第一章作业题解答

1. 试用枚举法和概括法分别给出一个现实中的集合的例子。

A={松北区，南岗区，道里区，道外区，香坊区，阿城区，呼兰区}

B={$xy|xy$ 为哈尔滨电子地图中的路段}

2. 设 A，B，C 是集合，证明 $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$。

【证法一】$A\Delta(B\Delta C)=(A\setminus((B\setminus C)\bigcup(C\setminus B)))\bigcup(((B\setminus C)\bigcup(C\setminus B))\setminus A)$，

$(A\Delta B)\Delta C=(((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))\setminus C)\bigcup(C\setminus((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)))$。

先证 $A\Delta(B\Delta C)\subseteq(A\Delta B)\Delta$，假设 $x\in A\Delta(B\Delta C)$，则 $x\in A\setminus((B\setminus C)\bigcup(C\setminus B))$ 或 $x\in((B\setminus C)\bigcup(C\setminus B))\setminus A$。分两种情况讨论：

⑴如果 $x\in A\setminus((B\setminus C)\bigcup(C\setminus B))$，则 $x\in A$，但 $x\notin(B\setminus C)\bigcup(C\setminus B)$， 即 $x\in A$，但 $x\notin B\setminus C$ 且 $x\notin C\setminus B$，于是 $x\in A$，但 $x\notin B$ 或 $x\in C$，而且 $x\notin C$ 或 $x\in B$，因为 $x\in B$ 和 $x\notin B$ 不能同时成立，$x\in C$ 和 $x\notin C$ 也不能同时成立，所以只能出现两种情况：

① $x\in A$ 且 $x\notin B$ 且 $x\notin C$，此时 $x\in((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))\setminus C$，从而有

$x\in(((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))\setminus C)\bigcup(C\setminus((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)))$，故 $A\Delta(B\Delta C)\subseteq(A\Delta B)\Delta C$。

② $x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\in C$，此时 $x\in C$ 且 $x\notin(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$，于是 $x\in C\setminus((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))$，从而有 $x\in(((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))\setminus C)\bigcup(C\setminus((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)))$，故 $A\Delta(B\Delta C)\subseteq(A\Delta B)\Delta C$。

⑵如果 $x\in((B\setminus C)\bigcup(C\setminus B))\setminus A$，则 $x\in(B\setminus C)\bigcup(C\setminus B)$，但 $x\notin A$，即 $x\notin A$，但 $x\in B\setminus C$ 或 $x\in C\setminus B$，于是出现两种情况：

① $x\notin A$ 且 $x\in B$ 且 $x\notin C$，此时 $x\in((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))\setminus C$，从而有

$x\in(((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))\setminus C)\bigcup(C\setminus((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)))$，故 $A\Delta(B\Delta C)\subseteq(A\Delta B)\Delta C$。

② $x\notin A$ 且 $x\notin B$ 且 $x\in C$，此时 $x\in C$ 且 $x\notin(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$，于是

$x\in C\setminus((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))$，从而有 $x\in(((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))\setminus C)\bigcup(C\setminus((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)))$，故 $A\Delta(B\Delta C)\subseteq(A\Delta B)\Delta C$。

类似可证 $(A\Delta B)\Delta C\subseteq A\Delta(B\Delta C)$。

【证法二】$A\Delta(B\Delta C)=((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A))\Delta\mathrm{C}=((A\bigcap B^c)\bigcup(B\bigcap A^c))\Delta\mathrm{C}$

$=(((A\bigcap B^c)\bigcup(B\bigcap A^c))\bigcap C^c)\bigcup(C\bigcap((A\bigcap B^c)\bigcup(B\bigcap A^c))^c)$

$=(A\bigcap B^c\bigcap C^c)\bigcup(A^c\bigcap B\bigcap C^c)\bigcup(C\bigcap(A^c\bigcup B)\bigcap(B^c\bigcup A))$

$=(A\bigcap B^c\bigcap C^c)\bigcup(A^c\bigcap B\bigcap C^c)\bigcup(A^c\bigcap B^c\bigcap C)\bigcup(A\bigcap B\bigcap C)$。

