

## 1 eQCD程序及2+1味扩展

### 1.1 eQCD跑动的流:

eQCD程序中考虑的流方程变量:

$$U_k(\rho), h_k, Z_{\phi,k}, Z_{\psi,k}, Z_{A,k}, g_{\bar{A}A}, g_{AAA}, g_{\bar{A}As}, c, \kappa \quad (1)$$

其中 $\rho = \sigma^2/2$ , 此外, 还有

$$Z_{\phi}(p=0) \quad (2)$$

用来确定介子的pole 质量用。

注: 程序中跑动的是重整化后的物理量, 重正化系数只通过 $\eta$ 耦合进其它物理量。

扩展到2+1味:

$$U_k(\rho_1, \rho_2), h_{l,k}, h_{s,k}, Z_{\pi,k}, Z_{K,k}, Z_{l,k}, Z_{s,k}, Z_{A,k}, g_{\bar{A}A}, g_{AAA}, g_{\bar{A}As}, j_l, j_s, c_k(\text{t' Hooft term}), \sigma_{l,0}, \sigma_{s,0} \quad (3)$$

其中 $\rho_1 = \frac{1}{2}(\sigma_l^2 + \sigma_s^2)$ ,  $\rho_2 = \frac{1}{24}(\sigma_l^2 - 2\sigma_s^2)^2$ , 这里我们先做近似:

$$\begin{aligned} h_{l,k} &= h_{s,k} = h_k \\ Z_{\pi,k} &= Z_{K,k} = Z_{\phi,k} \\ Z_{l,k} &= Z_{s,k} = Z_{\psi,k} \end{aligned} \quad (4)$$

此外, 我们暂时还做如下近似:

1.  $c_k = 0$ ;
2. 流方程中我们暂时只考虑 $\pi$ 和 $\sigma$ 介子。但其质量依然按照2+1味低能有效模型方式计算。

### 1.2 初始条件:

(此部分对应程序initial.f90)

我们取 $\Lambda = 20\text{GeV}$ , 介子场势的初始条件:

$$U_{\Lambda} = v\rho - c\sigma \quad (5)$$

这样

$$\sigma_0 = c/v \quad \kappa_0 = \frac{1}{2}\sigma_0^2 \quad (6)$$

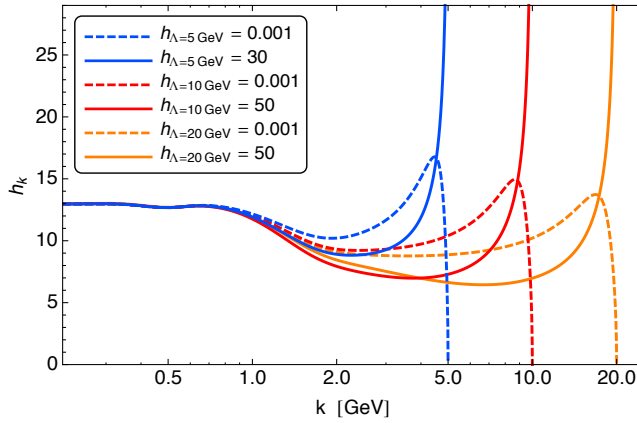
扩展到2+1味:

$$U_\Lambda = v\rho_1 - j_l\sigma_l - j_s\sigma_s \quad (7)$$

$$\sigma_{l,0} = jl/v \quad \sigma_{s,0} = js/v \quad (8)$$

其它参量初始条件:

1.  $h_\Lambda = 1$ , 任意选取, 不影响最终结果?



Jens Braun, Leonard Fister, Jan M. Pawłowski, Fabian Rennecke; arXiv:1412.1045

2.  $Z_{\Phi,\Lambda} = 1$ ,  $\Phi$ 表示所有的场。

3.  $g_{\bar{A}A,\Lambda} = g_{AAA,\Lambda} = g_{sAs,\Lambda} = g$ ,  $g = \sqrt{4\pi\alpha_{s,\Lambda}}$ , 程序这里取  $\alpha_{s,\Lambda} = 0.235$ 。

### 1.3 流方程:

(此部分主要对应程序derivs.f90。相关的程序有thresholdfunc.f90 (计算阈值函数); fun.f90, nfdx\_com.f90, nfdx.f90 (计算分布函数); IRenhan.f90 (考虑红外增强)。以及数值计算方面程序:odeint.f90(求解微分方程的), GAULEG.f90(高斯法计算积分的))

按顺序计算如下物理量:

