数值分析与计算软件

第 9 课

刘帆

南京大学工程管理学院

2020 年 4 月 20 日

0. 引言

- 在科学研究和工程计算当中，经常需要考察两个变量与之间的函数关系。

0. 引言

- 在科学研究和工程计算当中，经常需要考察两个变量与之间的函数关系。
- 通常，从问题的实际背景和理论分析可知，这种函数关系 $y = f(x)$ 在某个区间 (a, b) 上是存在的，但往往不知道其具体的解析表达式，只能通过观察、测量或实验得到一些离散点上的函数值。

0. 引言

- 在科学研究和工程计算当中，经常需要考察两个变量与之间的函数关系。
- 通常，从问题的实际背景和理论分析可知，这种函数关系 $y = f(x)$ 在某个区间 (a, b) 上是存在的，但往往不知道其具体的解析表达式，只能通过观察、测量或实验得到一些离散点上的函数值。
- 此外，有些函数虽然有明确的解析表达式，但却过于复杂而不便于进行理论分析和数值计算，我们同样希望构造一个既能反映函数特性又便于计算的简单函数，近似替代原来的函数。

0. 引言

- 这种用较简单的函数来近似复杂函数的问题，就是函数逼近问题。

0. 引言

- 这种用较简单的函数来近似复杂函数的问题，就是函数逼近问题。
- 曲线拟合和函数插值是数值分析中常用的两种函数逼近方法。
  - 曲线拟合：要求构造一个简单函数，它表示的曲线与所有给定的数据点在整体上相合的比较好。
  - 函数插值：要求简单函数表示的曲线通过所有给定的数据点。

1. 插值的概念

定义

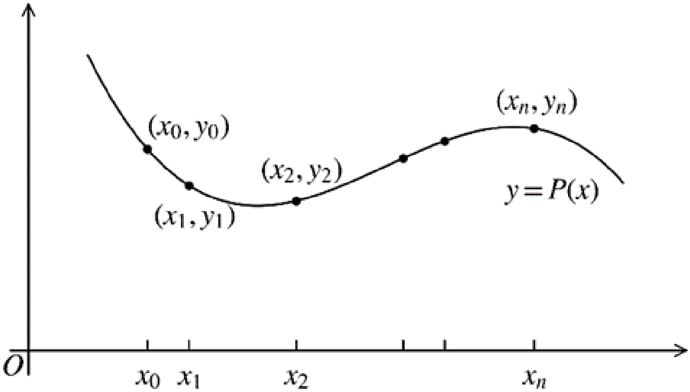
设函数 $y = f(x)$ 定义在区间 (a, b) 上，$x_0, x_1, ..., x_n$ 是 (a, b) 上已知的 $n+1$ 个互异点，且已知这些点处的函数值 $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, ..., n$。若存在一个简单的函数 $P(x)$，使得

$$P(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, ..., n \tag{1}$$

则称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数，$f(x)$ 称为被插函数，点 $x_0, x_1, ..., x_n$ 称为插值节点，包含插值节点的区间 (a, b) 称为插值区间，公式（1）称为插值条件，求 $P(x)$ 的方法称为插值法。

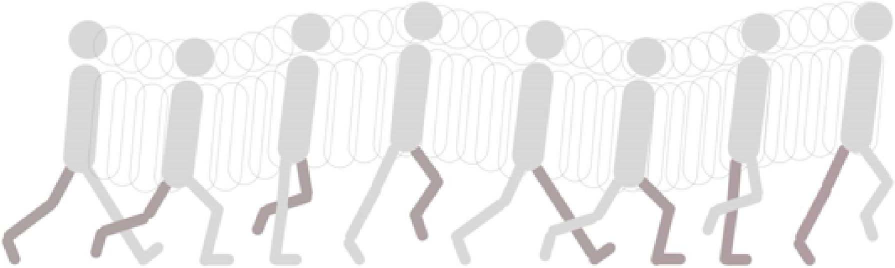
1. 插值的概念

- 从几何上看，插值法就是寻求一条曲线 $y = P(x)$，使它通过平面上给定 $n+1$ 个点 $(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n$。



