=x^3$ $I(x^3)=\int_{-1}^{1} x^3dx=0=I_2(x^3)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=0$

当 $f(x)=x^4$ $I(x^4)=\int_{-1}^{1} x^4dx=\dfrac{2}{5}\neq I_2(x^4)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^4+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^4=\dfrac{2}{9}$ 最高代数精度为 3

（2）$\int_{-1}^{1}\cos x dx=2\sin 1\approx 1.6829419696$

$$I_2(\cos x)=\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\approx 1.6758236554$$

误差　0.00711831422581

Simpson公式$\frac{1}{3}[\cos(-1)+4\cos 0+\cos(1)]=1.693534870$

误差-0.010592900

两者代数精度均为3，但前者计算量与误差均小于后者。

九、(10 分)用改进的欧拉方法求解初值问题

$$\begin{cases} y'=xy^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

取步长$h=0.1$，计算$y(0.1),y(0.2)$的近似值并与准确值$y=\frac{2}{2-x^2}$比较.

解: $k_1=f(x_n,y_n)=x_n y_n^2$, $k_2=f(x_{n+1},y_n+k_1h)=x_{n+1}(y_n+k_1h)^2$,

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[k_1+k_2]$ **公式 2 分**

$y_0=1$，$x_0=0$，$x_1=0.1$，$k_1=0$ **(1分)** $k_2=0.1$ **(1分)**, $y_1=1.005$， **(1分)**

真实值1.005025126**(1分)**，误差0.00005025126**(1分)**

$x_2=0.2$ ， $k1:=0.1010025000$ **(1 分)**, $k2:=0.2060857036$ **(1 分)**,

$y_2:=1.020354410$ **(1分)**

真实值 1.020408163 **(1分)** ，误差0.000053753

北京科技大学 2012 年

《科学与工程计算》
研究生考试试题答案

一、填空题(每空题 2 分，共 20 分)

1. $x_1 \approx 1.234$具有4位有效数字，$f(x)=\sqrt{1+2x}$ 则 $f(x_1)$的绝对误差限大致为 <u>0.000268491447</u>.

2. 设 A 是一个5×10的矩阵，B 是一个10×6的矩阵，C 是一个6×5的矩阵，D 是一个5×3的矩阵,根据矩阵乘法结合率，$F=ABCD$ 可按如下公式计算（1）$F=[A(BC)]D$（2）$F=[(AB)(CD)]$ 则公式<u>（2）</u>效率更高，其计算量为<u>480</u>flops。

3.已知向量 $x=(2,3,4)^T$，存在household矩阵H使得 $Hx=(2,5,0)^T$,则H=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$

4..设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 101 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,则$\|A\|_F=$ <u>$\sqrt{10204}$</u>，$cond(\boldsymbol{A})_\infty=$<u>$\frac{102^2}{100}=104.04$</u>。

5. 已知由数据(0,0),(1,2)和(2,y)三点构造出的二次插值多项式中 x^2 的系数为 1,则 y=6 。

注：$N(x)=2x+x(x-1)=x^2+x \qquad y=N(2)=6$

6.按下列数据表构造适合的三次样条插值函数 $S(x)$,，则有 $S'(0)=$<u>-5</u>

x	-1	0	1
y	-1	1	3
y'	4		28

7. 利用积分 $\int_2^8 \frac{1}{x}dx=\ln 4$ 计算 $\ln 4$ 时，要求误差不超过0.5×10^{-5}，若采用复化梯形公式，至少应取<u>950</u>个节点，若采用复化Simpson公式，至少应取<u>103</u>个节点就要使误差超过0.5×10^{-5}

二、**(10 分)用牛顿法求 $f(x)=x^3-2x^2+x-7=0$ 在区间[2,3]内的根，取初始值 $x_0=2.5$，要求误差$<10^{-5}$** 。

解：$f(x)=x^3-2x^2+x-7 \qquad f'(x)=3x^2-4x+1$

迭代公式 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^3-2x_k^2+x_k-7}{3x_k^2-4x_k+1}=\dfrac{2x_k^2(x_k-1)+7}{(3x_k-1)(x_k-1)}$ （2 分）

计算过程 $x_1=2.641025641\quad x_2=2.631150582$

$x_3=2.631099299\ \ x_4=2.631099298$

$x^*\approx 2.631099298$ 每步两分

三、(10 分) 使用 Doolittle 三角分解求解线性方程组

$$\begin{cases}3x_1-x_2+4x_3=7\\-x_1+2x_2-2x_3=-1\\2x_1-3x_2-2x_3=0\end{cases}$$

解：$A=\begin{bmatrix}3&-1&4\\-1&2&-2\\2&-3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1/3&1&0\\2/3&7/5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&4\\0&5/3&-2/3\\0&0&-28/5\end{bmatrix}$

求解 $\begin{bmatrix}1&0&0\\-1/3&1&0\\2/3&7/5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-1\\0\end{bmatrix}$ 得 $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-4/3\\-14/5\end{bmatrix}$ -

求解 $\begin{bmatrix}3&-1&4\\0&5/3&-2/3\\0&0&-28/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-4/3\\-14/5\end{bmatrix}$ 得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1/2\end{bmatrix}$

四、（16分）分别用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法解方程组

$$\begin{pmatrix}20&3&2\\2&15&-3\\1&1&8\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}24\\30\\12\end{pmatrix}$$

精确至2位有效数。初始向量均取 $(1,1,1)^T$

解：Jacobi 迭代格式 $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{24-3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}}{20}\\x_2^{(k+1)}=\dfrac{30-2x_1^{(k)}+3x_3^{(k)}}{20}\\x_3^{(k+1)}=\dfrac{12-x_1^{(k)}-x_2^{(k)}}{8}\end{cases}$

$x_1=(0.950,2.067,1.25)\qquad x_2=(0.765,2.123,1.123)\qquad x_3=(0.769,2.123,1.138)$

$x_3=(0.767,2.125,1.139)$

$X\approx(0.77,2.13,1.139)$

Seideli 迭代格式 $\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{24-3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}}{20} \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{30-2x_1^{(k+1)}+3x_3^{(k)}}{20} \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{12-x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}}{8} \end{cases}$

$x_1=(0.950,2.073,1.122)$ $x_2=(0.777,2.121,1.138)$ $x_3=(0.768,2.125,1.138)$

$x_4=(0.767,2.125,1.138)$

$X\approx(0.77,2.12,1.14)$

五、(10 分) 试求一个不超过 4 次多项式 $p(x)$，使得 $p(0)=0, p'(0)=1, p(1)=1, p'(1)=2, p'(2)=3$。

解：设 $p(x)=p(0)+p'(0)x+ax^2+bx^3+cx^4=x+ax^2+bx^3+cx^4$，

$p'(x)=1+2ax+3bx^2+4cx^3$

$$\begin{aligned} p(1)&=1+a+b+c=1 \\ p'(1)&=1+2a+3b+4c=2 \\ p'(2)&=1+4a+12b+32c=3 \end{aligned} \quad 解得 \quad \begin{aligned} a&=-1.5 \\ b&=2 \\ c&=-0.5 \end{aligned}$$

$p(x)=x-1.5x^2+2x^3-0.5x^4$

七、(12 分) 用最小二乘法求一个形如 $y=a+bx+cx^2$ 的经验公式，使与下列数据相拟合

X	-3	-1	0	2	4
Y	26	25.96	0	15	52.64

解：依题意 设 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,\varphi_2(x)=x^2$

$(\varphi_0,\varphi_0)=5$ $(\varphi_0,\varphi_1)=\sum x_i=2$ $(\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_1,\varphi_1)=\sum x_i^2=30$

$(\varphi_1,\varphi_2)=\sum x_i^3=44$ $(\varphi_2,\varphi_2)=\sum x_i^4=354$ $(\varphi_0,y)=\sum y_i=119.6$

$(\varphi_1, y) = \sum x_i y_i = 136.6 \quad (\varphi_2, y) = \sum x_i^2 y_i = 1162.2$

（每个非 0 系数 1 分，共 8 分）

解方程 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 30 \\ 2 & 30 & 44 \\ 30 & 44 & 354 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119.8 \\ 137.1 \\ 1164.7 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.8 \\ 0.3 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ **方程 1 分，每个解 1 分**

二阶拟合多项式为 $y = 8.8 + 0.3x + 2.5x^2$

八、(12 分)构造求积公式试确定下面求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx C[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)]$$

，使其代数精度尽可能高。(1)给出最高的代数精度（2）使用此公式计算积分 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$，给出其误差。

解：公式若有 3 次代数精度，需有

$$\begin{cases} C(1+1+1) = \int_{-1}^{1} dx = 2 \\ C(x_0 + x_1 + x_2) = \int_{-1}^{1} xdx = 0 \\ C(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} \\ C(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0 \end{cases} \quad \text{（4 分）}$$

解得：$C = \frac{2}{3}, x_0 = 0, x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$（解 2 分）

故求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{2}{3}[f(0) + f(\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(-\frac{\sqrt{2}}{2})]$（1 分）

当 $f(x) = x^4 \quad I(x^4) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq I_2(x^4) = \frac{2}{3}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right] = \frac{1}{3}$ 最高代数精度为 3 （1 分）

（2） $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ （1 分）

$$I_2(\cos x)=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+0^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right]=\frac{14}{9}\qquad(2分)$$

误差 $\frac{\pi}{2}-\frac{14}{9}\approx 0.015242574$ (1分)

九、(12 分)用改进的欧拉方法求解初值问题 $\begin{cases} y'=\frac{1}{1+x^2}-2y^2,\ 0\le x\le 1 \\ y(0)=0 \end{cases}$，取步长 $h=0.25$，计算 $y(0.25), y(0.5)$ 的近似值并与准确值 $y(x)=x/(1+x^2)$ 比较.

解：$k_1=f(x_n,y_n)=\frac{1}{1+x_n^2}-2y_n^2$，$k_2=f(x_{n+1},y_n+k_1h)=\frac{1}{1+x_{n+1}^2}-2(y_n+k_1h)^2$，

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[k_1+k_2]$ **公式 2 分**

$y_0=0$ ，$x_0=0$ ，$x_1=0.25$ ，$k_1=1$ **(1 分)** $k2:=0.8161764706$ **(1 分)**,

$y_1:=0.2270220589$ **(1分)**

真实值0.2352941176**(1分)**，误差0.0082720587**(1分)**

$x_2:=0.50$ ，$x_2=0.2$，$k1:=0.8380984401$ **(1分)**, $k2:=0.4188540118$ **(1分)**,

$y_2:=0.3841411154$ **(1分)**真实值0.4**(1分)** ，误差0.01585588846**(1分)**

北京科技大学 2013 年

《科学与工程计算》

研究生考试试题答案

一、填空题(每空题 2 分，共 20 分)

1. 南北朝科学家祖冲之计算的圆周率的密率为 $\frac{355}{113}$，此近似值具有 7 位有效数字.

解：$x=\frac{355}{133}\doteq 3.14159292035398230088495575221 24$,具有 7 位有效数字。

2.为了提高数值计算精度,应将表达式 $\sqrt{20001}-\sqrt{19999}$ 改写为 $\frac{2}{\sqrt{20001}+\sqrt{19999}}$ 。

3. 写出求解方程组 $\begin{cases}2x_1+0.6x_2+x_3=1\\-0.4x_1+x_2+0.5x_3=1\\-0.2x_1+0.7x_2+x_3=1\end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代公式

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=0.5-0.3x_2^{(k)}-0.5x_3^{(k)}\\x_2^{(k+1)}=1+0.4x_1^{(k+1)}-0.5x_3^{(k)}=1.2-0.12x_2^{(k)}-0.7x_3^{(k)}\\x_3^{(k+1)}=1+0.2x_1^{(k+1)}+0.7x_2^{(k+1)}=0.06+0.024x_2^{(k)}+0.39x_3^{(k)}\end{cases}$$

，迭代矩阵的行范数为 0.82，

4. $f(-1)=-1, f(2)=2, f(3)=1$，则过这三点的二次插值多项式中 x^2 的系数为 -0.5，牛顿插值多项式为 $-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1$。

答案：$L_2(x)=x+\alpha(x+1)(x-2)\quad L_2(3)=3+4\alpha=1\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$

$L_2(x)=x-\frac{1}{2}(x+1)(x-2)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1$

5. 设函数 $p(x)=x^3+qx^2+rx+s$，若 $p[1,2,t]=1$，那么 $p[2,3,t]=$ 3 。

解: $p[1,2,3,t]=1=\frac{p[2,3,t]-p[1,2,t]}{3-1}$

6．用二分法求方程 $f(x)=x^3+x-1=0$ 在区间[0,1]内的根,进行两步后根的所在区间为 [0.5，0.75]

7. 数值积分公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\frac{2}{9}\left[f(-1)+8f(0)+f'(1)\right]$ 的代数精度为 2。

8. 已知如下分段函数为三次样条，

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}+Ax & x\le -1\\ 2+2x+Bx^2+\dfrac{1}{2}x^3 & -1\le x<0\\ 2+2x+Cx^2-x^3 & 0\le x<1\end{cases}$$

则 A= <u>1/2</u>，B= <u>3/2</u>，C= <u>3/2</u>

二、**(10 分)** 方程 $x^3-x^2-1=0$ 在区间[1.4,1.6]有根 x^*，首先讨论迭代格式（1）

$x_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x_k-1}}$ （2） $x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k^2+1}$（3） $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^3-x_k^2-1}{3x_k^2-2x_k}$ 的收敛性；

