数值分析与计算软件

第 5 课

刘帆

南京大学工程管理学院

2020 年 3 月 16 日

0. 引言

- 直接法（1）：运算量大，不适合大规模的线性方程组求解；（2）：无法充分利用系数矩阵的稀疏性。

0. 引言

- 直接法（1）：运算量大，不适合大规模的线性方程组求解；（2）：无法充分利用系数矩阵的稀疏性。
- 迭代法从一个初始向量出发，按照一定的迭代格式，构造出一个趋向于真解的向量序列。

0. 迭代法的基本思想

- 考虑线性方程组 $Ax = b$，其中 A 为非奇异矩阵，$b \in R^n$。为构造迭代法，将 $Ax = b$ 改写为等价的 $x = Bx + f$。

0. 迭代法的基本思想

- 考虑线性方程组 $Ax = b$，其中 A 为非奇异矩阵，$b \in R^n$。为构造迭代法，将 $Ax = b$ 改写为等价的 $x = Bx + f$。
- 建立迭代格式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, k = 0, 1, \dots \tag{1}$$

0. 迭代法的基本思想

- 考虑线性方程组 $Ax = b$，其中 A 为非奇异矩阵，$b \in R^n$。为构造迭代法，将 $Ax = b$ 改写为等价的 $x = Bx + f$。
- 建立迭代格式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, k = 0, 1, \dots \tag{1}$$

- 其中，B 称为迭代矩阵。

- 将方程组 $Ax = b$ 改写成等价方程组

$$
\begin{cases}
x_1 = -\dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) \\
x_2 = -\dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2) \\
\vdots \\
x_n = -\dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} - b_n)
\end{cases}
\tag{2}
$$

■ 因此可以构造 Jacobi 迭代

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\
x_2^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\
\vdots \\
x_n^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} - b_n)
\end{cases}
\tag{3}
$$

Jacobi 迭代的算法

Jacobi 迭代的算法

Step 0： 输入方程组的阶数 n，系数矩阵 A 和右边向量 b，初始向量 x_0，误差要求 e，最大迭代次数 M，$m=0$

Step 1： 对 $i=1,2,...,n$，计算

$$x_i=-\frac{1}{a_{ii}}\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}x_{0j}-b_i\Big),m=m+1 \tag{4}$$

Step 2: 若 $||x-x_0||<e$，则计算停止，输出 x；否则若 $m>M$，则终止，输出“达到最大循环次数”；否则令 $x_0=x$，返回到 Step 1。

1.1 雅克比迭代

- 把系数矩阵 A 写成

$$A = D + L + U \tag{5}$$

的形式。其中，D 是由 A 的对角线元素组成的对角矩阵，L 和 U 分别为的严格下三角和严格上三角部分构成的严格三角形矩阵。

- 把系数矩阵 A 写成

$$A = D + L + U \tag{5}$$

的形式。其中，D 是由 A 的对角线元素组成的对角矩阵，L 和 U 分别为的严格下三角和严格上三角部分构成的严格三角形矩阵。

- 从而，公式 (7) 的矩阵形式为

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

- 把系数矩阵 A 写成

$$A = D + L + U \tag{5}$$

的形式。其中，D 是由 A 的对角线元素组成的对角矩阵，L 和 U 分别为的严格下三角和严格上三角部分构成的严格三角形矩阵。

- 从而，公式 (7) 的矩阵形式为

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

- Jacobi 迭代矩阵为

$$B = -D^{-1}(L+U) \tag{7}$$

1.2 Gauss-Seidel 迭代

- 在 Jacobi 第 $k+1$ 步迭代过程中，计算近似解第 i 个分量时，前 $i-1$ 个分量 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 都已经更新了。

1.2 Gauss-Seidel 迭代

- 在 Jacobi 第 $k+1$ 步迭代过程中，计算近似解第 i 个分量时，前 $i-1$ 个分量 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 都已经更新了。
- 用更新的值代替旧值来计算 $x_i^{(k+1)}$，可能会得到更好的收敛效果。

- 在 Jacobi 第 $k+1$ 步迭代过程中，计算近似解第 i 个分量时，前 $i-1$ 个分量 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 都已经更新了。
- 用更新的值代替旧值来计算 $x_i^{(k+1)}$，可能会得到更好的收敛效果。
- 这种方法叫做 Gauss-Seidel 迭代。

Gauss-Seidel 迭代的算法

Gauss-Seidel 迭代的算法

Step 0： 输入方程组的阶数 n，系数矩阵 A 和右边向量 b，初始向量 x_0，误差要求 e，最大迭代次数 M，$m=0$

Step 1： 对 $i=1,2,...,n$，计算

$$x_i = -\frac{1}{a_{ii}}(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_{0j} - b_i), m = m+1 \quad (8)$$

Step 2: 若 $||x - x_0|| < e$，则计算停止，输出 x；否则若 $m > M$，则终止，输出 “达到最大循环次数”；否则 $x_0 = x$，返回到 Step 1。

1.2 Gauss-Seidel 迭代

- Gauss-Seidel 迭代格式的矩阵形式为

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

- Gauss-Seidel 迭代格式的矩阵形式为

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

- 迭代矩阵 B 为

$$B = -(D+L)^{-1}U \tag{10}$$

2.1 迭代法的收敛性

- 若 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$，则称该迭代法收敛，$x^*$ 为原方程组 $Ax = b$ 的解。

