1 FRB only

1. 认为精细结构常数随时间演化，若采取runaway dilaton模型：

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z) = -\gamma ln(1+z) \tag{1}$$

2. FRB河外色散量的理论值：

$$DM_{ext}^{th}(z) \equiv DM_{host}(z) + DM_{IGM}(z) \tag{2}$$

- 宿主星系：

$$DM_{host}(z) = \frac{DM_{host,0}}{(1+z)} f(\alpha, z)$$

若不考虑精细结构常数，$f(\alpha, z) = 1$ (host 1)；考虑精细结构常数时，$f(\alpha, z) = -\gamma(1+z) + 1$, (host 2)

- 星系间介质：

$$DM(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \frac{cn_e(z')}{(1+z')^2} (\frac{\Delta\alpha(z')}{\alpha_0} + 1)$$

这是考虑了精细结构常数，对这一部分的色散量的贡献是 $\frac{\Delta\alpha(z')}{\alpha_0} + 1$。经过推导，这一部分也可以写作$1 - \gamma ln(1+z)$

3. FRB的色散量自关联功率谱：

$$\begin{aligned}
C_\ell^{\mathrm{IGM,IGM}} &= \int \mathrm{d}z W_{\mathrm{DM,IGM}}^2(z) \frac{H(z)}{\chi^2(z)} b_{\mathrm{b}}^2 P_{\mathrm{m}} \left(\frac{\ell + 1/2}{\chi(z)}, z \right), \\
C_\ell^{\mathrm{IGM,host}} &= 2 \int \mathrm{d}z W_{\mathrm{DM,IGM}}(z) W_{\mathrm{DM,host}}(z) \frac{H(z)}{\chi^2(z)} \times b_{\mathrm{FRB}} b_{\mathrm{b}} P_{\mathrm{m}} \left(\frac{\ell + 1/2}{\chi(z)}, z \right), \\
C_\ell^{\mathrm{host,host}} &= \int \mathrm{d}z W_{\mathrm{DM,host}}^2(z) \frac{H(z)}{\chi^2(z)} b_{\mathrm{FRB}}^2 P_{\mathrm{m}} \left(\frac{\ell + 1/2}{\chi(z)}, z \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
W_{\mathrm{DM,IGM}}(z) &= \left(1 - \frac{1}{2} Y\right) f_{\mathrm{IGM}}(z) \frac{\bar{\rho}_{\mathrm{b},0}}{m_{\mathrm{p}}} \frac{(1+z)}{H(z)} \int_z^\infty n(z) \mathrm{d}z \times (1 - \gamma ln(1+z)) \\
W_{\mathrm{DM,host}}(z) &= \frac{\mathrm{DM_{host}}(z)}{(1+z)} n(z) f(\alpha, z),
\end{aligned} \tag{4}$$

4. FRB的色散量noise功率谱：

$$N_\ell^{\mathrm{DM}} = \sqrt{\frac{1}{(2\ell+1) f_{\mathrm{sky}}}} \left[C_\ell^{\mathrm{DM}} + N_\ell^{\mathrm{host}} \right] \tag{5}$$

与FRB的个数有关，假设FRB个数范围100-10^6，f_{sky}=0.8，宿主星系色散量弥散$\sigma_{\mathrm{host},0} = 30\ pc/cm^3$：

