2004《计算方法》答案

一、判断题(下列各题，你认为正确的，请在括号内打“√”，错的打“×”,每题 2 分，共 12 分)

1、任何近似值的绝对误差总是大于其相对误差 （×）

2、3 步 Adams 隐式法比 4 步 Adams 显式法的绝对稳定性要好。 （√）

3、在任何情况下，求解线性方程组时，Sidel 迭代法总是优于 Jacobi 迭代法。 （×）

4、设 $f(x)\in C^n[a,b]$，若 $f^{(n)}(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$，则 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=0$，其中 $x_i\in[a,b]$，$i=0,1,\cdots,n$ （√）

5、给定 n 个数据点，则至多构照 $n-1$ 次最小二乘多项式 （√）

6、数值求积公式的代数精确度越高，计算结果越可靠。 （×）

二、填空题(1、2、3 小题每空 1 分，其他题每空 2 分,共 20 分)

1、设 A 是一个 8×10 的矩阵，B 是一个 10×50 的矩阵，C 是一个 50×1 的矩阵，D 是一个 1×80 的矩阵,根据矩阵乘法结合率，$F=ABCD$ 可按如下公式计算

（1）$F=[A(BC)]D$ （2）$F=A[B(CD)]$

则公式<u>（1）</u>效率更高，其计算量为<u>1240</u>flops。

2、设数据 x_1,x_2 的相对误差限分别为 0.05 和 0.005，那么两数之商 $\frac{x_1}{x_2}$ 的相对误差限为 $\varepsilon_r(\frac{x_1}{x_2})=\underline{0.055}$。

3、 设 $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1=\underline{4}$，$\|A\|_\infty=\underline{5}$，$\|A\|_F=\underline{\sqrt{15}}$，$\rho(A)=\underline{4}$，$cond_\infty(A)=\underline{4}$。

4、计算 $\sqrt[3]{a}$ 的割线法迭代公式为 $\underline{x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3}{x_k^3-x_{k-1}^3}(x_k-x_{k-1})=\frac{(x_k+x_{k-1})x_kx_{k-1}}{x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2}}$

5 、 求 解 初 值 问 题 $\begin{cases}y'=\exp(-x^2)\\ y(0)=0\end{cases}$ 的 改 进 后 的 Euler 公 式 为 $\underline{y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[\exp(-x_n^2)+\exp(-x_{n+1}^2)]}$。

6、将正定矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 作 LL^T 分解，则 $L=\underline{\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & \sqrt{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \sqrt{\frac{13}{8}}\end{bmatrix}}$

7、解线性方程组$\begin{cases} 4X_1+3X_2=24 \\ 3X_1+4X_2-X_3=30 \\ -X_2+4X_3=-24 \end{cases}$的Seidel迭代格式是

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=6-\dfrac{3}{4}x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=3-\dfrac{9}{16}x_2^{(k)}+\dfrac{1}{4}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)}=-\dfrac{21}{4}-\dfrac{9}{64}x_2^{(k)}+\dfrac{1}{163}x_3^{(k)} \end{cases}$$ 。

8、用HouseHold矩阵H将矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$化为上三角阵R,则

H=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$, R=$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 4.8 \\ 0 & 0 & -1.4 \end{pmatrix}$

三、(14分)设线性方程组$Ax=b$的矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,证明对此矩阵Jacobi迭代法发散而Seidel迭代法收敛。

解：（1）$B_J=I-D^{-1}A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left|\lambda I-B_J\right|=\begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & 1/2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1/2 & -1/2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3+\frac{5}{4}\lambda$$

$\rho(B_J)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}>1$　所以 Jacobi 迭代法发散

（2）　$B_S=-(D+L)^{-1}U=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

$\left|\lambda I-B_S\right|=\lambda(\lambda+\dfrac{1}{2})^2$　　解得$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=\dfrac{-1}{2}$

$\rho(B_S)=\dfrac{1}{2}<1$　所以 Seidel 迭代法收敛

四、（12 分）$P(x)$ 为 n 次多项式，已知 $P(0)=2$，$P(1)=-1$，$P(2)=4$ 且 $P(x)$ 的所有三阶向前差分均为 1。

（1） 以 $0,1,2\cdots,n$ 为节点建立 $P(x)$ 的 n 阶 Newton 向前差分插值多项式 $N_n(x)$，并求 $P(x)-N_n(x)$

（2） 求 n 和 x^2 的系数。

解：因为 $P(x)$ 的所有三阶向前差分均为 1，所以其四阶以上向前差分均为 0，可知 $n\ge 3$

向前差分表为

x	0	1	2	3
y	2	-1	4	?
一阶差分		-3	5	?
二阶差分			8	?
三阶差分			1	

由于所有三阶向前差分均为 1，所以所有四阶向前差分均为 0，因此

$$N_n(x)=2-3x+\frac{8}{2!}x(x-1)+\frac{1}{3!}x(x-1)(x-2)=2-\frac{20}{3}x+\frac{7}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$$

由 $R_n(x)=P(x)-N_n(x)=P[0,1,2,\cdots,n,x]x(x-1)\cdots(x-n)$

因为 $n\ge 3$，所以 $P[0,1,2,\cdots,n,x]=0$，所以 $P(x)-N_n(x)=0$

$P(x)=N_n(x)=2-\dfrac{20}{3}x+\dfrac{7}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3$，所以 $n=3$，x^2 的系数为 $\dfrac{7}{2}$。

五、（8 分）用复合梯形求积公式计算 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ 的近似值 T_2 和 T_4，并使用外推法外推一次，得到更精确的近似值。

解：$T_2=\dfrac{1}{2}[f(-1)+2f(0)+f(1)]=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2}+2\times 1+\dfrac{1}{2}]=\dfrac{3}{2}$

$$T_4=\frac{1}{4}[f(-1)+2f(-\frac{1}{2})+2f(0)+2f(\frac{1}{2})+f(1)]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}+2\times\frac{4}{5}+2\times 1+2\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}]=\frac{31}{20}$$

外推

$$\frac{T_4-\left(\frac{1}{2}\right)^2 T_2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4T_4-T_2}{3}=\frac{\frac{31}{5}-\frac{3}{2}}{3}=\frac{47}{30}$$

六、（6 分）迭代公式 $x_{k+1}=\dfrac{x_k^2(x_k^2+6a)+a^2}{4x_k(x_k^2+a)}$ 收敛于 $\sqrt{a}$，计算出此公式的阶。

解： $x_{k+1}-\sqrt{a}=\dfrac{x_k^2(x_k^2+6a)+a^2}{4x_k(x_k^2+a)}-\sqrt{a}=\dfrac{(x_k-\sqrt{a})^4}{4x_k(x_k^2+a)}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{(x_k-\sqrt{a})^4}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{4x_k(x_k^2+a)}=\frac{1}{8a\sqrt{a}}$$

此公式的阶为 4

七、（8 分）已知一组数据表如下：

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	2	1	0	1	2

试用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2+cx^4$ 的四次拟合曲线。

解：$\varphi_0=1$，$\varphi_1=x^2$，$\varphi_2=x^4$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=5\quad(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\sum x_i^2=10$$

$$(\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_1,\varphi_1)=(\varphi_2,\varphi_0)=\sum x_i^4=34$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_2,\varphi_1)=\sum x_i^6=130\quad(\varphi_2,\varphi_2)=\sum x_i^8=514$$

$$(f,\varphi_0)=\sum y_i=6\quad(f,\varphi_1)=\sum x_i^2y_i=18\quad(f,\varphi_2)=\sum x_i^4y_i=66$$

$$\begin{pmatrix}5&10&34\\10&34&130\\34&130&514\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\18\\66\end{pmatrix}$$

解得 $a=0$，$b=\dfrac{7}{6}$，$c=\dfrac{-1}{6}$

四次拟合曲线为 $\varphi=\dfrac{x^2(7-x^2)}{6}$

$$\varphi(0)=0\quad\varphi(1)=\varphi(-1)=1\quad\varphi(2)=\varphi(-2)=2$$

平方误差为 0

八、（8 分）求 A、B、C 和 D 使得数值积分公式

$$\int_0^1 f(x)dx\approx Af(0)+Bf(1)+Cf'(0)+Df'(1)$$

的代数精确度尽可能高，并给出其最大代数精确度。（8 分）

解 ： $f(x)=1$时 $f'(x)=0$

$$\int_0^1 1dx = A+B=1 \qquad (1)$$

$f(x)=x$ 时 $f'(x)=1$

$$\int_0^1 xdx = B+C+D=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

$f(x)=x^2$ 时 $f'(x)=2x$

$$\int_0^1 x^2dx = B+2D=\frac{1}{3} \qquad (3)$$

$f(x)=x^3$ 时 $f'(x)=3x^2$

$$\int_0^1 x^3dx = B+3D=\frac{1}{4} \qquad (4)$$

由（1）（2）（3）（4）解得

$$A=\frac{1}{2} \qquad B=\frac{1}{2} \qquad C=\frac{1}{12} \qquad D=\frac{-1}{12}$$

即 $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{12}Cf'(0)-\frac{1}{12}f'(1)$

当 $f(x)=x^4$ 时 $f'(x)=4x^3$

$$\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5}\neq\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{12}\cdot 0-\frac{1}{12}\cdot 4=\frac{1}{6}$$

此公式代数精确度为 3

九、（10 分）证明初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的计算公式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{12}[5f_{n+1}+8f_n-f_{n-1}]$$

是三阶方法。

证明：将所有公式在 $x=x_n$ 处展开

$$y_{n+1}=y_n+hy'_n+\frac{h^2}{2}y''_n+\frac{h^3}{6}y'''_n+\frac{h^4}{24}y_n^{(4)}+\mathrm{O}(h^5)$$

$$f_{n+1}=y'_{n+1}=y'_n+hy''_n+\frac{h^2}{2}y'''_n+\frac{h^3}{6}y_n^{(4)}+\mathrm{O}(h^4)$$

$$f(x_n,y_n)=y'_n$$

$$f_{n-1}=y'_{n-1}=y'_n-hy''_n+\frac{h^2}{2}y'''_n-\frac{h^3}{6}y_n^{(4)}+\mathrm{O}(h^4)$$