若收敛则取迭代格式计算 2 步,取初始值 $x_0=1.5$

解：(1) $\phi(x)=(x-1)^{-1/2},\ \phi'(x)=-1/2(x-1)^{-3/2}$,

$|\phi'(x)|\ge\phi'(1.6)=1.076>1,\quad \forall x\in[1.4,1.6]$ 所以，迭代 $x_{k+1}=(x_k-1)^{-\frac{1}{2}}$ 不收敛；

(2)

$\phi(x)=(x^2+1)^{1/3},\ \phi'(x)=2x/3(x^2+1)^{2/3},\phi''(x)=(6-2x^2)/27(x^2+1)^{5/3}>0,$

$|\phi'(x)|\le\phi'(1.6)=0.4575045227<1,\quad \forall x\in[1.4,1.6]$ 所以，迭代 $x_{k+1}=(x_k^2+1)^{\frac{1}{3}}$ 收敛；

(3) $\phi(x)=x-\dfrac{x^3-x^2-1}{3x^2-2x},\ \phi'(x)=\dfrac{(x^3-x^2-1)(6x-2)}{\left(3x^2-2x\right)^2}$

在零点处 $\phi'(x)=0$, 所以其局部收敛

$x_0=1.5,x_1=\dfrac{22}{15}\approx1.46666667,x_2=\dfrac{17441}{11880}\approx1.465572391$

三、(10 分) 使用 Dolittle 三角分解求解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=7\\ -x_1-3x_2+4x_3+x_4=-10\\ -2x_2+7x_3+7x_4=-4\\ x_1+2x_2-11x_3-14x_4=2\end{cases}$$

解：$A=\begin{pmatrix}1&&&\\-1&1&&\\0&2&1&\\1&0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\&-1&2&1\\&&3&5\\&&&1\end{pmatrix}\quad y=\begin{pmatrix}7\\-3\\2\\1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$

四、（10 分）用 SOR 方法解下列方程组（取松驰因子 $\omega=1.2$ ）,要求 $\left\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right\|_\infty<10^{-2}$.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 4x_2 = 5 \end{cases}.$$

解：SOR 方法

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{\omega}{a_{11}}(b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{\omega}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)})$$

$$a_{11} = 2, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = -4, b_1 = 1, b_2 = 5, \omega = 1.2$$

故 $x_1^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} - 0.6x_2^{(k)} + 0.6$， $x_2^{(k+1)} = -0.2x_2^{(k)} + 0.3x_1^{(k+1)} - 1.5$

迭代初值 $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0.000000	0.000000
1	0.6000000	-1.320000
2	1.2720000	-0.854400
3	0.858240	-1.071648
4	1.071341	-0.964268
5	0.964293	-1.017859
6	1.017857	-0.991071
7	0.991071	-0.997768
8	1.004464	-0.997768
9	0.997768	-1.001116
10	1.001116	-0.999442

$$\left\| x^{(16)} - x^{(15)} \right\|_\infty = 0.000052 < 10^{-4}$$

$$x_1 = x_1^{(16)} = 1.000017$$

$$x_2 = x_2^{(16)} = -0.999991$$

五、(10 分) α, β 为 n 维向量，$\alpha \neq \beta$，但 $\|\alpha\|_2 = \|\beta\|_2$，，证明存在合适的 household 矩阵 H，使得 $H\alpha = \beta$ 。

解：

$$\text{令}\quad \omega=\frac{\alpha-\beta}{\|\alpha-\beta\|},\ H=E-2\omega\omega^T$$

$$\begin{aligned}H(\alpha)=H\alpha&=\left(E-2\omega\omega^T\right)\alpha=\alpha-2\omega\omega^T\alpha\\&=\alpha-2\frac{\alpha-\beta}{\|\alpha-\beta\|}\frac{\alpha^T-\beta^T}{\|\alpha-\beta\|}\alpha\\&=\alpha-2(\alpha-\beta)\frac{\left(\alpha^T\alpha-\beta^T\alpha\right)}{\|\alpha-\beta\|^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\alpha-\beta\|^2&=(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\\&=2\left((\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)\right)\\&=2\left(\alpha\alpha^T-\beta^T\alpha\right)\end{aligned}$$

$$\therefore H(\alpha)=\alpha-(\alpha-\beta)=\beta.$$

六、**(10 分)** 给出概率积分

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$$

的数据表：试用二次插值计算 $f(0.472)$.

X	0.46	0.47	0.48	0.49
f(*x*)	0.4846555	0.4937542	0.5027498	0.5116683

解：取插值节点：

$$x_0=0.46\qquad x_1=0.47\qquad x_2=0.48$$

$$\begin{aligned}L_2(x)&=\sum_{i=0}^{2}y_i l_i(x)\\&=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\end{aligned}$$

$$L_2(0.472)=0.4955616$$

$$f(0.472)=L_2(0.472)=0.4955616$$

七、(10 分) 用最小二乘法求一个形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式，使与下列数据相拟合

X	19	25	31	38	44
Y	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解：依题意 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x^2$ $(\varphi_0,\varphi_0)=5$ $(\varphi_0,\varphi_1)=5327$ $(\varphi_1,\varphi_1)=7277699$

$(\varphi_0,y)=271.4$ $(\varphi_1,y)=369321.5$

法方程为 $\begin{cases} 5a+5327b=271.4 \\ 5327a+7277699b=369321.5 \end{cases}$

解得 $a=0.9725786569, b=0.05003512422$

故拟合曲线为 $y=0.9725786569+0.05003512422x^2$

八、(10 分) 分别用复合梯形公式及复合 Simpson 公式计算

$$\int_1^2 \frac{x}{\ln(x+1)}dx, \text{(均取 6 等分区间).}$$

注：各步骤保留 5 位有效数字即可。

解：(1) 用复合梯形公式 $a=1,b=2,h=\frac{1}{6}$ 故 $N=6$ $f(x)=\frac{x}{\ln(x+1)}$

$$f(1)=1.4427, f(\frac{7}{6})=1.5089, f(\frac{8}{6})=1.5736, f(\frac{9}{6})=1.6370,$$
$$f(\frac{10}{6})=1.6992, f(\frac{11}{6})=1.7604, f(2)=1.8205$$

$$\int_1^2 \frac{x}{\ln(x+1)}dx \approx \frac{1}{12}[f(a)+f(b)+2\sum_{n=1}^{5}f(x_n)]=1.6351167$$

(2) 用复合 Simpson 公式：

$$\int_1^2 \frac{x}{\ln(x+1)}dx \approx \frac{1}{18}[f(1)+4f(\frac{7}{6})+2f(\frac{8}{6})+4f(\frac{9}{6})+2f(\frac{10}{6})+4f(\frac{11}{6})+f(2)]\approx 1.6344$$

九、(10 分)用改进的欧拉方法求解初值问题

$$\begin{cases} u'(t)=0.09u(1-u/20)-0.45uv \quad u(0)=1.6 \\ v'(t)=0.06v(1-v/15)-0.001uv \quad v(0)=1.2 \end{cases}$$

取 t 的步长 $h=1$，计算 $u(1),v(1),u(2),v(2)$ 的近似值

解: $\begin{cases} f(u,v)=0.09u(1-u/20)-0.45uv \\ g(u,v)=0.06v(1-v/15)-0.001uv \end{cases}$

$$k_1=\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(u_n,v_n) \\ g(u_n,v_n) \end{pmatrix},\ k_2=\begin{pmatrix} f(u_n+hk_{11},v_n+hk_{12}) \\ g(u_n+hk_{11},v_n+hk_{12}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}+\frac{h}{2}[k_1+k_2]$$

第一步: $k11$:= -0.7315200000 $k12$:= 0.06432000000 $k21$:= -0.4193474439
$k22$:= 0.06836714312 u_1 := 1.024566278 v_1 := 1.266343572

第二步: $k11$:= -0.4963666613 , $k12$:= 0.06826865723 , $k21$:= -0.2709412618
$k22$:= 0.07224703286 , u_2 := 0.6409123165 , v_2 := 1.336601417

北京科技大学 2014 年《计算方法》

一、填空题(每空题 2 分，共 20 分)

1. 数值 $x_1=-3.14, x_2=0.01, x_3=0.10$ 均为四舍五入得到，那么 $x_1+x_2+x_3$ 的相对误差限约为 **0.00495** 注：$\left|\dfrac{0.005\times 3}{-3.14+0.01+0.10}\right|\approx 0.495\%$

2. 设 A 是一个 6×3 的矩阵，B 是一个 3×8 的矩阵，C 是一个 8×2 的矩阵，D 是一个 2×7 的矩阵, 根据矩阵乘法结合率，$F=ABCD$ 可按如下公式计算

（1）$F=\left[A(BC)\right]D$　　（2）$F=\left[(AB)(CD)\right]$

其中计算量较小的是公式 **（1）**，其计算量为 **168**flops

3.设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&4&3\\1&2&8\\4&8&1\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1$=**14**，$\|A\|_\infty$=**13**。

4. 使用弦截法求解方程 $x+\cos x=2$ 的迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k+\cos x_k-2)(x_k-x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}+\cos x_k-\cos x_{k-1}}$$

5．已知函数 $f(-1)=-5, f(0)=0, f(1)=7$,用此函数表作拉格朗日插值多项式，进而求出 $x=1$ 处的导数值 $f'(1)$ 的近似值为.**8**。注：$L_2(x)=6x+x^2, L_2'(x)=6+2x, L_2'(1)=8$

6. 已知 $f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}$，那么 $f[0,1,2,3]=$**3** 。

7．向量 $x=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ 可使用 household 矩阵 $H=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}11&-10&-2\\-10&-10&-5\\-2&-5&14\end{pmatrix}$ 变换得 $Hx=\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$.

注：$U=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}, H=I-2\dfrac{UU^T}{\|U\|_2^2}=I-\dfrac{2}{30}\begin{pmatrix}4&10&2\\10&25&5\\2&5&1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix}11&-10&-2\\-10&-10&-5\\-2&-5&14\end{pmatrix}$

8. 设 $S(x)=\begin{cases}x^3+ax^2+bx+1 & -1\le x<0\\ x^3+4x+1 & 0\le x\le 1\end{cases}$ 是[-1, 1]上的三次样条函数，那么 a=**0**

二、 (10 分) 用矩阵的直接三角分解法求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 30 \end{bmatrix}$$

解：$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ & 2 & -2 \\ & & 9 \end{bmatrix}$ (分解 6 分,LU 各三分)

解 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} y=\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 30 \end{bmatrix}$ 得 $y=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ (2 分)

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ & 2 & -2 \\ & & 9 \end{bmatrix} x=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ 得 $x=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 55 \\ 26 \\ 8 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 6.1111 \\ 2.8889 \\ 0.8889 \end{bmatrix}$ (2 分)

三、(10 分)设有方程组 $\begin{bmatrix} \mathrm{a} & -1 & -3 \\ -1 & \mathrm{a} & -2 \\ 3 & -2 & \mathrm{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

当参数 a 满足什么条件时，雅可比迭代法对任意的初始向量都收敛

解：Jacobi 迭代法的迭代矩阵为 $B_J=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{3}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{2}{a} \\ -\frac{3}{a} & \frac{2}{a} & 0 \end{pmatrix}$ (3 分)

$$\left|\lambda I-B_J\right|=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{a} & -\frac{3}{a} \\ -\frac{1}{a} & \lambda & -\frac{2}{a} \\ \frac{3}{a} & -\frac{2}{a} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3+\frac{4}{a^2}\lambda \text{ (3 分)}$$

谱半径 $\rho\left(B_J\right)=\left|\frac{2}{a}\right|<1$ (2 分) ，

得 $|a|>2$ 时雅可比迭代法对任意的初始向量都收敛。(2 分)

四、(20 分)已知连续函数 $y=f(x)$ 的如下数据

x_i	－1	0	1	2
y_i	－1.1	-0.5	0.9	1.9

构造其三阶 Newton 插值多项式 $N(x)$，再使用牛顿法求解方程 $N(x)=0$ 在区间（0，1）内根的近似解。（取 $x_0=0.5$，迭代 2 步，结果仅需精确到小数点后 4 位）

解：**第一步**

首先构造差商表：(三个 1 阶差商各 1 分,2 阶差商\3 阶差商各 2 分,全对 9 分)

x	f(x)			
-1	-1.1			
0	-0.5	0.6		
1	0.9	1.4	0.4	
2	1.9	1.0	-0.2	-0.2

得到牛顿插值多项式(3 分)

$$N(x)=-1.1+0.6(x+1)+0.4(x+1)x-0.2(x+1)x(x-1)=-0.5+1.2x+0.4x^{2}-0.2x^{3}$$

第二步：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{-0.5+1.2x_k+0.4x_k^2-0.2x_k^3}{1.2+0.8x_k-0.6x_k^2}$$ **(3 分)** **取初始值** $x_0=0.5$

