数值分析与计算软件

第 10 课

刘帆

南京大学工程管理学院

2020 年 4 月 27 日

0. 引言

- 回顾：Lagrange 插值与 Newton 插值。

0. 引言

- 回顾：Lagrange 插值与 Newton 插值。
- 本期课程：

0. 引言

- 回顾：Lagrange 插值与 Newton 插值。
- 本期课程：
- 等距节点插值、分段低次插值

1.1 向前差分

- 实际应用中，经常采用等距节点，即

$$x_k = x_0 + kh, k = 1, 2, ..., n$$

其中，$h > 0$，称为步长。

1.1 向前差分

- 实际应用中，经常采用等距节点，即

$$x_k = x_0 + kh, k = 1, 2, ..., n$$

其中，$h > 0$，称为步长。

- 采用等距节点，能够简化 Newton 插值公式。

1.1 向前差分

- 定义 $f(x)$ 在 x_k 处的一阶向前差分为

$$\triangle f_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f(x_k + h) - f(x_k)$$

1.1 向前差分

- 定义 $f(x)$ 在 x_k 处的一阶向前差分为

$$\triangle f_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f(x_k + h) - f(x_k)$$

- 一阶差分的一阶差分称为二阶差分，记为

$$\triangle^2 f_k = \triangle f_{k+1} - \triangle f_k$$

1.1 向前差分

- m 阶差分定义为 $m-1$ 阶差分的一阶差分

$$\triangle^m f_k = \triangle^{m-1} f_{k+1} - \triangle^{m-1} f_k \tag{1}$$

1.1 向前差分

- m 阶差分定义为 $m-1$ 阶差分的一阶差分

$$\triangle^m f_k = \triangle^{m-1} f_{k+1} - \triangle^{m-1} f_k \qquad (1)$$

- 差分与差商之间有如下的关系

$$f(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}) = \frac{1}{h^m m!} \triangle^m f_k \qquad (2)$$

1.2 牛顿前插公式

- 已知在等距节点 $x_k = x_0 + kh$， $k = 0, 1, \ldots, n$ 处的函数值 $f_k = f(x_k)$

1.2 牛顿前插公式

- 已知在等距节点 $x_k = x_0 + kh$，$k = 0, 1, ..., n$ 处的函数值 $f_k = f(x_k)$
- 对于点 x，可令 $x = x_0 + th$，牛顿前插公式为

$$\begin{aligned} N_n(x) = f_0 + t \triangle f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \triangle^2 f_0 + \cdots \\ + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} \triangle^n f_0 \end{aligned} \tag{3}$$

1.2 牛顿前插公式

- 已知在等距节点 $x_k = x_0 + kh$，$k = 0, 1, ..., n$ 处的函数值 $f_k = f(x_k)$
- 对于点 x，可令 $x = x_0 + th$，牛顿前插公式为

$$
\begin{aligned}
N_n(x) = f_0 + t \triangle f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \triangle^2 f_0 + \cdots \\
+ \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} \triangle^n f_0
\end{aligned} \tag{3}
$$

- 插值余项为

$$
R_n(x) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \xi \in (x_0, x_n) \tag{4}
$$

例 1

- 给出 $f(x) = cosx$ 在等距节点 $0 : 0.1 : 0.5$ 处的函数值，试用 4 次 Newton 前插公式计算 $f(0.048)$ 的近似值，并估计误差。

例 1

- 给出 $f(x) = cosx$ 在等距节点 0 : 0.1 : 0.5 处的函数值，试用 4 次 Newton 前插公式计算 $f(0.048)$ 的近似值，并估计误差。
- 去等距节点 $0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$，做查分表

x_k	$f(x_k)$	$\triangle f$	$\triangle^2 f$	$\triangle^3 f$	$\triangle^4 f$
0.0	1.00000				
0.1	0.99500	-0.00500			
0.2	0.98007	-0.01493	-0.00993		
0.3	0.95534	-0.02473	-0.00980	-0.00013	
0.4	0.92106	-0.03428	-0.00955	-0.00025	-0.00012

例 1

- 通过插值点 $x = 0.048$，计算出 $t = (x - x_0)/0.1 = 0.48$。

例 1

- 通过插值点 $x = 0.048$，计算出 $t = (x - x_0)/0.1 = 0.48$。
- 代入公式（3），可以计算得到结果，约等于 0.99884。

2.1 龙格现象

- 在构造插值多项式时，插值节点越多，插值多项式的次数就越高，此时所应用到的被插值函数的信息也就越多。

2.1 龙格现象

- 在构造插值多项式时，插值节点越多，插值多项式的次数就越高，此时所应用到的被插值函数的信息也就越多。
- 从直观上来讲，插值多项式的次数越高，其逼近效果就越好，插值余项也就越小。

2.1 龙格现象

- 在构造插值多项式时，插值节点越多，插值多项式的次数就越高，此时所应用到的被插值函数的信息也就越多。
- 从直观上来讲，插值多项式的次数越高，其逼近效果就越好，插值余项也就越小。
- 龙格现象