2.1 迭代法的收敛性

- 若 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$，则称该迭代法收敛，$x^*$ 为原方程组 $Ax = b$ 的解。
- 根据公式（1）可以得到第 $k+1$ 步的误差 $e^{(k+1)}$ 满足：

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^* = B(x^{(k)} - x^*) = Be^{(k)} = \cdots = B^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \tag{11}$$

那么可知 $x^{(k)} \to x^*$ 的充要条件是 $B^k \to 0$。

定理

对任给初始向量 $x^{(0)}$，迭代过程 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 收敛的充分必要条件是 $\rho(B) < 1$。

例 1

- 考察迭代 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 的收敛性，其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, f = (2,2)^T$$

解：迭代矩阵的特征方程为 $det(\lambda E - B) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$。可以求出特征值为-1 和 2。因此 $\rho(B) = 2 > 1$，说明迭代法不收敛。

2.1 迭代法的收敛性

定理

若迭代矩阵 B 的某一范数 $||B|| = q < 1$，则迭代过程 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 收敛，且有

$$\begin{aligned} ||x^{(k)} - x^*|| &\leq q^k ||x^{(0)} - x^*|| \\ ||x^{(k)} - x^*|| &\leq \frac{q}{1-q} ||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| \end{aligned} \tag{12}$$

2.1 迭代法的收敛性

- 由定理可知，当 $||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| < e$ 时，有 $||x^{(k)} - x^*||$ 小于 e 的常数倍，因此可以在迭代过程中用 $||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| < e$ 作为迭代终止准则。

2.1 迭代法的收敛性

- 由定理可知，当 $||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| < e$ 时，有 $||x^{(k)} - x^*||$ 小于 e 的常数倍，因此可以在迭代过程中用 $||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| < e$ 作为迭代终止准则。
- $||B||$ 越小，迭代收敛得越快；且 B 的谱半径越小，迭代收敛得越快。

定义

迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ *的平均收敛速度为*

$$R_k(B) = -\ln(||B^k||^{\frac{1}{k}}) \tag{13}$$

渐进收敛速度为

$$R(B) = \lim_{x \to \infty} R_k(B) = -\ln \rho(B) \tag{14}$$

2.2 Gauss-Seidel v.s. Jacobi

定理

(1) λ 是 Jacobi 迭代矩阵的特征值 $\Longleftrightarrow$ λ 是方程 $det(\lambda D + L + U) = 0$ 的根; (2) λ 是 Gauss-Seidel 迭代矩阵的特征值 $\Longleftrightarrow$ λ 是方程 $det(\lambda(D + L) + U) = 0$ 的根。

2.2 Gauss-Seidel v.s. Jacobi

定义

若矩阵 A 满足条件

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, ..., n \tag{15}$$

则称 A 为严格对角占优矩阵。

定理

若矩阵 A 为严格对角占优矩阵，则解方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛。

2.2 Gauss-Seidel v.s. Jacobi

定理

若矩阵 A 为对称正定矩阵，则解方程组 $Ax = b$ 的 Gauss-Seidel 迭代法收敛。若 $2D - A$ 也是对称正定阵，其中 D 是由 A 的对角线元素组成的对角矩阵，则 Jacobi 迭代法也收敛。

2.2 Gauss-Seidel v.s. Jacobi

- 对于不同的方程组，Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性没有必然联系。

2.2 Gauss-Seidel v.s. Jacobi

- 对于不同的方程组，Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性没有必然联系。
- 当 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛时，通常后者比前者收敛速度快。

- 用 $\hat{x}_i^{(k+1)}$ 作为 Gauss-Seidel 迭代在第 k 步对第 i 个分量的计算结果。

- 用 $\hat{x}_i^{(k+1)}$ 作为 Gauss-Seidel 迭代在第 k 步对第 i 个分量的计算结果。
- 令 $x_i^{(k)}$ 是 SOR 第 $k-1$ 步第 i 个分量的迭代值，则

$$x_i^{(k+1)} = w\hat{x}_i^{(k+1)} + (1-w)x_i^{(k)} \tag{16}$$

其中，系数 w 是松弛因子。

2.3 超松弛迭代法-SOR 方法

- 若 w 值取得较好，则 SOR 方法收敛速度优于 Gauss-Seidel 迭代法；

2.3 超松弛迭代法-SOR 方法

- 若 w 值取得较好，则 SOR 方法收敛速度优于 Gauss-Seidel 迭代法；
- 若 w 值取得不好，则可能会比 Gauss-Seidel 迭代法慢甚至不收敛；

2.3 超松弛迭代法-SOR 方法

- 若 w 值取得较好，则 SOR 方法收敛速度优于 Gauss-Seidel 迭代法；
- 若 w 值取得不好，则可能会比 Gauss-Seidel 迭代法慢甚至不收敛；
- 使迭代法收敛速度最快的松弛因子称为最佳松弛因子，寻找最佳松弛因子比较困难。

2.3 超松弛迭代法-SOR 方法

定理

若解线性方程组 $Ax = b$ 的 SOR 方法收敛，则 $0 < w < 2$。

总结

1. 三种迭代方法
2. Jacobi 和 Gauss-Seidel 的收敛判断

谢谢！

Q&A