第十章作业题解答

1.找一个半群，它有 n 个左单位元。

【解】 $S=\{\begin{bmatrix} a\,b \\ 0\,0 \end{bmatrix}|\,a,b\in Z_n\}$， Z_n 是整数的模 n 同余类的集合。$\forall b\in Z_n$， $\begin{bmatrix} 1\,b \\ 0\,0 \end{bmatrix}$是半群$(S,\bullet)$的左单位元，共有 n 个。

2.证明：有限半群中有一个元素 a 使得 $a\bullet a$=a。

【证明】假设$(S,\bullet)$是一个有限半群，任取$b\in S$，对于$b,b^2,\cdots,b^n,\cdots$，必然存在 $j>i$ 使得$b^i=b^j$，否则S为无限群。设 $j=i+k$，则$b^j=b^{i+k}$。容易验证$\forall r\ge 0$，$b^j=b^{i+rk}$。取 r 使$rk\ge i$， 则

⑴如果$rk=i$， 则$b^{rk}=b^{rk+rk}=b^{rk}\bullet b^{rk}$；

⑵如果$rk>i$， 则$b^{rk-i}\bullet b^i=b^{rk-i}\bullet b^{rk+i}=b^{2rk}$， 即$b^{rk}=b^{2rk}=b^{rk}\bullet b^{rk}$。

令$a=b^{rk}$， 则 $a\bullet a$=a。

3.设$(S,\circ)$是一个半群，$a\in S$称为左消去元，如果$\forall x,y\in S$，有$a\circ x=a\circ y$，则一定有$x=y$。试证：如果a和b均为左消去元，则$a\circ b$也是左消去元。

【证明】$\forall x,y\in S$，如果$(a\circ b)\circ x=(a\circ b)\circ y$，则根据结合律有

$a\circ(b\circ x)=a\circ(b\circ y)$，因为$a$是左消去元，所以$b\circ x=b\circ y$，又因为$b$也是左消去元，故$x=y$，因此，$a\circ b$是左消去元。

4.设$(M,\circ,e)$是一个幺半群，$a\in M$称为幂等元，如果$a\circ a=a$。证明：如果 M 是可交换的幺半群，则 M 的所有幂等元之集是 M 的一个子幺半群。

【证明】设 M 的所有幂等元形成的集合为 P，$\forall a,b\in P$，

因为$(a\circ b)\circ(a\circ b)=(a\circ(b\circ a)\circ b)=(a\circ(a\circ b)\circ b)=(a\circ a)\circ(b\circ b)=a\circ b$，

所以$a\circ b\in P$，说明$\circ$在 P 上是封闭的。又因为$e\circ e=e$，所以$e\in P$，因此，P 是 M 的一个子幺半群。

5.试证：两个半群同态的合成还是半群同态。

【证明】设$(S_1,\circ)$、$(S_2,*)$、 $(S_3,\bullet)$是三个半群，φ_1,φ_2是 S_1 到 S_2 和 S_2 到 S_3 的同态，往证$\varphi_2\circ\varphi_1$是 S_1 到 S_3 的同态。$\forall a,b\in S_1$，

$\varphi_2\circ\varphi_1(a\circ b)=\varphi_2(\varphi_1(a)*\varphi_1(b))=\varphi_2(\varphi_1(a))\bullet\varphi_2(\varphi_1(b))=\varphi_2\circ\varphi_1(a)\bullet\varphi_2\circ\varphi_1(b)$，因此$\varphi_2\circ\varphi_1$是 S_1 到 S_3 的同态。

6.设 $S=\{a,b,c\}$，$\circ$是 S 上的二元运算，且： $a\circ a=b$，$b\circ b=c$，$c\circ c=a$。问：$(S,\circ)$能否构成一个半群？

【解】假设$(S,\circ)$能构成一个半群，则$\circ$运算在 S 上封闭且满足结合律，于是，$a\circ b=a$、$a\circ b=b$ 和 $a\circ b=c$ 必有一个成立。

⑴如果 $a\circ b=a$，则左边同乘以 a 得 $a\circ(a\circ b)= a\circ a$，因为$\circ$满足结合律，所以$(a\circ a)\circ b= b\circ b=c= a\circ a=b$，即 $b=c$，这是不可能的。

⑵如果 $a\circ b=b$，则右边同乘以 b 得 $(a\circ b)\circ b = b\circ b$，因为$\circ$满足结合律，所以$a\circ(b\circ b)= a\circ c= b\circ b=c$，即 $a\circ c=c$，再在右边同乘以 c 得$(a\circ c)\circ c =c\circ c$，从而有 $a\circ(c\circ c)= a\circ a=b= c\circ c =a$，即 $b=a$，这是不可能的。

⑶如果 $a\circ b=c$，则左边同乘以 a 得 $a\circ(a\circ b)= a\circ c$，因为$\circ$满足结合律，所以$(a\circ a)\circ b= b\circ b=c= a\circ c$，即 $a\circ c=c$，再在右边同乘以 c 得$(a\circ c)\circ c =c\circ c$，从而有 $a\circ(c\circ c)= a\circ a=b= c\circ c =a$，即 $b=a$，这是不可能的。

综上可知，$\circ$在 S 上不封闭或者$\circ$不满足结合律，即$(S,\circ)$不能构成一个半群。