有 $x_1=0.3793103448, x_2=0.3780343843$ **(每步 2 分)**

$f(x)=0$ 的解约为 0.378034（1 分）

五、(10 分) 已知 $f(x)$ 有如下的数据

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	4	12
$f'(x_i)$		3	

试写出满足插值条件 $P(x_i)=f(x_i)$ 以及 $P'(2)=f'(2)$ 的插值多项式 $P(x)$，并写出误差的表达形式。

解：待定系数法 1：$P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$

$P(1)=a+b+c+d=2 \qquad P(2)=a+2b+4c+8d=4$

$P(3)=a+3b+9c+27d=12$　　$P'(3)=b+4c+12d=3$（每个方程 1 分, 共 4 分）

解得 $a=-6, b=15.c=-9, d=2$　（每个系数 1 分, 共 4 分）

$P(x)=2x^3-9x^2+15x-6$（1 分）

$R(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)(x-2)^2(x-3)$　（1 分）

待定系数法 2：$P(x)=4+3(x-2)+c(x-2)^2+d(x-2)^3$　　（2 分）

$P(1)=4-3+c-d=2$（1 分）　$P(3)=4+3+c+d=12$（1 分）

解得 $c=3, d=2$　（每个系数 1 分, 共 2 分）

$P(x)=4+3(x-2)+3(x-2)^2+2(x-2)^3=2x^3-9x^2+15x-6$（2 分）

$R(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)(x-2)^2(x-3)$（2 分）

差商法：(每个差商各 1 分,全对 6 分)

x	***f(x)***			
1	***2***			
2	***4***	***2***		
2	***4***	***3***	***1***	
3	***12***	***8***	***5***	***2***

$P(x)=2+2(x-1)+(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-2)^3=2x^3-9x^2+15x-6$（2 分）

$R(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)(x-2)^2(x-3)$（2 分）

六、(10 分)已知一组实验数据，求它的二次拟合多项式。

x_i	1	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	10	5	4	2	1	1	2	3	4

计算中间数值及结果保留 5 位小数。

解：设拟合多项式为 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$

则由条件得到正规方程组$\begin{pmatrix} 9 & 53 & 381 \\ 53 & 381 & 3017 \\ 381 & 3017 & 25317 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 \\ 147 \\ 1025 \end{pmatrix}$ (每个系数 1 分,共 8 分)

于是$a_0=13.45966, a_1=-3.60531, a_2=0.26757$.(2 分,错一个得 1 分,错 2 个以上不得分)

所以所求的拟合多项式为$y=13.45966-3.60531x+0.26757x^2$

漏掉 x=1 点后

则由条件得到正规方程组$\begin{pmatrix} 8 & 52 & 380 \\ 52 & 380 & 3016 \\ 381 & 3016 & 25316 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 22 \\ 137 \\ 1015 \end{pmatrix}$ (每个系数 1 分,共 8 分)

于是$a_0=14.25, a_1=-3.85714, a_2=0.28571$.(2 分,错一个得 1 分,错 2 个以上不得分)

所以所求的拟合多项式为$y=14.25-3.85714x+0.28571x^2$

七、(10 分) 用改进的欧拉方法求解初值问题

$$\begin{cases} y'=x^2+x-y \\ y(0)=0 \end{cases} (0\le x\le 0.3)$$

取步长h=0.1，计算$y(0.5)$，并与准确值$y=-e^{-x}+x^2-x+1$比较．计算过程中数值保留 5 位小数。

解：建立改进欧拉的迭代公式

$$y_{n+1}=y_n+0.05x[(x_n{}^2+x_n-y_n)+x_{n+1}2+x_{n+1}-(y_n+0.1(x_n{}^2+x_n-y_n))]$$

$=y_n+0.05x(1.9x_n{}^2+2.1x_n-1.9y_n+0.11)$ n=0,1,2,3,4 (1 分)

迭代计算如下：

x_n	y_n	$y(x_n)$	误差	
0.1	0.00550	0.00516	-0.0034	(3 分)
0.2	0.02193	0.02127	-0.0066	(3 分)
0.3	0.05015	0.04918	-0.0097	(3 分)

八、(10 分) 设有积分$I=\int_0^1 x^2e^x dx$

1）取 7 个等距节点（包括端点 0 和 1），列出被积函数在这些节点上的函数值表（小数点后保留 6 位）;

2）用复化 simpson 公式求该积分的近似值，并由截断误差公式估计误差大小。

解：1）数值5分,除两端点外其他各1分

x	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
y	0	0.032816	0.155068	0.412180	0.865660	1.597900	2.718282

2) $$S_3=\frac{1}{18}\left(f\left(0\right)+4f\left(\frac{1}{6}\right)+2f\left(\frac{1}{3}\right)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{2}{3}\right)+4\left(\frac{5}{6}\right)+f(1)\right)\approx 0.718407$$

(公式2分,结果1分)

误差 $R=-\frac{\left(b-a\right)^5}{180n^4}f^{(4)}\left(\xi\right)=\frac{-1}{233280}e^{\xi}\left(12+8\xi+\xi^2\right)$

$$\frac{-1}{233280}e\left(12+8+1\right)\le R\le\frac{-12}{233280}\approx -0.00005144032922$$

$-0.0002447012962\le R\le -0.00005144032922$ (误差 2 分)

注：实际误差=$e-2-0.718407\approx$ -0.000125172

北京科技大学 2015 年

《科学与工程计算》

研究生考试试题答案暨评分标准

一、填空题(每小题 2 分，共 20 分)

1. $x\approx 3.1415$ 为圆周率 π 的近似值具有4位有效数字，$\sqrt{1+2x}$ 作为 $\sqrt{1+2\pi}$ 的近似值，其

绝对误差限大致为-0.00003. (各 1 分,共 2 分)

2. 为了使计算 $y=4+\frac{3}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$ 的乘除法次数尽量地少，应将该表达式改写

为 $t=\frac{1}{x-1}, y=((t+2)t+3)t+4$。 (2分)

3. 设 A 是一个 3×10 的矩阵，B 是一个 10×5 的矩阵，C 是一个 5×7 的矩阵，D 是一个 7×2 的矩阵,根据矩阵乘法结合率，$F=ABCD$ 可按如下公式计算（1）$F=[A(BC)]D$（2）$F=[(AB)(CD)]$ 则公式（2）效率更高，其计算量为 320flops。 (各 1 分,共 2 分)

10*5*7+3*10*7+3*7*2=502   3*10*5+5*7*2+3*5*2=320

4.已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}7&5&8\\-2&4&6\\4&-2&0\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_1=$**14**，$\|A\|_\infty=$**20**。(各 1 分,共 2 分)

5. 已知函数f(1)=2, f(2)=3 , f(4)=6,用此函数表作牛顿插值多项式，那么插值多项式 x^2 的系数是 $\frac{1}{6}$,一次项 x 的系数为 $\frac{1}{2}$。(各1分,共2分)

注：$N(x)=x+1+C(x-1)(x-2)$ $N(4)=5+6C=6$

6．已知向量 $x=(4,3,2)^T$，存在 household 矩阵 H 使得 $Hx=(5,0,2)^T$,则

H= $\begin{pmatrix}0.8&0.6&0\\0.6&-0.8&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (2 分)

$$u=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$H=I-2\frac{uu^T}{\|u\|_2^2}=I-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.6 & 0\\0.6 & -0.8 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

7.按下列数据表构造适合的三次样条插值函数 $S(x)$,，则有 $S'(0)=$ $\underline{-3}$ (2 分)

x	-1	0	1
y	2	3	1
y'	4		5

注：m关系式 $\frac{1}{2}\times 4+2m_1+\frac{1}{2}\times 5=3\left(\frac{1}{2}\frac{3-2}{0+1}+\frac{1}{2}\frac{1-3}{0+1}\right)$ 得到 $m_1=-3$

8．利用积分 $\int_1^3\frac{1}{x}dx=\ln 3$ 计算，采用复化 Simpson 公式，至少应取 56 等分节点就可使误差不超过 0.5×10^{-6} (2 分)

$$f=\frac{1}{x},f^{(4)}=-\frac{24}{x^5},M_4=24,\frac{(3-1)^5}{180n^4}M_4\le 0.5\times 10^{-6},n^4\ge\frac{25600000}{3},n\ge 54.04$$

9. 求解初值问题 $\frac{dy}{dx}=-40\left(x^3+y\right),y\left(0\right)=1$ 时，若用改进欧拉方法的绝对稳定域中步长 h 不超过.0.05

,4 级 4 阶 RK 方法的绝对稳定域中步长 h 不超过.0.07(精确到 0.01 水平).

10. **求解方程组** $\begin{cases}4x_1+3x_2=1\\x_1+4x_2=0\end{cases}$ **的高斯—塞德尔迭代格式为**

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1-3x_2^{(k)}}{4}\\x_2^{(k+1)}=\frac{-x_1^{(k+1)}}{4}=\frac{3x_2^{(k)}-1}{16}\end{cases}$$，**该迭代格式的迭代矩阵的谱半径** $\rho=\frac{3}{16}$。(各 1 分,共 2 分)

二、**(10 分)用牛顿法求** $f(x)=x^3-3x^2+4x-5=0$ **在区间[2,3]内的根，取初始值** $x_0=2.5$，**要求误差** $<10^{-5}$ 。

解：$f(x)=x^3-3x^2+4x-5$ $\qquad f'(x)=3x^2-6x+4$

迭代公式 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^3-3x_k^2+4x_k-5}{3x_k^2-6x_k+4}=\dfrac{2x_k^3-3x_k^2+5}{3x_k^2-6x_k+4}$ （2 分）

计算过程 $x_1:=2.258064516$，$x_2:=2.214705331$，$x_3:=2.213412787$，$x_4:=2.213411663$

$x^*\approx 2.213411663$ 每步两分(精确到万分位即可)

三、(10 分) 利用矩阵的 Dolittle *LU* 分解法解方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14\\2x_1+5x_2+5x_3=27\\3x_1+6x_2+7x_3=36\end{cases}$。

答案：$A=\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\&1&-1\\&&-2\end{pmatrix}$ （6 分,L 和 U 各 3 分,错一个数字扣一分,扣完为止）

解 $\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\3&0&1\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}14\\27\\36\end{pmatrix}$ 得 $y=\begin{pmatrix}14\\-1\\-6\end{pmatrix}$，（2 分）$\begin{pmatrix}1&2&3\\&1&-1\\&&-2\end{pmatrix}x=y$，得 $x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$．（2 分）

四、（15 分）**用 Jacobi 迭代解线性方程组** $\begin{cases}5x_1+x_2+2x_3=22\\2x_1+4x_2+x_3=18\\x_1+2x_2+4x_3=11\end{cases}$，

给出迭代格式与迭代矩阵，说明上述迭代是否收敛，并使用收敛迭代公式计算 4 步，每步结果保留 5 位小数。取初始值 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$ **。**

解：

迭代格式

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{5}\left(22-x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}\right)\\[2ex] x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}\left(18-2x_1^{(k)}-x_3^{(k)}\right)\\[2ex] x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}\left(11-x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}\right)\end{cases}$$ （3 分）

迭代矩阵

$$B_J=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{4}\\-\frac{2}{4}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$ （2 分）

原系数矩阵为严格对角占优矩阵（或$\|B_J\|_1=0.75<1$或$\|B_J\|_\infty=0.75<1$），迭代收敛。

（2 分）

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1	1	1
1	3.82	3.75	2
2	2.85	2.125	2.85
3	3.65	3.234375	1.8125
4	3.028125	2.4296875	1.03515625

迭代每步2分,错一个数字扣一分,错两个或三个扣2分

五、(10 分) 试求一个不超过 4 次多项式 $p(x)$，使得 $p(0)=1, p'(0)=2, p(1)=3, p'(1)=4, p(2)=5$。

解：**方法 1：待定系数法 1**

设 $p(x)=p(0)+p'(0)x+ax^2+bx^3+cx^4=1+2x+ax^2+bx^3+cx^4$ **(2 分)**

$p'(x)=2+2ax+3bx^2+4cx^3$ **(1 分)**

$$\begin{aligned}&p(1)=1+2+a+b+c=3\\&p'(1)=2+2a+3b+4c=4\\&p(2)=1+8+4a+8b+16c=5\end{aligned}$$ **方程 3 分,一个一分**

解得 $\begin{aligned}&a=-4\\&b=6\\&c=-2\end{aligned}$ **解 3 分,一个一分**

$p(x)=1+2x-4x^2+6x^3-2x^4$ **(1 分)**

方法 2：**待定系数法 2**

满足前 4 项的三次多项式为（Hermite 插值多项式公式）

$$H_3(x)=\left(1-2\frac{x-0}{0-1}\right)\left(\frac{x-1}{0-1}\right)^2+3\left(1-2\frac{x-1}{1-0}\right)\left(\frac{x-0}{1-0}\right)^2+2\left(x-0\right)\left(\frac{x-1}{0-1}\right)^2+4\left(\frac{x-0}{1-0}\right)^2$$ **(**

$=1+2x-2x^2+2x^3$

6 分)

则 $p(x)=H_3\left(x\right)+\alpha x^2(x-1)^2=1+2x-2x^2+2x^3+\alpha x^2(x-1)^2$ **(2 分)**

由 $p(2)=13+4\alpha=5$　　知 $\alpha=-2$　　**(1 分)**

故 $p(x)=1+2x-2x^2+2x^3-2x^2(x-1)^2=1+2x-4x^2+6x^3-2x^4$ **(1 分)**

方法 3：基函数法

$$p(x)=a(x)+2b(x)+3c(x)+4d(x)+5e(x)$$

其中基函数要求为

a(0)=1	a’(0)=0	a(1)=0	a’(1)=0	a(2)=0
b(0)=0	b’(0)=1	b(1)=0	b’(1)=0	b(2)=0
c(0)=0	c’(0)=0	c(1)=1	c’(1)=0	c(2)=0
d(0)=0	d’(0)=0	d(1)=0	d’(1)=1	d(2)=0
e(0)=0	e’(0)=0	e(1)=0	e’(1)=0	e(2)=1

可得到 $a(x)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}x\right)\left(x-1\right)^2(x-2),\quad b(x)=-\frac{1}{2}x\left(x-1\right)^2(x-2),$

$c(x)=x^2(x-2)^2,\quad d(x)=-x^2\left(x-1\right)(x-2),\quad d(x)=\frac{1}{4}x^2\left(x-1\right)^2$

每个基函数 2 分.