1. 参数传入。注:  $g = g_{\bar{q}Aq^\circ}$

2. 计算介子和夸克的曲率质量，通过：

$$\bar{m}_\pi^2 = \frac{U'_k(\rho)}{k^2 Z_{\phi,k}}, \quad \bar{m}_\sigma^2 = \frac{U'_k(\rho) + 2\rho U''_k(\rho)}{k^2 Z_{\phi,k}}, \quad \bar{m}_q^2 = \frac{h_k^2 \rho}{2k^2 Z_{q,k}^2} \quad (9)$$

以及介子质量和夸克质量关于 $\rho$ 的各阶导数。

对于奇异夸克，程序中暂时做了 $m_s = m_l + 120[MeV]$ 的近似。

扩展到2+1味：介子质量，轻、奇异夸克的质量将完全由 $U(\rho_1, \rho_2)$ 和 $h, \sigma_l, \sigma_s$ 给出。暂时只考虑 $\pi$ 和 $\sigma$ 介子。

注：为了数值稳定，程序中做了 $m_\pi \neq m_\sigma$ 的处理。

3. 计算胶子，正反奇异夸克，正反轻夸克，以及 $\pi$ 和 $\sigma$ 介子的分布函数，以及分布函数关于 $x$ 的偏导。 $x$ 指的是 $E_\Phi \pm \mu$ ，其中 $E_\Phi$ 是 $\Phi$ 场的能量。

正反夸克的分布函数替换成Polyakov扩展的费米子分布。

4. 拥有了质量和分布函数，原则上文章附录N的阈值函数都可以进行计算了，它们主要在thresholdfunc.f90 进行计算并通过common传回derivs.f90。在下面的步骤中，它们需要计算时，调用thresholdfunc.f90即可。故不再详述。

5. 导入参数化的0温的胶子和鬼场的反常量纲： $\eta_{A,vac}^{QCD}(\text{etaAT0})$  (fun.f90/etaA\_unqQCD\_T0\_fun) 和 $\text{etacT0}$  (fun.f90/etac\_YM\_T0\_fun)

6. 计算 $\eta_\phi(\text{etaphi})$ ：这里 $\eta_\phi(p_0 = 0; |\vec{p}| = k)$ 。利用文中附录式(I2) 以及附录式(J1)联合求解出来。

$$\partial_t \text{---}^{-1} = \partial_t \left( \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} - \frac{1}{2} \bigcirc \text{---} \right)$$

这里面式(I2)有一个关于 $dx$ 和 $d\cos(\theta)$ 的二重积分需要提前计算一下。

此外， $\mathcal{BB}_{(2,2)}$ 项前面有个因子 $\bar{\rho}_k \bar{V}_k''$ ，是 $\pi\pi\sigma$ 相互作用顶点，推广到2+1味应作相应替换。

7. 计算 $\eta_\psi(\text{etapsi})$ ，可以用图表示：

$$\partial_t \text{---}^{-1} = \tilde{\partial}_t \left( \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \right)$$

具体表达式为附录式(J1)。

注：这里和上一步里面的 $\eta_A$ 都用的是0温结果(etaAT0)。

注：这里对真空部分的费米子外动量做了修正 $P_{0,ex}(p_0c)$ 。

8. 计算 $\eta_A(\text{etaA})$ :

$$\partial_t \text{gluon line}^{-1} = \tilde{\partial}_t \left( \text{gluon loop} - \frac{1}{2} \text{ghost loop} - \text{fermion loop} - \text{fermion self-energy} \right)$$

$$\eta_A = \eta_{A,\text{vac}}^{\text{QCD}} + \Delta\eta_A^{\text{glue}} + \Delta\eta_A^q \quad (10)$$

其中： $\eta_{A,\text{vac}}^{\text{QCD}}$ 为先前参数引入的。它实际上是一个2味的信息，即 $\eta_{A,\text{vac}}^{\text{QCD}}|_{N_f=2}$ ，扩展到2+1味，需要论文中式(102)：

$$\eta_{A,\text{vac}}^{\text{QCD}} = \eta_{A,\text{vac}}^{\text{QCD}}|_{N_f=2} + \eta_{A,\text{vac}}^s \quad (11)$$

第三项 $\Delta\eta_A^q$ 包含轻夸克圈和奇异夸克圈的贡献，由附录式(H1,H2)计算。附录式(H1)也有一个关于 $dx$ 和 $d\cos(\theta)$ 的二重积分需要提前计算。

程序中把奇异夸克有限温和0温的贡献放一起了：

$$\begin{aligned} \text{etaA\_QL\_s} &= \text{etaA\_QL\_s} + \text{etaA\_QL\_s\_T0} \\ \text{etaA} &= \text{etaAT0} + \text{etaA\_QL} + \text{etaA\_QL\_s} \end{aligned}$$