$$N_\ell^{\mathrm{host}} = 4\pi f_{\mathrm{sky}} \sigma_{\mathrm{host}}^2 / N$$

$$\sigma_{host} = \sigma_{host,0} \int_0^z 1 - \gamma ln(1+z) dz$$

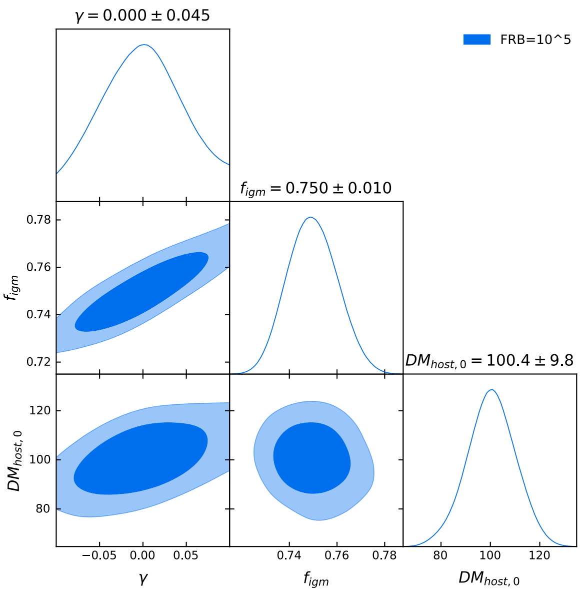
5. 信噪比

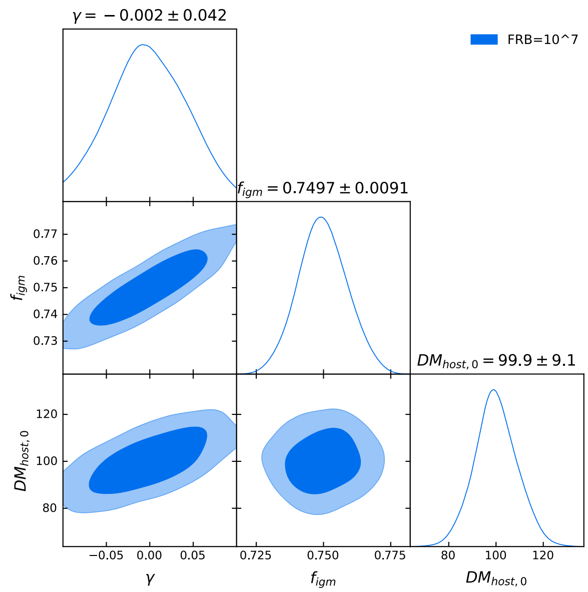
$$\mathrm{S/N} \equiv \sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} C_\ell^{\mathrm{DM}} / N_\ell^{\mathrm{DM}}$$

Likelihood:

$$\chi^2 = \left(\hat{C}_\ell^{\mathrm{DM,obs}} - C_\ell^{\mathrm{DM,th}}\right) \delta_{\ell,\ell'} \left(N_\ell^{\mathrm{DM}}\right)^2 \left(\hat{C}_{\ell'}^{\mathrm{DM,obs}} - C_{\ell'}^{\mathrm{DM,th}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

参数：$\gamma, f_{IGM}, DM_{host,0}$





2 Galaxy and FRB

假设星系在很窄范围内的红移bin内，将DM与星系场做互关联，可以得到特定红移处的$\Delta\alpha/\alpha$的值。同上，考虑精细结构常数的变化后，近在DM中添加一项$(1+\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z))$。 星系的有效红移：0.15，0.45，0.75.

$$C_\ell^{gg} = \frac{1}{\Delta\chi_g\chi_g^2} P_{gg}\left(k, z_g\right)_{k=\ell/\chi_g} \tag{7}$$

$$C_\ell^{DD} = n_{e0}^2 \int_0^{z_f} dz \frac{(1+z)^2}{\chi^2(z)} \frac{c}{H(z)} P_{ee}\left(k, z\right)_{k=\ell/\chi} (1+\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z))^2 \tag{8}$$

$$C_\ell^{Dg} = n_{e0} \frac{(1+z)}{\chi_g^2} P_{ge}\left(k, z_g\right)_{k=\ell/\chi_g} (1+\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z)) \tag{9}$$

