第四章作业题解答

陈建文

November 12, 2024

练习1. 任一可数集A的所有有限子集构成的集族是可数集族。

证明. 因为A为可数集合，所以A中元素可以排成无重复项的序列：

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

令$S = \{B | B \subseteq A, B$为有穷集$\}$，Q为有理数集，定义映射$\phi : S \to Q$，对任意的$B \in S$,$\phi(B) = 0.b_1b_2 \ldots b_n \ldots$，这里

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{如果} a_i \in B \\ 0 & \text{如果} a_i \notin B \end{cases}$$

则对任意的$B_1 \in S, B_2 \in S$,如果$B_1 \neq B_2$,则$\phi(B_1) \neq \phi(B_2)$，即ϕ为从S到Q的单射。$\phi(S)$为可数集Q的无限子集，从而也为可数集。ϕ为从S到$\phi(S)$的双射,因此S为可数集。 □

练习2. 利用康托的对角线法证明所有*0*，*1*的无穷序列是不可数集。

证明. 用反证法。设所有0,1的无穷序列构成的集合A为可数集，则A中元素可以排成无重复项的序列：

$$\begin{aligned} a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\ \cdots \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots \\ \cdots \end{aligned}$$

其中$a_{ij} = 0$或1。

构造0,1序列

$$b_1, b_2, b_3, \cdots$$

其中

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{如果} a_{nn} = 1 \\ 1 & \text{如果} a_{nn} = 0 \end{cases}$$

则所构造的0,1序列$b_1, b_2, b_3, \cdots$与前述序列中的任意一个$0, 1$序列都不相同，矛盾。 □

练习3. 证明：$a^a = c$

证明. 设D为所有的01无穷序列构成的集合，N为自然数集，以下证明$N^N \sim D$，从而$a^a = c$。

设E为所有的自然数无穷序列构成的集合，$G: N^N \to E$，$\forall f \in N^N$，$G(f) = f(1), f(2), f(3), \cdots$，则$G$为从$N^N$到$E$的双射，从而$N^N \sim E$。

以下证明$E \sim D$，从而$N^N \sim D$。

设F为从某一项之后全为0的01序列构成的集合，则F为可数集，从而$D \setminus F \sim D$。

以下只需证明$E \sim D \setminus F$。

设$H: E \to D \backslash F$，对于E中的任意一个自然数无穷序列$d: d_1, d_2, d_3, ...$，$H(d)$为一个01无穷序列，依次由d_1-1个0，1个1，d_2-1个0，1个1，d_3-1个0，1个1，$\cdots$构成。

例如，对于自然数无穷序列$d: 3, 4, 3, 1, \cdots$，$H(d) = 00100010011\cdots$。

H为从E到$D \setminus F$的双射，从而$E \sim D \setminus F$。 □

练习4. 证明：$c^a = c$。

证明. 设D为所有的01无穷序列构成的集合，N为自然数集，以下证明$D^N \sim D$，从而$c^a = c$。

设$G: D^N \to D$，$\forall f \in D^N$，$f(1), f(2), f(3), \cdots$表示为：

$$\begin{aligned} f(1) &= a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots \\ f(2) &= a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots \\ f(3) &= a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots \\ &\cdots \end{aligned}$$

其中$a_{ij} \in \{0, 1\}$，$G(f) = a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots$

可以验证G为从D^N到D的双射。 □

练习5. 证明：$c^c = 2^c$。

证明. 设R为实数集，只需证明$R^R \sim \{0, 1\}^R$。

以下证明存在从R^R到$\{0, 1\}^R$的单射，并且存在$\{0, 1\}^R$到R^R的单射，从而$R^R \sim \{0, 1\}^R$。

先证明存在$\{0, 1\}^R$到R^R的单射。设$G: \{0, 1\}^R \to R^R$，$\forall f \in \{0, 1\}^R$，$G(f) = f$，则G为从$\{0, 1\}^R$到R^R的单射。

接下来证明存在从R^R到$\{0, 1\}^R$的单射。由于$R \sim R \times R$，所以$\{0, 1\}^R \sim \{0, 1\}^{R \times R}$。以下只需证明存在从$R^R$到$\{0, 1\}^{R \times R}$的单射。设$H: R^R \to \{0, 1\}^{R \times R}$，$\forall f \in R^R$，$H(f) = g$，这里$g: R \times R \to \{0, 1\}$，$g(x, y) = 1$当且仅当$f(x) = y$。可以验证$H$为从$R^R$到$\{0, 1\}^{R \times R}$的单射。 □