第二章作业题解答

1. 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 是 n 个实数，$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，φ是 A 到 A 的可逆映射。如果 $a_1+\varphi(a_1)<a_2+\varphi(a_2)<\cdots<\varphi(a_n)+a_n$，试证：$\varphi=I_A$。

【证明】设$\varphi(a_1)\neq a_1$，则由φ是可逆的，故为一一对应，从而必有 $j, j>1$，使$\varphi(a_j)=a_1$，于是，对任何正整数 $i<j$，$a_i+\varphi(a_i)<a_j+\varphi(a_j)$，但由于 $a_i\geq a_1$，$\varphi(a_j)=a_1$，所以 $a_1+\varphi(a_i)\leq a_i+\varphi(a_i)<\varphi(a_j)+a_j=a_j+a_1$，故$\varphi(a_i)<a_j$，从而$\varphi(a_i)=a_k, k<j$, 这表明当$\varphi(a_1)=a_p$时，$p<j$，于是，对任意的 $i, i<j$，$\varphi(a_i)\in\{a_1,a_2,\cdots,a_{j-1}\}$，从而$\varphi$限制在$\{a_1,a_2,\cdots,a_{j-1}\}$上时，$\varphi$也是一个一一对应，于是有 i，使$\varphi(a_i)=a_1$，矛盾，故$\varphi(a_1)=a_1$，类似可证$\varphi(a_2)=a_2,\cdots,\varphi(a_n)=a_n$，即$\varphi=I_A$。

注意：如 A 为无穷集，则命题不真，例如 $A=N$ 时，令$\varphi(n)=n+1$，则 $1+\varphi(1)=3<\varphi(2)+2=5<3+\varphi(3)=7\cdots$, $\varphi\neq I_A$。

2. 设$u_1,u_2,\cdots,u_{mn+1}$是一个两两不相交的整数构成的数列，则必有长至少为$n+1$的递增子序列或有长至少为$m+1$的递减子序列。

【证明】令$A=\{u_1,u_2,\cdots u_{mn+1}\}$，则$|A|=mn+1$。

设以u_i为首项的最长递增子序列的长度为ℓ_i^+，以u_i为首项的最长递减子序列的长度为ℓ_i^-。采用反证法。假设题中结论不成立，则$\ell_i^+\leq n,\ell_i\leq m,i=1,2,3,\cdots,mn+1$。

令$\varphi:A\to\{1,2,\cdots,n\}\times\{1,2,\cdots,m\},\forall u_i\in A$，$\varphi(u_i)=(\ell_i^+,\ell_i^-)$，则$\varphi$是单射。

实际上，对于$\forall u_i,u_j\in A$且$u_i\neq u_j(i<j)$，如果$u_i>u_j$，则$\ell_i^->\ell_j^-$，于是$(\ell_i^+,\ell_i^-)\neq(\ell_j^+,\ell_j^-)$，亦即$\varphi(u_i)\neq\varphi(u_j)$。如果$u_i<u_j$，则$\ell_i^+>\ell_j^+$，此时同样有$(\ell_i^+,\ell_i^-)\neq(\ell_j^+,\ell_j^-)$，亦即$\varphi(u_i)\neq\varphi(u_j)$。故$\varphi$为单射，从而就有$mn+1\leq mn$，矛盾。

3. 证明：任 5 个整数中必有 3 个整数，其和是 3 的倍数。

【证明】将 5 个整数记为$x_i=3q_i+r_i, i=1,2,\cdots,$ ，$0\leq r_i\leq 2$。$r_i=k$时令$x_i\in A_k,k=0,1,2$。如果A_0,A_1,A_2有一个为空，剩下的两个中必有一个含有三个整数，于是这三个数的和必是 3 的倍数。如果A_0,A_1,A_2均不空，则从A_0,A_1,A_2中的每个集合中取出一个数，这三个数的和必是 3 的倍数。

4. 证明在 52 个整数中，必有两个整数，使这两个整数之和或差能被 100 整除。

【证明】设$a_1,a_2,\cdots,a_{52}$是 52 个整数，令γ_i为a_i被 100 除后所得的余数，即$a_i=100q_i+\gamma_i,0\leq\gamma_i\leq 99,i=1,2,\cdots,52$。

任意一个整数被 100 除以后的余数为 0，1，2，…，99，把它们分成 51 个类，即{0},{1,99},{2,98},…{49,51},{50}。

把 52 个余数$\gamma_i,i=1,2,\cdots,52$放入到 51 个类中，必在两个余数放在一个类里。

设在一个类中的两个余数分别为γ_i与γ_j，$i\neq j$。则有

(1)若$\gamma_i\neq\gamma_j$，则$\gamma_i+\gamma_j=0$，即a_i+a_j能被 100 整除。

(2)若$\gamma_i=\gamma_j$，则$\gamma_i-\gamma_j=0$，即a_i-a_j能被 100 整除。

5. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为$1,2,3,\cdots,n$的任一排列，若 n 是奇数且 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)\neq 0$，则$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$为偶数。

