《数值分析》课程实验报告

实验名称 矩阵特征值与特征向量计算

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **班级** | 信息1701 | **姓名** | 艾春辉 | **学号** | 201710000101 | **序号** |  |
| **教师** | 赵美玲 | **地点** | 数学实验中心 | | | **评分** |  |
| 1. 实验目的   ① 掌握求矩阵的主特征值（即按模最大的特征值）和主特征向量的幂法；  ② 初步了解幂法的加速。   1. 实验原理和方法  2.1 幂法的计算原理 设非奇异，且有个线性无关的特征向量，而相应的特征值满足，则对任意非零初始向量，按下列公式构造向量序列：    其中表示中按模最大的分量。  则有  ， 2.2 幂法的算法描述 幂法求矩阵的主特征值和主特征向量步骤如下：  ① 任给维初始向量（通常取），设置精度要求及最大迭代次数，，令；  ② 计算    令；  ③ 若，则停止计算，且即为所求主特征值，为相应的特征向量；  若，则停止计算，输出“计算失败”；  否则，转第②步； 2.3 反幂法的计算原理 设非奇异，且有个线性无关的特征向量，而相应的特征值满足，要计算矩阵按模最小的特征值和相应的特征向量。易见，对的特征值按模的大小排序为 ，且对应的特征向量为，故可以对实行幂法，可以得到和相应的特征向量，从而可以得到按模最小的特征值和相应的特征向量，这就是反幂法。 2.4 反幂法的算法描述 反幂法求按模最小的特征值和相应的特征向量的步骤如下：  ① 任给维初始向量（，通常取），设置精度要求及最大迭代次数，，令；  ② 对做分解，即 ；**(为了③中用LU分解求线性方程组)**  ③ **计算（等价于求解线性方程组！故可以考虑分解算法），**然后计算，令；  ④ 若，则停止计算，且即为所求按模最小的特征值，为相应的特征向量；  若，则停止计算，输出“计算失败”；  否则，转第③步； 2.5 幂法的加速 由幂法的计算可知，其收敛速度受到  的影响，若越小，则算法收敛越快。若令，其中为实数，并保证为矩阵按模最大的特征值，则通过适当的选取实数使得（其中为矩阵的按模最大特征值，为矩阵的按模次大特征值，同理）。  从而可以对矩阵运用幂法，来计算矩阵的主特征值和主特征向量，这就是幂法的原点平移加速法。  三、实验过程和结果  1． 已知矩阵  C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8620.tmp.png  用幂法计算该矩阵主特征值和相应的特征向量。（容许误差C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8640.tmp.png）  （其特征值为：6，3，1，对应特征向量为：C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8651.tmp.png）   1. 编写规范化幂法的程序，求上述矩阵的主特征值和相应特征向量，   分别选择初值：C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8652.tmp.png，观察所需的迭代次数和迭代结果，试说明幂法对初值的选择有什么要求。   1. 基于原点平移加速的思想，通过对矩阵C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8662.tmp.png（C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8663.tmp.png的值自己给定！）运用幂法求矩阵C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8674.tmp.png的主特征值和主特征向量，在相同精度要求下，和（1）的结果进行比较，分析其加速效果。   2． 已知矩阵  C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8675.tmp.png  用反幂法计算该矩阵按模最小的特征值和相应的特征向量。（容许误差C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8676.tmp.png）   1. 将幂法的计算程序修改为反幂法的计算程序，对问题进行求解； 2. 已知矩阵C:\Users\yt\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8687.tmp.png某个特征值的近似值为2.5，试计算该特征值！   答：  1、  （1）幂法程序见test1.py文件，选择不同初值结果如下：   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 初始值 | 主特征值 | 特征向量 | 迭代次数 | | (1,1,1)’ | 5.9999 | (1,-0.999,0.999)’ | 23 | | (2.001,1.999,0)’ | 5.9999 | (1,-0.999,0.999)’ | 34 | | （0，1，1） | 1 | (0,1,1)’ | 0 |   表一  由表的结果可知，幂法对于初值的选取需要尽可能的接近主特征值对应的特征向量。  （2）给定值和对应的结果如下，选定初值为（1,1,1）：代码见test3.py   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  | 主特征值 | 主特征向量 | 迭代次数 | | 0 | 5.999 | （1，-0.999,0.999） | 23 | | 1 | 4.999 | （1，-0.999,0.999） | 18 | | 1.5 | 4.4999 | （1，-0.999,0.999） | 15 | | 1.7 | 4.2999 | （1，-0.999,0.999） | 14 | | 1.9 | 4.0999 | （1，-0.999,0.999） | 13 | | 2 | 3.9999 | （1，-0.999,0.999） | 13 | | 2.5 | 3.4999 | （1，-0.999,0.999） | 20 |   表二  由表二可知，采用原点平移加速的效果是可观的，将的值从零调整到1.9，迭代次  数依次降低，但是需要控制好，不宜过大，否则当前的矩阵最大的特征值可能与原来的特征值不对应。  2、  （1）反幂法程序见test2.py文件。A给定初始向量为（1,1,1）实验结果如下图：    与真实值（0,1,1）比较吻合。  （2）要求特定的特征值，使用原点平移法，对利用反幂法求出最小特征值，进而得到特定的特征值和特征向量，程序代码test4.py    得到给定的特征值为0.5+2.5=3，与3比较接近，但是特征向量计算十分理想   1. 思考题分析解答   幂法收敛速度取决于什么？为什么？  由幂法的计算可知，其收敛速度受到 的影响，若越小，则算法收敛越快，当它接近于一的时候，收敛是很慢的。   1. 重点难点分析   1、幂法特别适用于求大型稀疏矩阵的主特征值和相应的特征向量，但是对于求全部的特征值此法不适用；幂法的关键在于有一个初始向量的预估，这样才能加速幂法的收敛。 | | | | | | | |