根据对称性可得，

$(A\Delta B)\Delta C=(A\bigcap B^c\bigcap C^c)\bigcup(A^c\bigcap B\bigcap C^c)\bigcup(A^c\bigcap B^c\bigcap C)\bigcup(A\bigcap B\bigcap C)$。因此，$A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$。

3. 设 A，B 是集合，证明 $B=(A\Delta B)\Leftrightarrow A=\Phi$。

【证明】$\Leftarrow$ 将 $A=\Phi$ 代入即得。

$\Rightarrow$ $\Phi=B\Delta B=(A\Delta B)\Delta B=A\Delta(B\Delta B)=A\Delta\Phi=A$，亦即 $A=\Phi$。

4. 设 A，B 是集合，证明 $(A\setminus B)\bigcup B=(A\bigcup B)\setminus\mathrm{B}\Leftrightarrow B=\Phi$。

【证明】

$\Rightarrow$假设结论不成立，即 $B\neq\Phi$，则 $\exists x\in B$，从而 $x\in(A\setminus B)\bigcup B=(A\bigcup B)\setminus B$，因此 $x\notin B$，矛盾。所以 $B\neq\Phi$。

$\Leftarrow$ 将 $B=\Phi$ 代入即得。

5. 设 A，B，C 是集合，证明 $A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$。

【证明】

先证 $A\setminus(B\bigcap C)\subseteq(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$。

假设 $x \in A\setminus(B\bigcap C)$，则 $x\in A$，但 $x\notin B\bigcap C$，于是 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 或者 $x\notin C$，亦即 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 或者 $x\in A$ 且 $x\notin C$。如果 $x\in A$ 且 $x\notin B$，则 $x\in A\setminus B$，因此 $x\in(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$。如果 $x\in A$ 且 $x\notin C$，则 $x\in A\setminus C$，亦有 $x\in(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$。

上述两种情况下均有 $x\in(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$，因此 $A\setminus(B\bigcap C)\subseteq(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$。

再证 $(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)\subseteq A\setminus(B\bigcap C)$。

假设 $x\in(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$，则 $x\in A\setminus B$ 或者 $x\in A\setminus C$。如果 $x\in A\setminus B$，则 $x\in A$ 且 $x\notin B$，从而 $x\in A$ 且 $x\notin B\bigcap C$，亦即 $x\in A\setminus(B\bigcap C)$。如果 $x\in A\setminus C$，则 $x\in A$ 且 $x\notin C$，从而 $x\in A$ 且 $x\notin B\bigcap C$，亦即 $x\in A\setminus(B\bigcap C)$。

上述两种情况下均有 $x\in A\setminus(B\bigcap C)$，因此 $(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)\subseteq A\setminus(B\bigcap C)$。

综上有 $A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$。

6. 设 A，B 是集合，证明 $A\subseteq B\Leftrightarrow 2^A\subseteq 2^B$。

【证明】$\Rightarrow$ 假设 $E\in 2^A$，则 $E\subseteq A$，因为 $A\subseteq B$，所以 $E\subseteq B$，即 $E\in 2^B$，因此 $2^A\subseteq 2^B$。

$\Leftarrow$ 假设 $x\in A$，则 $\{x\}\subseteq A$，$\{x\}\in 2^A$ 因为 $2^A\subseteq 2^B$，以为 $\{x\}\in 2^B$，亦即 $\{x\}\subseteq B$，从而 $x\in B$，因此 $A\subseteq B$。

7. 设 A，B 是集合，证明 $2^{A\cap B}=2^A\bigcap 2^B$。

【证明】先证 $2^{A\cap B}\subseteq 2^A\bigcap 2^B$。假设 $E\in 2^{A\cap B}$，则 $E\subseteq A\bigcap B$，于是 $E\subseteq A$ 且 $E\subseteq B$，从而有 $E\in 2^A$ 且 $E\in 2^B$，亦即 $E\in 2^A\bigcap 2^B$，所以 $2^{A\cap B}\subseteq 2^A\bigcap 2^B$。