局部截断误差为

$$T_{n+1}=y_{n+1}-y_n-\frac{h}{12}[5f_{n+1}+8f_n-f_{n-1}]$$

$$=y_n+hy'_n+\frac{h^2}{2}y''_n+\frac{h^3}{6}y'''_n+\frac{h^4}{24}y_n^{(4)}+\mathrm{O}(h^5)-y_n$$

$$-\frac{5h}{12}y'_n-\frac{5h^2}{12}y''_n-\frac{5h^3}{24}y'''_n-\frac{5h^4}{72}y_n^{(4)}+\mathrm{O}(h^5)-\frac{8h}{12}y'_n$$

$$+\frac{h}{12}y'_n-\frac{h^2}{12}y''_n+\frac{h^3}{24}y'''_n-\frac{h^4}{72}y_n^{(4)}+\mathrm{O}(h^5)$$

$$=(1-1)y_n+(1-\frac{5}{12}-\frac{8}{12}+\frac{1}{12})hy'_n+(\frac{1}{2}-\frac{5}{12}-\frac{1}{12})h^2y''_n$$

$$+(\frac{1}{6}-\frac{5}{24}+\frac{1}{24})h^3y'''_n+(\frac{1}{24}-\frac{5}{72}-\frac{1}{72})h^4y_n^{(4)}+\mathrm{O}(h^5)$$

$$=\frac{-1}{24}h^4y_n^{(4)}+\mathrm{O}(h^5)$$

局部截断误差为 h^4 的同阶无穷小，所以此方法是 3 阶的。

误差主项为 $-h^4y_n^{(4)}/24$

2005《计算方法》无答案

一、 **判断题**(下列各题，你认为正确的，请在括号内打“√”，错的打“×”,每题 1 分，共 5 分)

1、若近似数的有效数字的位数越多，误差就越小。（ ）

2、对于给定函数 $f(x)$， $P(x)$ 是 $f(x)$ 关于 $n+1$ 个节点的插值多项式，

随着节点个数的增多，$\left|f(x)-P(x)\right|$ 逐渐减少。（ ）

3、Runge—Kutta 方法是四阶的。（ ）

4、对任何对称矩阵 A，有 $\|A\|_1 \le \|A\|_2$ （ ）

5、只要矩阵 A 的行列式不为 0，则其肯定可以 LU 分解 （ ）

二、填空题(1 至 6 小题每空 1 分，其他题每空 2 分,共 20 分)

1、已知 x 的值，求 x^{128} 至少要______次乘法运算

2、设精确值 x=123.456 的近似值为 123.46,此近似值有____位有效数字,其相对误差限为_______。

3、设 $A=\begin{pmatrix} -12 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\|A\|_1=$____，$\|A\|_\infty=$_____，$\|A\|_F=$____。

4、用二分法求方程 $1-x-\sin x=0$ 在区间[0, 1]上的根，要使其精确到小数点后 3 位，二分次数至少要______次

5、设 $f(x)=3x^5-67x+43$，则 $f[1,2,3,4,5,6]=$_____，$f[1,2,3,4,5,6,7]=$________。

6、若复合梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$，要使截断误差不超过 0.5×10^{-4}，区间至少应分成___等分

7、设 $l_i(x)$ 关于节点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 的拉格朗日插值基函数 $(i=1,2,\ldots,n)$，则 $\sum_{i=0}^{n} l_i(0)=$_____。

8、用改进欧拉方法求解微分方程初值问题 $y'=-\dfrac{0.8y}{2+3x}, y(0)=1$ 的迭代关系式是

_________________________。

9、矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 10 & 11 & 14 \\ 15 & 34 & 30 \end{pmatrix}$ 的LDR分解式为 $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

10、两点高斯公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx$ ______________________________。

三、(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & a & 0 \\ b & 5 & b \\ 0 & a & 10 \end{pmatrix}, \det A \ne 0$，给出用 Jacobi 法和 Seidel 迭代法求解方程组 $A\vec{x}=\vec{d}$ 收敛的充要条件。

四、（8 分）给定数据

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-0.25	0.5	1.25	2	8.75

求其以节点-2，-1，0，1，2 的向前差分多项式。

五、（8 分）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$ 的函数值表如下：

x	0	0.25	0.50	0.75	1
$f(x)$	1	0.9896159	0.95889511	0.9088517	0.8414710

(1) 用复合 Simpson 求积公式计算 S_2 和 S_4，并使用外推法外推一次，得到更精确的近似值。

(2) 用 Cotes 公式计算此积分,并和（1）的结果对比，说明对比结论。

六、（5 分）设 x^* 为 $f(x)=0$ 的根，设 $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，求证迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)}, \quad k=0,1,\ldots$$

至少平方收敛，不管 x^* 是否是重根。

七、（12 分）已知一组数据表如下：

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	1	2	4

试用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2+cx^3$ 的三次拟合曲线。(注意没有 x 的一次项)

八、（10 分）确定求积公式 $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx Af(0)+Bf(1)+Cf'(0)+Df'(1)$ 中的系数 A,B,C,D 使其代数精度尽可能高，求其代数精度。

计算方法研究生试题（2006）答案

一、填空题（1-7 每空 2%*10，8-9 每空 3%*10）

1、数值 x^* 的近似值 $x = 0.1234\times10^{-3}$，若满足 $|x - x^*| \le$（0.5×10^{-7}），则称 x 有 4 位有效数字.

2、已知 $X = (3,4,0)^T$，$A = XX^T$ 则范数 $\|X\|_2 = 5$，$\|A\|_1 = (28)$.

3、解非线性方程 $f(x) = 0$ 的牛顿迭代法在 3 重根 x^* 附近是（线性）收敛的。

4、若 $f(x) = 10x^{10} - 9x^6 + 8x$，则其 10 阶差商 $f[0,1,\cdots,10] = 10$

5、求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = e^{-x}y + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的梯形公式为

$y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[e^{-x_n}y_n + x_n + e^{-x_{n+1}}y_{n+1} + x_{n+1}]$ 或 $y_{n+1} = \dfrac{(2 + he^{-x_n})y_n + h[x_n + x_{n+1}]}{2 - he^{-x_{n+1}}}$ 。

6、若系数矩阵 A 是（严格对角占优）阵，则求解线性方程组 $Ax = b$ 的雅可比迭代法和高斯—赛德尔迭代法都收敛。

7、复化抛物线公式的收敛阶是（4）。

8、给定矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$，则其雅可比迭代矩阵为 $B_j =$（$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$），高斯—赛德尔迭代矩阵为 $B_s =$（$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix}$）。

9、利用 Romberg 序列，近似计算 $\int_1^2 f(x)dx$，若 $T_1^{(0)} = 2$，$f(1.5) = -1$，则 $T_2^{(0)} = (0)$.

二、（10 分）使用 LU 分解求解方程

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

解：$u_{11}=3 \quad u_{12}=5 \quad u_{13}=5 \quad u_{14}=5$

$l_{21}=3/3=1 \quad l_{31}=3/3=1 \quad l_{41}=3/3=1$

$u_{22}=1-1*5=-4 \quad u_{23}=0-1*5=-5 \quad u_{24}=1-1*5=-4$

$l_{32}=\dfrac{1-1*5}{-4}=1 \quad l_{42}=\dfrac{4-1*5}{-4}=0.25$

$u_{33}=4-1*5-1*(-5)=4 \quad u_{34}=4-1*5-1*(-4)=3$

$l_{43}=\dfrac{2-1*5-0.25*(-5)}{4}=-0.4375$

$u_{44}=3-1*5-0.25*(-4)-(-0.4375)*3=0.3125$

$$\begin{pmatrix}3&5&5&5\\3&1&0&1\\3&1&4&4\\3&4&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&0.25&-0.4375&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&5&5\\0&-4&-5&-4\\0&0&4&3\\0&0&0&0.3125\end{pmatrix}$$

$y_1=7 \quad y_2=0-1*7=-7 \quad y_3=2-1*7-1*(-7)=2$

$y_4=4-1*7-0.25*(-7)-(-0.4375)*2=-0.375$

$d=\dfrac{-0.375}{0.3125}=-1.2 \quad c=\dfrac{2-3*(-1.2)}{4}=1.4$

$b=\dfrac{-7-(-5)*1.4-(-4)*(-1.2)}{-4}=1.2$

$a=\dfrac{7-5*1.2-5*1.4-5*(-1.2)}{3}=0$

三、（10 分）已知正弦函数表:

x	21°	22°	24°	25°
f(x)	0.35537	0.37641	0.40674	0.42262

用 Newton 插值求 $\sin 23^0$ 的近似值，并估计误差。（注 $\sin x^0=\sin\dfrac{\pi x}{180}$）

解：

x	f(x)	一阶差商	二阶差商	三阶差商
21	0.35537			
22	0.37641	0.02104		
24	0.40674	0.015165	-0.0019583	
25	0.42262	0.01588	0.00023833	0.000549167

$$\sin 23^0 \approx 0.35537 + 0.02104*(23-21) - 0.0019583*(23-21)*(23-22)$$
$$+0.000549167*(23-21)*(23-22)*(23-24) = 0.392435$$

$$R = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(23-21)(23-22)(23-24)(23-25) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{6}$$

其中 $21^0 < \xi < 25^0$

注意到 $f(x) = \sin(x^0) = \sin(\frac{\pi x}{180})$ $\quad f^{(4)}(x) = \left(\frac{\pi}{180}\right)^4 \sin(\frac{\pi x}{180})$

误差 $|\boldsymbol{R}| < \left(\frac{\pi}{180}\right)^4 \frac{\sin(25^0)}{6} = 0.6535943147 \times 10^{-8}$

或 $|\boldsymbol{R}| < \left(\frac{\pi}{180}\right)^4 \frac{1}{6} = 1.54653 \times 10^{-8}$

注实际值 $\sin 23^0 \approx 0.39073112848927$

四、（10 分）使用牛顿迭代法求解方程 $x^3 + x = 1$ 在区间 $[0,1]$ 上的解，要求精确到小数点后 3 位。

解：$f(x) = x^3 + x - 1 \qquad f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad f''(x) = 6x > 0$

迭代公式 $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$

$f(0) = -1 \qquad f(1) = 1$ 　选择初始点需要 $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$

（1）取 $x_0 = 1 \qquad x_1 = 0.75 \qquad x_2 = 0.6860 \qquad x_3 = 0.6823 \qquad x_4 = 0.6823$