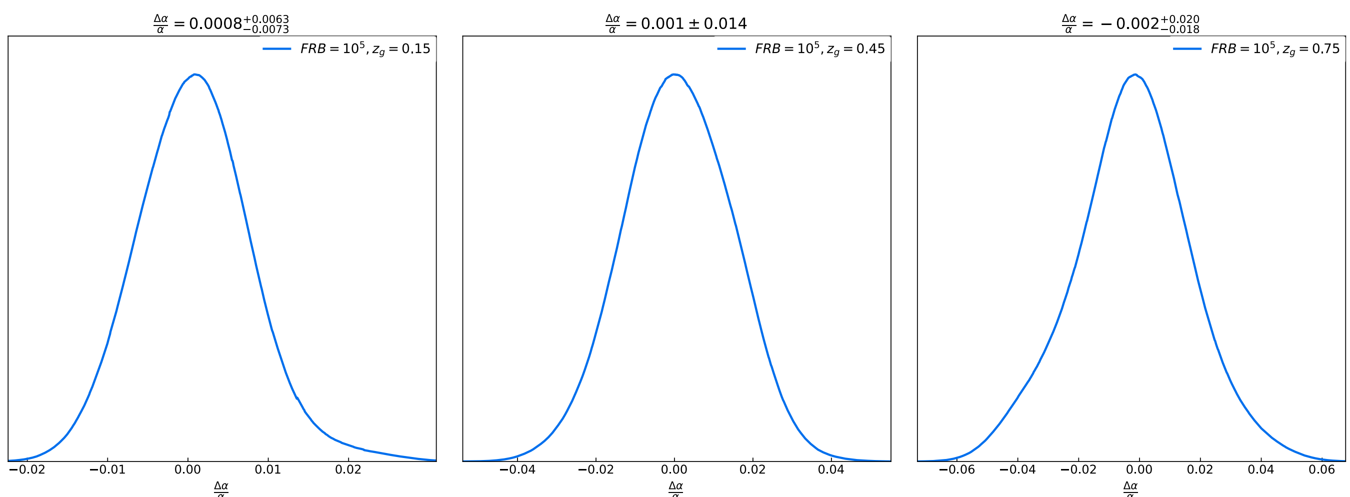
Noise:

$$(N_\ell^{Dg})^2 = (C_\ell^{gg}+N_{gg})(C_\ell^{DD}+N_{DD}) \tag{10}$$

$$N_{DD} = \sigma_{\rm DM}^2/n_f^{2d} \tag{11}$$

Likelihood:

$$\chi^2 = \left(\hat{C}_\ell^{\rm Dg,obs} - C_\ell^{\rm Dg,th}\right)\delta_{\ell,\ell'}\left(N_\ell^{\rm Dg}\right)^2\left(\hat{C}_{\ell'}^{\rm Dg,obs} - C_{\ell'}^{\rm Dg,th}\right)^{\rm T} \tag{12}$$



3 About DM

1. 论文中常见的DM的表达形式，将三部分分开，并且一般只用IGM，host部分计算功率谱

$$
\begin{aligned}
&DM_{total} = DM_{MW} + DM_{IGM} + DM_{host} \\
&DM_{IGM}(z) = \int_0^z \frac{\rho_{b,0}}{m_p}(1 - \frac{1}{2}Y_{He})f_{igm}(1+z)\frac{c}{H(z)}dz \\
&DM_{host}(z) = \frac{DM_{host,0}}{1+z}\sqrt{\frac{SFR(z)}{SFR(0)}}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

- $(1 - \frac{1}{2}Y_{He}) = 0.88$, $f_{igm}^{fid} = 0.75$

2. 更general的形式，引入n_{e0},代表MW, IGM, host三部分的总贡献

$$
\begin{aligned}
DM_{total} &= \int_0^z \frac{n_e(z)}{(1+z)}\frac{c}{H(z)}dz \\
&= \int_0^z n_{e0}(1+z)\frac{c}{H(z)}dz
\end{aligned}
\tag{14}
$$

其中n_{e0}可以这么计算，参考 arxiv:1109.0553（这篇文章基于kSZ效应的，但我觉得这里对电子数密度的定义是广义的，因为是从最底层的电离过程出发的）：

$$
n_{e0} = \frac{\chi\rho_{g,0}}{\mu_e m_p} \tag{15}
$$

- $\chi = 0.86$: fraction of the total number of electrons that are ionized，与氦的丰度和电离状态有关，计算时氦$N_{He} = 0$（完全电离），$Y_p = 0.24$

$$
\chi = \frac{1 - Y_p\left(1 - N_{\mathrm{He}}/4\right)}{1 - Y_p/2} \tag{16}
$$