$\Delta\eta_A^{\text{glue}}$ 通过引入质量屏蔽(IRenhan.f90/massAScreen)来修正。

9. 计算 $\partial_t g_{A^3}$  (dtg3A),  $\partial_t g_{\bar{q}Aq}$  (dtg),  $\partial_t g_{\bar{q}sAq_s}$  (dtg-qbAq-s)。用图表示：

$$\begin{aligned} \partial_t \text{triangle} &= \tilde{\partial}_t \left( - \text{triangle1} - \text{triangle2} - \text{triangle3} \right) \\ \partial_t \text{triangle} &= \tilde{\partial}_t \left( - \text{triangle1} - \text{triangle2} + \text{triangle3} + \text{triangle4} \right) \end{aligned}$$

首先考虑计算轻夸克胶子顶点 $\partial_t g_{\bar{q}Aq}$  (dtg)，它具体计算可参考附录M:

$$\partial_t g_{\bar{l}Al} = \left( \frac{1}{2} \eta_A + \eta_q \right) g_{\bar{l}Al} + \left( N_f \overline{\text{Flow}}_{(\bar{l}Al)}^{(3),A} + \overline{\text{Flow}}_{(\bar{q}Aq)}^{(3),\phi} \right) \Big|_{N_f=2}. \quad (12)$$

式中的 $\overline{\text{Flow}}_{(\bar{l}Al)}^{(3),A}$  (胶子贡献)和 $\overline{\text{Flow}}_{(\bar{q}Aq)}^{(3),\phi}$  (介子贡献)由式(M2,M3)给出。

奇异夸克胶子顶点: 对于奇异夸克, 由于没有引入对应组成的奇异介子如( $K, \kappa$ ), 所以只需要考虑胶子部分的贡献:

$$\partial_t g_{\bar{s}As} = \left( \frac{1}{2} \eta_A + \eta_q \right) g_{\bar{s}As} + \overline{\text{Flow}}_{(\bar{s}As)}^{(3),A} \quad (13)$$

论文中的公式C2。  $\overline{\text{Flow}}_{(\bar{s}As)}^{(3),A}$  仍然由式(M2)计算。

2+1味扩展时, 奇异介子引入后这部分应作相应调整。

最后计算 $\partial_t g_{A^3}$  (dtg3A), 它分成有限温部分和0温部分

$$\partial_t g_{A^3} = \partial_t g_{A^3, \text{vac}} + \partial_t \Delta g_{A^3} \quad (14)$$

而且有限温部分采取近似:

$$\partial_t \Delta g_{A^3} = \partial_t \Delta g_{\bar{q}Aq} \quad (15)$$

0温贡献由Jens Braun, Leonard Fister, Jan M. Pawłowski, Fabian Rennecke; arXiv:1412.1045的公式(67)给出。其中的鬼胶子顶点:  $g_{\bar{c}Ac} = g_{\bar{q}Aq}$  (gccA=g), 鬼场传播子的反常量纲由0温结果近似。

问: 0温贡献不也是温度依赖了吗?(gccA=g)

注: 轻夸克胶子顶点程序前面系数 $N_f$ 应该去掉。程序是对的。

```
dtg=((etaA + 2*etapsi)*g)/2.+dtg_gluon+dtg_meson
```

问: (dtg\_gluon.T)=(dtg\_gluon)?

注: 红外增强(IRenhan.f90/IRenhan):

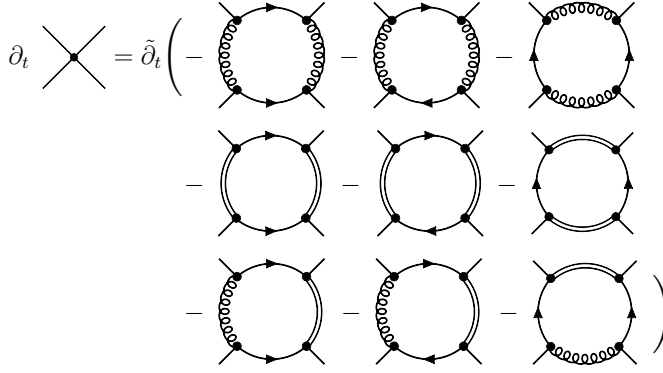
$$\partial_t \bar{g}_{\bar{q}Aq} \rightarrow \bar{g}_{\bar{q}Aq} \partial_t \zeta_{a,b}(k) + \zeta_{a,b}(k) \partial_t \bar{g}_{\bar{q}Aq}, \quad (16)$$

这里有个手动引入的参数 $a(IRstrength) = 0.034$ 来调节组分夸克质量。

10. 计算动力学强子化 $\dot{\bar{A}}(dtA)$ 方程:

$$\dot{\bar{A}} = -\frac{1}{\bar{h}} \overline{\text{Flow}}_{(\bar{q}\tau q)(\bar{q}\tau q)}^{(4)} \cdot \quad (17)$$

