数值分析与计算软件

第 11 课

刘帆

南京大学工程管理学院

2020 年 5 月 11 日

0. 引言

- 高次插值数值稳定性较差，有时会出现龙格现象。

0. 引言

- 高次插值数值稳定性较差，有时会出现龙格现象。
- 分段线性插值可以避免龙格现象，但不光滑。

0. 引言

- 高次插值数值稳定性较差，有时会出现龙格现象。
- 分段线性插值可以避免龙格现象，但不光滑。
- 分段三次埃尔米特插值：必须知道导数值。而且 Hermite 插值仅一阶光滑，在工程设计和机械加工等实际中不够用。

0. 引言

- 高次插值数值稳定性较差，有时会出现龙格现象。
- 分段线性插值可以避免龙格现象，但不光滑。
- 分段三次埃尔米特插值：必须知道导数值。而且 Hermite 插值仅一阶光滑，在工程设计和机械加工等实际中不够用。
- 三次样条插值

1.1 样条曲线

- 早期工程师制图时，把富有弹性的细长木条（所谓样条）用压铁固定在样点上，在其他地方让它自由弯曲，然后画下长条的曲线，称为样条曲线。

1.1 样条曲线

- 早期工程师制图时，把富有弹性的细长木条（所谓样条）用压铁固定在样点上，在其他地方让它自由弯曲，然后画下长条的曲线，称为样条曲线。
- 样条曲线实际上是由分段三次曲线连接而成，且在连接点处具有连续的二阶导数，从数学上加以概括就得到三次样条的概念。

定义

在区间 (a,b) *上取定* $n+1$ *个节点，* $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,

若函数 $S(x)$ *满足：*

1. $S(x)\in C^2(a,b)$; C^2(a,b):在区间(a,b)上二阶导数连续
2. $S(x)$ *在每个小区间上是三次多项式;*

则称 $S(x)$ *是三次样条函数*。

1.3 三次样条插值函数

定义

若函数 $S(x)$ *还满足：*

- *在节点* x_i *处，* $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ *，* $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ *，则称*

则称 $S(x)$ *是三次样条插值函数。*

1.3 三次样条插值函数

- $S(x)$ 在每个小区间 (x_i, x_{i+1}) 上的 $S_i(x)$ 都是三次多项式，存在 4 个待定系数。

1.3 三次样条插值函数

- $S(x)$ 在每个小区间 (x_i, x_{i+1}) 上的 $S_i(x)$ 都是三次多项式，存在 4 个待定系数。
- n 个区间，因此，要求 $S(x)$，就要确定 4n 个待定系数，故需要 4n 个方程。

1.3 三次样条插值函数

- $S(x)$ 在每个小区间 (x_i, x_{i+1}) 上的 $S_i(x)$ 都是三次多项式，存在 4 个待定系数。
- n 个区间，因此，要求 $S(x)$，就要确定 4n 个待定系数，故需要 4n 个方程。
- 插值条件 $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ 提供了 2n 个方程。

- 因为 $S(x) \in C^2(a,b)$，所以在节点 x_i $(i = 1, 2, ..., n-1)$ 处满足

$$\begin{cases} S'(x_i^-) = S'(x_i^+), \\ S''(x_i^-) = S''(x_i^+), \end{cases} \tag{1}$$

这里一共有 2(n-1) 个条件。

1.3 三次样条插值函数

- 因为 $S(x) \in C^2(a,b)$，所以在节点 x_i $(i = 1, 2, ..., n-1)$ 处满足

$$\begin{cases} S'(x_i^-) = S'(x_i^+), \\ S''(x_i^-) = S''(x_i^+), \end{cases} \tag{1}$$

这里一共有 2(n-1) 个条件。

- 还缺两个！

1.4 边界条件

- 实际问题通常对样条函数在两个端点处的状态有要求，即所谓的边界条件。

1.4 边界条件

- 实际问题通常对样条函数在两个端点处的状态有要求，即所谓的边界条件。
- 常用的边界条件有：

1.4 边界条件

- 实际问题通常对样条函数在两个端点处的状态有要求，即所谓的边界条件。
- 常用的边界条件有:
  1. 第一类边界条件：给定函数在端点处的一阶导数，即 $S'(x_0) = m_0$，$S'(x_n) = m_n$。

1.4 边界条件

- 实际问题通常对样条函数在两个端点处的状态有要求，即所谓的边界条件。
- 常用的边界条件有：
  1. 第一类边界条件：给定函数在端点处的一阶导数，即 $S'(x_0) = m_0$，$S'(x_n) = m_n$。
  2. 第二类边界条件：给定函数在端点处的二阶导数，即 $S''(x_0) = M_0$，$S''(x_n) = M_n$；特别地，当 $M_0 = M_n$ 时，该条件为自然边界条件。

1.4 边界条件

- 实际问题通常对样条函数在两个端点处的状态有要求，即所谓的边界条件。
- 常用的边界条件有：
  1. 第一类边界条件：给定函数在端点处的一阶导数，即 $S'(x_0) = m_0$，$S'(x_n) = m_n$。
  2. 第二类边界条件：给定函数在端点处的二阶导数，即 $S''(x_0) = M_0$，$S''(x_n) = M_n$；特别地，当 $M_0 = M_n$ 时，该条件为自然边界条件。
  3. 第三类边界条件：若 $f(x)$ 是周期函数，且 $x_n - x_0$ 是一个周期，于是要求 $S(x)$ 也是周期函数，满足 $S(x_0) = S(x_n)$，$S'(x_0) = S'(x_n)$，$S''(x_0) = S''(x_n)$。

