第一章 习题解答

1 设 $x>0$，x 的相对误差限为 δ，求 $\ln x$ 的误差。

解：设 x 的准确值为 x^*，则有

$$(|x-x^*|/|x^*|) \leqslant \delta$$

所以

$$e(\ln x)=|\ln x-\ln x^*|=|x-x^*|\times|(\ln x)'|_{x=\xi}.\approx (|x-x^*|/|x^*|) \leqslant \delta$$

另解：

$$e(\ln x)=|\ln x-\ln x^*|=|\ln(x/x^*)|=|\ln((x-x^*+x^*)/x^*)|$$
$$=|\ln((x-x^*)/x^*+1)|\leqslant(|x-x^*|/|x^*|) \leqslant \delta$$

2 设 $x=-2.18$ 和 $y=2.1200$ 都是由准确值经四舍五入而得到的近似值。求绝对误差限 $\varepsilon(x)$ 和 $\varepsilon(y)$ 。

解：$|e(x)|=|e(-2.18)|\leqslant 0.005$，$|e(y)|=|e(2.1200)|\leqslant 0.00005$，所以

$\varepsilon(x)=0.005$，$\varepsilon(y)=0.00005$。

3 下近似值的绝对误差限都是 0.005，问各近似值有几位有效数字

$$x_1=1.38，x_2=-0.0312，x_3=0.00086$$

解：根据有效数字定义，绝对误差限不超过末位数半个单位。由题设知，x_1，x_2，x_3 有效数末位数均为小数点后第二位。故 x_1 具有三位有效数字，x_2 具有一位有效数字，x_3 具有零位有效数字。

4 已知近似数 x 有两位有效数字，试求其相对误差限。

解：$|e_r(x)| \leqslant 5\times10^{-2}$ 。

5 设 $y_0=28$，按递推公式 $y_n=y_{n-1}-\sqrt{783}/100$ ($n=1，2，\cdots$) 计算到 y_{100}。若取 $\sqrt{783}\approx27.982$ （五位有效数字），试问，计算 y_{100} 将有多大的误差？

解：由于初值 $y_0=28$ 没有误差，误差是由 $\sqrt{783}\approx27.982$ 所引起。记 $x=27.982$，$\delta=x-\sqrt{783}$ 。则利用理论准确成立的递推式

$$y_n=y_{n-1}-\sqrt{783}/100$$

和实际计算中递推式

$$Y_n=Y_{n-1}-x/100 \qquad (Y_0=y_0)$$

两式相减，得

$$e(Y_n)=Y_n-y_n=Y_{n-1}-y_{n-1}-(x-\sqrt{783})/100$$

所以，有

$$e(Y_n)=e(Y_{n-1})-\delta/100$$

利用上式求和

$$\sum_{n=1}^{100}e(Y_n)=\sum_{n=1}^{100}e(Y_{n-1})-\delta$$

化简，得

$$e(Y_{100})=e(Y_0)-\delta=\delta$$

所以，计算 y_{100} 的误差界为

$$\varepsilon(Y_{100})\leq\delta=0.5\times0.001=5\times10^{-4}$$

6 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根，问要使它们具有四位有效数字，D=$\sqrt{b^2-4ac}$ 至少要取几位有效数字？ 如果利用韦达定理，D 又应该取几位有效数字？

解：在方程中，$a=1$，$b=-56$，$c=1$，故 D=$\sqrt{56^2-4}\approx55.96427$，取七位有效数字。

由求根公式

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-56+55.96427}{2} = \frac{-0.03573}{2}$$

具有四位有效数字，而

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-56-55.96427}{2} = \frac{-111.96427}{2}$$

则具有八位有效数字。

如果利用韦达定理，首先计算出 x_2，利用

$$x_1 = \frac{1}{x_2} = \frac{2}{56+\sqrt{56^2-4}}$$

计算，只需取 D=$\sqrt{56^2-4}$ ≈55.96 四位有效数字即可保证方程的两个根均具有四位有效数字。此时有，x_1=0.01786，x_2=55.98。