所以 $p(x)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}x\right)\left(x-1\right)^2(x-2)-x\left(x-1\right)^2(x-2)$

$+3x^2\left(x-2\right)^2-4x^2\left(x-1\right)\left(x-2\right)+\frac{5}{4}x^2\left(x-1\right)^2=1+2x-4x^2+6x^3-2x^4$

方法 4：newton 插值

X	Y	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	1				
0	1	2			
1	3	2	0		

1	**3**	**4**	**2**	**2**	
2	**5**	**2**	**-2**	**-2**	**-2**

差商表一阶差商一个 0.5 分,其他差商各 1 分

所以 $p(x)=1+2x+2x^2(x-1)-2x^2(x-1)^2=1+2x-4x^2+6x^3-2x^4$ **(2 分)**

六、(10 分) 已知

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	3	2	6	18	34

求 $f(x)$ 的二次拟合曲线 $p_2(x)$，并用此多项式估计 $f'(1)$ 的近似值。

解： $p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

法方程为 $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 15 \\ 5 & 15 & 35 \\ 15 & 35 & 99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 61 \\ 141 \\ 387 \end{pmatrix}$ **(4 分,每个系数 0.5 分)**

解得 $a_0=\frac{9}{5},a_1=\frac{9}{5},a_2=3$ **(3 分,各 1 分)**

$p_2(x)=\frac{9}{5}+\frac{9}{5}x+3x^2$ **(2 分)** $p_2'(x)=\frac{9}{5}+6x$

$f'(1)\approx p_2'(1)=\frac{9}{5}+6=\frac{39}{5}=7.8$ **(1 分)**

七、(15 分) 请用复合 Simpson 公式计算 $\int_1^2 f(x)dx$ 的近似值 S_2、S_4 和 S_8，并使用外推法外推二次，得到更精确的近似值. 已知部分函数值如下

x	1	1.125	1.25	1.375	1.5	1.625	1.75	1.875	2.00
f(x)	2.7183	2.1503	1.7551	1.4779	1.2840	1.1510	1.0645	1.0157	1

计算结果保留五位有效数字

解: $S_2=\frac{2-1}{6}[f(1)+4f(1.5)+f(2)]=\frac{1}{6}(2.7183+4\times1.2840+1)$=1.475716667 **(3 分)**

$$S_4=\frac{1}{12}\left[f(1)+4f(1.25)+2f(1.5)+4f(1.75)+f(1)\right]=1.463725$$ （3 分）

$$S_8=\frac{1}{24}\left[f(1)+4f\left(\frac{9}{8}\right)+2f\left(\frac{5}{4}\right)+4f\left(\frac{11}{8}\right)+2f\left(\frac{3}{2}\right)+4f\left(\frac{13}{8}\right)+2f\left(\frac{7}{4}\right)+4f\left(\frac{15}{8}\right)+f(1)\right]$$
$$=1.4627125$$

（3 分）

S_{2n}的误差主项为$O\left(h^4\right)$，所以外推公式为$C_2=S_4+\dfrac{S_4-S_2}{15}=1.462925556$ （2 分）

$C_4=S_8+\dfrac{S_8-S_4}{15}=1.462645$ （2 分） $R_2=C_4+\dfrac{C_4-C_2}{63}=1.462640545$

（2 分）

八、(10 分）用二步法

$$y_{n+1}=\alpha y_n+\beta y_{n-1}+h\left[\gamma f\left(x_n,y_n\right)+(1-\gamma)f\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\right]$$

求解常微分方程的初值问题$\begin{cases}y'(x)=f\left(x,y(x)\right)\\ y\left(x_0\right)=y_0\end{cases}$时，如何选择参数$\alpha,\beta,\gamma$使方法阶数尽可能高，并求此时局部截断误差主项和确定该方法的阶。

解：

$$R=y\left(x_{n+1}\right)-y_{n+1}=y\left(x_n\right)+hy'\left(x_n\right)+\frac{h^2}{2}y''\left(x_n\right)+\frac{h^3}{6}y'''\left(x_n\right)+o\left(h^3\right)$$
$$-\alpha y\left(x_n\right)-\beta\left(y\left(x_n\right)-hy'\left(x_n\right)+\frac{h^2}{2}y''\left(x_n\right)-\frac{h^3}{6}y'''\left(x_n\right)+o\left(h^3\right)\right)$$
$$-h\gamma y'\left(x_n\right)-h(1-\gamma)\left(y'\left(x_n\right)-hy''\left(x_n\right)+\frac{h^2}{2}y'''\left(x_n\right)+o\left(h^2\right)\right)$$
$$=(1-\alpha-\beta)y\left(x_n\right)+h(1+\beta-1)y'\left(x_n\right)+(1-\beta+2-2\gamma)\frac{h^2}{2}y''\left(x_n\right)$$
$$+(1+\beta+3-3\gamma)\frac{h^3}{6}y'''\left(x_n\right)+o\left(h^3\right)$$

泰勒展开 y[n+1]的 2 分,y[n-1]2 分,f[n-1]的 1 分

令$1-\alpha-\beta=1+\beta-1=1-\beta+2-2\gamma=0$ 得$\alpha=1,\beta=0,\gamma=\dfrac{3}{2}$（3 分，每个系

数 1 分）

$R=\frac{5h^3}{12}y'''(x_n)+o(h^3)$ **，主项：**$\frac{5h^3}{12}y'''(x_n)$，**（1 分） 该方法是二阶的。（1 分）**

北京科技大学 2016 年《计算方法》

一、填空题(每小题 2 分，共 20 分)

1. 为了减少运算次数, 应将表达式 $x^5+17x^4+18x^3-14x^2-13x-15$ 改写为 $((((x+17)+18)x-14)x-13)x-15$.

2. 用二分法求方程 $f(x)=2x^3-5x-1=0$ 在区间 $[1,3]$ 内的根, 进行一步后根所在区间为 $[1,2]$, 进行二步后根所在区间为 $[1.5,2]$.

3. 设 A 是一个 5×2 的矩阵， B 是一个 2×3 的矩阵， C 是一个 3×6 的矩阵， D 是一个 6×4 的矩阵, 根据矩阵乘法结合率， $F=ABCD$ 可按如下公式计算

（1） $F=\left[A(BC)\right]D$ （2） $F=\left[(AB)(CD)\right]$

其中计算量较小的是公式 **（2）**，其计算量为 **162** flops

4.设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 6\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1$ =**9**， $\|A\|_\infty$ =**11**。

5. 求 $f(x)=0$ 有 m 重根时，牛顿迭代公式中的迭代格式应为 $x_{n+1}=x_n-m\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

6. 当 *x*=-1,0,1 时，对应的函数值分别为 *f*(-1)=0，*f*(0)=2，*f*(1)=10，则 *f*(*x*)的拉格朗日插值多项式是 $L_2(x)=2+5x+3x^2$ 。

7. 设 $f(x)=5x^3-x^2+3$， 求差商 $f[0,1]=$ **4**, $f[7,6,3,5]=$ **5**。

8．向量 $x=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ 可使用 household 矩阵 $H=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 变换得 $Hx=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$.

注：

$$U=\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}, H=I-2\frac{UU^T}{\|U\|_2^2}=I-\frac{2}{24}\begin{pmatrix}16 & -8 & 8\\ -8 & 4 & -4\\ 8 & -4 & 4\end{pmatrix}=I-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ -2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

9. 若函数

$$S(x)=\begin{cases}x^3, & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+1, & 1<x\le 3\end{cases}$$

为一个三次样条函数，则 $a=$ 1.5 ， $b=$ 2 .

10. 应用圆盘定理说出矩阵 $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 9\end{pmatrix}$ 的特征值所在区域为

$|\lambda+3|\le 1, |\lambda-2|\le 2, |\lambda-9|\le 4$

二、 (10 分)求解线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 4\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}4\\ -6\\ -1\end{pmatrix},$$

(1)求矩阵 A 的 Doolittle 分解，即分解成 $A=LU$ 的形式，其中 L 为单位下三角矩阵，U 为上三角矩阵；

(2)利用上述分解求解方程组 $Ax=b$.

解：$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 4\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ 分解6分,LU各三分)

解 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}y=\begin{pmatrix}4\\ -6\\ -1\end{pmatrix}$ 得 $y=\begin{bmatrix}4\\ -10\\ 9\end{bmatrix}$ (2 分)

解 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}4\\ -10\\ 9\end{bmatrix}$ 得 $x=\begin{bmatrix}10/3\\ -16/3\\ 3\end{bmatrix}$ (2 分)

三、(12 分) 设有方程组 $\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\ 6\\ 2\end{bmatrix}$

使用 Gauss-Seidel 迭代法求解此方程，给出迭代格式和迭代矩阵，并采用初始值 $x_0=[0,0,0]'$ 迭代计算 2 步

解：Gauss-Seidel 迭代格式
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{11 - x_3^{(k)}}{4} = \dfrac{11}{4} - \dfrac{1}{4}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{6 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}}{4} = \dfrac{13}{16} - \dfrac{3}{16}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{2 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{5} = -\dfrac{69}{80} + \dfrac{11}{80}x_3^{(k)} \end{cases}$$
（3 分）

迭代矩阵为 $B_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\dfrac{3}{16} \\ 0 & 0 & \dfrac{11}{80} \end{pmatrix}$ （3 分）

$x_0 = [0,0,0]'$ $\quad x_1 = \left[\dfrac{11}{4}, \dfrac{13}{16}, -\dfrac{69}{80}\right]' = [2.75, 0.8125, -0.8625]'$ （3 分）

$x_2 = \left[\dfrac{949}{320}, \dfrac{1247}{1280}, -\dfrac{6279}{6400}\right]' = [2.9656625, 0.97421875, -0.98109375]'$ （3 分）

四、(10 分) 已知方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近有根，使用牛顿迭代法求解此方程，精确到 $|x_{k+1} - x_k| < 0.005$.

解： $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^3 - x_k^2 - 1}{3x_k^2 - 2x_k}$ **(3 分)** **取初始值** $x_0 = 1.5$

有 $x_1 = \dfrac{22}{15} \approx 1.46667$，$x_2 = \dfrac{17411}{11880} \approx 1.46557$，$x_3 = \dfrac{4315690782791}{2944715813820} \approx 1.46557$， **(每步 2 分)**

$f(x) = 0$ 的解约为 1.46557（1 分）

注：实际解
$$\frac{(116 + 12\sqrt{93})^{(1/3)}}{6} + \frac{2}{3\,(116 + 12\sqrt{93})^{(1/3)}} + \frac{1}{3}$$

大约数值为 1.4655712318767680267

五、(12 分) 设函数 $f(x)$ 在区间[0,3]上具有四阶连续导数，试用埃尔米特插值法求一个次数不高于 3 的多项式 $P_3(x)$，使其满足如下数据表值，并给出截断误差估计公式。（10 分）

已知 $f(x)$ 有如下的数据

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	2	2
$f'(x_i)$		3	

试写出满足插值条件 $P(x_i)=f(x_i)$ 以及 $P'(1)=f'(1)$ 的插值多项式 $P(x)$，并写出误差的表达形式。

解：待定系数法 1： $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$

$P(0)=a=1 \qquad P(2)=a+b+c+d=2$

$P(3)=a+2b+4c+8d=2 \qquad P'(1)=b+2c+3d=3$ （每个方程 1 分, 共 4 分）

解得 $a=1,b=-\frac{7}{2},c=7,d=-\frac{5}{2}$ （每个系数 1 分, 共 4 分）

$P(x)=-\frac{5}{2}x^3+7x^2-\frac{7}{2}+1$ （2 分）

$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x(x-1)^2(x-2)$ （2 分）

待定系数法 2： $P(x)=2+3(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3$ （3 分）

$P(1)=2-3+c-d=1$ （1 分） $P(2)=2+3+c+d=2$ （1 分）

解得 $c=-\frac{1}{2},d=-\frac{5}{2}$ （每个系数 1 分, 共 2 分）

$P(x)=2+3(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{5}{2}(x-1)^3=-\frac{5}{2}x^3+7x^2-\frac{7}{2}+1$ （3 分）

$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)(x-2)^2(x-3)$ （2 分）

差商法：(每个差商各 1 分,全对 6 分)

x	*f(x)*			

0	*1*			
1	*2*	*1*		
1	*2*	*3*	*2*	
2	*2*	*0*	*-3*	*-2.5*

$P(x)=1+x+2x(x-1)-\frac{5}{2}x(x-1)^2=-\frac{5}{2}x^3+7x^2-\frac{7}{2}+1$（4 分）

$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)(x-2)^2(x-3)$（2 分）

方法 4：基函数法（此类法计算量较大，每个基函数 3 分）

$H_3(x)=a(x)+2b(x)+2c(x)+3d(x)$

满足 $a(0)=1,b(0)=0,c(0)=0,d(0)=0$

$a(1)=0,b(1)=1,c(1)=0,d(1)=0$

$a(2)=0,b(2)=0,c(2)=1,d(2)=0$

$a'(1)=0,b'(1)=0,c'(1)=0,d'(1)=1$

可求得 $a(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)\qquad b(x)=-x(x-2)$