【证明方法一】反证法：若$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$为奇数，则对于$\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$(a_i-i)$中的$a_i$与$i$必有一个为奇数，一个为偶数。但因为 n 为奇数，所以$1,2,3,\cdots,n$中的奇数个数为$\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$，比偶数个数$\left[\dfrac{n}{2}\right]$多一个，矛盾。

【证明方法二】当 n 为奇数时，1,2,…,n 中有$(n-1)/2$ 个偶数，$(n+1)/2$ 个奇数，奇数的个

数比偶数的个数多一个。于是，$a_1,a_2,\ldots,a_n$，$1,2,\ldots,n$ 中恰有 $n+1$ 个奇数。然而只有 n 个因子 (n 个盒子)，先把 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 依次放入 n 个盒子中，然后把 $1,2,\ldots,n$ 依次放入 n 个子盒中，这样就把 $n+1$ 个奇数放入了 n 个盒子中。因此，有一个盒子 i 中的两个数均为奇数，对应的因子 a_i-i 就是偶数。

6. 设 $f: X \to Y$，$C, D \subseteq Y$，证明 $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$。

【证明方法一】

假设 $x \in f^{-1}(C \setminus D)$，则 $f(x) \in C \setminus D$，即 $f(x) \in C$ 但 $f(x) \overline{\in} D$。于是 $x \in f^{-1}(C)$ 但 $x \notin f^{-1}(D)$，故 $x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$，因此 $f^{-1}(C \setminus D) \subseteq f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$。

反之，假设 $x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$，则 $x \in f^{-1}(C)$且$x \notin f^{-1}(D)$，于是 $f(x) \in C$ 且 $f(x) \notin D$，亦即 $f(x) \in C \setminus D$，从而 $x \in f^{-1}(C \setminus D)$，故 $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C \setminus D)$。

综上，$f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$。

【证明方法二】

$f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C \bigcap D^c) = f^{-1}(C) \bigcap f^{-1}(D^C)$

$= f^{-1}(C) \bigcap (f^{-1}(D))^C = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$。

7. 设 $f: X \to Y,\ A, B \subseteq X$，证明

（1） $f(A \bigcap B) \subseteq f(A) \bigcap f(B)$；

（2） $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$。

【证明】

（2）假设 $y \in f(A \bigcap B)$，则 $\exists x \in A \bigcap B$，使得 $y = f(x)$。于是，$x \in A$且 $x \in B$。

从而，$y \in f(A)$ 且 $y \in f(B)$，所以 $y \in f(A) \bigcap f(B)$，因此 $f(A \bigcap B) \subseteq f(A) \bigcap f(B)$。

（3）假设 $y \in f(A) \setminus f(B)$，则 $y \in f(A)$ 但 $y \notin f(B)$。于是 $\exists x \in A$ 使得 $f(x) = y$，但因为 $y = f(x) \notin f(B)$，所以 $x \notin B$，亦即 $\exists x \in A \setminus B$，使得 $f(x) = y$。故 $y = f(x) \in f(A \setminus B)$，即 $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$。

8. 设 $f: X \to Y$，$A \subseteq X, B \subseteq Y$，证明：$f(f^{-1}(B) \bigcap A) = B \bigcap f(A)$。

【证明】假设 $y \in f(f^{-1}(B) \bigcap A)$，则 $\exists x \in f^{-1}(B) \bigcap A$，使得 $f(x) = y$。于是 $x \in f^{-1}(B)$ 且 $x \in A$，亦即 $f(x) \in B$且$f(x) \in f(A)$，因此 $y = f(x) \in B$ 且 $y \in f(A)$，即 $y \in B \bigcap f(A)$，从而 $f(f^{-1}(B) \bigcap A) \subseteq B \bigcap f(A)$。

反之，假设 $y \in B \bigcap f(A)$，则 $y \in B$ 且 $y \in f(A)$。于是 $\exists x \in A$，使得 $f(x) = y$，又因为 $f(x) = y \in B$，所以 $x \in f^{-1}(B)$，亦即 $\exists x \in f^{-1}(B) \bigcap A$，使得 $f(x) = y$，从而 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B) \bigcap A)$，因此，$B \bigcap f(A) \subseteq f(f^{-1}(B \bigcap A))$。

综上，$f(f^{-1}(B \bigcap A)) = B \bigcap f(A)$。

9. 设 $f: X \to Y$，证明：f 是满的当且仅当$\forall E \in 2^Y$有 $f(f^{-1}(E)) = E$。

【证明】

$\Leftarrow$ 如果$\forall E \in 2^Y$有 $f(f^{-1}(E)) = E$，往证 f 是满的。假设 f 不是满射，则$\exists y_0 \in Y$ 使$\forall x \in X$，$f(x) \neq y_0$。令 $E = \{y_0\}$，则 $f^{-1}(E) = \Phi$，$\therefore \Phi = f(f^{-1}(E)) = E = \{y_0\}$，矛盾。因此，$f$ 是满射。