- $\rho_{g,0} \sim \rho_{b,0}$: mean gas density of the Universe

- $\mu_e m_p$: mean mass per electron, 每个电子对应的总质量。 文献给出$\mu_e = 1.14$ 与氢和氦的丰度有关（如果按75%氢，25%氦，$4m_H = m_{He} = 4m_p$，氢电离产生1个电子，氦产生2个，这样算出来$\mu_e = 1.25$，可能1.14时是取的其他丰度结果？），

3. 这样算出来的，在红移0处，DM积分号内的值分别是,相差了0.006:

$$
\frac{\rho_{b,0}}{m_p}(1 - \frac{1}{2}Y_{He})f_{igm} = 0.1657 \qquad n_{e0} = \frac{\chi\rho_{g,0}}{\mu_e m_p} = 0.1717 \tag{17}
$$

4. 综上，1和2方法是等价的，$figm$和Y_{He}的信息分别体现在χ和μ_e中；$\mathrm{DM_{host,0}}$和银河系的贡献在计算积分时就包含进去了。

4 拓展

1. 爱因斯坦等效原理（Einstein Equivalence Principle–EEP) 认为，存在一个时空度规，与物质场的耦合最小，即最小耦合量：

$$S_{\text{mat}} = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{mat}}\left(g_{\mu\nu}, \Psi\right) \tag{18}$$

2.需要修正：满足太阳系内的检验，与宇宙学的观测事实。研究其他内容，比如暗物质暗能量（宇宙加速膨胀），检验局域不变性（Local Position Invariance），需要打破EEP，引入标量场ϕ与物质场的非最小耦合。主要的变化是$h_i(\phi)$，代表标量场ϕ与不同物质场的耦合：

$$S_{\text{mat}} = \int d^4x\sqrt{-g}h_i(\phi)\mathcal{L}_{\text{i}}\left(g_{\mu\nu}, \Psi\right) \tag{19}$$

3.这样一个耦合$h(\phi)$，是随着时间演化的，会导致（可能）四个影响：

- 精细结构常数的时间演化（temporal variation of the fine structure constant）
- CDDR（violation of the distance-duality relation）：计算光度距离时有修正 η
- CMB温度演化的修正（modification of the evolution of the CMB temperature）β
- CMB谱畸变（spectral distortions）：使CMB辐射不服从绝热条件，存在化学势μ

其中后面三个属于一类：由“耦合导致着沿测地线的光子数不守恒”引起

4.由于引入了标量场ϕ于其他物质场的耦合，即$h(\phi)$，首先会导致精细结构常数随时间变化：

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z) \equiv \frac{\alpha(z)-\alpha_0}{\alpha_0} = \frac{h(\phi_0)}{h(\phi)} - 1 \tag{20}$$

4.1 CDDR

基于scalar-tensor theories (arxiv:1404.4266—Eq.(56))，在晚期宇宙计算光度距离关系D_L。首先，引入 电磁势4矢量（4-potential） A^μ，电磁场张量$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$，代表$h(\phi)$与电磁场的耦合，会改变光子在时空传播的特性：

$$\nabla_\nu\left(h(\Phi)F^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{21}$$

通过以上这个修正的麦克斯韦方程组，可知光子数不守恒。有两个偏振方向：**沿视线方向（径向）**,垂直于视线方向。

$$\frac{d\ln b}{d\lambda} + \frac{1}{2}\frac{d\ln r^2a^2(t)}{d\lambda} + \frac{1}{2}\frac{d\ln h(\phi)}{d\lambda} = 0 \tag{22}$$

λ是仿射参数，描述光子沿着测地线的运动。 在FLRW时空（flat或者curved都可）中对它积分，得到光度距离（描述从天体发出的光在经过宇宙膨胀后到达观测者的亮度变化，所以它会受影响）：

$$D_L(z) = c(1+z)\sqrt{\frac{h(\phi_0)}{h(\phi(z))}}\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \tag{23}$$

描述CDDR:

$$\frac{D_L(z)}{D_A(z)(1+z)^2} \equiv \eta(z) = \sqrt{\frac{h(\phi_0)}{h(\phi(z))}} \tag{24}$$

与精细结构常数的关系:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z)=\eta(z)^2-1 \tag{25}$$