再证 $2^A\bigcap 2^B\subseteq 2^{A\cap B}$。假设 $E\in 2^A\bigcap 2^B$，则 $E\in 2^A$ 且 $E\in 2^B$，于是 $E\subseteq A$ 且 $E\subseteq B$，从而有 $E\subseteq A\bigcap B$，亦即 $E\in 2^{A\cap B}$，所以，$2^A\bigcap 2^B\subseteq 2^{A\cap B}$。

综上有 $2^{A\cap B}=2^A\bigcap 2^B$。

8. $M_1,M_2,\cdots$ 和 $N_1,N_2,\cdots$ 是集合 S 的子集序列，$i,j=1,2,\cdots$，$i\neq j$ 时 $N_i\bigcap N_j=\Phi$。令 $Q_1=M_1$，$Q_n=M_n\bigcap(\bigcup_{k=1}^{n-1}M_k)^c$，$n=2,3,\cdots$。证明：$N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

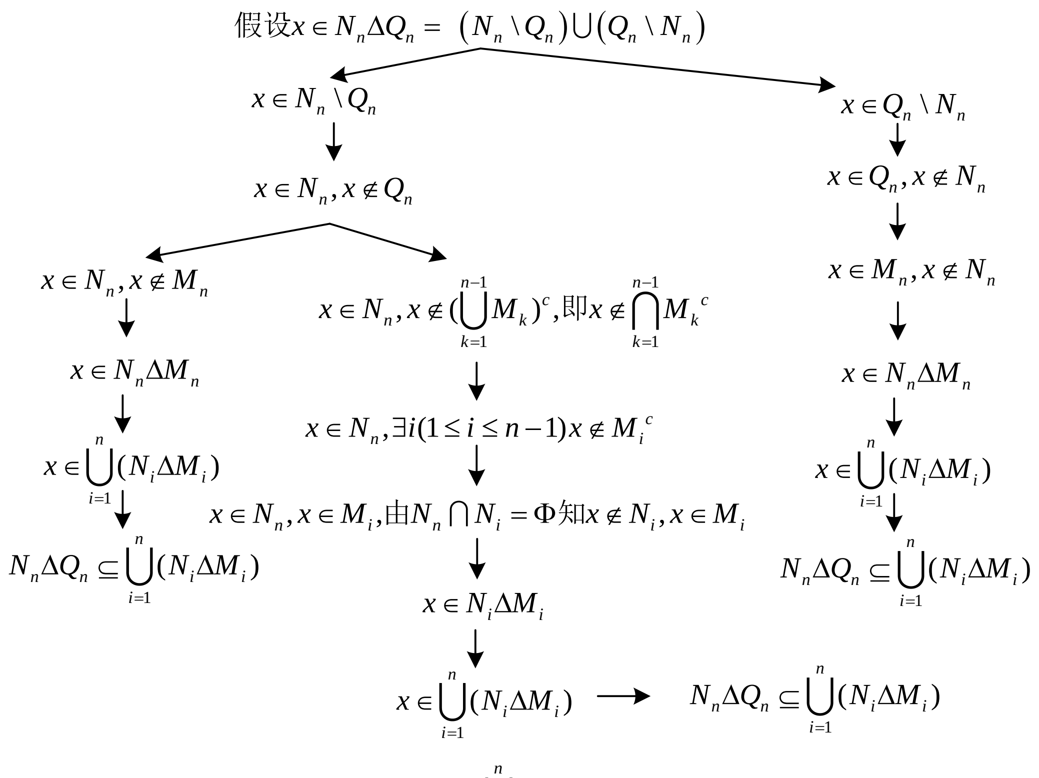

图 1.1 $N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$ 的证明过程

【证明方法一】

假设 $x\in N_n\Delta Q_n=(N_n\setminus Q_n)\bigcup(Q_n\setminus N_n)$，则 $x\in N_n$ 且 $x\notin Q_n$ 或 $x\in Q_n$ 且 $x\notin N_n$。