$c(x)=\frac{1}{2}x(x-1)^2\qquad d(x)=-x(x-1)(x-2)$

所以 $H_3(x)=a(x)+2b(x)+2c(x)+3d(x)P(x)=-\frac{5}{2}x^3+7x^2-\frac{7}{2}+1$

$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)(x-2)^2(x-3)$（2 分）

六、(10 分) 已知实验数据如下

x	-1	0	1	2
y	1	2	1	-2

用最小二乘法求形如 $y=a+bx+cx^2$ 的经验公式。（10 分）

解：设拟合多项式为 $y=a+bx+cx^2$

则由条件得到正规方程组 $\begin{pmatrix}4&2&6\\2&6&8\\6&8&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$ (每个系数 1 分,共 8 分)

解得 $a=2,b=0,c=-1$.(2 分,错一个得 1 分,错 2 个以上不得分)

所以所求的拟合多项式为 $y=2-x^2$

七、(16 分) 用改进的欧拉方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + 2x^2 \\ y(0)=0 \end{cases} \quad (0 \le x \le 0.3)$$

取步长 $h=0.1$，计算 $y(0.3)$ 的近似值，计算过程中数值保留 5 位小数。

解：建立改进欧拉的迭代公式

$$k_1 = f(x_k, y_k) = -y_k + 2x_k^2$$

$$k_2 = f(x_{k+1}, y_k + k_1 h) = -0.9y_k - 0.2x_k^2 + 2x_{k+1}^2 \qquad （4 分）$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 0.905y_k + 0.09x_k^2 + 0.1x_{k+1}^2$$

迭代计算如下：

$k1 := 0.$ $k2 := 0.02$ $y_1 := 0.001000000000$ (各2分)

$k1 := 0.01900000000$ $k2 := 0.07710000000$ $y_2 := 0.005805000000$ (各2分)

$k1 := 0.07419500000$ $k2 := 0.1667755000$ $y_3 := 0.01785352500$ (各1分)

八、(10 分) 利用复化 Simpson 公式 S_n 计算定积分 $I=\int_0^1 \sin x dx$ 若使 $|I-S_n|<10^{-5}$，问应取 n 为多少？并求此近似值。

解　由于 $|(\sin x)^{(4)}| = |\sin x| \le \sin 1$，（1 分）

要 $R_n(f) \le \frac{\sin 1}{180} h^4 < 10^{-5}$ （1 分），仅要 $h < \sqrt[4]{\frac{180\times 10^{-5}}{\sin 1}} \approx 0.215$

所以，$n = \frac{1}{2h} > 2.3249$，（2 分）

故，应取 n=3。（1 分）即对 $[0,1]$ 区间做 6 等分：

$$I \approx \frac{1}{18}[\sin 0 + 4\sin\frac{1}{6} + 2\sin\frac{1}{3} + 4\sin\frac{1}{2} + 2\sin\frac{2}{3} + 4\sin\frac{5}{6} + \sin 1] \approx 0.4596997 \quad （5 分）$$

注：实际值 $I = 1-\cos 1 \approx 0.459698$

北京科技大学 2017 年《计算方法》

一、填空题(每小题 2 分，共 20 分)

1、已知 $a=1.2345, b=0.987$ 是经过四舍五入后得到的近似值，则 $a+b$ 至少有 3 位有效数字，$a\times b$ 至少有 3 位有效数字。

$$\varepsilon(a+b)=\varepsilon(a)+\varepsilon(a)=0.00005+0.0005=0.00055<0.005$$

$$\varepsilon(a+b)\approx b\varepsilon(a)+a\varepsilon(b)=0.00066660<0.005$$

2. 用二分法求方程 $f(x)=x^4-2$ 在区间[1, 2]内的根, 进行一步后根所在区间为 $\underline{[1,1.5]}$, 进行三步后根所在区间为 $\underline{[1.125,1.25]}$. 。

3. 设 A 是一个 5×3 的矩阵，B 是一个 3×6 的矩阵，C 是一个 6×7 的矩阵，D 是一个 7×2 的矩阵, 根据矩阵乘法结合率，$F=ABCD$ 可按如下公式计算

（1）$F=[A(BC)]D$ （2）$F=[(AB)(CD)]$

其中计算量较小的是公式 **（2）**，其计算量为 **234** flops。

4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$, 则 $\|A\|_1=\underline{\mathbf{5}}$，$\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty=\underline{5}$。

5. 使用复化抛物线求积公式计算 $\int_0^1 e^x\,dx$，要求误差小于 $\frac{1}{2}\times10^{-4}$，那么至少需要将区间[0,1]做 **6** 等分。

6. 已知 $f(-1)=2, f(0)=f(1)=1$，则对应节点 $x=-1,0,1$ 的 $f(x)$ 的拉格朗日插值多项式的一次项系数是 $\underline{-\frac{1}{2}}$ 。 $L_2(x)=-\frac{1}{2}x(x-1)+1$

7. 设 $f(x)=7x^3+8x^2+9x+10$，求差商 $f[0,1]=\mathbf{24}$, $f[1,2,3,4]=$ **7**。

8. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，可使用 household 矩阵 $\underline{H=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & -4\\ -4 & 3\end{pmatrix}}$ 变换得 $Hx=\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$。

注：$U=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, H=I-2\frac{UU^T}{\|U\|_2^2}=I-\frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & -4\\ -4 & 3\end{pmatrix}$。

9. 若函数

$$S(x)=\begin{cases} x^3+x^2 & 0\le x\le 1 \\ ax^3+bx^2+3x-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

为一个三次样条函数，则 $a=$ _2_， $b=$ ___-2_。

10. 用欧拉法求解初值问题 $\begin{cases} y'+2y=x^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$ ，步长 h 最大不能超过 0.1。

二、 (10 分)求解线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

(1)求矩阵 A 的 Doolittle 分解，即分解成 $A=LU$ 的形式，其中 L 为单位下三角矩阵，U 为上三角矩阵；

(2)利用上述分解求解方程组 $Ax=b$.

解： $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1/2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ （分解6分, LU各三分）

解 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix}y=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 得 $y=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (2 分)

解 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1/2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}x=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 得 $x=\begin{bmatrix} -17 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2 分)

三、(15 分) 设有方程组 $\begin{bmatrix} 4 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

使用 Jacobi 迭代法求解此方程，给出迭代格式和迭代矩阵，判断迭代收敛时 a 的范围。并取 $a=1$ 采用初始值 $x_0=[0,0,0]'$ 迭代计算 3 步

解：Jacobi 迭代格式 $\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{11}{4}-\dfrac{a}{4}x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=3-\dfrac{a}{2}x_1^{(k)}-\dfrac{a}{2}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)}=1-ax_2^{(k)} \end{cases}$ （3 分）

迭代矩阵为 $B=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{4} & 0 \\ -\frac{a}{2} & 0 & -\frac{a}{2} \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$ （2 分）

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix} \lambda & \frac{a}{4} & 0 \\ \frac{a}{2} & \lambda & \frac{a}{2} \\ 0 & a & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{5a^2}{8}\lambda=\lambda\left(\lambda-\frac{\sqrt{10}a}{4}\right)\left(\lambda+\frac{\sqrt{10}a}{4}\right)$$ （2 分）

$\rho(G_S)=\frac{\sqrt{10}|a|}{4}<1$ 得到 $|a|<\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2}{5}\sqrt{10}$ 时 Jacobi 迭代收敛（2 分）

$x_0=[0,0,0]'$ $x_1=\left[\frac{11}{4},3,1\right]'=[2.75,3,1]'$ （2 分）

$x_2=\left[2,\frac{9}{8},-2\right]'=[2,1.125,-1.140625]'$ （2 分）

$x_3=\left[\frac{79}{32},3,-\frac{1}{8}\right]'=[2.46875,3,-0.125]'$ （2 分）

四、(10 分) 已知方程 $x^3-4x^2+4x-10=0$ 在 $x_0=3.5$ 附近有根，使用牛顿迭代法求解此方程，迭代两步，再使用 Atiken 加速方法修正一次.

解： $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-4x_k^2+4x_k-10}{3x_k^2-8x_k+4}$ **(3 分)** **取初始值** $x_0=3.5$

有 $x_1=\frac{11}{3}\approx 3.666666667, x_2=\frac{296}{81}\approx 3.654320988$ **(每步 3 分)**

Atiken 修正 $x_2^*=x_2-\frac{(x_2-x_1)^2}{x_2-2x_1+x_0}=\frac{106}{29}\approx 3.655172414$ （1 分）

注：实际解 $\frac{1}{3}\sqrt[3]{127+3\sqrt{1785}}+\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{127+3\sqrt{1785}}}+\frac{4}{3}\approx 3.6542491178566585988$

五、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间[0,2]上具有四阶连续导数，试用埃尔米特插值法求一个次数不高于 3 的多项式 $P_3(x)$，使其满足如下数据表值，并给出截断误差估计公式。

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	2	5	2
$f'(x_i)$		1	

解：待定系数法 1：

$$P(x)=5+(x-1)+a(x-1)^2+b(x-1)^3$$ （2 分）

$$P(0)=5-1+a-b=2, P(2)=5+1+a+b=2$$ （每个方程 1 分, 共 2 分）

解得 $a=-3, b=-1,$ （每个系数 1 分, 共 2 分）

$$P(x)=5+(x-1)-3(x-1)^2-(x-1)^3=2+4x-x^3$$ (2 分)

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x(x-1)^2(x-2)$$ (2 分)

待定系数法 2：按函数值插值可得到 $L_2(x)=5-3(x-1)^2$ (2 分)

$$P_3(x)=5-3(x-1)^2+\alpha x(x-1)(x-2)=5-\alpha(x-1)-3(x-1)^2+\alpha(x-1)^3$$ (2 分)

由 $P_3'(1)=-\alpha=1$ (2 分) 得到

$$P_3(x)=5-3(x-1)^2+\alpha x(x-1)(x-2)=5+(x-1)-3(x-1)^2-(x-1)^3=2+4x-x^3$$
(2 分)

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x(x-1)^2(x-2)$$ (2 分)

牛顿插值法（6 个差商各 1 分）

X	y			
0	2			
1	5	3		
1	5	1	-2	
2	2	-3	-4	-1

$$P_3(x)=2+3x-2x(x-1)-x(x-1)^2=2+4x-x^3$$ (2 分)

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x(x-1)^2(x-2)$$ (2 分)

基函数法 $P(x)=2a(x)+5b(x)+2c(x)+d(x)$ (1 分)

其中 $a(x),b(x),c(x),d(x)$ 均为不超过 3 次的多项式. 满足

$a(0)=1, b(0)=0, c(0)=0, d(0)=0$

$a(1)=0, b(1)=1, c(1)=0, d(1)=0$

$a(2)=0, b(2)=0, c(2)=1, d(2)=0$

$a'(1)=0, b'(1)=0, c'(1)=0, d'(1)=1$

可得到

$a(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2), b(x)=-x(x-2), c(x)=\frac{1}{2}x(x-1)^2, d(x)=-x(x-1)(x-2)$

每个基函数 2 分

$P(x)=2a(x)+5b(x)+2c(x)+d(x)=2+4x-x^3$ （1 分）

$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x(x-1)^2(x-2)$ （1 分）

六、(10 分) 已知实验数据如下

x	0	1	2	3	4
y	1	1.5	2	2.2	2.3

用最小二乘法求形如 $y=\frac{1}{a+bx}$ 的经验公式。计算中数值保留 5 位小数（10 分）

解：拟合多项式为 $\frac{1}{y}=a+bx$，正规方程组 $\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum \frac{1}{y_i} \\ \sum \frac{x_i}{y_i} \end{pmatrix}$ （2 分）

即 $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4639}{1518} \\ \frac{3620}{759} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3.05600 \\ 4.76944 \end{pmatrix}$ (每个系数 1 分,共 5 分)

解得 $a=\frac{607}{690}\approx 0.8797101449, b=-\frac{1019}{7590}\approx -0.1342555995$.(2 分)

经验公式 $y=\frac{1}{0.87971-0.13426x}$ （1 分）

七、(10 分) 用改进的欧拉方法求解初值问题

$$\begin{cases} y'=1+x+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases} (0\le x\le 0.3)$$

取步长 $h=0.1$，计算 $y(0.3)$ 的近似值，计算过程中数值保留 4 位小数。

解：公式 1：

$$k_1 = f(x_k, y_k) = 1 + x_k + y_k^2$$

建立改进欧拉的迭代公式 $k_2 = f(x_{k+1}, y_k + k_1 h)$ （1 分）

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

迭代计算如下：

$k_1 = 2, k_2 = 2.54, y_1 = 1.2270$ （各 1 分)

$k_1 = 2.6055, k_2 = 3.4130, y_2 = 1.5280$ （各 1 分)

$k_1 = 3.5348, k_2 = 4.8400, y_3 = 1.9467$ （各 1 分)

公式 2:

建立改进欧拉的迭代公式

$$\overline{y_{k+1}} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k + h(1 + x_k + y_k^2)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(1 + x_k + y_k^2 + 1 + x_{k+1} + \overline{y_{k+1}}^2\right)$$