4.2 CMB温度演化的修正和谱畸变

1.加入了耦合$h(\phi)$，玻尔兹曼方程表示光子数密度的时间演化，右边的碰撞项$C[f]$可以写成耦合$h(\phi)$的形式:

$$\begin{aligned}\dot{n}+3Hn&=-n\partial_t\ln h(\phi)\\ \dot{\rho}+4H\rho&=-\rho\partial_t\ln h(\phi)\end{aligned} \tag{26}$$

光子的数密度n和平均能量ρ都是关于碰撞项$[f]$的积分。计算数密度和平均能量，表明：加入耦合后，CMB传到观测者时，不满足绝热黑体辐射（刚CMB刚发出来时是满足的），因此需要在光子的玻色爱因斯坦分布中加入化学势μ，来描述这种偏离绝热黑体谱的畸变（黑体辐射$\mu=0$）。

2.结合化学势，求解以上两个公式，可以得到光子个数$n(T,\mu)$和能量密度$\rho(T,\mu)$，T,μ分别是CMB温度和化学势。

如果将T,ρ,n展开到一阶：$x=x_0+\delta x(x:T,\rho,n)$。零阶代表标准的GR，并且在$z_{\rm CMB}$时只有零阶。可以将温度和化学势写成关于$n,\rho$的形式。

温度:

$$\begin{aligned}T_{(0)}&=\left(\frac{15\rho_{(0)}}{\pi^2}\right)^{1/4}=\left(\frac{\pi^2 n_{(0)}}{2\zeta(3)}\right)^{1/3}\\ \frac{\delta T}{T_{(0)}}&=\frac{\frac{\delta\rho}{\rho_{(0)}}-\frac{540\zeta(3)^2}{\pi^6}\frac{\delta n}{n_{(0)}}}{4\left(1-\frac{405\zeta(3)^2}{\pi^6}\right)}\end{aligned} \tag{27}$$

化学势:

$$\mu=\frac{3\zeta(3)}{2\pi^2}\frac{3\frac{\delta\rho}{\rho_{(0)}}-4\frac{\delta n}{n_{(0)}}}{1-\frac{405\zeta(3)^2}{\pi^6}} \tag{28}$$

其中与n,ρ有关的部分都可以写成$h(\phi)$的函数。

3.另一方面，某个红移处，光子的个数和能量密度满足，$i=CMB$为初始条件:

$$na^3h(\phi)=n_ia_i^3h(\phi_i),\quad \rho a^4h(\phi)=\rho_ia_i^4h(\phi_i) \tag{29}$$

- 在红移为$z_{\rm CMB}$时，n只有零阶，而且之后任意时刻的n与$z_{\rm CMB}$满足:

$$\begin{aligned}&n_0/n_{0,\rm CMB}=a^{-3}/a_{0,\rm CMB}^{-3}\\ &(n_0+\delta n)a^3h(\phi)=n_{0,\rm CMB}a_{\rm CMB}^3h(\phi_{\rm CMB})\end{aligned} \tag{30}$$

  发现$\frac{\delta n}{n_0}=\frac{h(\phi_{\rm CMB})}{h(\phi)}-1$，能量密度$\frac{\delta\rho}{\rho_0}$也遵循这样的关系。将此关系定义为:

$$\frac{\delta n}{n_0}=\frac{\delta\rho}{\rho_0}=\delta h(\phi)\equiv\frac{h(\phi_{\rm CMB})}{h(\phi)}-1=\frac{\eta^2(z)}{\eta^2(z_{\rm CMB})}-1 \tag{31}$$

- 这样就可以将$\Delta\alpha$与$\delta h(\phi)$联系起来。最后一步推导认为分母等于1（$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z_{\rm CMB})$和1比起来很小）:

$$\delta h(\phi)=\frac{\eta^2(z)}{\eta^2(z_{\rm CMB})}-1=\frac{\eta^2(z)-\eta^2(z_{\rm CMB})}{\eta^2(z_{\rm CMB})}=\frac{\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z)+1-\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z_{\rm CMB})-1}{\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z_{\rm CMB})+1}\simeq\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z)-\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z_{\rm CMB}) \tag{32}$$

