第六章图的基本概念

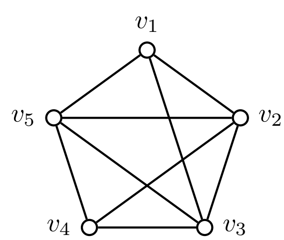
陈建文

November 27, 2024

设V为一个集合，V的一切二元子集之集合记为$\mathcal{P}_2(V)$，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A|A \subseteq V\text{且}|A| = 2\}。$$

定义1. 设V为一个非空有限集合，$E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$，二元组$G = (V, E)$称为一个无向图。$V$中的元素称为无向图$G$的顶点，$V$为顶点集；$E$中的元素称为无向图$G$的边，$E$为边集。无向图简称图。如果$|V| = p$，$|E| = q$，则称$G$为一个$(p, q)$图，即$G$为一个具有$p$个顶点$q$条边的图。



定义2. 在图$G = (V, E)$中，如果$\{u, v\} \in E$,则称顶点u与v邻接;若x与y是图G的两条边，并且仅有一个公共端点，即$|x \cap y| = 1$,则称边x与y邻接;如果$x = \{u, v\}$是图G的一条边，则称u与x互相关联，同样的，称v与x互相关联。

定义3. 如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为多重图，这些边称为多重边; 如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为带环图，这些边称为环;允许有环或多重边存在的图，称之为伪图。

定义4. 设$G = (V, E)$为一个图，如果$E = \Phi$,则称G为零图; $(1, 0)$图称为平凡图。

定义5. 设v为图$G = (V, E)$的任意一个顶点，G中与v关联的边的数目称为顶点v的度，记为$\deg v$。

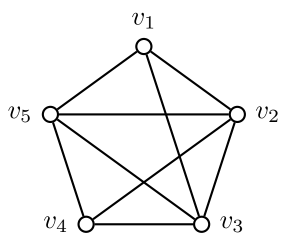
定理1. 设$G = (V, E)$为一个具有p个顶点q条边的图，则G中各顶点度的和等于边的条数q的两倍，即

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2q$$

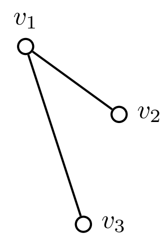
定理2. 在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

定义6. 图G称为r度正则图，如果G的每个顶点的度都等于r。3 度正则图也称为三次图。一个具有p个顶点的$p-1$度正则图称为包含p个顶点的完全图，记为K_p。

定义7. 设$G = (V, E)$为一个图，图$H = (V_1, E_1)$称为G的一个子图，当且仅当V_1为V的非空子集且E_1为E的子集。如果$H \neq G$，则称H为G的真子图。

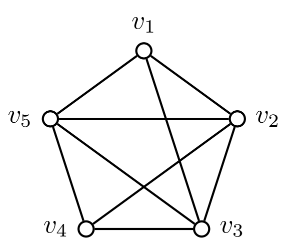


G

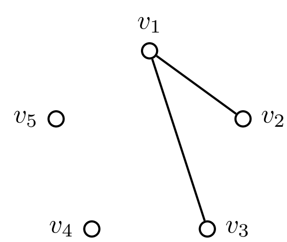


H

定义8. 设$G = (V, E)$为一个图，如果$F \subseteq E$，则称G的子图$H = (V, F)$为G的一个生成子图。



G

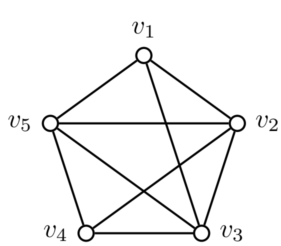


H

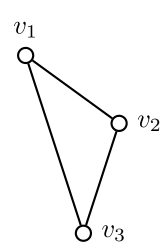
定义9. 设图G的子图H具有某种性质，若G中不存在与H不同的具有此性质且包含H的子图，则称H为具有此性质的极大子图。