2.1 龙格现象

- 考虑函数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-5, 5)$$

2.1 龙格现象

- 考虑函数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-5, 5)$$

- 在插值区间上取 $n+1$ 个等距插值节点，$x_k = -5 + kh$，$k = 10/n, k = 0, 1, ..., n$

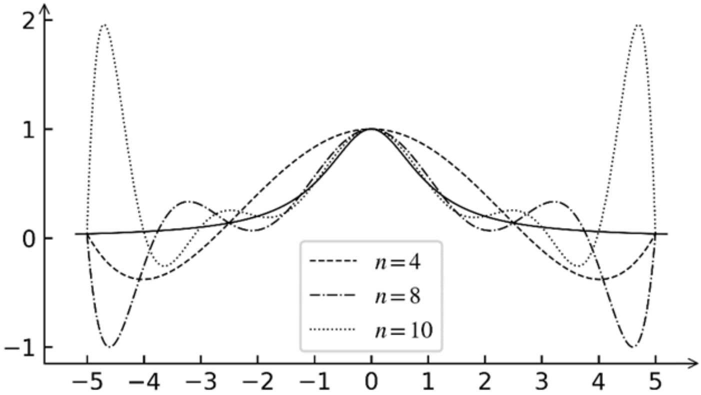
- 考虑函数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-5, 5)$$

- 在插值区间上取 $n+1$ 个等距插值节点，$x_k = -5 + kh$，$k = 10/n, k = 0, 1, ..., n$
- 利用这些等距节点构造 n 次插值多项式

2.1 龙格现象

- 分别画出 $n = 4, n = 8, n = 10$ 时，插值多项式的图形，并和 $f(x)$ 的形状进行比较，如下图



2.1 龙格现象

- 实际上，龙格证明了，存在一个常数 $r = 3.63$，使得当 $|x| \leq r$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - L_n(x)| = 0$$

当 $|x| > r$，

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - L_n(x)| = \infty$$

- 这种插值多项式在插值区间内发生剧烈振荡的现象，称为龙格现象。

2.1 龙格现象

- 这种插值多项式在插值区间内发生剧烈振荡的现象，称为龙格现象。
- 龙格现象揭示了高次插值多项式的缺陷，它说明用高次插值多项式近似的效果并不好。

2.1 龙格现象

- 这种插值多项式在插值区间内发生剧烈振荡的现象，称为龙格现象。
- 龙格现象揭示了高次插值多项式的缺陷，它说明用高次插值多项式近似的效果并不好。
- 为了克服多项式插值的缺点，可以采用分段低次多项式插值的方法。

2.2 分段线性插值

- 对于 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 这 $n+1$ 个插值节点，分段线性插值即是在每个小区间 x_i, x_{i+1}, $i = 0, 1, ..., n-1$，上用线性多项式来逼近 $f(x)$。

2.2 分段线性插值

- 对于 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 这 $n+1$ 个插值节点，分段线性插值即是在每个小区间 x_i, x_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, n-1$，上用线性多项式来逼近 $f(x)$。
- 用线性多项式逼近，也即是用折线把插值点连在一起。

2.2 分段线性插值

- 构造一个折线函数 $I_h(x)$，满足

2.2 分段线性插值

- 构造一个折线函数 $I_h(x)$，满足
  1. $I_h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;

2.2 分段线性插值

- 构造一个折线函数 $I_h(x)$，满足
  1. $I_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续；
  2. $I_h(x)$ 在每一个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是线性函数；

2.2 分段线性插值

- 构造一个折线函数 $I_h(x)$，满足
  1. $I_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续；
  2. $I_h(x)$ 在每一个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是线性函数；
  3. $I_h(x_i) = y_i$， $i = 0, 1, ..., n$。

2.2 分段线性插值

- 构造一个折线函数 $l_h(x)$，满足
  1. $l_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;
  2. $l_h(x)$ 在每一个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是线性函数;
  3. $l_h(x_i) = y_i$， $i = 0, 1, \ldots, n$。
- 称 $l_h(x)$ 为分段线性插值函数。

2.2 分段线性插值

- 容易求得，在每个区间 (x_i, x_{i+1}) 上，

$$I_h(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \tag{5}$$

- 容易求得，在每个区间 (x_i, x_{i+1}) 上，

$$I_h(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \tag{5}$$

- 令 $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|, h = \max\limits_{0 \le n-1} (x_{i+1} - x_i)$，则对于任意的 $x \in (a, b)$，插值余项满足

$$|R(x)| = |f(x) - I_h(x)| \le \frac{M_2}{8} h^2 \tag{6}$$

- 由公式（6）可知，当 $h \to 0$ 时，$l_h(x) \to f(x), x \in (a, b)$。

2.2 分段线性插值

- 由公式（6）可知，当 $h \to 0$ 时，$I_h(x) \to f(x), x \in [a, b]$。
- $I_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$。

2.2 分段线性插值

- 由公式（6）可知，当 $h \to 0$ 时，$I_h(x) \to f(x), x \in [a, b]$。
- $I_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$。
- 分段线性插值的缺点：$I_h(x)$ 在节点处不可导（不光滑）。