$|x_4 - x_3| < 0.5 \times 10^{-3} \qquad x^* \approx 0.682$

（2）取 $x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 0.75 \quad x_3 = 0.6860 \quad x_4 = 0.6823 \quad x_5 = 0.6823$

$|x_5 - x_4| < 0.5 \times 10^{-3} \qquad x^* \approx 0.682$

（3）取 $x_0 = 0.5 \quad x_1 = 0.7143 \quad x_2 = 0.6832 \; x_3 = 0.6823 \quad x_4 = 0.6823$

$|x_4 - x_3| < 0.5 \times 10^{-3} \qquad x^* \approx 0.682$

五、（12 分）找出合适的 A_1, A_2, x_1 使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(-1) + A_2 f(-x_1) + A_2 f(x_1) + A_1 f(1)$$

代数精度尽可能高。并给出此最高代数精确度。

解：令 $f(x)=1 \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$

$A_1 f(0) + A_2 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_1 f(1) = 2A_1 + 2A_2$

令 $f(x)=x \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} xdx = 0$

$A_1 f(-1) + A_2 f(x_1) + A_2 f(-x_1) + A_1 f(1) = A_2(x_1 - x_1) = \mathbf{0}$

令 $f(x)=x^2 \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} x^2 dx = \dfrac{2}{3}$

$A_1 f(-1) + A_2 f(x_1) + A_2 f(-x_1) + A_1 f(1) = 2A_1 + 2A_2 x_1^2$

令 $f(x)=x^3 \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$

$A_1 f(-1) + A_2 f(x_1) + A_2 f(-x_1) + A_1 f(1) = A_2(x_1^3 - x_1^3) = 0$

令 $f(x)=x^4 \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \dfrac{2}{5}$

$A_1 f(-1) + A_2 f(x_1) + A_2 f(-x_1) + A_1 f(1) = 2A_1 + 2A_2 x_1^4$

令 $\boldsymbol{f(x)=x^5} \quad \boldsymbol{\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^5 dx = 0}$

$A_1 f(-1) + A_2 f(-x_1) + A_2 f(x_1) + A_1 f(1) = -A_1 + A_2(-x_1)^5 + A_2 x_1^5 + A_1 = 0$

若原求积公式有 4 次以上的代数精确度，需要

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 & (1) \\ 2A_1 + 2A_2 x_1^2 = \dfrac{2}{3} & (2) \\ 2A_1 + 2A_2 x_1^4 = \dfrac{2}{5} & (3) \end{cases}$$

由（1）得 $A_1 = 1 - A_2$ （4）

将 $A_1 = 1 - A_2$ 代入（2）（3）

得 $2 - 2A_2 + 2A_2 x_1^2 = \dfrac{2}{3}$ 和 $2 - 2A_2 + 2A_2 x_1^4 = \dfrac{2}{5}$

即 $x_1^2 = 1 - \dfrac{2}{3A_2}$ 和 $x_1^4 = 1 - \dfrac{4}{5A_2}$

所以$1-\frac{4}{5A_2}=\left(1-\frac{2}{3A_2}\right)^2=1-\frac{4}{3A_2}+\frac{4}{9A_2^2}$

求解得 $A_2=\frac{5}{6}$　所以 $A_1=\frac{1}{6}$　　$x_1=\pm\sqrt{1-\frac{2}{3A_2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

即$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\frac{1}{6}f(-1)+\frac{5}{6}f(\frac{-1}{\sqrt{5}})+\frac{5}{6}f(\frac{1}{\sqrt{5}})+\frac{1}{6}f(1)$

由前面的分析求解过程知当 $f(x)=1,x,x^2,x^3,x^4,x^5$ 时等式左右均相等

而 $f(x)=x^6$ 时，$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^6dx=\frac{2}{7}$

而$\frac{1}{6}f(-1)+\frac{5}{6}f(\frac{-1}{\sqrt{5}})+\frac{5}{6}f(\frac{1}{\sqrt{5}})+\frac{1}{6}f(1)=\frac{1}{6}[1+5\frac{1}{125}+5\frac{1}{125}+1]=\frac{26}{75}\neq\frac{2}{7}$

所以$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx A_1f(-1)+A_2f(-x_1)+A_2f(x_1)+A_1f(1)$

在 $A_1=\frac{1}{6}$，$A_2=\frac{5}{6}$ 和　$x_1=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ 时达到最高代数精确度 5。

六、（10 分）找出合适的四次多项式$\varphi(x)$，使得$\varphi(i)=i\quad 0\le i\le 2$

且$\varphi'(1)=2$，$\varphi'(2)=1$。

解：因为$\varphi(i)=i\quad 0\le i\le 2$

所以 $\varphi(x)-x=\psi(x)x(x-1)(x-2)$

又$\varphi(x)$为四次多项式，所以$\psi(x)$为一次多项式，设$\psi(x)=ax+b$，

则$\varphi(x)=x+(ax+b)x(x-1)(x-2)=x+(ax+b)(x^3-3x^2+2x)$

$\varphi'(x)=1+ax(x-1)(x-2)+(ax+b)(x-1)(x-2)+(ax+b)x(x-2)+(ax+b)x(x-1)$

$\varphi'(1)=1-(a+b)=2\qquad\Rightarrow a+b=-1$

$\varphi'(2)=1+2(2a+b)=4a+2b+1=1\qquad\Rightarrow 2a+b=0$

解得$a=1,b=-2$

所以$\varphi(x)=x+(x-2)x(x-1)(x-2)=x^4-5x^3+8x^2-3x$

七、（10 分）取 h=0.1，用改进欧拉法求初值问题

$$\begin{cases} y' = 1 - x + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

在 x=0.1，0.2，0.3 处的近似值. 计算过程保留 4 位小数.

解：$\bar{y}_{n+1} = y_n + h(1 - x_n + y_n^2)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(1 - x_n + y_n^2 + 1 - x_{n+1} + \bar{y}_{n+1}^2\right)$$

$$y_0 = 1 \quad \bar{y}_1 = 1 + 0.1(1 - 0 + 1^2) = 1.2$$

$$y_1 = 1 + 0.05\left(1 - 0 + 1 + 1 - 0.1 + 1.44\right) = 1.217$$

$$\bar{y}_2 = 1.217 + 0.1(1 - 0.1 + 1.217^2) = 1.4551$$

$$y_2 = 1.217 + 0.05\left(1 - 0.1 + 1.217^2 + 1 - 0.2 + 1.4551^2\right) = 1.4819$$

$$\bar{y}_3 = 1.4819 + 0.1(1 - 0.2 + 1.4819^2) = 1.7815$$

$$y_3 = 1.7815 + 0.05\left(1 - 0.2 + 1.4819^2 + 1 - 0.3 + 1.7815^2\right) = 1.8254$$

八、（13 分）用二次多项式最小二乘拟合如下数据

x	−3	−1	0	1	3
y	1.75	2.45	3.81	4.80	7.01

(1)利用正交化方法求这些结点的前三个正交多项式。

(2)利用正交多项式求出最小二乘拟合的二次多项式，并计算出其平方误差。

解：（1）$\varphi_0(x) = 1 \quad (\varphi_0, \varphi_0) = 5 \quad (x\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=1}^{5} x_i = 0 \quad \alpha_1 = 0$， $\varphi_1 = x$。

$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{6} x_i^{\,2} = 20$，$(x\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{6} x_i^{\,3} = 0$，$\alpha_2 = 0$。

$$\beta_1 = \frac{(\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = 4, \quad \varphi_2(x) = x\varphi_1(x) - \beta_1\varphi_0(x) = x^2 - 4 \quad 。$$

（2）

x	−3	−1	0	1	3
y	1.75	2.45	3.81	4.80	7.01
$\boldsymbol{\varphi_0}$	1	1	1	1	1
φ_1	−3	−1	0	1	3
φ_2	5	**-3**	**-4**	**-3**	5

$$(\varphi_2,\varphi_2)=5^2+(-3)^2+(-4)^2+(-3)^2+5^2=84$$

$$(f,\varphi_0)=1.75+2.45+3.81+4.80+7.01=19.82$$

$$(f,\varphi_1)=1.75*(-3)+2.45*(-1)+3.81*0+4.80*1+7.01*3=18.13$$

$$(f,\varphi_2)=1.75*5+2.45*(-3)+3.81*(-4)+4.80*(-3)+7.01*5=6.81$$

$$c_0=\frac{19.82}{5}=3.964 \qquad c_1=\frac{18.13}{20}=0.9065 \qquad c_2=\frac{6.81}{84}\approx 0.08107$$

$$\varphi(x)=3.964+0.9065x+0.08107(x^2-4)$$
$$\approx 3.63972+0.9065x+0.08107x^2$$

$$\varphi(-3)=1.64985 \qquad \varphi(-1)=2.81429 \qquad \varphi(0)=3.63972$$

$$\varphi(1)=4.62729 \qquad \varphi(3)=7.08885$$

平方误差$=(1.75-1.64985)^2+(2.45-2.81429)^2+(3.81-3.63972)^2$

$$+(4.80-4.62729)^2+(7.01-7.08885)^2=0.2077785716$$

注:若使用分数计算

$$c_0=\frac{19.82}{5}=\frac{991}{250} \qquad c_1=\frac{18.13}{20}=\frac{1813}{2000} \qquad c_2=\frac{6.81}{84}=\frac{227}{2800}$$

$$\varphi(x)=\frac{991}{250}+\frac{1813}{2000}x+\frac{227}{2800}\left(x^2-4\right)=\frac{12739}{3500}+\frac{1813}{2000}x+\frac{227}{2800}x^2$$

$$\varphi(-3)=\frac{11549}{7000} \qquad \varphi(-1)=\frac{19700}{7000} \qquad \varphi(0)=\frac{25478}{7000} \qquad \varphi(1)=\frac{32391}{7000} \qquad \varphi(3)=\frac{49622}{7000}$$

平方误差$=\left(\frac{175}{100}-\frac{11549}{7000}\right)^2+\left(\frac{245}{100}-\frac{19700}{7000}\right)^2+\left(\frac{381}{100}-\frac{25478}{7000}\right)^2$

$$+\left(\frac{480}{100}-\frac{32391}{7000}\right)^2+\left(\frac{701}{100}-\frac{49622}{7000}\right)^2=\frac{33277}{14000}\approx 0.2376928571$$

