

### 第三章作业题

1. 设  $X=\{a,b,c\}$ , 给出  $X$  上的一个二元关系, 使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系, 并画出  $R$  的关系图。

2. 设  $R$  是  $X$  上的二元关系, 下面的结论是否正确? 并证明你的结论。

(1) 如果  $R$  是自反的, 则  $R \cdot R$  也是自反的

(2) 如果  $R$  是对称的, 则  $R \cdot R$  也是对称的。

(3) 如果  $R$  是反自反和传递的, 则  $R$  是反对称的。

3. 设  $R, S$  是  $X$  上的二元关系, 试证:  $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ 。

4. 设  $R, S$  为  $X$  上的二元关系, 试证:  $(R \cup S)^+ \supseteq R^+ \cup S^+$ 。

5. 由置换  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$  确定了  $X = \{1, 2, \dots, 8\}$  上的一个关系

$\cong: i, j \in X, i \cong j$  当且仅当  $i$  与  $j$  在  $\sigma$  的循环分解式中的同一循环置换中, 证明:  $\cong$  是  $X$  上的等价关系, 求  $X / \cong$ 。

6. 设  $(S, \leq_1), (T, \leq_2)$  是偏序集。在  $S \times T$  上定义二元关系  $\leq_3$  如下:

$$\forall (s, t), (s', t') \in S \times T, (s, t) \leq_3 (s', t') \Leftrightarrow s \leq_1 s' \text{ 并且 } t \leq_2 t'.$$

证明: (1)  $\leq_3$  是  $S \times T$  上的偏序关系;

(2) 若  $(s, t) \leq_3 (s', t') \Leftrightarrow s \leq_1 s' \text{ 或 } t \leq_2 t'$ , 则  $\leq_3$  是  $S \times T$  上的偏序关系吗?

7. 设  $R$  是  $X$  的自反且传递的二元关系, 则

(1) 给出  $R$  的一个实例;

(2) 在  $X$  上定义二元关系  $\sim$  是:  $x \sim y \Leftrightarrow xRy, yRx$ 。

证明:  $\sim$  是  $X$  上的等价关系。

(3) 在商集  $X / \sim$  上定义二元关系  $\leq$ :  $[a] \leq [b] \Leftrightarrow aRb$ 。

证明:  $\leq$  是  $X / \sim$  上的偏序关系。

8. 设  $R$  是  $X$  上的偏序关系, 证明:  $R$  是  $X$  上的全序关系  $\Leftrightarrow X \times X = R \cup R^{-1}$ 。

9. 设  $n=2^3 3^3$ ,  $X$  为  $n$  的所有因子之集,  $1, n \in X$ 。  $\forall x, y \in X, x \leq y \Leftrightarrow x|y$ 。

(1) 画出偏序集  $(X, \leq)$  的哈氏图。

(2) 给出偏序集  $(X, \leq)$  的一条最长链和一条最长反链。

(3)  $(X, \leq)$  有最大元素吗?

(4) 证明:  $(X, \leq)$  的最长链的最大元素一定是  $(X, \leq)$  的最大元素。

10. 是否存在一个偏序关系  $\leq$ , 使得  $(X, \leq)$  中有唯一的极大元素, 但没有最大元素? 若有请给出一个具体例子; 若没有, 请证明之。