（2 分）

迭代计算如下：

$\overline{y_1} = 1.2, y_1 = 1.2270$ (1 分+2 分)

$\overline{y_2} = 1.4875529, y_2 = 1.527917132$ (1 分+2 分)

$\overline{y_3} = 1.881370208, y_3 = 1.946621363$ (1 分+1 分)

八、(15 分) 设 $\{P_n(x)\}$ 是 $[0, 1]$ 区间上带权 $\rho(x) = x$ 的最高次幂项系数为 1 的正交多项式系（1）求 $P_1(x), P_2(x)$。

（2）构造如下求积公式 $\int_0^1 xf(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$，其中 x_0, x_1 为 $P_2(x)$ 的两个零点。使其代数精度最高，并给出此代数精度。

解（1）： 构造带权 $\rho(x) = x$ 且在[0，1]上正交的多项式序列

$$P_0(x) = 1，\quad \alpha_0 = \frac{(xP_0, P_0)}{(P_0, P_0)} = \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 x dx} = \frac{2}{3}, \text{故}\quad P_1(x) = x - \frac{2}{3}\text{。}$$ （2 分）

$$\alpha_1 = \frac{(xP_1, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{\int_0^1 x^2\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 dx}{\int_0^1 x\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 dx} = \frac{8}{15},\ \beta_0 = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)} = \frac{\int_0^1 x\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 dx}{\int_0^1 x dx} = \frac{1}{18},$$

$$P_2(x)=\left(x-\frac{8}{15}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{18}=x^2-\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}$$ （3 分）

方法 2:待定系数法

$P_0(x)=1$ 设 $P_1(x)=x-\alpha$ 由 $\int_0^1 xP_0(x)P_1(x)dx=\int_0^1(x^2-\alpha x)dx=\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}=0$

得到 $\alpha=\frac{2}{3},P_1(x)=x-\frac{2}{3}$

设 $P_2(x)=x^2-\beta x+\gamma$

由 $\int_0^1 xP_0(x)P_2(x)dx=\int_0^1 x\left(x^2-\beta x+\gamma\right)dx=\frac{1}{4}-\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{2}=0$

$\int_0^1 xP_1(x)P_2(x)dx=\int_0^1 x\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x^2-\beta x+\gamma\right)dx=\frac{1}{30}-\frac{\beta}{36}=0$

得到 $\beta=\frac{6}{5},\gamma=\frac{3}{10},P_2(x)=x^2-\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}$

解（2）： $P_2(x)=x^2-\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}$ 的零点为：$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{6}}{10}$。（2 分）

设 $\int_0^1 xf(x)dx \approx A_0 f(\frac{6-\sqrt{6}}{10})+A_1 f(\frac{6+\sqrt{6}}{10})$ (1 分)

分别取 $f(x)=1,x$，使上述求积公式准确成立，有

$$\begin{cases}A_0+A_1=1/2\\ \frac{6-\sqrt{6}}{10}A_0+\frac{6+\sqrt{6}}{10}A_1=1/3\end{cases}，即\begin{cases}A_0+A_1=\frac{1}{2}\\ A_0-A_1=-\frac{1}{3\sqrt{6}}\end{cases}$$ (2 分)

解得：$A_0=\frac{1}{4}-\frac{1}{6\sqrt{6}}$，$A_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{6\sqrt{6}}$。（2 分）

求积公式为 $\int_0^1 xf(x)dx\approx\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6\sqrt{6}}\right)f\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6\sqrt{6}}\right)f\left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)$

$f(x)=x^2$，$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{3}$，$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6\sqrt{6}}\right)\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6\sqrt{6}}\right)\left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)^2=\frac{1}{3}$（1 分）

$f(x)=x^3$，$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{4}$，$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6\sqrt{6}}\right)\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)^3+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6\sqrt{6}}\right)\left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)^3=\frac{1}{4}$（1 分）

$f(x)=x^4$，$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{5}$，$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6\sqrt{6}}\right)\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)^4+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6\sqrt{6}}\right)\left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)^4=\frac{33}{200}$

代数精度为 3（1 分）

《计算方法》试题库

计算题：

1、用高斯-塞德尔方法解方程组 $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=11 \\ x_1+4x_2+2x_3=18 \\ 2x_1+x_2+5x_3=22 \end{cases}$，取 $x^{(0)}=\left(1,1,1\right)^T$，迭代五次(要求按五位有效数字计算)。

答案：迭代格式 $\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{11-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}}{4} \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{18-x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{22-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}}{5} \end{cases}$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.0000	1.0000	1.0000
1	2.0000	3.5000	2.9000
2	0.2750	2.9813	3.6938
3	0.3359	2.5691	3.7518
4	0.5275	2.4922	3.6906
5	0.5812	2.5094	3.6656

2、求 *A*、*B* 使求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A[f(-1)+f(1)]+B[f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})]$ 的代数精度尽量高,并求其代数精度；利用此公式求 $I=\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ (保留四位小数)。

答案：$f(x)=1,x,x^2$ 是精确成立，即

$$\begin{cases} 2A+2B=2 \\ 2A+\frac{1}{2}B=\frac{2}{3} \end{cases}$$

得 $A=\frac{1}{9},B=\frac{8}{9}$

求积公式为$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{1}{9}[f(-1)+f(1)]+\frac{8}{9}[f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})]$

当$f(x)=x^3$时，公式显然精确成立；当$f(x)=x^4$时，左=$\frac{2}{5}$，右=$\frac{1}{3}$。

所以代数精度为 3。

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \overset{t=2x-3}{=} \int_{-1}^{1}\frac{1}{t+3}dt \approx \frac{1}{9}[\frac{1}{-1+3}+\frac{1}{1+3}]+\frac{8}{9}[\frac{1}{-1/2+3}+\frac{1}{1/2+3}]$$

$$=\frac{97}{140}\approx 0.69286$$

3、已知

x_i	1	3	4	5
$f(x_i)$	2	6	5	4

分别用拉格朗日插值法和牛顿插值法求$f(x)$的三次插值多项式$P_3(x)$，并求$f(2)$的近似值（保留四位小数）。

答案：$L_3(x)=2\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-3)(1-4)(1-5)}+6\frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-4)(3-5)}$

$$+5\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-3)(4-5)}+4\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-3)(5-4)}$$

差商表为

x_i	y_i	一阶均差	二阶均差	三阶均差
1	2			
3	6	2		
4	5	-1	-1	
5	4	-1	0	$1/4$

$$P_3(x)=N_3(x)=2+2(x-1)-(x-1)(x-3)+\frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$f(2)\approx P_3(2)=5.5$$

4、取步长$h=0.2$，用预估-校正法解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = 2x + 3y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (0 \le x \le 1)$$

答案：解：
$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + 0.2 \times (2x_n + 3y_n) \\ y_{n+1} = y_n + 0.1 \times [(2x_n + 3y_n) + (2x_{n+1} + 3y_{n+1}^{(0)})] \end{cases}$$

即
$$y_{n+1} = 0.52x_n + 1.78y_n + 0.04$$

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_n	1	1.82	5.8796	10.7137	19.4224	35.0279

5、已知

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	4	2	1	3	5

求 $f(x)$ 的二次拟合曲线 $p_2(x)$，并求 $f'(0)$ 的近似值。

答案：解：

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
0	-2	4	4	-8	16	-8	16
1	-1	2	1	-1	1	-2	2
2	0	1	0	0	0	0	0
3	1	3	1	1	1	3	3
4	2	5	4	8	16	10	20
$\sum$	0	15	10	0	34	3	41

正规方程组为
$$\begin{cases} 5a_0 + 10a_2 = 15 \\ 10a_1 = 3 \\ 10a_0 + 34a_2 = 41 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{10}{7}, a_1 = \frac{3}{10}, a_2 = \frac{11}{14}$$

$$p_2(x) = \frac{10}{7} + \frac{3}{10}x + \frac{11}{14}x^2 \qquad p_2'(x) = \frac{3}{10} + \frac{11}{7}x$$

$$f'(0) \approx p_2'(0) = \frac{3}{10}$$

6、已知 $\sin x$ 区间[0.4，0.8]的函数表

x_i	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	0.38942	0.47943	0.56464	0.64422	0.71736

如用二次插值求$\sin 0.63891$的近似值，如何选择节点才能使误差最小？并求该近似值。

答案：解： 应选三个节点，使误差

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{3!}|\omega_3(x)|$$

尽量小，即应使$|\omega_3(x)|$尽量小，最靠近插值点的三个节点满足上述要求。即取节点$\{0.5,0.6,0.7\}$最好，实际计算结果

$$\sin 0.63891 \approx 0.596274,$$

且

$$\begin{aligned} &\left|\sin 0.63891 - 0.596274\right| \\ &\le \frac{1}{3!}\left|(0.63891-0.5)(0.63891-9-0.6)(0.63891-0.7)\right| \\ &\le 0.55032 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

7、构造求解方程$e^x + 10x - 2 = 0$的根的迭代格式$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2,\cdots$，讨论其收敛性，并将根求出来，$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-4}$。

答案：解：令 $f(x) = \mathrm{e}^x + 10x - 2,\quad f(0) = -2 < 0,\quad f(1) = 10 + e > 0$.

且$f'(x) = \mathrm{e}^x + 10 > 0$ 对$\forall x \in (-\infty, +\infty)$，故$f(x) = 0$在(0,1)内有唯一实根.将方程$f(x) = 0$变形为

$$x = \frac{1}{10}(2 - \mathrm{e}^x)$$

则当$x \in (0,1)$时

$$\varphi(x) = \frac{1}{10}(2 - \mathrm{e}^x),\quad |\varphi'(x)| = \left|-\frac{\mathrm{e}^x}{10}\right| \le \frac{\mathrm{e}}{10} < 1$$

故迭代格式

$$x_{n+1}=\frac{1}{10}(2-\mathrm{e}^{x_n})$$

收敛。取 $x_0=0.5$，计算结果列表如下：

n	0	1	2	3
x_n	0.5	0.035 127 872	0.096 424 785	0.089 877 325
n	4	5	6	7
x_n	0.090 595 993	0.090 517 340	0.090 525 950	0.090 525 008

且满足 $|x_7-x_6|\le 0.000\,000\,95<10^{-6}$.所以 $x^*\approx 0.090\,525\,008$.

8、利用矩阵的 *LU* 分解法解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14 \\ 2x_1+5x_2+2x_3=18 \\ 3x_1+x_2+5x_3=20 \end{cases}$。

答案：解：

$$A=LU=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & -5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 \\ & 1 & -4 \\ & & -24\end{bmatrix}$$

令 $L\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ 得 $\boldsymbol{y}=(14,-10,-72)^T$，$U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 得 $\boldsymbol{x}=(1,2,3)^T$.

9、对方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+10x_3=15 \\ 10x_1-4x_2-\ \ x_3=5 \\ 2x_1+10x_2-4x_3=8 \end{cases}$

（1） 试建立一种收敛的 Seidel 迭代公式，说明理由；

（2） 取初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$，利用（1）中建立的迭代公式求解，要求 $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty<10^{-3}$。

解：调整方程组的位置，使系数矩阵严格对角占优

$$\begin{cases} 10x_1-4x_2-\ \ x_3=5 \\ 2x_1+10x_2-4x_3=8 \\ 3x_1+2x_2+10x_3=15 \end{cases}$$

故对应的高斯—塞德尔迭代法收敛.迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(\qquad\qquad 4x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-2x_1^{(k+1)} \qquad\qquad + 4x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-3x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} \qquad + 15) \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$,经 7 步迭代可得：

$$\boldsymbol{x}^* \approx \boldsymbol{x}^{(7)} = (0.999\,991\,459, 0.999\,950\,326, 1.000\,010)^T.$$

10、已知下列实验数据

x_i	1.36	1.95	2.16
$f(x_i)$	16.844	17.378	18.435

试按最小二乘原理求一次多项式拟合以上数据。

解：当 $0<x<1$ 时， $f''(x) = e^x$，则 $|f''(x)| \le e$，且 $\int_0^1 e^x dx$ 有一位整数.

要求近似值有 5 位有效数字，只须误差 $\left|R_1^{(n)}(f)\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

由 $\left|R_1^{(n)}(f)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\left|f''(\xi)\right|$，只要

$$\left|R_1^{(n)}(e^x)\right| \le \frac{e^\xi}{12n^2} \le \frac{e}{12n^2} \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

即可，解得

$$n \ge \sqrt{\frac{e}{6}} \times 10^2 = 67.30877\cdots$$

所以 $n = 68$，因此至少需将 [0,1] 68 等份。

11、用列主元素消元法求解方程组 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -12 \\ 11 \end{bmatrix}$。

解：
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 3 & -12 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-\frac{2}{5}r_1]{r_2-\frac{1}{5}r_1}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3 & -12\\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5}\\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{79}{5}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3 & -12\\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{79}{5}\\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{1}{13}r_2}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3 & -12\\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{79}{5}\\ 0 & & \frac{5}{13} & -\frac{5}{13}\end{bmatrix}$$

回代得 $x_3=-1, x_2=6, x_1=3$ 。

12、取节点 $x_0=0, x_1=0.5, x_2=1$,求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 在区间[0,1]上的二次插值多项式 $P_2(x)$,并估计误差。

解：

$$P_2(x)=e^{-0}\times\frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)}+e^{-0.5}\times\frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)}$$

$$+e^{-1}\times\frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)}$$

$$=2(x-0.5)(x-1)-4e^{-0.5}x(x-1)+2e^{-1}x(x-0.5)$$

又 $f(x)=e^{-x}, f'''(x)=-e^{-x}, M_3=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'''(x)|=1$

故截断误差 $|R_2(x)|=|e^{-x}-P_2(x)|\le\frac{1}{3!}|x(x-0.5)(x-1)|$ 。

13、用欧拉方法求

$$y(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

在点 $x=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ 处的近似值。

解： $y(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 等价于

$$\begin{cases}y'=\mathrm{e}^{-x^2}\\ y(0)=0\end{cases}\quad (x>0)$$

记 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2}$,取 $h=0.5$, $x_0=0, x_1=0.5, x_2=1.0, x_3=1.5, x_4=2.0$.

