数值分析与计算软件

第 14 课

刘帆

南京大学工程管理学院

2020 年 6 月 1 日

0. 引言

- 插值型求积

0. 引言

- 插值型求积
- 能否适当的选取求积节点，使得插值型求积公式的代数精度进一步提高？

0. 引言

- 插值型求积
- 能否适当的选取求积节点，使得插值型求积公式的代数精度进一步提高？
- 求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 此时具有 $2n+2$ 个参数，可以将 $f(x) = 1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{2n+1}$ 代入公式，使其精确成立，则可构造出代数精度至少为 $2n+1$ 的求积公式。

例 1

- 试确定节点 x_i 和系数 A_i，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

例 1

- 试确定节点 x_i 和系数 A_i，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

- 将 $f(x)1, x, x^2, x^3$ 代入求积公式，使其精确成立，可得 $A_0 = 1, A_1 = 1, x_0 = -\sqrt{3}/3, x_1 = \sqrt{3}/3$。因此，求积公式为

$$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

该方法对于 $f(x) = x^4$ 不成立，所有只具有 3 次代数精度。

1.1 Guass 型求积公式

定义

考虑机械带权求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \tag{1}$$

若存节点在 $x_i \in (a,b)$ 及系数 A_i，使得上面的求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，则称节点 x_i 为高斯点，A_i 为高斯系数，求积公式为高斯型求积公式。

- 例 1 中的方法涉及到解非线性方程组，比较困难。

- 例 1 中的方法涉及到解非线性方程组，比较困难。
- 可以先确定 Gauss 点，然后通过解线性方程组计算高斯系数。

定理

插值型求积公式中的节点 $x_i(i=0,1,,n)$ *是 Gauss 点的充要条件是：多项式* $w_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ *与任意次数不超过* n *的多项式* $p(x)$ *关于权函数* $\rho(x)$ *正交，即*

$$\int_a^b \rho(x)p(x)w_{n+1}(x)dx=0 \tag{2}$$

此时，高斯系数 $A_i=\int_a^b \rho(x)l_i(x)dx$*，其中* $l_i(x)$ *为* x_i *节点对应的 Lagrange 基函数。*

1.3 Gauss-Legendre 求积公式

- 权函数不一样，求积区间不一样，都会导致 Gauss 点不一样。

1.3 Gauss-Legendre 求积公式

- 权函数不一样，求积区间不一样，都会导致 Gauss 点不一样。
- 当权函数 $\rho(x) = 1$ 且求积区间在 $(-1, 1)$ 时，可以把幂函数 $\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ 代入公式（2）求出 Gauss 点。

1.3 Gauss-Legendre 求积公式

- 权函数不一样，求积区间不一样，都会导致 Gauss 点不一样。
- 当权函数 $\rho(x) = 1$ 且求积区间在 $(-1, 1)$ 时，可以把幂函数 $\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ 代入公式（2) 求出 Gauss 点。
- Gauss 点为勒让德多项式 $p_{n+1}(x)$ 的零点。

1.3 Gauss-Legendre 求积公式

- 勒让德多项式：

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1} \tag{3}$$

- 勒让德多项式：

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1} \qquad (3)$$

- 当 $n=0$ 时，$p_1(x)=x$，因此 Gauss 点：$x_0=0$。
  将 $f(x)=1$ 代入求积公式，并要求其等于积分值，可以求出 $A_0=2$。
  于是，求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0) \qquad (4)$$

1.3 Gauss-Legendre 求积公式

- 当 $n=1$ 时，$p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，因此 Gauss 点：

  $x_0=-\frac{\sqrt{3}}{3}, x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

  利用节点和系数公式，则有 $A_0=A_1=1$。

  于是，求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3})+f(\frac{\sqrt{3}}{3}) \tag{5}$$

1.3 Gauss-Legendre 求积公式

- 当 $n=2$ 时，$p_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$，因此 Gauss 点：
  $x_0=-\frac{\sqrt{15}}{5}, x_1=0, x_2=\frac{\sqrt{15}}{5}$。
  利用节点和系数公式，则有 $A_0=A_2=\frac{5}{9}, A_1=\frac{8}{9}$。
  于是，求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f(-\frac{\sqrt{15}}{5})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\frac{\sqrt{15}}{5}) \tag{6}$$

内容

- Gauss 型求积公式

内容

- Gauss 型求积公式
- Gauss-Legendre 求积公式

谢谢！

Q&A