定义10. 设S为图$G = (V, E)$的顶点集V的非空子集，则G的以S为顶点集的极大子图称为由S导出的子图，记为$\langle S \rangle$。形式的，

$$\langle S \rangle = (S, \mathcal{P}_2(S) \cap E)$$

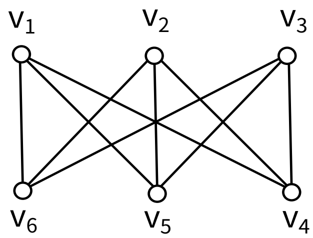


G

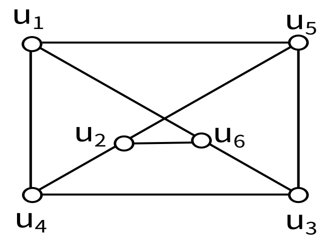


H

定义11. 设$G = (V, E)$，$H = (U, F)$为两个图，如果存在一个一一对应$\phi : V \to U$，使得$\{u, v\} \in E$当且仅当$\{\phi(u), \phi(v)\} \in F$,则称$G$与$H$同构。



G



H

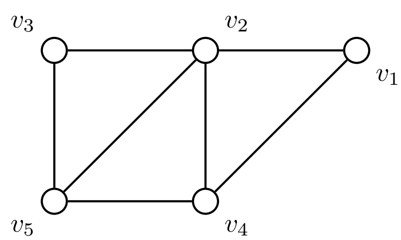
定义12. 设$G=(V,E)$为一个图。G的一条**通道**为G的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \ldots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

其中$x_i=\{v_{i-1}, v_i\}, i=1,2,\ldots,n$。$n$称为该通道的长。这样的通道常称为$v_0-v_n$通道，并简记为$v_0v_1v_2\ldots v_n$。当$v_0=v_n$时，则称此通道为**闭通道**。

定义13. 如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的**迹**。如果一条闭通道上的各边互不相同，则称此闭通道为**闭迹**。

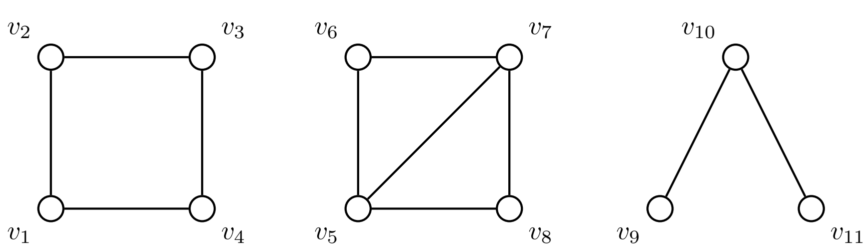
定义14. 如果一条迹上的各顶点互不相同，则称此迹为路。如果一条长度大于0的闭迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭迹为**圈**，或**回路**。



G

定义15. 设$G=(V,E)$为一个图，如果G中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称G为一个连通图。

定义16. 图G的极大连通子图称为G的一个支。



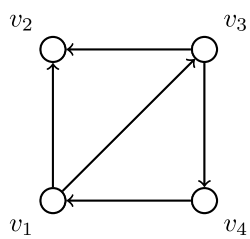
G

定理3. 设$G=(V,E)$为一个图。在V上定义二元关系$\cong$如下：

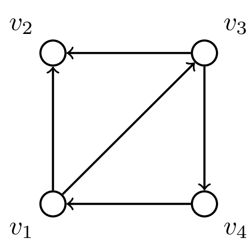
$$\forall u,v\in V, u\cong v\text{当且仅当}u\text{与}v\text{间有一条路},$$

则$\cong$为V上的等价关系，G的支就是关于$\cong$的每个等价类的导出子图。

定义17. 设V为一个有穷非空集合，$A\subseteq V\times V\setminus\{(v,v)|v\in V\}$，二元组$D=(V,A)$称为一个**有向图**。$V$中的元素称为$D$的**顶点**，$V$称为**顶点集**。$A$中的元素称为$D$的**弧**或**有向边**，$A$称为$D$的**弧集**或**有向边集**。如果$x=(u,v)\in A$，则$u$称为弧$x$的**起点**，$v$称为弧$x$的**终点**。



定义18. 设$D=(V,A)$为一个有向图，v为D的任一顶点，以v为终点的弧称为v的**入弧**；以v为始点的弧称为v的**出弧**。顶点v的入弧的条数称为v的**入度**，记为$id(v)$；顶点v的出弧的条数称为v的**出度**，记为$od(v)$。