$\Rightarrow$ 显然，$f(f^{-1}(E)) \subseteq E$。假设 $y \in E$，则由于 f 是满射，所以$\forall y \in E$，$\exists x \in X$ 使 $f(x) = y$，故 $x \in f^{-1}(E)$且 $y \in f(f^{-1}(E))$。因此，$E \subseteq f(f^{-1}(E))$，故 $f(f^{-1}(E)) = E$。

10. 设 $f: X \to Y$，证明：f 是单射当且仅当$\forall F \in 2^X$有 $f^{-1}(f(F)) = F$。

【证明】

$\Leftarrow$假设 f 不是单射，则$\exists x_1$，$x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ 使 $f(x_1) = f(x_2)$。令 $F = \{x_1\}$则 $f(F) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}$，$f^{-1}(f(F)) = \{x_1, x_2\} \neq \{x_1\} = F$，矛盾。

$\Rightarrow$ 因为 f 是单射，所以$\forall F \in 2^X$ 有 $f^{-1}(f(F)) = F$。

习题11. 设$f: A \to B$，证明$\forall T \in 2^B$，都有$f(f^{-1}(T)) = T \cap f(A)$。

证明. 该题为第8题的特殊情况。 □

习题12. 设$f: X \to Y$。

（1）如果存在唯一的一个映射$g: Y \to X$，使得$gf = I_X$，那么f是否可逆呢?

（2）如果存在唯一的一个映射$g: Y \to X$，使得$fg = I_Y$，那么f是否可逆呢?

解. (1)当$|X| = 1$时，f不一定可逆，举例如下:

设集合$X = \{1\}$，$Y = \{1, 2\}$，$f: X \to Y$，$f(1) = 1$。则存在唯一的一个映射$g: Y \to X$，$g(1) = 1, g(2) = 1$,使得$gf = I_X$，但f不可逆。

当$|X| > 1$时，f一定可逆，证明如下:

由$gf = I_X$知f为单射，以下证明f为满射。用反证法，假设f不为满射，则存在$y_0 \in Y$，对任意的$x \in X$，$f(x) \neq y_0$。 由于$|X| > 1$，可取$x_0 \in X$，使得$g(y_0) \neq x_0$。

令$h: Y \to X$，

$$h(y) = \begin{cases} g(y) & \text{如果} y \neq y_0, \\ x_0 & \text{如果} y = y_0 \end{cases}$$

则$hf = I_X$，且$h \neq g$，与存在唯一的一个映射$g: Y \to X$使得$gf = I_X$矛盾。

(2)f一定可逆，证明如下:

由$fg = I_Y$知f为满射，以下证明f为单射。用反证法，假设f不为单射，则存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$但$f(x_1) = f(x_2)$。

设$y_0 = f(x_1) = f(x_2)$， 令$h: Y \to X$，

$$h(y) = \begin{cases} g(y) & \text{如果} y \neq y_0, \\ x_1 & \text{如果} y = y_0 \text{且} g(y_0) \neq x_1 \\ x_2 & \text{如果} y = y_0 \text{且} g(y_0) = x_1 \end{cases}$$

则$fh = I_Y$，且$h \neq g$，与存在唯一的一个映射$g: Y \to X$使得$fg = I_Y$矛盾。 □

习题13. 设$f: X \to Y$，X与Y为有穷集合,

（1）如果f是左可逆的，那么f有多少个左逆映射?

（2）如果f是右可逆的，那么f有多少个右逆映射?

解. (1) $|X|^{|Y|-|X|}$

(2) $\prod_{y \in Y} |f^{-1}(\{y\})|$ □

习题14. 设σ是任一置换，试证：$\sigma^{-1}(i_1 i_2 \cdots i_r)\sigma = (i_1\sigma i_2\sigma \cdots i_r\sigma)$。

证明. 令$\alpha = \sigma^{-1}(i_1 i_2 \cdots i_r)\sigma, \beta = (i_1\sigma i_2\sigma \cdots i_r\sigma)$，$\forall i \in S$，分两种情况,

(1)$i \notin \{i_1\sigma, i_2\sigma, \cdots, i_r\sigma\}$时，$i\alpha = i\beta = i$;

(2)$i \in \{i_1\sigma, i_2\sigma, \cdots, i_r\sigma\}$时，又分两种情况,

i.$i = i_k\sigma, k < r$，则$i\alpha = i_k\sigma\sigma^{-1}(i_1 i_2 \cdots i_r)\sigma = i_k(i_1 i_2 \cdots i_r)\sigma = i_{k+1}\sigma = i\beta$

ii.$i = i_r\sigma$，则$i\alpha = i_r\sigma\sigma^{-1}(i_1 i_2 \cdots i_r)\sigma = i_r(i_1 i_2 \cdots i_r)\sigma = i_1\sigma = i\beta$ □