1.5 三次样条插值函数的计算

- 设 $S''(x_i) = M_i$， $i = 0, 1, 2, ..., n$

1.5 三次样条插值函数的计算

- 设 $S''(x_i) = M_i$， $i = 0, 1, 2, ..., n$
- 由于 $S(x)$ 是三次多项式，$S''(x)$ 为线性函数，则可以得到 $S''(x)$ 在 (x_i, x_{i+1}) 上的表达式为

$$S_i''(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} M_i + \frac{x - x_i}{h_i} M_{i+1}, h_i = x_{i+1} - x_i \tag{2}$$

1.5 三次样条插值函数的计算

- 设 $S''(x_i) = M_i$， $i = 0, 1, 2, ..., n$
- 由于 $S(x)$ 是三次多项式，$S''(x)$ 为线性函数，则可以得到 $S''(x)$ 在 (x_i, x_{i+1}) 上的表达式为

$$S_i''(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} M_i + \frac{x - x_i}{h_i} M_{i+1}, h_i = x_{i+1} - x_i \tag{2}$$

- 求积分，可以得到

$$S_i(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} M_{i+1} + c_1 x + c_2 \tag{3}$$

1.5 三次样条插值函数的计算

- 利用插值条件 $S(x_i) = y_i$，$S(x_{i+1}) = y_{i+1}$，得到

$$S_i(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} M_{i+1} + (y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + (y_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}) \frac{x - x_i}{h_i} \tag{4}$$

1.5 三次样条插值函数的计算

- 利用插值条件 $S(x_i) = y_i$，$S(x_{i+1}) = y_{i+1}$，得到

$$
\begin{aligned}
S_i(x) =& \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} M_{i+1} \\
&+ (y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + (y_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}) \frac{x - x_i}{h_i}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

- 此时还有 n+1 个参数 $M_0, M_1, \dots, M_n$ 待定。

1.5 三次样条插值函数的计算

- 利用条件 $S'(x_i^-) = S'(x_i^+)$，即 $S'_{i-1}(x_i^-) = S'_i(x_i^+)$，得到

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \tag{5}$$

1.5 三次样条插值函数的计算

- 利用条件 $S'(x_i^-) = S'(x_i^+)$，即 $S'_{i-1}(x_i^-) = S'_i(x_i^+)$，得到

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \tag{5}$$

- 进而有

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \tag{6}$$

其中，$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$，$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}$，$d_i = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$。

- 利用条件 $S'(x_i^-) = S'(x_i^+)$，即 $S'_{i-1}(x_i^-) = S'_i(x_i^+)$，得到

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \tag{5}$$

- 进而有

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \tag{6}$$

其中，$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$，$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}$，$d_i = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$。

- 上述方程称之为三弯矩方程，共有 n+1 个未知数和 n-1 个方程。配合边界条件，可以确定 $M_0, \ldots, M_n$。

- 针对第一类边界条件：$S'(x_0) = m_0$，$S'(x_n) = m_n$，可以得到如下 n+1 阶线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \cdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

- 针对第二类边界条件：$S''(x_0) = M_0$，$S''(x_n) = M_n$，等于只有 n-1 个未知数，则直接用三弯矩方程

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 M_0 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} M_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

- 针对第三类边界条件：$S'(x_0) = S'(x_n)$，$S''(x_0) = S''(x_n)$，可以得到

$$M_0 = M_n, \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n \tag{9}$$

其中，$\lambda_n = h_0/(h_0 + h_{n-1})$，$\mu_n = h_{n-1}/(h_0 + h_{n-1})$，

$d_n = 6(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n])/(h_0 + h_{n-1})$。

1.5 三次样条插值函数的计算

- 结合公式（9），构建 n 阶线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

1.6 总结

- 满足插值条件和某一类边界条件的三次样条函数存在且唯一。

1.6 总结

- 满足插值条件和某一类边界条件的三次样条函数存在且唯一。
- 具体计算过程：

1.6 总结

- 满足插值条件和某一类边界条件的三次样条函数存在且唯一。
- 具体计算过程：
  1. 根据插值条件 $S(x_i) = y_i$ 和边界条件给出关于 $M_0, M_1, ..., M_n$ 的线性方程组；

1.6 总结

- 满足插值条件和某一类边界条件的三次样条函数存在且唯一。
- 具体计算过程：
  1. 根据插值条件 $S(x_i) = y_i$ 和边界条件给出关于 $M_0, M_1, \ldots, M_n$ 的线性方程组；
  2. 解出 $M_0, M_1, \ldots, M_n$；

1.6 总结

- 满足插值条件和某一类边界条件的三次样条函数存在且唯一。
- 具体计算过程:
  1. 根据插值条件 $S(x_i) = y_i$ 和边界条件给出关于 $M_0, M_1, \ldots, M_n$ 的线性方程组;
  2. 解出 $M_0, M_1, \ldots, M_n$;
  3. 将 $M_0, M_1, \ldots, M_n$ 代入 $S_i(x)$ 的表达式。

内容

- 三次样条插值

谢谢！

Q&A