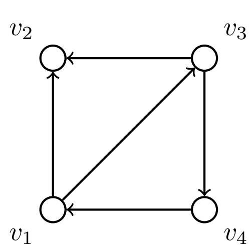


定理4. 设$D=(V,A)$为一个有向图，$|A|=q$，则

$$\sum_{v\in V}id(v)=\sum_{v\in V}od(v)=q$$

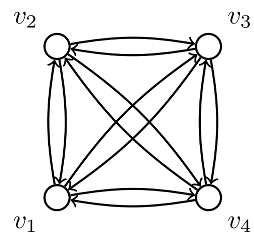
从而

$$\sum_{v\in V}(id(v)+od(v))=2q$$



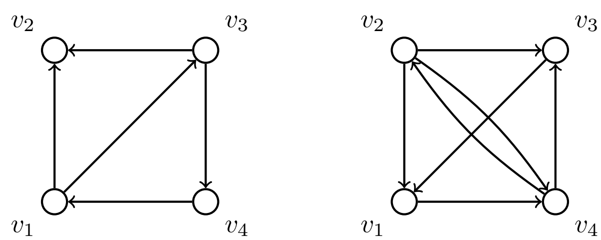
定义19. 有向图$D = (V, A)$称为**完全有向图**，如果

$$A = V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}$$

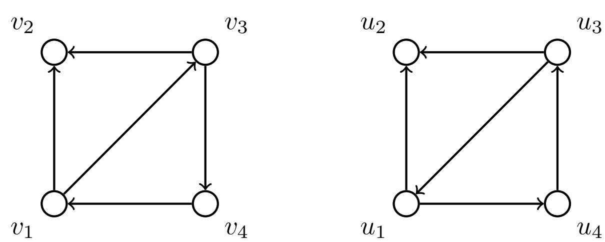


定义20. 有向图$D = (V, A)$的**补图**定义为$D^c = (V, A^c)$，其中

$$A^c = (V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}) \setminus A$$



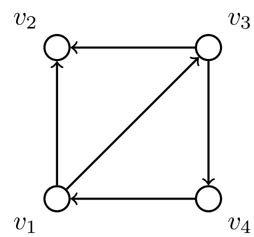
定义21. 设$D_1 = (V_1, A_1)$，$D_2 = (V_2, A_2)$都为有向图，如果存在一个一一对应$\varphi : V_1 \to V_2$，使得$\forall u, v \in V_1, (u, v) \in A_1$当且仅当$(\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$，则称$D_1$与$D_2$**同构**。



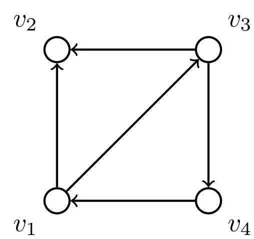
定义22. 设$D = (V, A)$为一个有向图。D的一条**有向通道**为D的顶点和弧的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, \cdots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

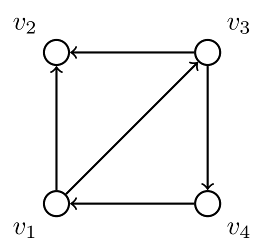
其中$x_i = (v_{i-1}, v_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$。n称为该有向通道的长。这样的有向通道常称为$v_0 - v_n$有向通道，并简记为$v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$。当$v_0 = v_n$时,则称此有向通道为**闭有向通道**。



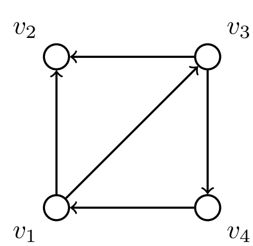
定义23. 如果有向图中一条有向通道的各弧互不相同，则称此有向通道为有向图的**有向迹**。如果一条闭有向通道上的各弧互不相同，则称此闭有向通道为**闭有向迹**。



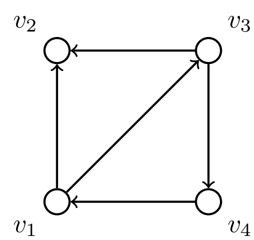
定义24. 如果一条有向通道上的各顶点互不相同，则称此有向通道为**有向路**。如果一条长度大于0的闭有向迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭有向迹为**有向圈**，或**有向回路**。