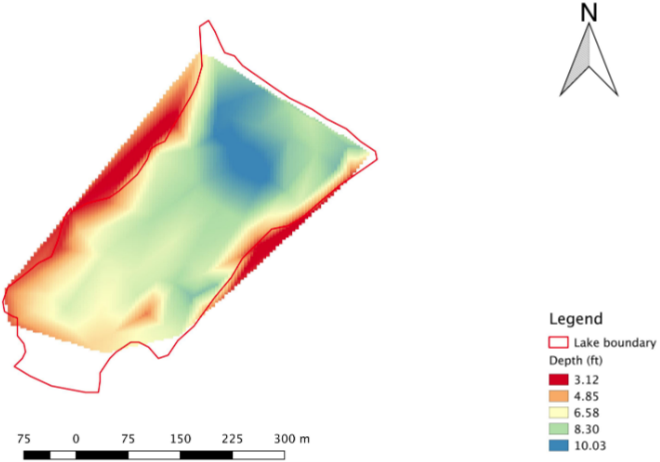
1. 插值的概念

- 插值可以应用在动画产业中。



1. 插值的概念

- 插值可以应用在地理测绘中。



- 若 $P(x)$ 是次数不超过 n 的多项式，则称 $P(x)$ 为插值多项式，相应的插值方法称为多项式插值。

1. 插值的概念

- 若 $P(x)$ 是次数不超过 n 的多项式，则称 $P(x)$ 为插值多项式，相应的插值方法称为多项式插值。
- 类似地，有三角多项式插值，有理函数插值，以及样条插值等问题。

1. 插值的概念

- 若 $P(x)$ 是次数不超过 n 的多项式，则称 $P(x)$ 为插值多项式，相应的插值方法称为多项式插值。
- 类似地，有三角多项式插值，有理函数插值，以及样条插值等问题。
- 本课程仅涉及多项式插值，相关的插值方法包括拉格朗日插值法、牛顿插值法、埃尔米特插值法、样条插值和分段低次插值。

1. 插值的概念

定义

设函数 $y = f(x)$ 定义在区间 (a, b) 上，$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 是 (a, b) 上已知的 $n+1$ 个互异点，且已知这些点处的函数值 $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n$。多项式插值就是求次数不超过 n 的多项式

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \tag{2}$$

使得 $P(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n$。

1. 插值的概念

定理

满足上述定义的多项式 $P(x)$ *存在且唯一。*

定理

满足上述定义的多项式 $P(x)$ 存在且唯一。

证明：略（利用 Vandermonde 行列式性质）。

2.1 Lagrange 插值基函数

定义

设 $l_k(x)$ 是 n 次多项式，在插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上满足

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}, k, i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

则称，$l_k(x)$ 为节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上的 n 次**插值基函数**。

2.1 Lagrange 插值基函数

定义

设 $l_k(x)$ 是 n 次多项式，在插值节点 $x_0, x_1, ..., x_n$ 上满足

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}, k, i = 0, 1, 2, ..., n \tag{3}$$

则称，$l_k(x)$ 为节点 $x_0, x_1, ..., x_n$ 上的 n 次插值基函数。

通过构造法，可以求得

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, k = 0, 1, ..., n \tag{4}$$

2.2 Lagrange 插值基函数

- $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ 构成不超过 n 次多项式集合的一组基。

2.2 Lagrange 插值基函数

- $l_0(x), l_1(x), ..., l_n(x)$ 构成不超过 n 次多项式集合的一组基。
- $l_0(x), l_1(x), ..., l_n(x)$ 只与插值节点有关，和 $f(x)$ 的值无关。

2.2 Lagrange 插值基函数

- $l_0(x), l_1(x), ..., l_n(x)$ 构成不超过 n 次多项式集合的一组基。
- $l_0(x), l_1(x), ..., l_n(x)$ 只与插值节点有关，和 $f(x)$ 的值无关。
- 引入函数 $w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$，则拉格朗日插值基函数可以表示为

$$l_k(x) = \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_k)w'_{n+1}(x_k)}, k = 0, 1, ..., n \tag{5}$$

定义

构造 $l_k(x)$ 的线性组合 $L_n(x)$,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_k) w'_{n+1}(x_k)} \tag{6}$$

称 $L_n(x)$ 为 $f(x)$ 的拉格朗日插值多项式。

例 1

- 已知函数 $y = f(x)$ 在 $x_0 = -2$，$x_1 = -1$，$x_2 = 0$，$x_3 = 1$ 处的值分别为 $y_0 = 3$，$y_1 = 1$，$y_2 = 1$，$y_3 = 6$，据此构造拉格朗日插值多项式并求 $f(0.5)$ 的近似值。

例 1

- 已知函数 $y = f(x)$ 在 $x_0 = -2$，$x_1 = -1$，$x_2 = 0$，$x_3 = 1$ 处的值分别为 $y_0 = 3$，$y_1 = 1$，$y_2 = 1$，$y_3 = 6$，据此构造拉格朗日插值多项式并求 $f(0.5)$ 的近似值。