如果 $x\in N_n$ 且 $x\notin Q_n=M_n\bigcap(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}M_k)^c$，则 $x\notin M_n$ 或者 $x\notin(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}M_k)^c=\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}M_k{}^c$，即 $x\notin M_n$ 或 $\exists i(1\le i\le n-1)$， $x\notin M_i{}^c$。所以 $x\in N_n\Delta M_n$ 或者由 $x\notin M_i{}^c$ 知 $x\in M_i$。因为 $1\le i\le n-1$，所以 $N_i\bigcap N_n=\Phi$，从而由 $x\in N_n$ 知 $x\notin N_i$，故 $x\in M_i\setminus N_i$，所以 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$，此时 $N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

其次，如果 $x\in Q_n$ 且 $x\notin N_n$，则 $x\in Q_n\setminus N_n\subseteq N_n\Delta Q_n$，所以 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$，此时 $N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

为清晰起见，图 1.1 给出了上述证明过程的逻辑判定树。

【证明方法二】

我们还可以由 $x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$ 推出 $x\notin N_n\Delta Q_n$ 来证明 $N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

假设 $x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$，则 $x\notin N_i\Delta M_i(i=1,2,\cdots,n)$，得到 $x\notin N_i\bigcup M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 或者 $x\in N_i\bigcap M_i(i=1,2,\cdots,n)$。特别是 $x\notin N_n\bigcup M_n$ 或者 $x\in N_n\bigcap M_n$。

⑴如果 $x\notin N_n\bigcup M_n$，则 $x\notin N_n,x\notin M_n$，从而 $x\notin N_n,x\notin Q_n$，故 $x\notin N_n\Delta Q_n$。

⑵如果 $x\in N_n\bigcap M_n$，则 $x\in N_n$ 且 $x\in M_n$。

因为 $Q_n=M_n\bigcap(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}M_k)^c=M_n\bigcap(M_1{}^c\bigcap M_2{}^c\bigcap\cdots\bigcap M_{n-1}{}^c)$，而且 $i\ne n$ 时，$N_n\bigcap N_i=\Phi$，$i=1,2,\cdots,n-1$，所以 $x\notin N_i$， $x\notin N_i\bigcap M_i$。但 $x\notin N_i\bigcup M_i$ 或 $x\in N_i\bigcap M_i$，故 $x\notin M_i$，$i=1,2,\cdots,n-1$。于是，$x\in Q_n$，从而 $x\in N_n\bigcap Q_n$。因此 $x\notin N_n\Delta Q_n$。

9. 设 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 是集合的无穷序列，$\overline{A}$ 由这样的元素 x 构成：x 属于集序列 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的无穷多项，$\overline{A}$ 称为 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的上极限，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$。$\underline{A}$ 由这样的元素 x 构成：集序列 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 只有有限项不包含 x，$\underline{A}$ 称为 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的下极限，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$。

试证明：1° $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k)$；

令 $A=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，$B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k)$。

先证 $A\subseteq B$。假设 $x\in A$，则 $\exists i_1<i_2<i_3<\cdots$ 使得 $x\in A_{i_k}$，$k=1,2,3\cdots$，于是，对 $\forall n\in N$，$\exists i_l\in N$，$i_l>n$，$x\in A_{i_l}\subseteq\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，从而 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，所以 $A\subseteq B$。

再证 $B\subseteq A$。假设 $x\in B$，则对 $\forall n\in N,x\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$。$n=1$ 时，$x\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，于是 $\exists i_1\in N$ 使得 $x\in A_{i_1}$。$n=i_1+1$ 时，$x\in\bigcup\limits_{k=i_1+1}^{\infty}A_k$，所以 $\exists i_2\in N,i_2>i_1$ 使得 $x\in A_{i_2}$。$n=i_2+1$ 时，……，依次类推，$\exists i_1<i_2<i_3<\cdots$ 使得 $x\in A_{i_k}$，$k=1,2,3\cdots$，即 $x\in A$，所以 $B\subseteq A$。

综上有 $A=B$，即 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)$。

2° $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k)$；

令 $A=\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$， $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k)$。