2.3 分段三次 Hermite 插值

- 已知 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 (a, b) 上的互异节点，且 $y_k = f(x_k)$，$m_k = f'(x_k)$，构造分段函数 $H(x)$，满足

2.3 分段三次 Hermite 插值

- 已知 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点，且 $y_k = f(x_k)$，$m_k = f'(x_k)$，构造分段函数 $H(x)$，满足
  1. $H(x) \in C^1[a, b]$；

2.3 分段三次 Hermite 插值

- 已知 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 (a, b) 上的互异节点，且 $y_k = f(x_k)$，$m_k = f'(x_k)$，构造分段函数 $H(x)$，满足
  1. $H(x) \in C^1(a, b)$;
  2. $H(x_k) = y_k$，$H'(x_k) = m_k$，$k = 0, 1, 2, ..., n$;

2.3 分段三次 Hermite 插值

- 已知 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 (a, b) 上的互异节点，且 $y_k = f(x_k)$，$m_k = f'(x_k)$，构造分段函数 $H(x)$，满足
  1. $H(x) \in C^1(a, b)$;
  2. $H(x_k) = y_k$，$H'(x_k) = m_k$，$k = 0, 1, 2, ..., n$;
  3. $H(x)$ 在每个小区间 (x_k, x_{k+1}) 是三次多项式。

2.3 分段三次 Hermite 插值

- 已知 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 (a, b) 上的互异节点，且 $y_k = f(x_k)$，$m_k = f'(x_k)$，构造分段函数 $H(x)$，满足
  1. $H(x) \in C^1(a, b)$;
  2. $H(x_k) = y_k$，$H'(x_k) = m_k$，$k = 0, 1, 2, ..., n$;
  3. $H(x)$ 在每个小区间 (x_k, x_{k+1}) 是三次多项式。
- 称 $H(x)$ 为分段三次埃尔米特插值函数。

- 类似于拉格朗日插值法，在任意区间 (x_k, x_{k+1}) 上，令

$$H_3(x) = y_k\alpha_k(x) + y_{k+1}\alpha_{k+1}(x) + m_k\beta_k(x) + m_{k+1}\beta_{k+1}(x) \tag{7}$$

其中，

$$\alpha_k(x_i) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}, \ , \alpha_k'(x_i) = 0, i = k, k+1 \tag{8}$$

$$\beta_k(x_i) = 0, \beta_k'(x_i) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}, \ , i = k, k+1 \tag{9}$$

2.3 分段三次 Hermite 插值

- 利用构造法，可以得到基函数 $\alpha_k(x)$、$\alpha_{k+1}(x)$、$\beta_k(x)$ 和 $\beta_{k+1}(x)$ 的具体形式。

2.3 分段三次 Hermite 插值

- 利用构造法，可以得到基函数 $\alpha_k(x)$、$\alpha_{k+1}(x)$、$\beta_k(x)$ 和 $\beta_{k+1}(x)$ 的具体形式。
- 最终，$H_3(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 的表达式为

$$
\begin{aligned}
H_3(x) = {} & y_k\Big(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\Big)\Big(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\Big)^2 \\
& + y_{k+1}\Big(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\Big)\Big(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\Big)^2 \\
& + m_k(x-x_k)\Big(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\Big)^2 + m_{k+1}(x-x_{k+1})\Big(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\Big)^2
\end{aligned}
\tag{10}
$$

2.3 分段三次 Hermite 插值

- 类似于拉格朗日插值法余项的估计方法，对于 $x \in (x_k, x_{k+1})$，Hermite 插值的余项满足

$$|R(x)| = |f(x) - H_3(x)| \leq \frac{M_4}{384} h^4 \tag{11}$$

其中，$M_4 = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$，$h = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} h_k$。

2.4 分段低次插值总结

- 基本思想：用分段低次多项式来代替单个多项式。

2.4 分段低次插值总结

- 基本思想：用分段低次多项式来代替单个多项式。
- 具体做法：

2.4 分段低次插值总结

- 基本思想：用分段低次多项式来代替单个多项式。
- 具体做法：
  1. 把整个插值区间分割成多个小区间

2.4 分段低次插值总结

- 基本思想：用分段低次多项式来代替单个多项式。
- 具体做法：
  1. 把整个插值区间分割成多个小区间
  2. 在每个小区间上作低次插值多项式

2.4 分段低次插值总结

- 基本思想：用分段低次多项式来代替替单个多项式。
- 具体做法：
  1. 把整个插值区间分割成多个小区间
  2. 在每个小区间上作低次插值多项式
  3. 将所有插值多项式拼接成一个多项式

2.4 分段低次插值总结

- 基本思想：用分段低次多项式来代替替单个多项式。
- 具体做法：
  1. 把整个插值区间分割成多个小区间
  2. 在每个小区间上作低次插值多项式
  3. 将所有插值多项式拼接成一个多项式
- 分段三次 Hermite 插值比分段线性插值效果更好，但是需要额外信息。

内容

- 牛顿前插公式

内容

- 牛顿前插公式
- 分段低次插值

谢谢！

Q&A