《计算方法》2007 答案

一、填空题(每空 2 分,共 30 分)

1、数据 x 的相对误差限为1％，那么 x^3 的相对误差限大约为 3％。(填入最接近的整数)。

2、设 A 是一个 5×3 的矩阵， B 是一个 3×10 的矩阵， C 是一个 10×2 的矩阵， D 是一个 2×8 的矩阵,根据矩阵乘法结合率， $F=ABCD$ 可按如下公式计算

（1） $F=[A(BC)]D$ （2） $F=[(AB)(CD)]$

则公式（1）效率更高，其计算量为 170flops。

3、 设 $A=\begin{bmatrix}7 & -3\\ -5 & 2\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1=10$， $\|A\|_\infty=12$， $cond_\infty(A)=120$

4、用 Gauss-Seidel 迭代法解方程组 $\begin{cases}x_1+ax_2=4\\ 2ax_1+x_2=-3\end{cases}$，其中 $a\in R$。

方法收敛的充要条件是 a 满足 $|a|\le\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5、迭代格式 $x_{k+1}=\frac{2}{3}x_k+\frac{1}{x_k^2}$ 收敛于 $x^*=\sqrt[3]{3}$，此迭代收敛的阶数为 2。

6、若 $f(x)=x^5$-$4x^3$+$10x$-4， 则其 5 阶差商 f[-3,-2,-1,0,1,2] =1,

其 6 阶差商 f[-3,-2,-1,0,1,2,3]= 0

7、若复合梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$，要使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-4}$，积分区间至少应分成 41 等分。

8、要使求积公式 $\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{4}f(0)+A_1f(x_1)$ 具有 2 次代数精度，则 $A_1=\frac{3}{4}$ ，$x_1=\frac{2}{3}$。

9、求解初值问题 $y'=-50(y+x),y(0)=1$ 时，要求计算过程数值稳定，使用欧拉公式求解时，步长h不超过0.04 ，若用改进欧拉方法，步长h<0.04。(注：写成 ≤ 0.04 不算错)

二、(10 分) 试用 doolittle 分解求解矩阵方程组

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & 4 & 3\\ 12 & 9 & 15 & 11\\ 8 & 16 & 22 & 17\\ 4 & 8 & 18 & 22\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 13\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

解：$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 3 \\ 12 & 9 & 15 & 11 \\ 8 & 16 & 22 & 17 \\ 4 & 8 & 18 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 3 & 1 & & \\ 2 & 4 & 1 & \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 3 \\ & 3 & 3 & 2 \\ & & 2 & 3 \\ & & & 3 \end{pmatrix}$ （6 分，LU 各 3 分）

先解 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 3 & 1 & & \\ 2 & 4 & 1 & \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 得到 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ （2 分）

先解 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 3 \\ & 3 & 3 & 2 \\ & & 2 & 3 \\ & & & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ 得到 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ （2 分）

三、（10 分）给出如下函数表；选择合适的结点，使用 **2 次 Lagrange 插值公式**分别近似计算 ln(0.75)与 $e^{0.75}$ 的值，使得误差尽可能小。最后给出各个插值的误差范围。

x	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**
$\ln x$	**－0.693147**	**-0.510826**	**-0.356675**	**-0.223144**
e^x	**1.648721**	**1.822119**	**2.013753**	**2.225541**

（计算结果保留 6 位小数）。若采用相同的结点，换用 Newton **插值公式,**计算结果一样吗？

解：（注：若使用错误节点，最多 1 分，

使用 2 次 Lagrange 插值公式，简单计算过程如下：

$$l_0(x) = \frac{(x-0.7)(x-0.8)}{(0.6-0.7)(0.6-0.8)}, \qquad l_0(0.75) = -\frac{1}{8}$$ （1 分）

$$l_1(x) = \frac{(x-0.6)(x-0.8)}{(0.7-0.6)(0.7-0.8)}, \qquad l_1(0.75) = \frac{3}{4}$$ （1 分）

$$l_2(x) = \frac{(x-0.6)(x-0.7)}{(0.8-0.6)(0.8-0.7)}, \qquad l_0(0.75) = \frac{3}{8}$$ （1 分）

$$\ln(0.75) \cong -\frac{1}{8}\ln(0.6) + \frac{3}{4}\ln(0.7) + \frac{3}{8}\ln(0.8) = -0.287332$$ （2 分）

$$e^{0.75} \cong -\frac{1}{8}e^{0.6} + \frac{3}{4}e^{0.7} + \frac{3}{8}e^{0.8} = 2.11712775$$ （2 分）

（注：若使用插值公式

$$L_2(x)=y(0.6)\frac{(x-0.7)(x-0.8)}{(0.6-0.7)(0.6-0.8)}+y(0.7)\frac{(x-0.6)(x-0.8)}{(0.7-0.6)(0.7-0.8)}$$
$$+y(0.8)\frac{(x-0.6)(x-0.7)}{(0.8-0.7)(0.8-0.7)}$$

计算，公式写对 1 个 2 分，写对 2 个 3 分，计算结果仍是 1 个 2 分，）

$$R(x)=\frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x-0.6)(x-0.7)(x-0.8) \qquad R(0.75)=\frac{-f^{(3)}(\xi_x)}{16000}$$

对 $f(x)=\ln x$ $\qquad f^{(3)}=\frac{2}{x^3} \qquad R(0.75)=\frac{-1}{8000\xi^3}$ $\qquad$ 其中 $0.6<\xi<0.8$

所以误差 $\quad R(0.75)<\frac{-1}{8000\times(0.8)^3}=\frac{-1}{4096}=\text{-0.000244140625}$

$R(0.75)>\frac{-1}{8000\times(0.6)^3}=\frac{-1}{1728}\approx\text{-0.005787037037}$ （误差 1 分）

若误差使用 $|R(0.75)|<\frac{1}{8000\times(0.6)^3}=\frac{1}{1728}\approx 0.005787037037$ 算对

注：实际值：ln(0.75)=－0.287682， 近似值：p2(0.75)=－0.287332，实际误差：－0.000350

对 $f(x)=e^x$ $\qquad f^{(3)}=e^x \qquad R(0.75)=\frac{-e^{\xi}}{16000}$ $\qquad$ 其中 $0.6<\xi<0.8$

所以误差 $\quad R(0.75)>\frac{-e^{0.8}}{16000}\approx\frac{-2.225541}{16000}\approx-0.000139$

$R(0.75)<\frac{-e^{0.6}}{16000}\approx\frac{-1.822119}{16000}\approx\text{-0.000114}$ （误差 1 分）

若误差使用 $|R(0.75)|<\frac{e^{0.8}}{16000}\approx 0.000139$ 算对

注：实际值：exp(0.75)=2.117000， 近似值：p2(0.75)=2.11712775，实际误差：－0.00012775

若采用相同的结点，换用 Newton **插值公式**,计算结果是一样的。 （1 分）

四、（10 分）已知某连续可微函数 $f(x)$ 的几点函数值如下表

x	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	1	1.649	2.718	4.482	7.389

（1）使用复化梯形求积公式及其外推公式估计 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，使估计值尽可能准确.

（2）使用中心差商公式及其外推公式估计 $f'(1)$，使估计值尽可能准确.

（注：每步计算结果保留小数点后 4 位。）

解　（注：各数据若仅在万分位上出错且错误数字不错过 2，可认为此数正确）

（1） $T_1=\frac{2-0}{2}[1+7.389]=8.389$　　（1 分）

$T_2=\frac{2-0}{4}[1+2\times 2.718+7.389]=6.9125$　　（1 分）

$T_4=\frac{2-0}{8}[1+2\times(1.649+2.718+4.482)+7.390]=6.52175\approx 6.5218$　　（1 分）

外推第一层

$S_1=T_2+\frac{T_2-T_1}{3}=6.9125+\frac{6.9125-8.389}{3}\approx 6.4203$　　（1 分）

$S_2=T_4+\frac{T_4-T_2}{3}=6.5218+\frac{6.5218-6.9125}{3}\approx 6.3916$　　（1 分）

外推第二层

$C_1=S_2+\frac{S_2-S_1}{15}=6.3916+\frac{6.3916-6.4203}{3}\approx 6.3897$　（1 分）

(2) $f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=G_1(h)$　（1 分）

$G_1(1)=\frac{7.389-1}{2}=3.1945$　（1 分）　　$G_1(0.5)=\frac{4.482-1.649}{2\times 0.5}=2.833$　（1 分）

外推一层

$G_2(1)=\frac{4\times G_1(0.5)-G_1(1)}{3}=\frac{4\times 2.833-3.1945}{3}=2.7125$　　（1 分）

注：实际值是 $f(x)=e^x$　$\int_0^2 e^x dx=e^2-1\approx 6.38905601$　　$f'(1)=e\approx 2.71828.....$

五、（10 分）用牛顿迭代求方程 $3x^2-e^x=0$ 在区间[3，4]内的根，使误差不超过 0.001。

解：$f(x)=3x^2-e^x$　　$f'(x)=6x-e^x$　　（1 分）

牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{3x_k^2-e^{x_k}}{6x_k-e^{x_k}}=\frac{3x_k^2+(1-x_k)e^{x_k}}{6x_k-e^{x_k}}\quad（3 分）$$

（1）取 $x_0=3$　x1 =6.3154　x2 =5.4741　x3 =4.7516　x4 =4.2011　x5 =3.8687

x6 =3.7479　x7 =3.7333　x8 =3.7331　x9 =3.7331

（每算一个 xi 得 2 分，最多 6 分

（2）取 $x_0=4$　x1=3.7844（2 分）x2 =3.7354（2 分）x3 =3.7331（1 分）x4=3.7331（1 分）

（3）取 $x_0=3.5$　x1= 3.8000（2 分）x2=3.7369（2 分）x3 =3.7331（1 分）x4=3.7331（1 分）

最终取 $x^*\approx 3.7331$　　实际上 $x^*\approx 3.733079028$

七、(10 分七、(10 分)已知一组数据表如下:

x_i	**−4**	**−2**	**1**	**2**	**3**
y_i	**23**	**5**	**1**	**5**	**13**

试用最小二乘法求其形如 $\varphi(x)=a+bx^2$ 的二次拟合曲线并给出其平方误差。

解: $\varphi_0=1$, $\varphi_1=x^2$, (1 分)

$$(\varphi_0,\varphi_0)=5 \quad (\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\sum x_i^2=34 \quad (\varphi_1,\varphi_1)=\sum x_i^4=370$$

$$(f,\varphi_0)=\sum y_i=47 \qquad (f,\varphi_1)=\sum x_i^2 y_i=526$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 34 \\ 34 & 370 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 47 \\ 526 \end{pmatrix}$$ (4 分,每个数字 1 分)

