数值分析与计算软件（3）
-牛顿法解非线性方程

刘帆
liufan@nju.edu.cn
南京大学工程管理学院

牛顿法

基本思想：

- 将非线性方程转化为某种线性方程来进行迭代求解。

设 x_k 是$f(x)=0$的近似根，将$f(x)$在 x_k 处进行一阶Taylor展开，得到

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

从而非线性方程$f(x)=0$近似为如下线性方程

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

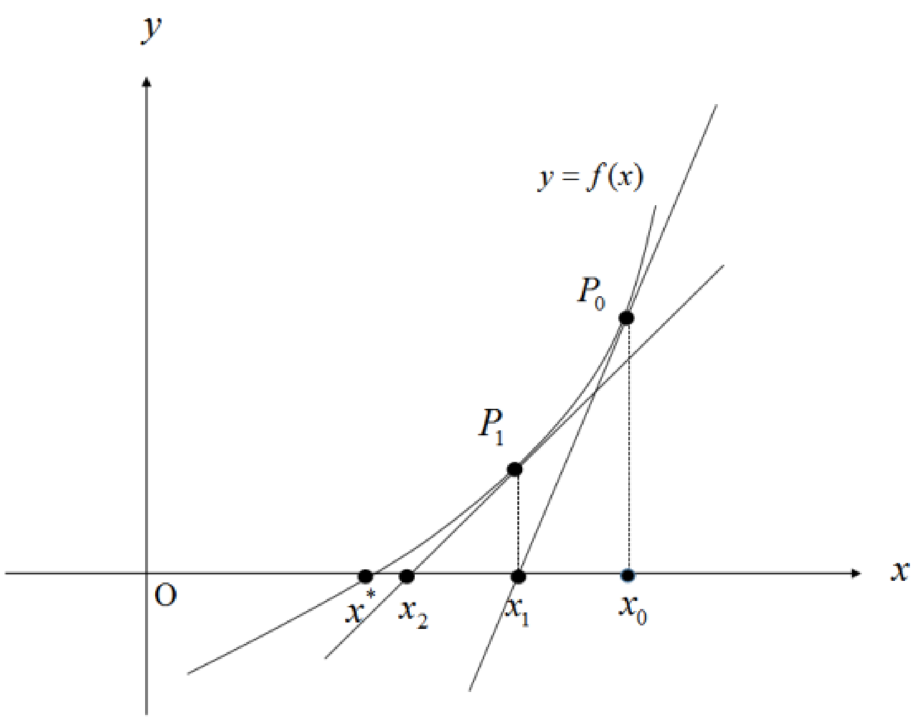
- 其根为

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

牛顿法

几何意义：

- 以切线作为原曲线的替代。



- 为找到$f(x) = 0$的根，给定一个初始估计x_0，
- 画出函数$f(x)$在点 x_0的切线，求出切线与 x 轴的交点来作为$f(x)$的近似根，
- 迭代进行上述步骤
- 牛顿法也被成为切线法

牛顿法

牛顿迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

算法：

- Step 0：给定初始估计 x_0，以及预设精度 ε
- Step 1：计算$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$
- Step 2：若$|x_1 - x_0| < \varepsilon$，则停止，输出近似解 x_1;否则，令 $x_0 = x_1$，返回Step 1。

牛顿法-例子

例3. 1：

- 用牛顿法求解方程 $xe^x - 1 = 0$。

解：

- 牛顿迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + x_k}$$

- 取初始估计$x_0 = 0.5$，可以逐次计算 $x_1 = 0.57102$，$x_2 = 0.56716$，⋯

牛顿法

收敛性：

- 假设是 $f(x)$ 二阶连续可微函数，x^*是方程 $f(x)=0$ 的准确解，若 $f'(x^*)\neq 0$，则牛顿法局部二阶收敛到 x^*，且第 k 步误差e_k和第 $k+1$ 步误差e_{k+1}满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{{e_k}^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

牛顿法

优点：

- （对于单根）收敛速度快，是目前求解非线性方程组的主要方法。

缺点：

- 对初始估计值的选取比较敏感
- 需要计算导数
- 对重根收敛速度慢

解决初值问题 – 牛顿下山法

- 一般来说，牛顿法的收敛性依赖于初值 x_0 的选取，如果 x_0 偏离所求的根 x^* 比较远，则牛顿法可能发散。
- 举个例子，在求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 的根时，如果初始估计值选取的是1.5，则牛顿迭代收敛；如果初始估计值代入的是0.6，则通过计算可以发现，其结果越来越发散。
- 为了防止迭代发散，要求迭代法满足：$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$。以此约束构造牛顿下山法。

解决初值问题 – 牛顿下山法

- 如何保证单调性呢？
- 将牛顿迭代公式改为

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- 其中，λ 是下山因子。
- 选择合适的下山因子以保证单调性。
- 可以采取逐步搜索的方式，从$\lambda = 1$开始，逐次取前一次的一半，直到单调性满足。