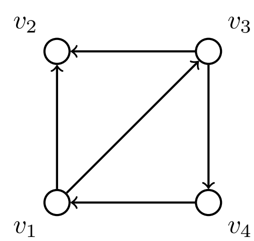
定义25. 设$D = (V, A)$为一个有向图，u和v为D的顶点。如果在D中有一条从u到v的有向路，则称从u能达到v，或者v是从u**可达**的。



定义26. 有向图D称为是**强连通**的，如果对D的任意两个不同的顶点u和v，u和v是互达的（即从u可以达到v并且从v可以达到u）。



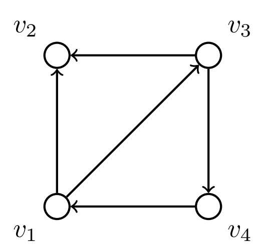
定义27. 有向图D的极大强连通子图称为D的一个**强支**。



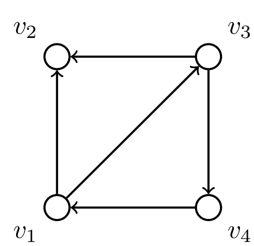
定理5. 设$D = (V, A)$为一个有向图。在V上定义二元关系$\cong$如下：

$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{当且仅当} u \text{与} v \text{互达}$$

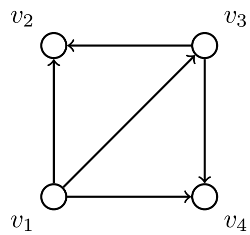
则$\cong$为V上的等价关系，D的强支就是顶点集V关于$\cong$的每个等价类的导出子图。



定义28. 有向图$D = (V, A)$称为**单向连通**的，如果对D的任意两个不同的顶点u和v，或从u可达到v，或从v可达到u。



定义29. 设$D = (V, A)$为一个有向图，如果抹去D中所有弧的方向之后所得到的无向图是连通的，则称D为**弱连通**的，简称**连通**的。



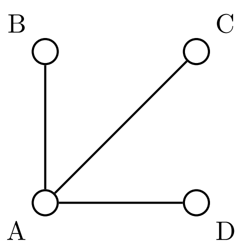
练习1. 设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。

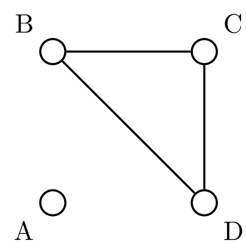
（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。

（2）假设当$l = k$时结论成立，往证当$l = k+1$时结论也成立。设顶点u与v之间有一条长为$k+1$的通道L，进一步设L上顶点v之前的顶点为w，则顶点u与顶点w之间有一条长为k的通道。由归纳假设，u与w之间有一条路P，此时如果v不在路P中出现，则路P之后接顶点v就构成了u与v之间的一条路；如果v在路P中出现，此时路P上从u到v之间的顶点和边的序列就构成了u与v之间的一条路。 □

定义30. 设$G = (V, E)$为一个图，图$G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$称为$G$的补图。如果$G$与$G^c$同构，则称$G$为自补图。



G



G^c

定义31. 设$G = (V, E)$为一个图,如果G的顶点集V有一个二划分$\{V_1, V_2\}$，使得G的任意一条边的两个端点一个在V_1中，另一个在V_2中，则称G为偶图。如果$\forall u \in V_1, \forall v \in V_2$均有$uv \in E$，则称$G$为完全偶图，记为$K_{m,n}$，其中$|V_1| = m, |V_2| = n$。

定义32. 设$G = (V, E)$为一个图，u和v为G的两个顶点。联结u和v的最短路的长称为u与v之间的距离，并记为$d(u, v)$。如果u与v间在G中没有路，则定义$d(u, v) = \infty$。

定理6. 图G为偶图的充分必要条件为它不包含奇数长的圈。

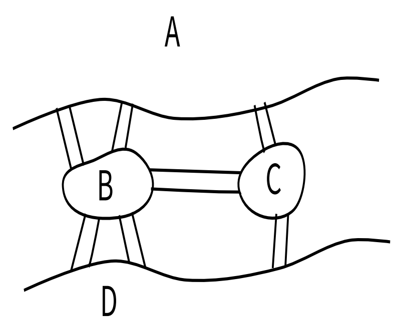
A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof. Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y), and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G. Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$. Then, since $v_0 v_1 \in E$ and G is bipartite, $v_1 \in Y$. In general, $v_{2i} \in X$ and $v_{2i+1} \in Y$.