则由欧拉公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = 0 \end{cases}, \qquad n = 0,1,2,3$$

可得 $y(0.5) \approx y_1 = 0.5, \qquad y(1.0) = y_2 \approx 0.88940,$

$$y(1.5) \approx y_3 = 1.07334, \quad y(2.0) = y_4 \approx 1.12604$$

14、给定方程 $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^x - 1 = 0$

1) 分析该方程存在几个根；

2) 用迭代法求出这些根，精确到 5 位有效数字；

3) 说明所用的迭代格式是收敛的。

解：1）将方程 $(x-1)\mathrm{e}^x - 1 = 0$ （1）

改写为

$$x - 1 = \mathrm{e}^{-x} \qquad (2)$$

作函数 $f_1(x) = x - 1$，$f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$ 的图形（略）知（2）有唯一根 $x^* \in (1,2)$。

2) 将方程（2）改写为 $x = 1 + \mathrm{e}^{-x}$

构造迭代格式 $\begin{cases} x_{k+1} = 1 + \mathrm{e}^{-x_k} \\ x_0 = 1.5 \end{cases} \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$

计算结果列表如下：

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_k	1.22313	1.29431	1.27409	1.27969	1.27812	1.27856	1.27844	1.27847	1.27846

3) $\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$，$\varphi'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

当 $x \in [1,2]$ 时，$\varphi(x) \in [\varphi(2), \varphi(1)] \subset [1,2]$，且

$$|\varphi'(x)| \le \mathrm{e}^{-1} < 1$$

所以迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad (k = 0,1,2,\cdots)$ 对任意 $x_0 \in [1,2]$ 均收敛。

15、用牛顿(切线)法求 $\sqrt{3}$ 的近似值。取 x_0=1.7，计算三次，保留五位小数。

解：$\sqrt{3}$ 是 $f(x) = x^2 - 3 = 0$ 的正根，$f'(x) = 2x$，牛顿迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-3}{2x_n}\text{，即}\quad x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{3}{2x_n}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

取 x_0=1.7，列表如下：

n	1	2	3
x_n	1.73235	1.73205	1.73205

16、已知 f(-1)=2，f(1)=3，f(2)=-4，求拉格朗日插值多项式 $L_2(x)$ 及 f(1，5)的近似值，取五位小数。

解：
$$L_2(x)=2\times\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+3\times\frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)}-4\times\frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}$$

$$=\frac{2}{3}(x-1)(x-2)-\frac{3}{2}(x+1)(x-2)-\frac{4}{3}(x+1)(x-1)$$

$$f(1.5)\approx L_2(1.5)=\frac{1}{24}\approx 0.04167$$

17、n=3,用复合梯形公式求 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 的近似值（取四位小数）,并求误差估计。

解：
$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\approx T_3=\frac{1-0}{2\times 3}[\mathrm{e}^0+2(\mathrm{e}^{1/3}+\mathrm{e}^{2/3})+\mathrm{e}^1]\approx 1.7342$$

$f(x)=\mathrm{e}^x, f''(x)=\mathrm{e}^x$，$0\le x\le 1$ 时，$|f''(x)|\le \mathrm{e}$

$$|R|=|\mathrm{e}^x-T_3|\le\frac{\mathrm{e}}{12\times 3^2}=\frac{\mathrm{e}}{108}=0.025\cdots\le 0.05$$

至少有两位有效数字。

18、用 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组 $\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-3&1\\1&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-8\end{pmatrix}$，

取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$,列表计算三次，保留三位小数。

解：Gauss-Seidel 迭代格式为：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{3}(\qquad\qquad -x_3^{(k)}+5)\\ x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{3}(-x_1^{(k+1)}\qquad -x_3^{(k)}-1)\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-x_1^{(k+1)}+x_2^{(k+1)}\qquad -8)\end{cases}$$

系数矩阵$\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}$严格对角占优，故 Gauss-Seidel 迭代收敛.

取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$，列表计算如下:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	1.667	0.889	-2.195
2	2.398	0.867	-2.383
3	2.461	0.359	-2.526

19、用预估—校正法求解$\begin{cases}y'=x+y\\ y(0)=1\end{cases}$ $(0\le x\le 1)$，h=0。2，取两位小数。

解：预估—校正公式为

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{2}(k_1+k_2)\\ k_1=hf(x_n,y_n)\\ k_2=hf(x_n+h,y_n+k_1)\end{cases}\quad n=0,1,2,\cdots$$

其中$f(x,y)=x+y$，$y_0=1$，h=0.2，$n=0,1,2,3,4$，代入上式得:

n	1	2	3	4	5
x_n	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_n	1.24	1.58	2.04	2.64	3.42

20、（8 分）用最小二乘法求形如$y=a+bx^2$的经验公式拟合以下数据:

x_i	19	25	30	38
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3

解：$\Phi=span\{1,x^2\}$

$A^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 19^2 & 25^2 & 31^2 & 38^2\end{bmatrix}$ $\qquad y^T=\begin{bmatrix}19.0 & 32.3 & 49.0 & 73.3\end{bmatrix}$

解方程组 $A^TAC=A^Ty$

其中 $A^TA=\begin{bmatrix}4 & 3391\\ 3391 & 3529603\end{bmatrix}$ $\qquad A^Ty=\begin{bmatrix}173.6\\ 179980.7\end{bmatrix}$

解得：$C=\begin{bmatrix}0.9255577\\0.0501025\end{bmatrix}$　所以 $a=0.9255577$，　$b=0.0501025$

21、（15 分）用 $n=8$ 的复化梯形公式（或复化 Simpson 公式）计算 $\int_0^1 e^{-x}dx$ 时，试用余项估计其误差。用 $n=8$ 的复化梯形公式（或复化 Simpson 公式）计算出该积分的近似值。

解：$|R_T[f]|=\left|-\dfrac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)\right|\le\dfrac{1}{12}\times\dfrac{1}{8^2}\times e^0=\dfrac{1}{768}=0.001302$

$$T(8)=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]$$

$$=\frac{1}{16}[1+2\times(0.8824969+0.7788008+0.60653066$$

$$+0.5352614+0.47236655+0.41686207)+0.36787947]$$

$$=0.6329434$$

22、（15 分）方程 $x^3-x-1=0$ 在 $x=1.5$ 附近有根，把方程写成三种不同的等价形式（1）$x=\sqrt[3]{x+1}$ 对应迭代格式 $x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n+1}$；(2) $x=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ 对应迭代格式 $x_{n+1}=\sqrt{1+\dfrac{1}{x_n}}$；（3）$x=x^3-1$ 对应迭代格式 $x_{n+1}=x_n^3-1$。判断迭代格式在 $x_0=1.5$ 的收敛性，选一种收敛格式计算 $x=1.5$ 附近的根，精确到小数点后第三位。

解：（1）$\varphi'(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$，$|\varphi'(1.5)|=0.18<1$，故收敛；

（2）$\varphi'(x)=-\dfrac{1}{2x^2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$，$|\varphi'(1.5)|=0.17<1$，故收敛；

（3）$\varphi'(x)=3x^2$，$|\varphi'(1.5)|=3\times1.5^2>1$，故发散。

选择（1）：$x_0=1.5$，$x_1=1.3572$，$x_2=1.3309$，$x_3=1.3259$，$x_4=1.3249$，
$x_5=1.32476$，$x_6=1.32472$

23、（8 分）已知方程组 $AX=f$，其中

$$A=\begin{bmatrix}4&3&\\3&4&-1\\&-1&4\end{bmatrix},\quad f=\begin{bmatrix}24\\30\\-24\end{bmatrix}$$

（1）　列出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的分量形式。

（2）　求出 Jacobi 迭代矩阵的谱半径。

解：Jacobi 迭代法：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(24 - 3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(30 - 3x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(-24 + x_2^{(k)}) \\ k = 0,1,2,3,\cdots \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代法：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(24 - 3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(30 - 3x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(-24 + x_2^{(k+1)}) \\ k = 0,1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 3/4 & 0 \end{bmatrix},\quad \rho(B_J) = \sqrt{5/8}(\text{或}\frac{\sqrt{10}}{4}) = 0.790569$$

24、1、（15 分）取步长 $h = 0.1$，求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 用改进的欧拉法求 $y(0.1)$ 的值；用经典的四阶龙格—库塔法求 $y(0.1)$ 的值。

解：改进的欧拉法：
$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) = 0.9y_n + 0.1 \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})] = 0.905y_n + 0.095 \end{cases}$$

所以 $y(0.1) = y_1 = 1$；

经典的四阶龙格—库塔法：
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$
$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$，所以 $y(0.1) = y_1 = 1$。

25、数值积分公式形如

$\int_0^1 xf(x)dx \approx S(x) = Af(0) + Bf(1) + Cf'(0) + Df'(1)$ 试确定参数 A,B,C,D 使公式代数精度尽量高；（2）设 $f(x) \in C^4[0,1]$，推导余项公式 $R(x) = \int_0^1 xf(x)dx - S(x)$，并估计误差。

解：将 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 分布代入公式得：$A=\frac{3}{20},B=\frac{7}{20},B=\frac{1}{30},D=-\frac{1}{20}$

构造 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 满足 $\begin{cases} H_3(x_i)=f(x_i) \\ H_3'(x_i)=f'(x_i) \quad i=0,1 \end{cases}$ 其中 $x_0=0,x_1=1$

则有：$\int_0^1 xH_3(x)dx=S(x)$，$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x-1)^2$

$$R(x)=\int_0^1 x[f(x)-S(x)]dx=\int_0^1 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^3(x-1)^2dx$$

$$=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_0^1 x^3(x-1)^2dx=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!\times 60}=\frac{f^{(4)}(\eta)}{1440}$$

26、用二步法

$$y_{n+1}=\alpha_0 y_n+\alpha_1 y_{n-1}+h[\theta f(x_n,y_n)+(1-\theta)f(x_{n-1},y_{n-1})]$$

求解常微分方程的初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 时，如何选择参数 α_0,α_1,θ 使方法阶数尽可能高，并求局部截断误差主项，此时该方法是几阶的

解：

$$R_{n,h}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+\cdots$$

$$-\alpha_0 y(x_n)-\alpha_1(y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+\cdots)$$

$$-h[\theta y'(x_n)+(1-\theta)(y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2!}y'''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y^{(4)}(x_n)+\cdots]$$

$$=(1-\alpha_0-\alpha_1)y(x_n)+h(1-1+\alpha_1)y'(x_n)$$

$$+h^2(\frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}+1-\theta)y''(x_n)+h^3(\frac{1}{6}+\frac{\alpha_1}{6}-\frac{1-\theta}{2})y'''(x_n)+O(h^4)$$

所以 $\begin{cases} 1-\alpha_0-\alpha_1=0 \\ \alpha_1=0 \\ \frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}+1-\theta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0=1 \\ \alpha_1=0 \\ \theta=\frac{3}{2} \end{cases}$

主项：$\frac{5}{12}h^3y'''(x_n)$ 　　该方法是二阶的。

27、（10 分）已知数值积分公式为：

$\int_0^h f(x)dx\approx\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\lambda h^2[f'(0)-f'(h)]$，试确定积分公式中的参数 λ，使其代数精确度尽量高，并指出其代数精确度的次数。

解：$f(x)=1$ 显然精确成立；

$f(x)=x$ 时， $\int_0^h xdx=\frac{h^2}{2}=\frac{h}{2}[0+h]+\lambda h^2[1-1]$ ；

$f(x)=x^2$ 时， $\int_0^h x^2dx=\frac{h^3}{3}=\frac{h}{2}[0+h^2]+\lambda h^2[0-2h]=\frac{h^3}{2}-2\lambda h\Rightarrow\lambda=\frac{1}{12}$ ；

$f(x)=x^3$ 时， $\int_0^h x^3dx=\frac{h^4}{4}=\frac{h}{2}[0+h^3]+\frac{1}{12}h^2[0-3h^2]$ ；

$f(x)=x^4$ 时， $\int_0^h x^4dx=\frac{h^5}{5}\neq\frac{h}{2}[0+h^4]+\frac{1}{12}h^2[0-4h^3]=\frac{h^5}{6}$ ；

所以，其代数精确度为 3。

28、（8 分）已知求 $\sqrt{a}(a>0)$ 的迭代公式为：

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})\quad x_0>0\quad k=0,1,2\cdots$$

证明：对一切 $k=1,2,\cdots,\ x_k\geq\sqrt{a}$ ，且序列 $\{x_k\}$ 是单调递减的，
从而迭代过程收敛。

证明： $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})\geq\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{x_k\times\frac{a}{x_k}}=\sqrt{a}\quad k=0,1,2\cdots$