先证 $A\subseteq B$。假设 $x\in A$，则 $\exists i\in N$，使得对于 $\forall l>i$，$x\in A_l$，亦即 $x\in\bigcap_{k=l+1}^{\infty}A_k$，从而有 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k)=B$，所以 $A\subseteq B$。

再证 $B\subseteq A$。假设 $x\in B$，则 $\exists i\in N$，使得 $x\in\bigcap_{k=i}^{\infty}A_k$，亦即 $\exists i\in N$，使得对 $\forall l>i$，$x\in A_l$，亦即 $x\in A$，所以 $B\subseteq A$。

综上有 $A=B$，即 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k)$。

3° $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\subseteq\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$；

假设 $x\in\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，则根据 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ 的定义，序列 $A_1,A_2,\cdots$ 中只有有限项不含 x，令 A_m 为不含 x 的集合中下标最大的一个，于是 $A_{m+1},A_{m+2},\cdots$ 均包含 x，从而有无限项包含 x，因此，$x\in\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，所以，$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\subseteq\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$。

4° $\underline{A}^c=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n{}^c$，$\overline{A}^c=\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n{}^c$；

对第 1° 2° 小题的结论应用德·摩根公式即可。

5° 如果 $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\cdots$，则 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$。

由 **3° 知 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\subseteq\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，因此只须证明 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\subseteq\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$** 即可。假设 $x\in\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，

则 $\exists i_1<i_2<i_3<\cdots$ 使得 $x\in A_{i_k}$，$k=1,2,3\cdots$，因为 $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\cdots$，所以对 $\forall l\geq i_1$，$x\in A_l$，因此，序列 $A_1,A_2,\cdots$ 中只有有限项不含 x，从而 $x\in\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，故 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\subseteq\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$。

10. 设 A，B，C，D 是集合，证明"如果 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$，则 $(A\times B)\subseteq(C\times D)$"是正确的，而"如果 $(A\times B)\subseteq(C\times D)$，则 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$"是错误的。

【证明】假设 $(x,y)\in A\times B$，则 $x\in A,y\in B$，又因为 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$，所以 $x\in C,y\in D$，于是 $(x,y)\in C\times D$，因此 $(A\times B)\subseteq(C\times D)$。

如果 $A=\Phi,B\neq\Phi,C\neq\Phi,D=\Phi$，则 $(A\times B)\subseteq(C\times D)$ 为真，但" $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$ "为假，从而"如果 $(A\times B)\subseteq(C\times D)$，则 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$ "是错误的。

11.设 A，B，C，D 是集合，证明 $(A\times C)\bigcup(B\times D)\subseteq(A\bigcup B)\times(C\bigcup D)$，并举例说明 $(A\times C)\bigcup(B\times D)\neq(A\bigcup B)\times(C\bigcup D)$。

【证明】假设 $(x,y)\in(A\times C)\bigcup(B\times D)$ 则 $(x,y)\in A\times C$ 或者 $(x,y)\in B\times D$，如果 $(x,y)\in A\times C$，则 $x\in A,y\in C$，于是 $x\in A\bigcup B,y\in C\bigcup D$，从而 $(x,y)\in(A\bigcup B)\times(C\bigcup D)$，因此 $(A\times C)\bigcup(B\times D)\subseteq(A\bigcup B)\times(C\bigcup D)$。如果

$(x,y)\in B\times D$，则 $x\in B, y\in D$，于是 $x\in A\bigcup B, y\in C\bigcup D$，从而 $(x,y)\in(A\bigcup B)\times(C\bigcup D)$，因此 $(A\times C)\bigcup(B\times D)\subseteq(A\bigcup B)\times(C\bigcup D)$。综上有 $(A\times C)\bigcup(B\times D)\subseteq(A\bigcup B)\times(C\bigcup D)$。

如果 $A\neq\Phi, B=\Phi, C\neq\Phi, D=\Phi$，则 $(A\times C)\bigcup(B\times D)=\Phi$，但 $(A\bigcup B)\times(C\bigcup D)\neq\Phi$，此时 $(A\times C)\bigcup(B\times D)\neq(A\bigcup B)\times(C\bigcup D)$。