Since $v_0 \in X$, $v_k \in Y$. Thus $k = 2i + 1$, for some i, and it follows that C is even.
It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V | d(u, x) \text{is even}\}$$
$$Y = \{y \in V | d(u, y) \text{is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G. Suppose that v and w are two vertices of X. Let P be a shortest (u,v)-path and Q be a shortest (u,w)-path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q. Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1)-sections of both P and Q are shortest (u, u_1)-paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even, the lengths of the (u_1, v)-section P_1 of P and the (u_1, w)-section Q_1 of Q must have the same parity. It follows that the (v, w)-path from v to u_1 along P_1 reversely and then from u_1 to w along Q_1 is of even length. If v were joined to w, the path from v to u_1 along P_1 reversely, from u_1 to w along Q_1 and then from w to v along the edge wv would be a cycle of odd length, contrary to the hypothesis. Therefore no two vertices in X are adjacent; similarly, no two vertices in Y are adjacent. □



定义33. 包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹。存在一条欧拉闭迹的图称为欧拉图。

定理7. 图G为欧拉图当且仅当G为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明. 首先，假设图G为欧拉图，往证G为连通的且每个顶点的度为偶数。

由图G为欧拉图知G中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹$T: v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$，其中$v_n = v_0$。显然$G$为连通的。顶点$v_0$在$T$中的第一次出现与一条边相关联，最后一次出现与一条边相关联，其余的每次出现均与两条边相关联，因此其度为偶数。除v_0之外的其他顶点在T中的每次出现均与两条边相关联，因此其度也为偶数。

其次，假设G为连通的且每个顶点的度为偶数，往证G为欧拉图。

设$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$为图$G$的一条最长的迹，记为$Z$，则$Z$为闭迹。否则，$v_n \neq v_0$，$v_n$在迹$Z$中的最后一次出现与一条边相关联，其他的每次出现均与两条

边相关联，由v_n的度为偶数知，v_n在G中还有一条与之关联的边没有在Z中出现，记为$x_{n+1} = v_n v_{n+1}$。则$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$构成了图$G$的一条更长的迹，这与$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$为图$G$的一条最长的迹矛盾。接下来证明$Z$包含了图$G$的所有的边。若不然，则图$G$中有一条边$x$不在$Z$中出现，并且$x$有一个端点在$Z$中出现。在图$G$中去掉$Z$中的所有边，得到图$G'$。取图$G'$中一条包含$x$的最长的迹$Z'$，由图$G'$中所有顶点的度均为偶数易知$Z'$为闭迹（与前面证明$Z$为闭迹的过程相类似）。于是$Z$和$Z'$可以联结成一条更长的迹，这与$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$为图$G$的一条最长的迹矛盾。 □

定义34. 包含图的所有顶点和所有边的迹称为欧拉迹。一条欧拉迹如果不是欧拉闭迹，则称其为欧拉开迹。

定理8. 图G有一条欧拉开迹当且仅当G为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明. 设图G有一条欧拉开迹$Z : v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$，其中$x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \ldots, n$。显然，图$G$是连通的。顶点$v_0$在$Z$中除了其首次出现与一条边相关联外，其余的每次出现均与两条边相关联，因此顶点v_0的度为奇数；同理，v_n的度为奇数。除了v_0和v_n 之外其余的每个顶点在Z中的每次出现均与两条边相关联，因此其度为偶数。这证明了图G恰有两个奇度顶点。