故对一切 $k=1,2,\cdots,\ x_k\geq\sqrt{a}$ 。

又 $\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_k^2})\leq\frac{1}{2}(1+1)=1$ 所以 $x_{k+1}\leq x_k$，即序列 $\{x_k\}$ 是单调递减有下界，从而迭代过程收敛。

29、（9 分）数值求积公式 $\int_0^3 f(x)dx\approx\frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$ 是否为插值型求积公式？为什么？其代数精度是多少？

解：是。因为 $f(x)$ 在基点 1、2 处的插值多项式为 $p(x)=\frac{x-2}{1-2}\times f(1)+\frac{x-1}{2-1}\times f(2)$

$\int_0^3 p(x)dx=\frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$ 。其代数精度为 1。

30、(6 分)写出求方程 $4x=\cos(x)+1$ 在区间[0, 1]的根的收敛的迭代公式，并证明其收敛性。

（6 分） $x_{n+1}=\phi(x_n)=\frac{1}{4}[1+\cos(x_n)]$ ，n=0, 1, 2, ···

$|\phi'(x)|=\frac{1}{4}|\sin(x)|\leq\frac{1}{4}<1$ ∴ 对任意的初值 $x_0\in[0,1]$，迭代公式都收敛。

31、(12 分)以 100,121,144 为插值节点，用插值法计算 $\sqrt{115}$ 的近似值，并利用余项估计误差。

用 Newton 插值方法：差分表：

100 121 144	10 11 12	0.0476190 0.0434783	-0.0000941136

$\sqrt{115} \approx$ 10+0.0476190(115-100)-0.0000941136(115-100)(115-121)

=10.7227555

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$|R| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(115-100)(115-121)(115-144)\right|$$

$$\le \frac{1}{6}\frac{3}{8}100^{-\frac{5}{2}} \times 15 \times 6 \times 29 \approx 0.00163$$

32、(10 分)用复化 Simpson 公式计算积分 $I = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ 的近似值，要求误差限为 0.5×10^{-5}。

$$S_1 = \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right) = 0.94614588$$

$$S_2 = \frac{1}{12}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right) = 0.94608693$$

$$|I - S_2| \approx \frac{1}{15}|S_2 - S_1| = 0.393\times 10^{-5} \qquad I \approx S_2 = 0.94608693$$

或利用余项：$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{5} - \frac{x^2}{7\times 2!} + \frac{x^4}{9\times 4!} - \cdots \qquad \left|f^{(4)}(x)\right| \le \frac{1}{5}$$

$$|R| = \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\left|f^{(4)}(\eta)\right| \le \frac{1}{2880\times 5n^4} \le 0.5\times 10^{-5}$$，$n \ge 2$，$I \approx S_2 = \cdots$

33、(10 分)用 Gauss 列主元消去法解方程组：

$$\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=24 \\ 3x_1+x_2+5x_3=34 \\ 2x_1+6x_2+x_3=27 \end{cases}$$

```
3.0000   1.0000   5.0000   34.0000
0.0000   3.6667   0.3333   12.6667
0.0000   5.3333  -2.3333    4.3333

3.0000   1.0000   5.0000   34.0000
0.0000   5.3333  -2.3333    4.3333
0.0    0000   1.9375    9.6875
```

$x=(2.0000,3.0000,5.0000)^T$

34、(8 分)求方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的最小二乘解。

$(A^TA)x=A^Tb$, $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} -1.3333 \\ 2.0000 \end{pmatrix}$

若用 Householder 变换，则：

$$(A,b)\to\begin{pmatrix} -1.73205 & -3.46410 & 4.61880 \\ 0 & -0.36603 & -1.52073 \\ 0 & -1.36603 & -2.52073 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} -1.73205 & -3.46410 & -4.61880 \\ 0 & 1.41421 & 2.82843 \\ 0 & 0 & 0.81650 \end{pmatrix}$$

最小二乘解： $(-1.33333,\ 2.00000)^T$.

35、(8 分)已知常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} dy/dx=x/y, \quad 1\le x\le 1.2 \\ y(1)=2 \end{cases}$$

用改进的 Euler 方法计算 $y(1.2)$ 的近似值，取步长 $h=0.2$ 。

$k_1=f(x_0,y_0)=0.5$, $k_2=f(x_1,y_0+hk_1)=1.1/(2+0.2\times0.5)=0.5238095$

$$y_1=y_0+\frac{h}{2}(k_1+k_2)=2+0.1\times(0.5+0.5238095)=2.1071429$$

36、(6 分)构造代数精度最高的如下形式的求积公式，并求出其代数精度：

$$\int_0^1 xf(x)dx \approx A_0 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_1 f(1)$$

取 f(x)=1, x，令公式准确成立，得：

$A_0 + A_1 = \frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}A_0 + A_1 = \frac{1}{3}$　$A_0 = \frac{1}{3}$，$A_1 = \frac{1}{6}$

f(x)=x^2时，公式左右=1/4; f(x)=x^3时，公式左=1/5, 公式右=5/24

∴ 公式的代数精度=2

37、（15 分）已知方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，

（1）写出该方程组的 **Jacobi** 迭代法和 **Gauss-Seidel** 迭代法的分量形式；

（2）判断（1）中两种方法的收敛性，如果均收敛，说明哪一种方法收敛更快；

解：（1）**Jacobi** 迭代法的分量形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1^{(k+1)} = 1 - 2\boldsymbol{x}_2^{(k)} + 2\boldsymbol{x}_3^{(k)} \\ \boldsymbol{x}_2^{(k+1)} = 2 - \boldsymbol{x}_1^{(k)} - \boldsymbol{x}_3^{(k)} \quad ; \boldsymbol{k} = 0,1,2,\cdots \\ \boldsymbol{x}_3^{(k+1)} = 3 - 2\boldsymbol{x}_1^{(k)} - 2\boldsymbol{x}_2^{(k)} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代法的分量形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1^{(k+1)} = 1 - 2\boldsymbol{x}_2^{(k)} + 2\boldsymbol{x}_3^{(k)} \\ \boldsymbol{x}_2^{(k+1)} = 2 - \boldsymbol{x}_1^{(k+1)} - \boldsymbol{x}_3^{(k)} \quad ; \boldsymbol{k} = 0,1,2,\cdots \\ \boldsymbol{x}_3^{(k+1)} = 3 - 2\boldsymbol{x}_1^{(k+1)} - 2\boldsymbol{x}_2^{(k+1)} \end{cases}$$

（2）**Jacobi** 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$，$\rho(\boldsymbol{B}) = 0 < 1$，**Jacobi** 迭代法收敛

Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$，$\rho(\boldsymbol{B}) = 2 > 1$，**Gauss-Seidel** 迭代法发散

38、（10 分）对于一阶微分方程初值问题 $\begin{cases} \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = 2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(0) = 1 \end{cases}$，取步长 $\boldsymbol{h} = 0.2$，分别用 **Euler** 预报—校正法和经典的四阶龙格—库塔法求 $\boldsymbol{y}(0.2)$ 的近似值。

解：**Euler** 预报—校正法

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + 0.2(2x_n - y_n) = 0.4x_n + 0.8y_n \\ y_{n+1} = y_n + 0.1(2x_n - y_n + 2x_{n+1} - y_{n+1}^{(0)}) = 0.16x_n + 0.2x_{n+1} + 0.82y_n \end{cases}$$

$y(0.2) \approx y_1 = 0.2\times 0.2 + 0.82\times 1 = 0.86$

经典的四阶龙格—库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = 2x_n - y_n \\ k_2 = 2(x_n + 0.1) - (y_n + 0.1k_1) \\ k_3 = 2(x_n + 0.1) - (y_n + 0.1k_2) \\ k_4 = 2(x_n + 0.2) - (y_n + 0.2k_3) \end{cases}$$

$y(0.2) \approx y_1 = 0.8562$

($k_1 = 1.5041; k_2 = 1.5537; k_3 = 1.5487; k_4 = 1.5943$)

39、（10 分）用二步法 $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[\alpha f(x_n, y_n) + \beta f(x_{n-1}, y_{n-1})]$ 求解一阶常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ，问：如何选择参数 α, β 的值，才使该方法的阶数尽可能地高？写出此时的局部截断误差主项，并说明该方法是几阶的。

解：局部截断误差为

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{2}[\alpha f(x_n, y(x_n)) + \beta f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))]$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + O(h^4) - y(x_n) - \frac{h}{2}[\alpha y'(x_n) + \beta y'(x_{n-1})]$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + O(h^4) - y(x_n) - \frac{h}{2}\alpha y'(x_n)$$

$$-\frac{h}{2}\beta[y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{h^2}{2!}y'''(x_n) + O(h^3)]$$

$$= h(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2})y'(x_n) + \frac{h^2}{2!}(1+\beta)y''(x_n) + (\frac{h^3}{3!} - \frac{h^3}{4}\beta)y'''(x_n) + O(h^4)$$

因此有 $\begin{cases} 1 - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} = 0 \\ 1 + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$

局部截断误差主项为 $\dfrac{5h^3}{12}y'''(x_n)$ ，该方法是 2 阶的。

40、(10 分)已知下列函数表：

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	9	27

(1)写出相应的三次 **Lagrange** 插值多项式；

(2)作均差表，写出相应的三次 **Newton** 插值多项式，并计算 $f(1.5)$ 的近似值。

解：（1）

$$L_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}+\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

$$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}x+1$$

（2）均差表：

0	1			
1	3	2		
2	9	6	2	
3	27	18	6	$\frac{4}{3}$

$$N_3(x)=1+2x+2x(x-1)+\frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$

$$f(1.5)\approx N_3(1.5)=5$$

41、(10 分)取步长 $h=0.2$，求解初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=8-3y \\ y(0)=2\end{cases}(x\geq 0)$ ，分别用欧拉预报—校正法和经典四阶龙格—库塔法求 $y(0.2)$ 的近似值。

解：（1）欧拉预报-校正法：

$$\begin{cases}y_{n+1}^{(0)}=y_n+0.2(8-3y_n)=1.6+0.4y_n \\ y_{n+1}=y_n+0.1(8-3y_n+8-3(1.6+0.4y_n))=1.12+0.58y_n\end{cases}$$

$$y(0.2)\approx y_1=2.28$$

（2）经典四阶龙格-库塔法：

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\dfrac{0.2}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ k_1=8-3y_n \\ k_2=8-3(y_n+0.1k_1) \\ k_3=8-3(y_n+0.1k_2) \\ k_4=8-3(y_n+0.2k_3)\end{cases}$$

$$y(0.2)\approx y_1=2.3004$$

42、(10 分)取 5 个等距节点，分别用复化梯形公式和复化辛普生公式计算积分 $\int_0^2\frac{1}{1+2x^2}dx$ 的近似值（保留 4 位小数）。

解：5 个点对应的函数值 $f(x)=\dfrac{1}{1+2x^2}$

x_i	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_i)$	1	0.666667	0.333333	0.181818	0.111111

---（2 分）

(1)复化梯形公式（n=4,h=2/4=0.5）：

$$T_4=\frac{0.5}{2}[1+2\times(0.666667+0.333333+0.181818)+0.111111]$$
$$=0.868687$$

(2) 复化梯形公式（n=2,h=2/2=1）：

$$S_2=\frac{1}{6}[1+4\times(0.666667+0.181818)+2\times0.333333+0.111111]$$
$$=0.861953$$

43、(10 分)已知方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

(1)列出 **Jacobi** 迭代法和 **Gauss-Seidel** 迭代法的分量形式；
(2)讨论上述两种迭代法的收敛性。

解：（1）Jacobi 迭代法：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-x_2^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_2^{(k+1)}=(1-x_1^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_3^{(k+1)}=(1-x_1^{(k)}-x_2^{(k)})/2\end{cases}$$

Jacobi 迭代矩阵：

$$B=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$\rho(B)=1$ 收敛性不能确定

（2）Gauss-Seidel 迭代法：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-x_2^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_2^{(k+1)}=(1-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)})/2\\x_3^{(k+1)}=(1-x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)})/2\end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代矩阵：

$$G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

$$\rho(B)=\left|\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{16}\right|=\sqrt{\frac{1}{8}}<1$$

该迭代法收敛

44、(10 分) 求参数 a,b，使得计算初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0\end{cases}(c\le x\le d)$ 的二步数值方法

$$y_{n+1}=y_n+h[af(x_n,y_n)+bf(x_{n-1},y_{n-1})]$$

的阶数尽量高，并给出局部截断误差的主项。

解：$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)$

$$y_{n+1}=y(x_n)+h(ay'(x_n)+by'(x_{n-1}))$$

$$=y(x_n)+ahy'(x_n)+bh(y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2!}y'''(x_n)+O(h^4))$$

$$=y(x_n)+(a+b)hy'(x_n)-bh^2y''(x_n)+\frac{bh^3}{2}hy'''(x_n)+O(h^4))$$

所以当 $\begin{cases}a+b=1\\ -b=\frac{1}{2}\end{cases}$，即 $a=\frac{3}{2},b=-\frac{1}{2}$ 时，

局部截断误差为 $y_{n+1}-y(x_{n+1})=\frac{bh^3}{2}y'''(x_n)+O(h^4)=O(h^3)$

局部截断误差的主项为 $y_{n+1}-y(x_{n+1})=-\frac{h^3}{4}y'''(x_n)$，该方法为二阶方法。