第二章作业题

1. 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 是 n 个实数，$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，φ是 A 到 A 的可逆映射。如果 $a_1+\varphi(a_1)<a_2+\varphi(a_2)<\cdots<\varphi(a_n)+a_n$，试证：$\varphi=I_A$。

2. 设$u_1,u_2,\cdots,u_{mn+1}$是一个两两不相交的整数构成的数列，则必有长至少为$n+1$的递增子序列或有长至少为$m+1$的递减子序列。

3. 证明：任 5 个整数中必有 3 个整数，其和是 3 的倍数。

4. 证明在 52 个整数中，必有两个整数，使这两个整数之和或差能被 100 整除。

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $1,2,3,\cdots,n$ 的任一排列，若 n 是奇数且 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)\neq 0$，则$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$为偶数。

6. 设 $f:X\to Y$，$C,D\subseteq Y$，证明 $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$。

7. 设 $f:X\to Y$, $\mathrm{A},\mathrm{B}\subseteq \mathrm{X}$，证明

（1） $f(A\bigcap B)\subseteq f(A)\bigcap f(B)$；

（2） $f(A\setminus B)\supseteq f(A)\setminus f(B)$。

8. 设 $f:X\to Y$，$A\subseteq X,B\subseteq Y$，证明：$f(f^{-1}(B)\bigcap A)=B\bigcap f(A)$。

9. 设 $f:X\to Y$，证明：f是满的当且仅当$\forall E\in 2^Y$有$f(f^{-1}(E))=E$。

10. 设 $f:X\to Y$，证明：f是单射当且仅当$\forall F\in 2^X$有$f^{-1}(f(F))=F$。

11. 设 $f:A\to B$，证明$\forall T\in 2^B$，都有 $f(f^{-1}(T))=T\bigcap f(A)$。

12. 设 $f:X\to Y$ 则

（1）若存在唯一的一个映射$g:Y\to X$，使得$g\circ f=I_X$，则 f 是可逆的吗？

（2）若存在唯一的一个映射$g:Y\to X$，使得 $f\circ g=I_Y$，则 f 是可逆的吗？

13. 设 $f:X\to Y,|X|=m,|Y|=n$，则

（1）若 f 是左可逆的，则 f 有多少个左逆映射？

（2）若 f 是右可逆的，则 f 有多少个右逆映射？

14.设σ是任一置换，试证：$\sigma^{-1}(i_1i_2\cdots i_r)\sigma=(i_1\sigma i_2\sigma\cdots i_r\sigma)$。