解得 $a=\dfrac{-247}{347}\approx-0.711816$, $b=\dfrac{516}{347}\approx1.487032$ (2 分,a、b 各 1 分)

二次拟合曲线为 $\varphi(x)=\dfrac{516x^2-247}{347}$ (1 分)

$$\varphi(-4)=\frac{8009}{347}=23\frac{28}{347} \qquad \varphi(\pm2)=\frac{1817}{347}=5\frac{82}{347} \qquad \varphi(1)=\frac{269}{347}=1-\frac{78}{347}$$

$$\varphi(3)=\frac{4397}{347}=13-\frac{114}{347}$$

$$\text{平方误差}=\frac{\sqrt{28^2+82^2+78^2+82^2+114^2}}{347}=\frac{\sqrt{33312}}{347}\approx 0.525982$$ (2 分)

八、(10 分)已知函数表

x	−1	0	1
y	−1	4	2
y’	1		−1

找到合适的四次多项式 $p(x)$,使得 $p(i)=y(i) \quad i=-1,0,1$ 及 $p'(j)=y'(j) \quad j=-1,1$

解:(方法 1)使用重结点差商

X	Y	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
−1	−1				
−1	−1	1			
0	4	5	4		

1	2	−2	−3.5	−3.75	
1	2	−1	1	2.25	3

(每个差商 1 分，最多 8 分）

$p(x)=-1+(x+1)+4(x+1)^2-3.75(x+1)^2x+3(x+1)^2x(x-1)$ （2 分）

$=4+2.25x-6.5x^2-0.75x^3+3x^4$

（方法 2）使用待定系数法

待定系数法 1

设 $p(x)=-1+(x+1)+a(x+1)^2+b(x+1)^3+c(x+1)^4$ （2 分）

$p'(x)=1+2a(x+1)+3b(x+1)^2+4c(x+1)^3$ （1 分）

$p(0)=-1+1+a+b+c=4 \quad \Rightarrow a+b+c=4$ （1）

$p(+1)=-1+2+4a+8b+16c=2 \quad \Rightarrow a+2b+4c=0.25$ （2）

$p'(+1)=1+4a+12b+32c=-1 \quad \Rightarrow a+3b+8c=-0.5$ （3）

解方程（1）（2）（3）得 $a=13.75, b=-12.75, c=3$ （每个方程 1 分，解出每个系数 1 分）

$p(x)=-1+(x+1)+13.75(x+1)^2-12.75(x+1)^3+3(x+1)^4=4+2.25x-6.5x^2-0.75x^3+3x^4$

（2 分，不需要展开）

待定系数法 2 设 $p(x)=4+ax+bx^2+cx^3+dx^4$ （1 分）

$p'(x)=a+2bx+3cx^2+4dx^3$ （1 分）

$p(-1)=4-a+b-c+d=-1 \quad \Rightarrow -a+b-c+d=-5$ （1）

$p(+1)=4+a+b+c+d=2 \quad \Rightarrow a+b+c+d=-2$ （2）

$p'(-1)=a-2b+3c-4d=1$ （3）

$p'(+1)=a+2b+3c+4d=-1$ （4）

解方程（1）（2）（3）（4）得 $a=2.25, c=-0.75, b=-6.5, d=3$

（每个方程 1 分，解出每个系数 1 分）

$p(x)=4+2.25x-6.5x^2-0.75x^3+3x^4$

待定系数法 3

设 $p(x)=2-(x-1)+a(x-1)^2+b(x-1)^3+c(x-1)^4$ （2 分）

$p'(x)=-1+2a(x-1)+3b(x-1)^2+4c(x-1)^3$ （1 分）

$p(-1)=2-(-2)+4a-8b+16c=-1 \quad \Rightarrow a-2b+4c=-1.25$ （1）

$p(0)=2-(-1)+a-b+c=4 \quad \Rightarrow a-b+c=1$ （2）

$p'(-1)=-1-2a+12b-32c=1 \quad \Rightarrow a-6b+16c=-1$ （3）

解方程（1）（2）（3）得 $a=9.25, b=11.25, c=3$ （每个方程 1 分，解出每个系数 1 分）

$$p(x)=2-(x-1)+9.25(x+1)^2+11.25(x+1)^3+3(x+1)^4=4+2.25x-6.5x^2-0.75x^3+3x^4$$

（2 分，不需要展开）

（方法 3） 辅助函数法

先仅考虑函数值，作出其插值函数

$$L_2(x)=(-1)\times\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}+4\times\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}+2\times\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}=4+\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}x^2$$ （2 分）

设 $p(x)=L_2(x)+q(x)$ 则有 $q(-1)=q(0)=q(1)=0$，所以 $q(x)=(x+1)x(x-1)r(x)$

由 $p(x)$ 为四次多项式，知 $r(x)$ 为一次多项式，设 $r(x)=a+bx$，则

$$p(x)=4+\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}x^2+(a+bx)(x^3-x)$$ （1 分）

$$p'(x)=\frac{3}{2}-7x+b(x^3-x)+(a+bx)(3x^2-1)$$ （1 分）

$p'(-1)=\frac{3}{2}+7+2(a-b)=1 \quad \Rightarrow a-b=-3.75$ （1）

$p'(1)=\frac{3}{2}-7+2(a+b)=-1 \quad \Rightarrow a+b=2.25$ （2）

解方程（1）（2）得 $a=-0.75, b=3$（每个方程 1 分，解出每个系数 1 分）

$$p(x)=4+\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}x^2+(-\frac{3}{4}+3x)(x^3-x)=4+\frac{9}{4}x-\frac{13}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3+3x^4$$ （2 分）

（方法 4） 使用基函数

$$p(x)=-1\times a(x)+4\times b(x)+2\times c(x)-1\times d(x)+1\times e(x)$$

	a(x)	b(x)	c(x)	d(x)	e(x)
-1 处的函数值	1	0	0	0	0
0 处的函数值	0	1	0	0	0
1 处的函数值	0	0	1	0	0
-1 处的导数值	0	0	0	1	0
1 处的导数值	0	0	0	0	1

得（1）$a(x)=(\alpha_1+\beta_1 x)x(x-1)^2$　　$a(-1)=-4(\alpha_1-\beta_1)=-1$　　$a'(-1)=8\alpha_1-12\beta_1=0$

$$a(x)=\frac{1}{4}(3+2x)x(x-1)^2$$

（2）$b(x)=\alpha_2(x+1)^2(x-1)^2$　　$b(0)=\alpha_2=1$　　$b(x)=(x+1)^2(x-1)^2$

（3）$c(x)=(\alpha_3+\beta_3 x)x(x+1)^2$　　$c(1)=4(\alpha_3+\beta_3)=1$　　$c'(1)=8\alpha_3+12\beta_3=0$

$$c(x)=\frac{1}{4}(3-2x)x(x+1)^2$$

（4）$d(x)=\alpha_4(x+1)x(x-1)^2$　　$d'(-1)=-4\alpha_4=1$　　$d(x)=\frac{1}{4}(x+1)x(x-1)^2$

（5）$e(x)=\alpha_5(x-1)^2x(x+1)$　　$e'(1)=4\alpha_5=1$　　$e(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2x(x-1)$

$$p(x)=-\frac{1}{4}(3+2x)x(x-1)^2+4(x+1)^2(x-1)^2+\frac{2}{4}(3-2x)x(x+1)^2-\frac{1}{4}(x+1)x(x-1)^2+\frac{1}{4}(x-1)x(x+1)^2$$

$$=4+\frac{9}{4}x-\frac{13}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3+3x^4$$　　每个基函数 2 分

八、（10 分）用四阶经典龙格—库塔公式求解初值问题

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{1+x},0\le x\le 0.6,y(0)=1,h=0.2，$$

并与精确解 $y^*=(1+x)^3$ 比较其误差。（计算结果保留小数点后 5 位）

解：建立迭代公式：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)=y_n+\frac{0.1}{3}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$　　（1 分）

$$k_1=\frac{3y_n}{1+x_n},k_2=\frac{3(y_n+0.1k_1)}{1.1+x_n},k_3=\frac{3(y_n+0.1k_2)}{1.1+x_n},k_4=\frac{3(y_n+0.2k_3)}{1.2+x_n}\qquad n=0,1,2$$

x_n	y_n	k1	k2	k3	k4	实际值	误差
0	1	3	3.545455	3.694215	4.347107	1	0
0.2	1.72755	4.318875	4.983317	5.136650	5.903314	1.728	0.00045
0.4	2.74295	5.87775	6.66145	6.81819	7.699853	2.744	0.00105
0.6	4.09418					4.096	0.00182

每步迭代 3 分（其中每个 k_n 0.5 分，误差 1 分）

考虑如下评分标准，供各位老师参考，可根据改卷情形自行修订

（注：每步中 y_n 不计分数，因为若 k_n 全算对，一般 y_n 会算对，若出现 k_n 全算对而 y_n 不对，扣一分）

《计算方法》2008 试题与答案

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

(1) 为了提高数值计算精度，当正数 x 充分大时，应将 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ 改写为

_ $-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ ______.

(2) $\sqrt[3]{x^*}$ 的相对误差约是 x^* 的相对误差的_1/3____ 倍

(3).设 $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & -8 & 2\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$__13______. $\|A\|_1=$___14_____

(4) 已知 $p(x)$ 为二次多项式，满足 $P(-2)=f(-2)=3$，$P(-1)=f(-1)=1$ 和

$P'(-1)=f'(-1)=1$，则 $p(x)=f(-2)+a(x+2)+b(x+2)(x+1)$，这里 $a=$__-2____,

$b=$___3_。

(5) 设 $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$，则差商 $f[0,1,2,3]=$__4__ $f[0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4]=$ _0_.