解：有之前的定义可以构造

$$
\begin{aligned}
L_3(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) \\
&= 3 * \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(-2+1)(-2-0)(-2-1)} + 1 * \frac{(x+2)(x-0)(x-1)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)} \\
&+ 1 * \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(0+2)(0+1)(0-1)} + 6 * \frac{(x+2)(x+1)(x-0)}{(1+2)(1+1)(1-0)} \\
&= 0.5x^3 + 2.5x^2 + 2x + 1
\end{aligned}
$$

定义

设插值多项式 $L_n(x)$ 是对函数 $f(x)$ 的一个近似，其阶段误差为

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \tag{7}$$

又称插值余项。

定理

设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在，那么，对任何 $x \in [a,b]$，插值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x) \tag{8}$$

其中，$\xi \in (a,b)$ 且依赖于 x，$w_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$。

- 公式（8）的余项表达式仅在 $f(x)$ 存在高阶导数的情况下才可以使用，且通常无法确认 ξ 在 (a, b) 内的具体位置。

2.3 插值余项

- 公式（8）的余项表达式仅在 $f(x)$ 存在高阶导数的情况下才可以使用，且通常无法确认 ξ 在 (a,b) 内的具体位置。
- 如果可以确定 $f^{(n+1)}(x)$ 的绝对值在区间 (a,b) 内的一个上界 M_{n+1}，即对任意的 $x\in(a,b)$，$|f^{(n+1)}(x)|\le M_{n+1}$，则有如下的插值余项估计式

$$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|w_{n+1}(x)| \tag{9}$$

例 2

- 已给 $cos0.5 = 0.87758$，$cos0.6 = 0.82534$，$cos0.7 = 0.76484$，用二次插值计算 $\cos 0.55$ 的近似值并估计截断误差。

例 2

- 已给 $cos0.5 = 0.87758$，$cos0.6 = 0.82534$，$cos0.7 = 0.76484$，用二次插值计算 $\cos 0.55$ 的近似值并估计截断误差。

解：用拉格朗日插值，易得到 $cos0.55 \approx 0.85249$。

例 2

- 已给 $cos0.5 = 0.87758$，$cos0.6 = 0.82534$，$cos0.7 = 0.76484$，用二次插值计算 cos 0.55 的近似值并估计截断误差。

解：用拉格朗日插值，易得到 $cos0.55 \approx 0.85249$。

由公式（8）可得二次插值的截断误差满足

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}|w_3(x)|$$

其中 $M_3 = \max\limits_{x_0 \leq x \leq x_2 |f'''(x)|} = sinx_2 \approx 0.6443$。于是可得

$$|R_2(0.55)| \leq 1/6 * 0.6443 * |(0.55-0.5)(0.55-0.6)(0.55-0.7)|$$

$$\leq 4.0269 * 10^{-5}$$

2.4 拉格朗日插值法的优缺点

- 拉格朗日插值法利用插值基函数直接表示出了插值多项式，格式整齐规范，结构紧凑，便于理解记忆和理论分析。

2.4 拉格朗日插值法的优缺点

- 拉格朗日插值法利用插值基函数直接表示出了插值多项式，格式整齐规范，结构紧凑，便于理解记忆和理论分析。
- 但是当节点增加时，希望构造更高次的插值函数时，所有的基函数都要重新计算，不太方便。

3.1 差商

定义

给定函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个互异节点 $x_0, x_1, ..., x_n$ 处的函数值 $f(x_i), i = 0, 1, 2, ..., n$，称

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \tag{10}$$

为 $f(x)$ 关于点 x_i 及 x_j 的一阶差商；

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k} \tag{11}$$

为 $f(x)$ 关于点 x_i、x_j 及 x_k 的二阶差商。

3.1 差商

定义

类似的，定义

$$f(x_0, x_1, x_2, ..., x_k) = \frac{f(x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}) - f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k)}{x_0 - x_k} \qquad (12)$$

为 $f(x)$ 的 k 阶差商。

3.2 牛顿插值公式

- 差商可以用差商表进行计算。

- 差商可以用差商表进行计算。

节点	函数值	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3.2 牛顿插值公式

- 将 x 看做是区间 (a, b) 上的一点，根据差商的定义，可得

3.2 牛顿插值公式

- 将 x 看做是区间 (a, b) 上的一点，根据差商的定义，可得
- $f(x) = f(x_0) + f(x, x_0)(x - x_0)$

- 将 x 看做是区间 (a,b) 上的一点，根据差商的定义，可得
- $f(x)=f(x_0)+f(x,x_0)(x-x_0)$
- $f(x,x_0)=f(x_0,x_1)+f(x,x_0,x_1)(x-x_1)$

3.2 牛顿插值公式

- 将 x 看做是区间 (a, b) 上的一点，根据差商的定义，可得
- $f(x) = f(x_0) + f(x, x_0)(x - x_0)$
- $f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + f(x, x_0, x_1)(x - x_1)$
- ……

