《数值分析》课程实验报告

实验名称 线性方程组的迭代解法

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **班级** | 信息1701 | **姓名** | 艾春辉 | **学号** | 201710000101 | **序号** |  |
| **教师** | 赵美玲 | **地点** | 数学实验中心 | | | **评分** |  |
| 1. 实验目的   ① 掌握解线性方程组的雅可比迭代和高斯-塞德尔迭代算法；  ② 初步掌握解线性方程组的迭代算法的设计方法。   1. 实验原理  2.1 迭代法的基本原理 根据方程组设计出一个迭代公式，然后将任意选取的一个初始向量代入迭代公式，求出，再以代入同一迭代公式，求出，如此反复进行，得到向量序列。当收敛时，其极限即为原方程组的解。  **定理** 当方程组的系数矩阵满足按行严格对角占优时，雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代算法对任意的初始向量收敛。 2.2 雅可比（Jacobi）迭代法的算法描述 设方程组的系数矩阵对角线元素，为最大迭代次数，为容许误差。雅可比（Jacobi）迭代法解方程组的算法描述如下：  ① 任取初始向量，令迭代次数.  ② ，并且  对，计算  （1）  ③ 如果，则输出，结束；否则执行④  ④ 如果，则不收敛，终止程序；否则转② 2.3 高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代法的算法描述 在雅可比（Jacobi）迭代法中，如果当新的分量求出后，马上用它来代替旧的分量，则可能会更快地接近方程组的准确解。基于这种设想构造的迭代公式  ， （2）  称为**高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代法.** 算法可相应地从雅可比（Jacobi）迭代法改造得到（作为练习）。 2.4 逐次超松弛(SOR)迭代算法描述 所谓逐次超松弛迭代算法就是，  为了提高精度，可以考虑运用松弛技术，将高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代得到的值进一步加工成某种松弛值，迭代公式如下  ，（3）  其中为松弛因子（显然当时，就是**高斯-塞德尔**迭代公式）  由于新值通常优于旧值，在将两者加工成松弛值时，自然要求松弛因子，以尽量发挥新值的优势，这类迭代就称为**逐次超松弛**(SOR)迭代法。  使用SOR迭代的关键在于选取合适的松弛因子，松弛因子的取值对收敛速度影响很大，但如何选取最佳松弛因子的问题，至今仍未有效解决，在实际计算时，通常依据系数矩阵的特点，并结合以往的经验选取合适的松弛因子   1. 实验过程和结果   1． 用雅可比迭代和高斯-塞德尔迭代算法解线性方程组    （1）编程用雅可比（Jacobi）迭代法的算法解上述方程组，并且选择不同的初始向量，记录结果和迭代次数；  （2）实现高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代算法，并在相同精度下，与雅可比（Jacobi）迭代算法的结果进行比较，写出结论并解释。  2．试用Jacobi迭代、Gauss-Seidel迭代和SOR迭代算法求解如下方程组     1. 用Jacobi迭代、Gauss-Seidel迭代求解上述方程组，并在相同精度要求下，比较收敛速度。 2. 试叙述SOR迭代算法和Gauss-Seidel迭代算法的异同；然后将Gauss-Seidel迭代算法的程序修改为SOR迭代算法，求解上述方程组（注意通过试算找到较优的松弛因子）。 3. 在相同精度要求下，比较SOR迭代算法和Gauss-Seidel迭代算法的收敛速度。   答：  （1）雅可比程序见test1.py文件。   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 试验次数 | 初始向量 | 最大迭代次数 |  | 迭代次数 | | 1 | (0,0,0)’ | 100 | [1.0000049527028887, 1.9999972169526679, -0.9999928248978686] | 15 | | 2 | (1,1,1)’ | 100 | [0.9999984631538645, 2.0000024507850354, -0.9999988841232499] | 16 | | 3 | (2,2,2)’ | 100 | [0.9999986174111323, 2.0000006935149512, -1.0000021831897097] | 17 | | 4 | (3,3,3)’ | 100 | [0.9999984383116283, 2.0000005843645883, -1.000002884845879] | 17 |   表一  总体来看雅可比迭代法的效果是可以的。  （2）  高斯赛德尔迭代算法test2.py  精度均为10^(-5)，迭代次数为500。结果如下表，只显示最后五次迭代情况。   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 方法 | 迭代次数 |  | | |  | | 高斯-赛得尔 | 5 | 0.999057 | 1.99972 | -1.00002 | 0.002824756763599501 | |  | 6 | 1.00012 | 1.99997 | -0.999963 | 0.00029310146378869195 | |  | 7 | 1.00001 | 2.00001 | -1 | 3.487823034031834e-05 | |  | 8 | 0.999996 | 2.00000 | -1.00000 | 1.1392634289508763e-05 | |  | 9 | 0.999999 | 1.99999 | -0.99999 | 9.64551943427594e-07 | | 雅可比 | 11 | 0.999923 | 2.00005 | -1.00009 | 2.511310643005249e-05 | |  | 12 | 0.999997 | 1.99998 | -1.00004 | 1.8834829822678145e-05 | |  | 13 | 1.00001 | 1.99999 | -0.999993 | 1.4126122366953098e-05 | |  | 14 | 1 | 2 | -0.999991 | 1.0594591775214823e-05 | |  | 15 | 0.999998 | 2 | -0.999999 | 7.945943831355606e-06 |   表二  由表可知随着迭代次数的增加，这两种方法的都能收敛，其中高斯赛德尔法收敛速度更快，而且得到的结果是完全准确的。