第七章树和割集

陈建文

December 3, 2024

定义1. 连通且无圈的无向图称为无向树，简称**树**。一个没有圈的无向图称为无向森林，简称**森林**。

定义2. 仅有一个顶点的树称为**平凡树**。

定理1. 任一非平凡树中至少有两个度为1的顶点。

证明. 设P为树中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由G中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为 1 。P的两个端点即为两个度为1的顶点。 □

定理2. 设$G = (V, E)$为一个(p, q)图，下列各命题等价:

1. G为树;
2. G为连通的且$q = p - 1$;
3. G中无圈且$q = p - 1$。

证明.

$1 \Rightarrow 2$

(证法一)

只需证$q = p - 1$，用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$，结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设树G有$k + 1$个顶点。G中一定存在一个度为1的顶点。去掉G中一个度为 1 的顶点及其与之关联的边，得到的图G'连通且无圈，则G'是树。G'有k个顶点，$q-1$条边，由归纳假设，$q-1 = k-1$，从而$q = (k+1)-1$，即当$p = k+1$时结论也成立。

(证法二)

只需证$q = p - 1$，用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$,结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设树G有k条边。去掉G中的任意一条边，得到两个支G_1和G_2，它们均连通无圈，因此是树。设G_1有p_1个顶点，k_1条边，G_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加 1 ，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当$q = k$时结论也成立。

$2 \Rightarrow 3$

只需证G中无圈。用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。如此继续下去，最终会得到一个连通的没有圈的图。由从1到2的证明知最后得到的图中有$p-1$条边，这与去掉边之前图G中的边数$q = p - 1$矛盾。

$3 \Rightarrow 1$

只需证G连通。设图G有k个支，则图G中的每个支连通且没有圈。设第i个支中含有p_i个顶点，q_i条边。由1到2的证明知在第i个支中$q_i = p_i - 1$。将所有支的边数和顶点数相加，可得$q = p - k$。于是$k = 1$，从而G为连通的。 □

定义3. 设$G = (V, E)$为连通图，$v \in V$，$e(v) = max_{u \in V}\{d(v, u)\}$称为$v$在$G$中的偏心率。$r(G) = min_{v \in V}\{e(v)\}$称为$G$的半径。满足$e(v) = r(G)$的顶点称为$G$的中心点。$G$的所有中心点组成的集合称为$G$的中心，$G$的中心记为$C(G)$。

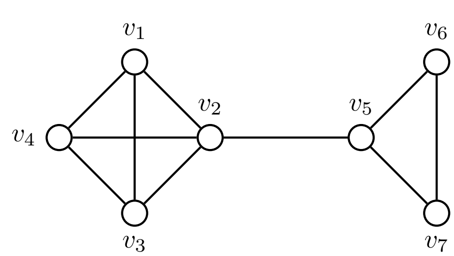
定理3. 每棵树的中心或含有一个顶点，或含有两个邻接的顶点。

证明. 显然，对有一个顶点的树K_1与有两个顶点的树K_2，定理成立。设T为一棵顶点数大于等于3的树，T'是从T中去掉度为1的那些顶点后所得到的树。易见，顶点u到T的其他各顶点v的距离中仅当v的度为1时才可能达到最大值。所以，T'的每个顶点的偏心率比该顶点在T中的偏心率少1。因此，T与T'有相同的中心。重复地去掉度为1的顶点，得到一些与T有相同中心的树。由于T仅有有限个顶点，所以最后必得到K_1或K_2。因此，任何树的中心，或含有一个顶点，或含有两个邻接的顶点。 □