3.2 牛顿插值公式

- 将 x 看做是区间 (a, b) 上的一点，根据差商的定义，可得
- $f(x) = f(x_0) + f(x, x_0)(x - x_0)$
- $f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + f(x, x_0, x_1)(x - x_1)$
- ......
- $f(x, x_0, x_1, ..., x_{n-1}) = f(x_0, x_1, ..., x_n) + f(x, x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_n)$

- 依次将后一项代入前一项，可以得到

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\
& + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\
& + f(x, x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)
\end{aligned} \tag{13}
$$

3.2 牛顿插值公式

- 依次将后一项代入前一项，可以得到

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\
& + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \\
& + f(x, x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)
\end{aligned} \tag{13}
$$

- 该式前 n+1 项只用到了已知的 n+1 个节点及节点处函数值。

- 记公式（13）为

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x) \tag{14}$$

其中，

$$\begin{aligned}N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\end{aligned} \tag{15}$$

$$R_n(x) = f(x, x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{16}$$

3.2 牛顿插值公式

- 与拉格朗日多项式相同，$N_n(x)$ 是满足同一插值条件的插值多项式，$N_n(x) = L_n(x)$。

- 与拉格朗日多项式相同，$N_n(x)$ 是满足同一插值条件的插值多项式，$N_n(x) = L_n(x)$。
- 区别在于其构造方法不同，导致表示形式不同。

3.2 牛顿插值公式

- 与拉格朗日多项式相同，$N_n(x)$ 是满足同一插值条件的插值多项式，$N_n(x) = L_n(x)$。
- 区别在于其构造方法不同，导致表示形式不同。
- 拉格朗日插值多项式是用拉格朗日插值基函的线性组合表示。

3.2 牛顿插值公式

- 与拉格朗日多项式相同，$N_n(x)$ 是满足同一插值条件的插值多项式，$N_n(x) = L_n(x)$。
- 区别在于其构造方法不同，导致表示形式不同。
- 拉格朗日插值多项式是用拉格朗日插值基函的线性组合表示。
- 牛顿插值多项式是用 $1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \cdots,$ $(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$ 的线性组合来表示。

3.2 牛顿插值公式

- 若已经利用节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 构造出了 n 次牛顿插值公式 $N_n(x)$,

3.2 牛顿插值公式

- 若已经利用节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 构造出了 n 次牛顿插值公式 $N_n(x)$,
- 当增加一个节点 x_{n+1} 时，用全部节点构造 n+1 次插值公式 $N_{n+1}(x)$，只需要在 $N_n(x)$ 的基础上再加一项得到，即

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{17}$$

这样的方式在应用中比较方便，当增加节点时，原来计算的结果可以继续使用，避免大量重复工作。

例 3

- 给出 $f(x)$ 的函数值表，求 2 次和 3 次牛顿插值多项式，并计算 $f(0.9)$ 的近似值。

例 3

- 给出 $f(x)$ 的函数值表，求 2 次和 3 次牛顿插值多项式，并计算 $f(0.9)$ 的近似值。

x_k	$f(x_k)$	一阶	二阶	三阶
-2	17			
0	1	-8		
1	2	1	3	
2	19	17	8	1.25

例 3

解：

- 取节点-2, 0 ,1，得到二次牛顿插值多项式为

$$N_2(x) = f(-2) + f[-2,0](x+2) + f[-2,0,1](x+2)(x-0)$$
$$= 17 - 8(x+2) + 3(x+2)x$$

例 3

解：

- 取节点-2, 0 ,1，得到二次牛顿插值多项式为

$$N_2(x) = f(-2) + f[-2,0](x+2) + f[-2,0,1](x+2)(x-0)$$
$$= 17 - 8(x+2) + 3(x+2)x$$

- $f(0.9) \approx N_2(0.9) = 1.63$。

例 3

解：

- 取节点-2, 0 ,1, 2，计算三次牛顿插值多项式，只需要在 $N_2(x)$ 的基础上加上

$$f(-2, 0, 1, 2)(x + 2)(x - 0)(x - 1)$$

例 3

解：

- 取节点-2, 0 ,1, 2，计算三次牛顿插值多项式，只需要在 $N_2(x)$ 的基础上加上

$$f(-2, 0, 1, 2)(x+2)(x-0)(x-1)$$

- 此时，

$f(0.9) \approx N_3(0.9) = 1.63 + 1.25(0.9+2)0.9(0.9-1) = 1.30375$。

内容

- 插值的概念。

内容

- 插值的概念。
- 拉格朗日插值法。

内容

- 插值的概念。
- 拉格朗日插值法。
- 牛顿插值法。

谢谢！

Q&A