解决初值问题 – 牛顿下山法-例子

例3.2

- 用下山法求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在1.5附近的一个根，精确到10^{-5}。

解：

- 取初始估计值0.6
- 采用牛顿下山法

k	λ	x_k	$f(x_k)$	$\lvert f(x_{k+1})\rvert < \lvert f(x_k)\rvert$
0	1	0.6	-1.384	-
1	1	17.9	5716	N
1	1/2	9.25	781	N
1	1/4	4.925	114	N
1	1/8	2.7625	17.319	N
1	1/16	1.68125	2.0709	N
1	1/32	1.14063	-0.625	Y
2	1	1.36681	0.1866	Y
…	…	…	…	…

解决求导问题 – 弦截法

- 牛顿法需要计算导数值$f'(x)$，这对于复杂的函数是不方便的。
- 用差商

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

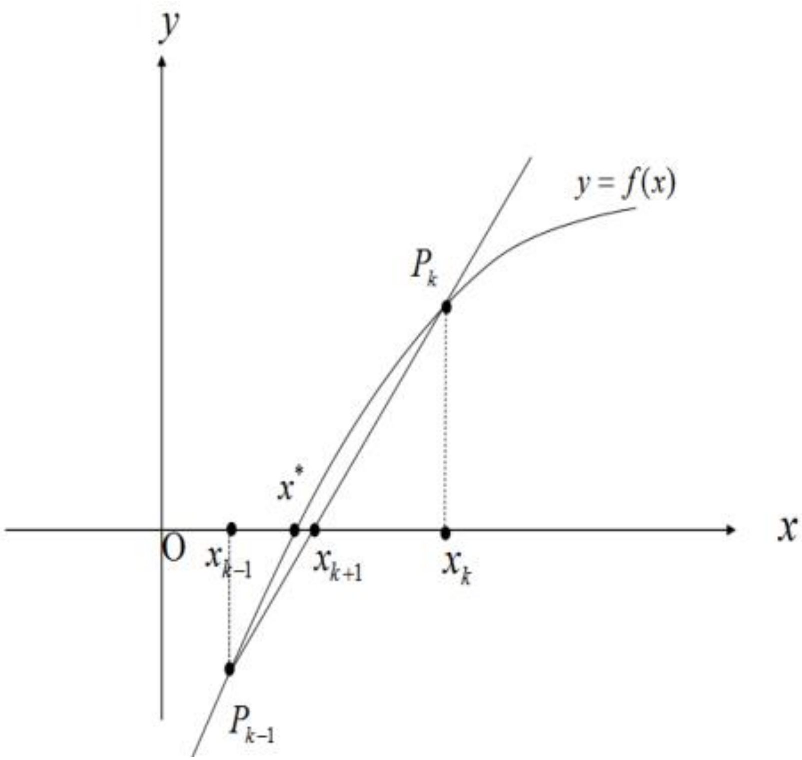
取代导数。

- 牛顿迭代公式变为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

解决求导问题 – 弦截法

- 以上方法成为弦截法，其几何意义如下图



- 弦截法是用弦$P_{k-1}P_k$与 x 轴的交点 x_{k+1}来近似切线与 x 轴的交点。
- 在弦截法的计算中，每迭代一步只需计算一个函数值，避免了复杂的导数计算，且该方法具有超线性的收敛性，深受广大工程人员所喜爱

解决重根问题

- 牛顿法具有平方收敛速度是指单根时的情况，当不是单根时，就没有平方收敛速度，为了得到平方收敛速度，可对牛顿法进行修正。

- 设x^*为方程$f(x)=0$的m重根$(m\geq 2)$，则有$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，其中$g(x^*)\neq 0$，此时有

$$f(x^*)=f'^{(x^*)}=\cdots=f^{m-1}(x^*)=0, f^m(x^*)\neq 0$$

解决重根问题

- 当 m 已知时，由于x^*是方程$f(x)^{1/m}=0$的单根，对此方程应用牛顿迭代公式，有

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},k=0,1,2,\ldots$$

- 当 m 未知时，令$u(x)=f(x)/f'(x)$，则 x^*是方程$u(x)=0$的单根。对$u(x)$用牛顿法进行求解，其迭代公式如下

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f'(x_k)f(x_k)}{f'(x_k)^2-f(x_k)f''(x_k)},k=0,1,2,\ldots$$

解决重根问题-例子

例3.3

- 已知$\sqrt{2}$是方程$x^4-4x^2+4=0$的多重根，分别用牛顿法和求重根的牛顿法求其近似根。
- 作业（以1.5作为初值，采用三种方法，包括牛顿法、已知其是二重根的牛顿法、不知道其是二重根的牛顿法；每个方法迭代6次，记录每一次迭代得到的近似值，并说明三种方法的表现）。

Q & A

- 3月22日交纸质版本。