因为雅可比法在计算第i个分量时，并未利用到计算出的最新分量，……，,而高斯赛得尔将这些分量加以利用，显然计算得到的结果会更好。   1. 答：   （1）精度10^(-5) ，高斯赛得尔法的收敛速度快。   |  |  |  | | --- | --- | --- | | 方法 | 迭代次数 |  | | 高斯-赛得尔 | 21 | [-0.9999896479636308,  -0.9999910053552268,  -0.9999921847613638,  -0.9999932095200553] | | 雅可比 | 37 | [-0.9999761621685057,  -0.9999761621685057,  -0.9999761621685057,  -0.9999761621685057] |   表三  （2）同：SOR和高斯赛得尔法都是迭代法。  异：当SOR的松弛因子为1时，就是高斯赛得尔法；  SOR法可以更改松弛因子w来改变迭代速度。  SOR程序见test3.py文件中，求解过程如下表所示   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 松弛因子 | 迭代次数 |  | | | | | 1.5 | 24 | -1 | -0.9999 | -0.99999 | -1 | | 2 | 100 | -0.999988 | -0.99999 | -0.999991 | -0.999992 | | 1.4 | 17 | -0.9999 | -1 | -0.99999 | -0.99999 | | 1.3 | 15 | -0.9999 | -0.9999 | -0.9999 | -0.9999 | | 1.2 | 17 | -0.9999 | -0.9999 | -0.9999 | -0.9999 | | 1.1 | 19 | -0.9999 | -0.9999 | -0.9999 | -0.9999 | | 1 | 21 | -0.9999 | -0.9999 | -0.9999 | -0.9999 |   表四  针对该线性方程组，当w>0且在零附近的时候收敛最快。   1. 思考题分析解答 2. 判别两种迭代算法收敛的充分必要条件及充分条件是什么？ 3. 试总结雅可比（Jacobi）迭代法和高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代法在程序实现方面的异同。（从算法的结构和存储量上来比较） 4. 试用前面程序计算如下方程组   C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsC7E.tmp.png  写出你遇到的困难和解决办法。   1. 对于线性方程组C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsC7F.tmp.png，讨论雅可比（Jacobi）迭代法和高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代法的收敛性，分别取系数矩阵   C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsC80.tmp.png  并由此说明两种迭代法在收敛性上有没包含关系。  答：  （1）对于线性方程组,我们将其分解成迭代格式,为B的谱半径则雅可比收敛的充分必要条件是：<1；  雅可比收敛的充分条件是：A是严格对角占优矩阵或不可分弱对角占优矩阵；  高斯赛得尔收敛的充分必要条件是：<1；  高斯赛德尔收敛的充分条件是：A是严格对角占优矩阵或不可分弱对角占优矩阵，或A为对称正定矩阵。  （2）算法的结构：二者唯一不同的地方在于迭代的格式，高斯为：  雅可比为：  存储量：高斯赛得尔法只需要一套存放迭代向量的单元，而雅可比需要两套。  （3）采用高斯赛德尔法和雅可比都不能收敛到最终的结果，这是因为系数矩阵不是对角占优矩阵，将方程组调换次序以满足对角占优，即可计算。  （5）举例来看：给定b=(7,8,13)’,对于第一个矩阵结果如下：   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 方法 | 迭代次数 |  | | | | | 高斯-赛得尔 | 100 | -5.584005e+32 | 5.6030156e+32 | -3.80295180e+30 |  | | 雅可比 | 4 | -3 | 8 | 3 |  |   表五  对于第二个矩阵结果如下：   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 方法 | 迭代次数 |  | | | | | 高斯-赛得尔 | 26 | -0.111109 | -1.55556 | 5.66667 |  | | 雅可比 | 100 | -3.1894e+24 | 6.00359e+24 | -6.1912e+24 |  |   表六  其中500为最大迭代次数，所以对于第一个矩阵高斯赛德尔法不收敛，而雅可比收敛；对于第二个矩阵高斯赛德尔法收敛，而雅可比不收敛。所以不具有包含性。  五、重点难点分析  1、重点:在于掌握这三种线性方程组迭代法的区别，以及它们收敛的条件，还有不能够计算的情况。  2、难点:本实验比较简单，难点在于SOR法如何有规律的找到最适合的松弛因子。 | | | | | | | |