定义4. 设$G = (V, E)$为一个图，G的一个生成子图$T = (V, F)$如果是树，则称T为G的**生成树**。

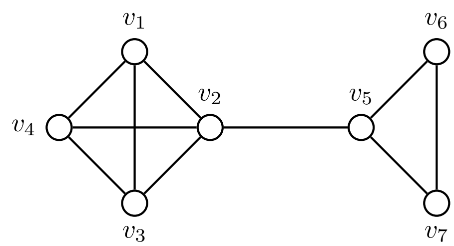
定理4. 图G有生成树的充分必要条件是G为一个连通图。

定义5. 设v为图G的一个顶点，如果$G - v$的支数大于G的支数，则称顶点v为图G的一个**割点**。

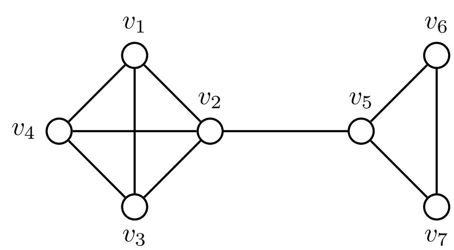


定理5. 设v为连通图$G=(V,E)$的一个顶点，则下列命题等价：

1. v为图G的一个割点；
2. 集合$V\setminus\{v\}$有一个二划分$\{U,W\}$，使得对任意的$u\in U$，$w\in W$，v在联结u和w的每条路上；
3. 存在与v不同的两个顶点u和w，使得v在每一条u与w间的路上。

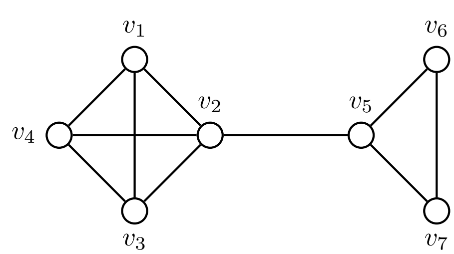


定义6. 图G的一条边x称为G的一座**桥**，如果$G-x$的支数大于G的支数。

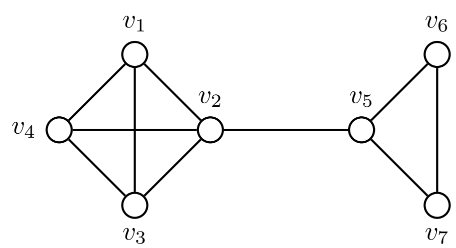


定理6. 设x为连通图$G=(V,E)$的一条边，则下列命题等价：

1. x为G的桥；
2. x不在G的任一圈上；
3. 存在V的一个划分$\{U,W\}$，使得对任意的$u\in U, w\in W$，x在每一条联结u与w的路上；
4. 存在G的不同顶点u和v，使得边x在联结u和v的每条路上。



定义7. 设$G=(V,E)$为图，$S\subseteq E$。如果从G中去掉S中的所有边得到的图$G-S$的支数大于G的支数，而去掉S的任一真子集中的边得到的图的支数不大于G的支数，则称S为G的一个**割集**。



定义8. 一个有向图，如果抹去其所有弧的方向以后所得到的无向图是一棵无向树，则称该有向图为一棵**有向树**。

定义9. 有向树D称为**有根树**，如果D中恰有一个顶点的入度为0，而其余每个顶点的入度均为1。有根树中入度为0的顶点称为有根树的根，出度为0的顶点称为有根树的**叶子**，非叶顶点称为有根树的**分支点**或**内顶点**。

定义10. 设$T=(V,A)$为一棵有根树。如果$(u,v)\in A$，则称v为u的**儿子**，u为v的**父亲**。如果从顶点u能达到顶点v，则称v为u的**子孙**，u为v的**祖先**。如果u为v的祖先且$u\neq v$，则称u为v的**真祖先**，v为u的**真子孙**。

定义11. 设$T=(V,A)$为一棵以v_0为根的有根树。从v_0到顶点v的有向路的长度称为T的顶点v的**深度**。从顶点v到T的叶子的最长的有向路的长度称为顶点v在T中的**高度**。根顶点v_0的高度称为树T的**高度**。

定义12. 设$T=(V,A)$为一棵有根树，v为T的一个顶点，由v及其子孙所导出的T的子图称为T的以v为根的**子树**。

定义13. 设$T=(V,A)$为一棵有根树。如果T的每个顶点的各个儿子排定了次序，则称T为一棵**有序树**。

定义14. 有序树T称为m**元有序树**，如果T的每个顶点的出度$\leq m$。一棵m元有序树T称为**正则**m**元有序树**，如果T的每个顶点的出度不是0就是m。二元有序树简称**二元树**。