4.2.1 对CMB温度演化的影响

i代表CMB处的红移或者此时的CMB温度。结合公式27，31和32，零阶温度$T_{(0)} \sim a^{-1} = 1 + z$

$$\begin{aligned} T_{(0)} &= \frac{T_i a_i}{a} = T_i \frac{1+z}{1+z_i} \\ \frac{\delta T}{T_{(0)}} &= \frac{1 - 540\zeta(3)^2/\pi^6}{1 - 405\zeta(3)^2/\pi^6} \frac{\delta h(\phi)}{4} \approx 0.1204 \delta h(\phi) \end{aligned} \tag{33}$$

因此，在任意时刻的温度为，其中T_0是今天的温度：

$$\begin{aligned} T = T_{(0)} + \delta T = T_{(0)} \left(1 + 0.12\delta h(\phi)\right) &= T_i \frac{1+z}{1+z_i} \left[1 + 0.12 \delta h(\phi(z))\right] \\ ? = T_0(1+z) &\Big[1 + 0.12[\delta h(\phi(z)) - \delta h(\phi(0))]\Big] \\ = T_0(1+z) &\Big[1 + 0.12[\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z) - \frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z_{\rm CMB}) - \frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z=0) + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z_{\rm CMB})]\Big] \\ = T_0(1+z) &\Big[1 + 0.12 \frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z)\Big] = T_0(1+z)\Big[0.88 + 0.12\eta^2(z)\Big] \end{aligned} \tag{34}$$

因此可以看出，$\delta h(\phi(z)) = \frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z)$。

另外对于CMB温度变化，还有一个形式：

$$T(z) = T_0 (1+z)^{1-\beta} \tag{35}$$

那么

$$(1+z)^{-\beta} = 1 + 0.12 \frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z) \tag{36}$$

4.2.2 化学势

关注z=0处的化学势。由公式28

$$\mu \simeq -0.4669 \delta h(\phi(z=0)) = -0.47[\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z=0) - \frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z_{\rm CMB})] = 0.47 \frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z_{\rm CMB}) \tag{37}$$

综上，用晚期的星系和FRB的信息，可以对CDDR和CMB温度演化的参数限制，即η, β

4.3 限制结果 —— 误差传递

红移为0.15，$\Delta\alpha/\alpha = 0.0008^{+0.0063}_{-0.0073}$。已知参数a，求参数$b = f(a)$的误差：$\sigma(b) = |\frac{\partial f(a)}{\partial a}|\sigma(a)$

1. CDDR:

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}} \qquad \sigma(\eta) = \frac{1}{2(1 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha})} \sigma(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}) \tag{38}$$

$\eta = 1.0004^{+0.0070}_{-0.0072}$

2. CMB温度演化

$$\beta = -\frac{\log(1 + 0.12\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z))}{\log(1+z)} \tag{39}$$

$\beta = 0.017^{+0.029}_{-0.032}$

5 proton-to-electron mass ratio

参考文章：arxiv:0610733，Surajit Kalita2023

- $m_e = h_e v$: h代表(Yukawas)汤川耦合，v： Higgs vacuum expectation value。 $\Delta m_e = \Delta h_e v + h_e \Delta v$
- $\frac{\Delta m_p}{m_p} \simeq 0.76\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} + 0.24\left(\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta v}{v}\right)$：计算时，$0.76 \to 0.8$。计算用到的公式参考文献的11，14，21
- $$\begin{aligned}\frac{\Delta m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}} &= \frac{1}{2}(1+\mathrm{S})\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \\ \frac{\Delta m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}} &= \left[\frac{4}{5}\mathrm{R} + \frac{1}{5}(1+\mathrm{S})\right]\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\end{aligned} \tag{40}$$
- $\mu = m_p/m_e$
- $$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \left(\frac{\Delta m_p}{m_e} - \frac{m_p}{m_e^2}\Delta m_e\right) \times \frac{m_e}{m_p} = \frac{\Delta m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}} - \frac{\Delta m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}} = \left[\frac{4}{5}R - \frac{3}{10}(1+S)\right]\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \tag{41}$$
- R和S是模型依赖的，通过观测数据可以得到，有误差。$R = 278{\pm}24$ 和 $S = 742{\pm}65$ (arxiv:1309.7765)