(6) n 个求积节点的求积公式的代数精确度最高为_ $2n-1$ _____次.

(7) 求解初值问题 $y'=-50(y+x), y(0)=1$ 时，若用改进欧拉方法的绝对稳定域中步长 h 不超过.0.04

二、（10 分）用 Newton 法求方程 $x-\ln x=2$ 在区间 $(2,\infty)$ 内的根，取 $x_0=3$，要求 $\left|\dfrac{x_{k+1}-x_k}{x_k}\right|<10^{-8}$，计算过程中数值保留 8 位有效数字。

解 此方程在区间 $(2,\ \infty)$ 内只有一个根 s，而且在区间（2，4）内。设

$$f(x)=x-\ln x-2$$

则 $$f'(x)=1-\frac{1}{x},\qquad f''(x)=\frac{1}{x^2}$$

Newton 法迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-\ln x_k-2}{1-1/x_k}=\frac{x_k(1+\ln x_k)}{x_k-1},$$ （5 分）

取 $x_0=3$，得 $x_1=3.1479184$ $\quad \left|\dfrac{x_1-x_0}{x_0}\right|=0.049306145$

$x_2=3.1461934$ $\quad \left|\dfrac{x_2-x_1}{x_1}\right|=0.00054797894$

$x_3=3.1461933$ $\quad \left|\dfrac{x_3-x_2}{x_2}\right|=0.69925770\times 10^{-7}$

$x_4=3.1461932$ $\quad \left|\dfrac{x_4-x_3}{x_3}\right|<10^{-8}$

$s\approx x_4=3.1461932$。

三.、(20 分)分别用 Jacobi 迭代与高斯-赛德尔迭代法解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=-5 \\ x_1+5x_2-x_3=8 \\ x_1+x_2+10x_3=11 \end{cases}$，给出迭代格式与迭代矩阵，说明上述迭代是否收敛，并使用收敛迭代公式计算 2 步，每步结果保留 4 位小数，取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$。

解：本问题的 Jacobi 迭代格式为 $\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0.5x_2^{(k)}+0.5x_3^{(k)}-2.5 \\ x_2^{(k+1)}=-0.2x_1^{(k)}+0.2x_3^{(k)}+1.6 \\ x_3^{(k+1)}=-0.1x_1^{(k)}-0.1x_2^{(k)}+1.1 \end{cases}$

迭代矩阵为 $G_J=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \|G_J\|_1=0.7<1$ 此迭代收敛

取初始迭代向量为 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，得到 $x^{(1)}=(-1.5,1.6,0.9)^T$，$x^{(2)}=(-1.25,2.08,1.09)^T$，

本问题的高斯-赛德尔迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0.5x_2^{(k)}+0.5x_3^{(k)}-2.5 \\ x_2^{(k+1)}=-0.2x_1^{(k+1)}+0.2x_3^{(k)}+1.6=-0.1x_2^{(k)}+0.1x_3^{(k)}+2.1 \\ x_3^{(k+1)}=-0.1x_1^{(k+1)}-0.1x_2^{(k+1)}+1.1=-0.04x_2^{(k)}+0.06x_3^{(k)}+1.14 \end{cases}$$

迭代矩阵为 $G_s=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & -0.04 & 0.06 \end{pmatrix}$ $\quad \|G_s\|_1=0.66<1$ 此迭代收敛

取初始迭代向量为 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，得到 $x^{(1)}=(1.5,2.1,1.04)^T$，

$x^{(2)}=(0.93,1.994,0.9936)^T$，

.

四（10 分）已知 $\sin(45^0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin(60^0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin(90^0)=1$，试用二次 langrang 插值多项式估计 $\sin(75^0)$，并估计误差。

解：

$$L_2(x)=\frac{(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})}\times 1$$

$$\sin 75^0=\sin(\frac{75\pi}{180})\approx\frac{(\frac{75\pi}{180}-\frac{\pi}{3})(\frac{75\pi}{180}-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{(\frac{75\pi}{180}-\frac{\pi}{4})(\frac{75\pi}{180}-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(\frac{75\pi}{180}-\frac{\pi}{4})(\frac{75\pi}{180}-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})}\times 1$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\approx 0.9636564769$$

$$R_2(x)=\frac{-\cos\xi_x}{3!}(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})\,;\qquad \frac{\pi}{4}<\xi_x<\frac{\pi}{2}$$

$$\left|R_2\left(\frac{75\pi}{180}\right)\right|<\left|\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{75\pi}{180}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{75\pi}{180}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{75\pi}{180}-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\frac{\pi^3\sqrt{2}}{10368}\approx 0.004$$

五. (15 分) 给定数据表

x	-2	-1	0	1	2
y	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

试用三次多项式以最小二乘法拟合所给数据，并计算其平方误差。.

解　$y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$

$m=5$ ，$\sum x_i=0$，$\sum x_i^2=10$，$\sum x_i^3=0$，$\sum x_i^4=34$，$\sum x_i^5=0$，$\sum x_i^6=130$

$\sum y_i=2.9$ ，$\sum x_iy_i=4.2$　$\sum x_i^2y_i=7$　$\sum x_i^3y_i=14.4$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 34 \\ 10 & 0 & 34 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 130 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.9 \\ 4.2 \\ 7 \\ 14.4 \end{bmatrix}$$

解得为 $c_0 = 0.4086$， $c_1 = 0.39167$， $c_2 = 0.0857$， $c_3 = 0.00833$

得到三次多项式

$$y(x) = 0.4086 + 0.39167x + 0.0857x^2 + 0.00833x^3$$

误差平方和为 $\sigma_3 = 0.000194$

六、(10 分)用复合梯形公式、复合辛普森公式计算积分 $I=\int_1^2 \sqrt{x}dx$ （$n=4$）。计算过程中数值保留 6 位有效数字。

解：计算得到

$\sqrt{1} = 1.00000, \sqrt{1.25} = 1.11803, \sqrt{1.5} = 1.22474, \sqrt{1.75} = 1.32\,288, \sqrt{2} = 1.41421$

用复合梯形公式 $I = \frac{1}{8}[1 + 1.41421] + \frac{1}{4}[1.11803 + 1.22474 + 1.32288] \approx 1.21819$ 。

用复合辛普森公式

$I = \frac{2-1}{12}[1 + 4\times1.11803 + 2\times1.22474 + 4\times1.32288 + 1.41421] \approx 1.21894$

七.（15 分）、用经典四级四阶 Runge－Kutta 方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

（1） 取 $h = 0.2$,写出由 x_m, y_m 直接计算 y_{m+1} 的迭代公式。

（2） 使用 (1) 的公式，求 $x = 0.2, 0.4, 0.6$ 时的数值解并与准确值 $y = -e^x + x^2 + 2x + 2$ 比较. 计算过程中数值保留 6 位小数。

解：（1） $K_1 = f(x_m, y_m) = -x_m^2 + y_m$

$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_1) = -(x_m + 0.1)^2 + y_m + 0.1(-x_m^2 + y_m)$$
$$= 1.1y_m - 1.1x_m^2 - 0.2x_m - 0.01$$

$$K_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_2) = -(x_m + 0.1)^2 + y_m + 0.1(1.1y_m - 1.1x_m^2 - 0.2x_m - 0.01)$$
$$= 1.11y_m - 1.11x_m^2 - 0.22x_m - 0.011$$

$$K_4 = f(x_m + h, y_m + hK_3) = -\left(x_m + 0.1\right)^2 + y_m + 0.2\left(1.11y_m - 1.11x_m^2 - 0.22x_m - 0.011\right)$$
$$= 1.222y_m - 1.222x_m^2 - 0.444x_m - 0.0422$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) = 1.2214y_m - 0.2214x_m^2 - 0.0428x_m - 0.002807$$

（2） $y_{m+1} = 1.2214y_m - 0.2214x_m^2 - 0.0428x_m - 0.002807$

$m = 0 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \quad y_1 = 1.2214 - 0.002807 = 1.218593$

实际值 $y(0.2) = -e^{0.2} + 0.04 + 0.4 + 2 \approx 1.218597$，误差=0. 000004

$y_2 = 1.2214 \times 1.218593 - 0.2214 \times 0.04 - 0.0428 \times 0.2 - 0.002807 = 1.468166$

实际值 $y(0.4) = -e^{0.4} + 0.16 + 0.8 + 2 \approx 1.468175$，误差=0. 000009

$y_3 = 1.2214 \times 1.468166 - 0.2214 \times 0.16 - 0.0428 \times 0.4 - 0.002807 = 1.737868$

实际值 $y(0.6) = -e^{0.6} + 0.36 + 1.2 + 2 \approx 1.737881$，误差=0. 000013

北 京 科 技 大 学

2008级北京首钢学位班《计算方法》考试试题

1.（10 分）利用$\sqrt{783} \approx 27.982$，求方程$x^2 - 56x + 1 = 0$的两个根，使它们至少具有 4 位有效数字。

2.（10 分）给定数据（$f(x) = \sqrt{x}$），

x	***2.0***	***2.1***	***2.2***	2.4
f(x)	**1.414214**	**1.449138**	**1.48320**	**1.54919**

试用二次牛顿插值多项式计算$f(2.15)$的近似值，并估计误差。

3.（10 分）用梯形公式、复合梯形公式、辛普森公式计算积分$I = \int_1^2 \sqrt{x}dx$（$n = 4$）。

4.（10 分）给出一组数据如下表，用最小二乘法求形如$y = ae^{bx}$的经验公式

x	-3	-2	-1	2	4
y	14.3	8.3	4.7	8.3	22.7

5.（10 分）用牛顿迭代法求方程$x^3 - 3x - 1 = 0$在初始值$x_0 = 2$附近的一个正根，要求$|x_{k+1} - x_k| < 10^{-3}$。

6.（10 分）用列主元高斯消去法解线性方程组$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$。

7.（10 分））用高斯-赛德尔迭代法解线性方程组$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$，给出其迭代矩阵

说明此迭代是否收敛，并使用迭代公式计算 5 步，每步结果保留 4 位小数，取 $x^{(0)} = (1,1,1)^T$。

8.（15 分）用反幂法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大模特征值和特征向量，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}^{(0)} = (1,1,1)^T$$

9.（15 分）取 h=0.1，用改进欧拉法求初值问题$\begin{cases} y' = 1 - x + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

在 x=0.1，0.2，0.3 处的近似值. 计算过程保留 4 位小数.