12.利用德·摩根公式的规则 $(A\bigcup B)^c=A^c\bigcap B^c$ 证明 $(A\bigcap B)^c=A^c\bigcup B^c$。

【证明】根据 $(A\bigcup B)^c=A^c\bigcap B^c$ 可知 $(A^c\bigcup B^c)^c=(A^c)^c\bigcap(B^c)^c=A\bigcap B$，因此 $(A\bigcap B)^c=((A^c\bigcup B^c)^c)^c=A^c\bigcup B^c$，即 $(A\bigcap B)^c=A^c\bigcup B^c$。

13. 设 A, B 是集合，证明 $A\times B=B\times A$ 当且仅当下列条件之一成立：① $A=\Phi$；② $B=\Phi$；③ $A=B$。

【证明方法一】

$\Rightarrow$ 假设结论不成立，即 $A\neq\Phi$ 且 $B\neq\Phi$ 且 $A\neq B$，则 $A\times B=B\times A\neq\Phi$，于是，$\forall x\in A, y\in B$ 均有 $(x,y)\in A\times B=B\times A$，从而可得，$x\in B, y\in A$，所以 $A\subseteq B, B\subseteq A$，即 $A=B$，矛盾。因此① $A=\Phi$；② $B=\Phi$；③ $A=B$ 中至少有一个成立。

$\Leftarrow$ 将每个条件代入验证即可得证。

【证明方法二】

$\Rightarrow$ 如果 $A\times B=\Phi$，则① $A=\Phi$ 或② $B=\Phi$ 成立，如果 $A\times B\neq\Phi$，往证 $A=B$。

因为 $A\times B=B\times A$，所以 $\forall(x,y)\in A\times B$，$(x,y)\in B\times A$，亦即“若 $x\in A$ 且 $y\in B$，则 $x\in B$ 且 $y\in A$”成立，于是 $A\subseteq B, B\subseteq A$，因此 $A=B$。

$\Leftarrow$ 将每个条件代入验证即可得证。

14. 设 A 是某高校师生之集，$B\subseteq A\times A$，请给出一种具有合理现实意义的 B 的解释，如 B 是同班同学关系。

【解】B 为师生关系、同寝关系、同事关系、领导关系等。

15.一些人组成一个团体。试证可以把这些人分为两组，使每个人在其所在的组中的朋友数至多是他在团体中的朋友数的一半。提示：朋友可以看成是笛卡尔乘积中元素的一种性质，用 $P((a,b))$ 表示 a 与 b 是朋友。

【证明】令集合 S 表示一些人组成的团体，$A\subseteq S$，$A\neq\Phi$，则 $\{A, A^c\}$ 就是把 S 分为两组的一种分组方法，而且这种分组的表示方法是唯一的，于是我们就可以用这种表示方法来标记某个特定的分组。由于 S 是有穷集合，在所有的分组方法中一定存在一种分组方法，其组间朋友数为最大，形式化地，令 $S_{\{A,A^c\}}=\{(a,b)\,|\,(a,b)\in A\times A^c, P((a,b))\}$，则存在 $\{B,B^c\}$ 使得 $|S_{\{B,B^c\}}|$ 最大，下面采用反证法证明 $\{B,B^c\}$ 即为所求的分组。

根据题意，$\forall a\in S, a\in B$，a 在 B 中的朋友数均应小于等于 a 在 B^c 中的朋友数，假若不然，则 $\exists b\in S, b\in B,$ b 在 B 中的朋友数 d 大于等于 b 在 B^c 中的朋友数 d'，则把 b 从 B 调到 B^c 中得到一种新的分组 $\{B\setminus\{b\}, B^c\bigcup\{b\}\}$，记为 $\{B', B'^c\}$，于是，

$|S_{\{B',B'^c\}}|=|S_{\{B,B^c\}}|+(d-d')>|S_{\{B,B^c\}}|$，矛盾。