7 设 $s=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有±0.1 秒的误差，证明当 t 增加时 s 的绝对误差增加，而相对误差减小。

证明 由于 $e(s) = g\,t\,e(t)$，$e_r(s) = 2\,e(t) / t$。而 $|e(t)|\leqslant 0.1$，所以，对这一问题，当 t 增加时 s 的绝对误差增加，而相对误差减小。

8 序列$\{y_n\}$满足递推关系 $y_n = 10y_{n-1} - 1$ (n = 1，2，……)。若取 $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$（三位有效数字），按上述递推公式，从 y_0 计算到 y_{10} 时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解 取 $x_0 = 1.41$，记 $e(x_0) = 1.41-\sqrt{2}$ 。根据

$$x_n = 10x_{n-1} - 1 \quad (n = 1，2，\cdots\cdots)$$

得

$$e(x_n) = 10e(x_{n-1}) \quad (n = 1，2，\cdots\cdots，10)$$

所以

$$e(x_{10}) = 10^{10}e(x_0)$$

从 y_0 计算到 y_{10} 时误差估计为：$|e(x_{10})| = 10^{10}\,|e(x_0)| \leqslant 0.5\times 10^8$。

这是一个数值不稳定的算法。

9 $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，求 $f(30)$ 的值，若开平方用六位函数表，问求对数时误差有多大？若改用另一等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

计算，求对数时误差有多大？

解 令 $y = x-\sqrt{x^2-1}$，则当 x=30 时，y=30 – 29.9833=0.0167 有三位有效数字，其相对误差为 10^{-3}。由第一题结论，求对数时误差为 10^{-3}。

若改用等价公式，令 $z = x+\sqrt{x^2-1}$，则当 x=30 时，y=30 + 29.9833= 59.9833 有六位有效数字，其相对误差为 10^{-6}。由第一题结论，求对数时误差为 10^{-6}。

10 已知有求和式 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_i b_j$

（1） 试统计需要用多少次乘法和加法才能计算出该和式的值；

（2） 为了减少计算工作量，将和式作等价变换，变换后需要多少次乘法和加法。

解 （1）所用乘法次数：1+2+3+……+n = $n(n+1)/2$，

加法次数：$[0+1+2+\cdots\cdots+(n-1)]+(n-1)=(n+2)(n-1)/2$；

（2）将和式等价变形为：$\sum_{i=1}^{n}[a_i\sum_{j=1}^{i}b_j]$

所用乘法为 n 次，加法次数不变，仍为$(n+2)(n-1)/2$。

11 试构造一个算法，对输入的数据 x_0，x_1，x_2，……，x_n，以及 x（均为实数），算法输出为 $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)$ 的计算结果。

解 算法如下：

第一步：输入 x；x_0，x_1，x_2，……，x_n，$M \leftarrow (x-x_0)$；$k \leftarrow 0$；

第二步：$M \leftarrow M\times(x-x_0)$；$k \leftarrow k+1$；

第三步：判断，若 $k \leqslant n$，则转第二步；否则输出 M，结束。

12 利用级数公式$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$可计算出无理数$\pi$ 的近似值。由于交错级数的部分和数列 S_n 在其极限值上下摆动，故截断误差将小于第一个被舍去的项的绝对值 $|a_{n+1}|$。试分析，为了得到级数的三位有效数字近似值，应取多少项求和。

解 由部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$$

知，截断误差满足

$$|S_n-\frac{\pi}{4}|\leq\frac{1}{2n+1}$$

显然，为了得到三位有效数字的近似值，绝对误差限应该为 $0.0005=5\times10^{-4}$。只需令

$$\frac{1}{2n+1}\leq\frac{5}{10000}=\frac{1}{2000}$$

所以，当 $n\geqslant1000$ 时，部分和至少有三位有效数字。