四费米子的流 $\overline{\text{Flow}}_{(\bar{q}\tau q)(\bar{q}\tau q)}^{(4)}$  (程序中dtlam4)可通过下图计算



目前, 我们忽略了介子胶子混合的情况, 也就是忽略掉最后一行。

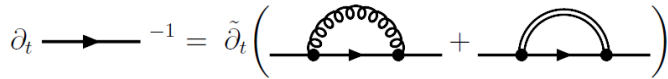
图第一行的交换胶子 $\overline{\text{Flow}}_{(\bar{q}q)(\bar{q}q)}^{(4),A}$  (dtlam4\_gluon)文章附录的公式(L1)计算。

图第二行的交换介子 $\overline{\text{Flow}}_{(\bar{q}q)(\bar{q}q)}^{(4),\phi}$  (dtlambdaSigmaPion)文章附录的公式(L2)计算。

11. 计算 $\partial_t \bar{h}(dhdt)$ ,

$$\partial_t \bar{h} = \left( \frac{1}{2} \eta_\phi + \eta_q \right) \bar{h} - \bar{m}_\pi^2 \dot{\bar{A}} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \text{Re} \overline{\text{Flow}}_{\bar{q}\tau^0 q}^{(2)} \quad (18)$$

$\overline{\text{Flow}}_{\bar{q}\tau^0 q}^{(2)}$  对应表达式见附录(K1), 图为:



当然也可以用下式来计算:

$$\partial_t \bar{h} = \left( \frac{1}{2} \eta_\phi + \eta_q \right) \bar{h} - \bar{m}_\pi^2 \dot{\bar{A}} + \overline{\text{Flow}}_{(\bar{q}\tau q)\pi}^{(3)} \quad (19)$$

$\overline{\text{Flow}}_{(\bar{q}\tau q)\pi}^{(3)}$  图表示出来:

问:  $\bar{m}_\pi^2 \sim U'_k(\rho)/k^2$ , 这里实际上是不是 $U'_k(\rho)/k^2$ ?

$$\partial_t \text{vertex} = \tilde{\partial}_t \left( - \left( \text{gluon loop} + \text{ghost loop} + \text{fermion loop} \right) \right)$$

12. 利用已知的 $\eta_\phi, \eta_\psi, \eta_A$ , 通过

$$\eta_{\Phi,k} = - \frac{\partial_t Z_{\Phi,k}}{Z_{\Phi,k}} \quad (20)$$

计算 $Z_\phi, Z_\psi, Z_A$ 的流方程。

13. 计算介子势 $U_k(\rho)$ 的流方程:

$$\partial_t U_k(\rho) = \frac{k^4}{4\pi^2} \{ 3l_0^B(m_{\pi,k}, \eta_{\phi,k}; T) + l_0^B(m_{\sigma,k}, \eta_{\phi,k}; T) - 4N_c N_f l_0^F(m_{q,k}, \eta_{q,k}; T, \mu) \} \quad (21)$$

及流方程两侧关于 $\rho$ 的各阶导数。 $l_0^{B/F}$ 是阈值函数。

扩展到2+1味:

$$\begin{aligned} \partial_t U_k(\rho_1, \rho_2) = & \frac{k^4}{4\pi^2} \{ 3l_0^B(m_{\pi,k}, \eta_{\phi,k}; T) + l_0^B(m_{\sigma,k}, \eta_{\phi,k}; T) \\ & - 4N_c (2l_0^F(m_{l,k}, \eta_{q,k}; T, \mu) + l_0^F(m_{s,k}, \eta_{q,k}; T, \mu)) \} \end{aligned} \quad (22)$$

及流方程两侧关于 $\rho_1, \rho_2$ 的各阶导数。

14. 计算 $U_k(\rho)$ 的泰勒展开系数以及展开点的流方程。这部分计算与QM模型的物理点展开相同。并将所有计算的流方程传给dydx。

## 1.4 其它程序:

1. 主程序eQCD.f90主要控制温度, 化学势(输入)和各个物理量的输出。总的控制整个程序。
2. chebft.f90是用来计算涨落的。
3. selfEQ.f90, PolyakovEq.f90, dtVdiff1.f90以及eta.f90 和数值计算的newt.f90(牛顿法求最小值), intLin.f90(计算插值), GAULEG.f90(高斯法计算积分的)都是用来自洽的求解Polyakov圈的:

$$\frac{\partial V_{total}}{\partial L} = \frac{\partial V_{total}}{\partial \bar{L}} = 0 \quad (23)$$

4. FRG.f90给出流方程结构和红外、紫外的取值，并串联起初始条件，微分方程和物理值计算。
5. phypoint.f90计算红外处各个物理量。这些量最终一层层传递给主程序。