计算方法考试试题答案

1．利用 $\sqrt{195} \approx 13.96424004$，求方程 $x^2 - 28x + 1 = 0$ 的两个根，使它们至少具有 6 位有效数字。

解答：由方程的求根公式得到 $x_{1,2} = 14 \pm \sqrt{195}$，于是 $x_1 = 14 + \sqrt{195} \approx 27.96424004$；而

$$x_2 = 14 - \sqrt{195} = \frac{1}{14 + \sqrt{195}} = \frac{1}{27.96424004} \approx 0.03575995624$$ 。

2．（10 分）给定数据（$f(x) = \sqrt{x}$），

x	***2.0***	***2.1***	2.2
f(x)	**1.414214**	**1.449138**	**1.48320**

试用二次牛顿插值多项式计算 $f(2.15)$ 的近似值，并估计误差。

解：首先构造差商表：

x	***2.0***	***2.1***	2.2
f(x)	**1.414 214** **0.349 24**	**1.449 138** **0.340 62**	**1.483 20**
	-0.0431		

那么，

$$\begin{aligned} N_2(x) &= 1.414214 + 0.34924(x-2) - 0.0431(x-2)(x-2.1) \\ &= 0.534714 + 0.52595x - 0.0431x^2 \end{aligned}$$

最后计算可以得到 $f(2.15) \approx N_2(2.15) = 1.466277$ 。

3．用梯形公式、复合梯形公式、辛普森公式计算积分 $I = \int_1^2 \sqrt{x}dx$（$n = 4$）。

解：计算得到

$$\sqrt{1}=1.00000,\sqrt{1.25}=1.11803,\sqrt{1.5}=1.22474,\sqrt{1.75}=1.32\,288,\sqrt{2}=1.41421$$

用梯形公式 $I=\frac{2-1}{2}\left[1+1.41421\right]\approx 1.2071$

用辛普森公式 $I=\frac{2-1}{6}\left[1+4\times 1.22474+1.41421\right]\approx 1.2187$

用 复 合 梯 形 公 式 $I=\frac{1}{8}\left[1+1.41421\right]+\frac{1}{4}\left[1.11803+1.22474+1.32288\right]\approx 1.2182$ 。

4．（10 分）给出一组数据如下表，用最小二乘法求形如 $y=ae^{bx}$ 的经验公式

x	-3	-2	-1	2	4
y	14.3	8.3	4.7	8.3	22.7

解：由 $\ln y=\ln a+bx$，可以先做 $z=\ln y=c+bx$

x	-3	-2	-1	2	4
y	14.3	8.3	4.7	8.3	22.7
z=lny	2.6606	2.11626	1.54756	2.11626	3.12236

令 $\varphi_0=1$，$\varphi_1=x$，则 $(\varphi_0,\varphi_0)=\sum 1=5$，$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum x_i=0$，

$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum x_i^2=34$

$(\varphi_0,z)=\sum z_i=11.5627$ $\quad(\varphi_1,z)=\sum x_i z_i=2.9611$

解方程 $\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11.5627\\ 2.9611\end{pmatrix}$ 得到 $\begin{pmatrix}c\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.31254\\ 0.0870912\end{pmatrix}$

经验公式为 $y=e^{2.31254+0.080912x}$

5．（10 分）用牛顿法求方程 $x^3-3x-1=0$ 在初始值 $x_0=2$ 附近的一个正

根，要求 $\left|x_{k+1}-x_k\right|<10^{-3}$。解：利用牛顿法构造递推公式

$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f\left(x_k\right)}{f'\left(x_k\right)}=\dfrac{2x_k^3+1}{3x_k^2-3}$，$x_0=2$，计算结果如下，

$x_0=2, x_1=1.88889, x_2=1.87945, x_3=1.87939$，由于

$\left|x_3-x_2\right|=0.00006<0.001$，所以 $x^*\approx 1.879$。

6.（10 分）用列主元高斯消去法解线性方程组 $\begin{cases}-x_1+2x_2-2x_3=-1\\ 3x_1-x_2+4x_3=7\\ 2x_1-3x_2-2x_3=0\end{cases}$。

解：

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2 & -1\\ 3 & -1 & 4 & 7\\ 2 & -3 & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 7\\ -1 & 2 & -2 & -1\\ 2 & -3 & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 7\\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{14}{3}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 7\\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{14}{3}\\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 7\\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{14}{3}\\ 0 & 0 & -4 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1/2\end{pmatrix}$$

。

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{-2}{-4} = 0.5, x_2 = \frac{-\frac{14}{3} + \frac{14}{3} x_3}{-\frac{7}{3}} = 1, x_1 = \frac{7 + x_2 - 4x_3}{3} = 2$$

由此得到方程组的解为 $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0.5$

7.（10 分）用高斯-赛德尔迭代法解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$，给出其迭代矩阵

说明此迭代是否收敛，并使用迭代公式计算 5 步，每步结果保留 4 位小数，取 $x^{(0)} = (1,1,1)^T$。

解：本问题的高斯-赛德尔迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} - 2.5 \\ x_2^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_3^{(k)} + 1.6 = -0.1x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 2.1 \\ x_3^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k+1)} - 0.1x_2^{(k+1)} + 1.1 = -0.04x_2^{(k)} + 0.06x_3^{(k)} + 1.14 \end{cases}$$

迭代矩阵为 $G_s = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & -0.04 & 0.06 \end{pmatrix}$　　$\|G_s\|_1 = 0.66 < 1$　此迭代收敛

取初始迭代向量为 $x^{(0)} = (1,1,1)^T$，得到 $x^{(1)} = (1.5, 2.1, 1.04)^T$，

$x^{(2)}=(0.93,1.994,0.9936)^T$， $x^{(3)}=(1.0062,2.0000,1.0006)^T$，

$x^{(4)}=(0.9997,2.0001,1.0000)^T$， $x^{(5)}=(1.0000,2.0000,1.0000)^T$

[-1.500000000, 2.100000000, 1.040000000]

[-0.9300000000, 1.994000000, 0.9936000000]

[-1.006200000, 1.999960000, 1.000624000]

[-0.9997080000, 2.000066400, 0.9999641600]

[-0.9999847200, 1.999989776, 0.9999994944]

8．用反幂法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大模特征值和特征向量，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}, \boldsymbol{V}^{(0)}=(1,1,1)^T.$$

解 （1）取初始向量为 $\boldsymbol{v}=(1,1,1)^T$，使用幂法迭代

$$\boldsymbol{V}^{(0)}=(1,1,1)^T \qquad \mathbf{V}^{(1)}=(6,6,12)^T \qquad \mathbf{V}^{(2)}=(54,42,102)^T$$

$$\mathbf{V}^{(2)}=(444,336,840)^T$$

得到近似特征值 $r=\frac{1}{3}\left(\frac{444}{54}+\frac{336}{42}+\frac{840}{102}\right)\approx 8.1525$

及近似特征向量 $\mathbf{x}=\left(\frac{54}{102},\frac{42}{102},1\right)^T$，

（2）以近似特征向量 x 为初始向量，取位移为 r 进行反幂法的迭代

$$x=(A-rI)^{-1}x=(22.2876,16.7511,42.1466)^T$$

归一化得 $x=(0.5288,0.3974,1)^T$

$$x=(A-rI)^{-1}x=(22.0969,16.6098,41.7858)^T$$

此时计算出近似特征值

$$\lambda = 8.1525 + \frac{1}{41.7858} = 8.1764\text{，}$$

近似特征向量为 $x = (0.5288, 0.3974, 1)^T$

9 。（ 15 分 ） 取 h=0.1， 用 改 进 欧 拉 法 求 初 值 问 题

$$\begin{cases} y' = 1 - x + y^2 \\ \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

在 x=0.1，0.2，0.3 处的近似值. 计算过程保留 4 位小数.

解：$\bar{y}_{n+1} = y_n + h(1 - x_n + y_n^2)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(1 - x_n + y_n^2 + 1 - x_{n+1} + \bar{y}_{n+1}^2\right)$$

$$y_0 = 1 \quad \bar{y}_1 = 1 + 0.1(1 - 0 + 1^2) = 1.2$$

$$y_1 = 1 + 0.05(1 - 0 + 1 + 1 - 0.1 + 1.44) = 1.217$$

$$\bar{y}_2 = 1.217 + 0.1(1 - 0.1 + 1.217^2) = 1.4551$$

$$y_2 = 1.217 + 0.05\left(1 - 0.1 + 1.217^2 + 1 - 0.2 + 1.4551^2\right) = 1.4819$$

$$\bar{y}_3 = 1.4819 + 0.1(1 - 0.2 + 1.4819^2) = 1.7815$$

$$y_3 = 1.4819 + 0.05\left(1 - 0.2 + 1.4819^2 + 1 - 0.3 + 1.7815^2\right) = 1.8254$$

《科学与工程计算》2009 试题与参考解答

一、填空题（每空 **2** 分，共 **12** 分）

(1) 为了提高数值计算精度，当正数 x 充分大时，应将 $ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-ln\left(x-\frac{1}{x}\right)$ 改写为 $\underline{ln\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)}$.

(2) 已知 x 的相对误差为 ε_r，那么是 $ln(1+x)$ 的相对误差限约为 $\underline{\frac{\varepsilon_r}{1+x}}$

(3). 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty$ =**6**. $\|A\|_1=$ **5**

(4) 设 $f(x)=7x^7+6x^6+5x^3+4x+3$，则差商 $f[0,1,2,3,4,5,6,7]$=__7__.

二、（**12** 分）设 $a>0$，应用牛顿迭代法分别求 $x^k-a=0$ 与 $1-\frac{a}{x^k}=0$ 之根，从而导出求 $\sqrt[k]{a}$ 的两种迭代格式。并使用其求 $\sqrt[4]{99}$，取 $x_0=3$，精确到小数点后 **2** 位。

解：注意牛顿迭代法的迭代格式为

$$\boldsymbol{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

第一种情形：设 $f(x)=x^k-a$，则 $f'(x)=kx^{k-1}$，Newton 迭代法格式为

$$x_{i+1}=x_i-\frac{x_i^k-a}{kx_i^{k-1}}=(1-\frac{1}{k})x_i+\frac{a}{kx_i^{k-1}}$$

第二种情形：设 $f(x)=1-\frac{a}{x^k}$，则 $f'(x)=\frac{ak}{x^{k+1}}$，Newton 迭代法格式为

$$x_{i+1}=x_i-\frac{1-\frac{a}{x_i^k}}{\frac{ak}{x_i^{k+1}}}=x_i-\frac{x_i^{k+1}-ax_i}{ak}=(1+\frac{1}{k})x_i-\frac{x_i^{k+1}}{ak}$$

计算 $\sqrt[4]{99}$ 如下：

第一种迭代格式：$x_0=3$，$x_{i+1}=\frac{3}{4}x_i+\frac{99}{4x_i^3}$ $x_1\approx 3.167, x_2\approx 3.154, x_3\approx 3.154$ 近似解 $x^*=3.15$

第二种迭代格式：$x_0=3$，$x_{i+1}=\frac{5}{4}x_i-\frac{x_i^5}{396}$ $x_1\approx 3.136, x_2\approx 3.154, x_3\approx 3.154$ 近似解 $x^*=3.15$

三.、（**18** 分）求解方程$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_4 = 2 \\ x_1 + 14x_3 + x_4 = 16 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 + 15x_4 = 8 \end{cases}$

（**1**）使用高斯-赛德尔迭代法解线性方程组，给出迭代格式与迭代矩阵，并使用收敛迭代公式计算 **2** 步，每步结果保留 **4** 位小数，取 $x^{(0)}=(0,0,0,0)^T$。

（**2**）使用 **Dolittle** 三角分解法求解

解：

（**1**）本问题的高斯-赛德尔迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 3x_4^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_1^{(k+1)} + x_4^{(k)} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}x_2^{(k)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} - \frac{1}{5}x_4^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = (-x_1^{(k+1)} - x_4^{(k)} + 16)/14 = \frac{1}{7}x_2^{(k)} + \frac{1}{14}x_3^{(k)} - \frac{2}{7}x_4^{(k)} + \frac{15}{14} \\ x_4^{(k+1)} = (3x_1^{(k+1)} + 5x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)} + 8)/15 = -\frac{1}{7}x_2^{(k)} - \frac{1}{14}x_3^{(k)} + \frac{58}{105}x_4^{(k)} + \frac{139}{210} \end{cases}$$

迭代矩阵为 $G_s=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4/5 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 1/7 & 1/14 & -2/7 \\ 0 & -1/7 & -1/14 & 58/105 \end{pmatrix}$

取初始迭代向量为 $x^{(0)}=(0,0,0,0)^T$，得到 $x^{(1)}=(1,0,1.0714,0.6619)^T$，

$x^{(2)}=(1.9143,0.2962,0.9588,0.9510)^T$，

（**2**）分解 $L=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ -3 & 1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}$，$U=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 9 & 6 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

解 $Ly=\begin{bmatrix}1\\2\\16\\8\end{bmatrix}$，得到 $y=\begin{bmatrix}1\\0\\15\\1\end{bmatrix}$，解 $Ux=\begin{bmatrix}1\\0\\15\\1\end{bmatrix}$，得到 $x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

四（16 分）给出函数 $y=\sin x$ 的数表，分别用线性内插值与二次插值求 $\sin 0.56789$ 的近似值，并估计截断误差。

x	0.4	0.5	0.6
$\sin x$	0.38942	0.47943	0.56464

解：线性内插值采用点 **0.5**，**0.6**

$$L_1(x)=\frac{x-0.6}{0.5-0.6}\times 0.47943+\frac{x-0.5}{0.6-0.5}\times 0.56464$$

$$L_1(0.56789)=\frac{0.56789-0.6}{0.5-0.6}\times 0.47943+\frac{0.56789-0.5}{0.6-0.5}\times 0.56464=0.5372790690$$

误差 $R_1(x)=\dfrac{-\sin\xi_x}{2!}(x-0.5)(x-0.6)$； $0.5<\xi_x<0.6$

$$R_1(0.56789)=0.001089973950\sin\xi_x>0.0005225662108$$

$$R_1(0.56789)=0.001089973950\sin\xi_x<0.0006154428911$$

（**2**）

$$L_2(x)=\frac{0.38942(x-0.5)(x-0.6)}{(0.4-0.5)(0.4-0.6)}+\frac{0.47943(x-0.4)(x-0.6)}{(0.5-0.4)(0.5-0.6)}+\frac{0.56464(x-0.4)(x-0.5)}{(0.6-0.4)(0.6-0.5)}$$

$L_2(0.56789)=0.5378022565$

$$R_2(x)=\frac{-\cos\xi_x}{3!}(x-0.4)(x-0.5)(x-0.6);\quad 0.4<\xi_x<0.6$$

$$\left|R_2(0.5678)\right|<\left|\cos(0.4)\times 0.16789\times 0.16789\times 0.03211\right|\approx 0.0003371004514$$

五.（12 分）在某次实验中，需要观察水份的渗透速度，测得时间t与水的重量W的数据见下表。设已知t与W之间的关系为$W=at^S$，试用最小二乘法确定参数a,s。结果保留 4 位小数

t(秒)	1	2	4	8	16	32	64
W(克)	4.22	4.02	3.85	4.59	3.44	3.02	2.59
$log_2 W$	2.0772	2.0072	1.9449	2.1985	1.7824	1.5945	1.3730

解　$W=at^S$，$log_2 W = log_2 a + s\,log_2 t$

令 $y=log_2 W, x=log_2 t, A=log_2 a, B=s$，则 $y=A+Bx$

x	0	1	2	3	4	5	6
Y	2.0772	2.0072	1.9449	2.1985	1.7824	1.5945	1.3730

$m=7$，$\sum x_i=21$，$\sum x_i^2=91$，$\sum y_i=12.9777$，$\sum x_i y_i=35.8326$

$$\begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 21 & 91 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12.9777 \\ 35.8326 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.18615357142857 \\ -0.11073214285714 \end{bmatrix}$$

所以 $a=2^{2.18615357142857}\approx 4.5509$，$s\approx -0.1107$

六、**(15 分)**使用 **Romberg** 求积公式计算积分 $I=\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}dx$。先使用复化梯形公式计算到 **8** 等分情况，然后外推到三次。计算过程中数值保留 **6** 位小数。

解：$f(x)=\frac{2x}{x^2+4}$ 计算得到

x	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
F(x)	0	0.123077	0.235294	0.328767	0.4	0.449438	0.48	0.495575	0.5

T	S	C	R.
0.5			
0.65	0.7		
0.682647	0.693529	0.693098	
0.690538	0.693168	0.693144	0.693145

k	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$	$T_6^{(k)}$
0	0. 5	0	0	0	0	0

1	0.65	0.7	0	0	0	0
2	0.682647	0.693529	0.693098	0	0	0
3	0.690538	0.693168	0.693144	0.693145	0	0
4	0.692496	0.693148	0.693147	0.693147	0.693147	0
5	0.692984	0.693147	0.693147	0.693147	0.693147	0.693147

外推三次得到：$I=\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}dx=0.693145$

七.（**15** 分）、求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y), & x\in[x_0,T] \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$

的**Runge-Kutta** 公式如下：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h\left[(1-\alpha)K_1+\alpha K_2\right] \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\frac{h}{2\alpha},y_n+\frac{h}{2\alpha}K_1) \end{cases}$$

（1）证明：对于任意参数 $\alpha\neq 0$ ，该方法的局部截断误差是 $O\left(h^3\right)$；

（**2**）对于常微分方程 $\begin{cases} y'=-2x+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ 用上述方法,取 $h=\frac{1}{10},\alpha=\frac{1}{3}$ 迭代2步。

（1）证明：将所有表达式在 x_n 处展开

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O\left(h^3\right) \qquad (1)$$

$$y'(x_n)=f(x_n,y_n)=K_1 \qquad y''(x_n)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_n,y_n)}=f_x(x_n,y_n)+f_y(x_n,y_n)f(x_n,y_n)$$

另外有：

$K_1=f(x_n,y_n)=y'(x_n)$

$$K_2=f(x_n+\frac{h}{2\alpha},y_n+\frac{h}{2\alpha}K_1)=f(x_n,y_n)+\frac{h}{2\alpha}f_x(x_n,y_n)+\frac{h}{2\alpha}K_1f_y(x_n,y_n)+O(h^2)$$

$$=f(x_n,y_n)+\frac{h}{2\alpha}\left[f_x(x_n,y_n)+f(x_n,y_n)f_y(x_n,y_n)\right]+O(h^2)$$

$$=y'(x_n)+\frac{h}{2\alpha}y''(x_n)+O(h^2)$$

由此得到

$$y_{n+1}=y_n+h\left[(1-\alpha)K_1+\alpha K_2\right]$$

$$= y_n + h(1-\alpha)y'(x_n) + h\alpha\left(y'(x_n) + \frac{h}{2\alpha}y''(x_n)\right) + O\left(h^3\right)$$

$$= y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O\left(h^3\right) \qquad (2)$$

（1）与（2）相减得

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_n = O\left(h^3\right)$$

就是说，对于任意参数$\alpha \neq 0$ ，该方法的局部截断误差是$O\left(h^3\right)$；

（2）$n=0 \quad x_0=0 \quad y_0=1 \quad K_1 = f(0,1) = -2\times 0 + 1^2 = 1$

$$K_2 = f(0+\frac{1/10}{2/3}, 1+\frac{1/10}{2/3}\times 1) = -\frac{3}{10}+\frac{529}{400} = \frac{409}{400} = 1.0225$$

$x_0 = 0.1 \qquad y_1 = y_0 + \frac{h}{3}[2K_1 + K_2] = 1 + \frac{0.1}{3}[2+1.0225] = 1.0075$

$$K_1 = f(0.1, 1.0075) = -2\times 0.1 + 1.0075^2 = 1.011650625$$

$$K_2 = f(0.1+\frac{0.1}{2/3}, 1.0075+\frac{0.1}{2/3}\times 1.011650625) = 1.06875019886521024414 0625$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{10}\left[\frac{2}{3}K_1 + \frac{1}{3}K_2\right] = 1.2038183774621736748046875$$