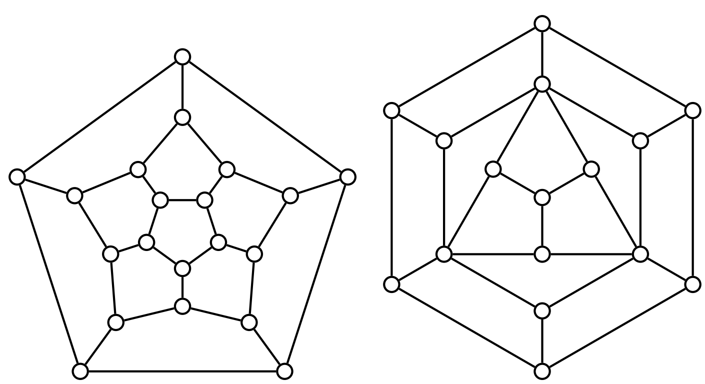
设图G是连通的，且恰有两个奇度顶点u和v。在顶点u和v之间加一条边，得到图G'。则图G'是连通的且每个顶点的度为偶数，因此有一条欧拉闭迹。在该欧拉闭迹上去掉新加的顶点u与顶点v之间的边，便得到了图G的一条欧拉开迹。 □

定理9. 设G为连通图，G恰有$2n$个奇度顶点，$n \geq 1$，则G的全部边可以排成n条开迹，且不能排成少于n条开迹。

证明. 设连通图G有$2n$个奇度顶点$u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$。在$G$中加入$n$条边$u_1v_1$，$u_2v_2$，…，$u_nv_n$，得到图$G'$。则$G'$是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹Z。在Z中去掉新加入的边$u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n$，则得到图$G$的$n$条开迹。

假设图G的所有边能排成m条开迹，$m < n$。则只有这m条开迹的端点可能为奇度顶点，因此图G至多有$2m$个奇度顶点，这与图G有$2n$个奇度顶点矛盾。 □

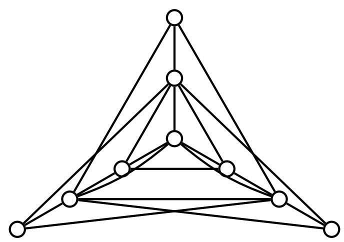
定义35. 图G的一条包含所有顶点的路称为G的一条哈密顿路;图G的一个包含所有顶点的圈称为G的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。



定理10. 设$G=(V,E)$为哈密顿图，则对V的每个非空子集S，均有

$$\omega(G-S)\leq |S|$$

其中$G-S$是从G中去掉S中那些顶点后所得到的图，$\omega(G-S)$是图$G-S$的支数。



定理11. 设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u+\deg v\geq p-1,$$

则G为连通的。

证明. 用反证法。假设G不连通，则G至少有两个支。设$G_1=(V_1,E_1)$为其中的一个支，其他各支构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$。取V_1中的任意一个顶点u和V_2中的任意一个顶点v，则顶点u和顶点v不邻接并且

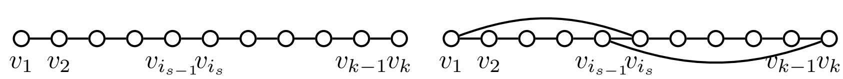
$$\deg u+\deg v\leq (|V_1|-1)+(|V_2|-1)=p-2$$

矛盾。 □

定理12. 设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u+\deg v\geq p-1,$$

则G有哈密顿路。



证明. 当$p=1,2,3$时，易验证结论成立。以下证明当$p\geq 4$时结论成立。设G中的最长路为$v_1v_2\cdots v_k$，只需证明$k=p$。

用反证法，假设$k<p$，易验证此时$k\geq 3$。以下证明$v_1v_2\cdots v_k$必在同一个圈上。由$v_1v_2\cdots v_k$为最长路知v_1只能与$v_2,v_3,\ldots,v_{k-1},v_k$中的顶点邻接，$v_k$只能与$v_1,v_2,v_3,\ldots,v_{k-1}$中的顶点邻接。设$v_{i_1},v_{i_2},\ldots,v_{i_r}$与$v_1$邻接，$2=i_1<i_2<\cdots<i_r\leq k$，则$v_k$必与某个$v_{i_s-1}$邻接。否则，$v_k$至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg v_1+\deg v_k\leq r+((k-1)-r)=k-1<p-1$$

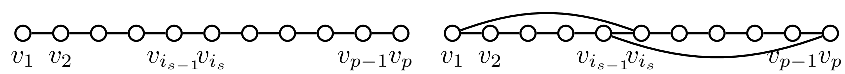
矛盾。于是，$v_1v_2\cdots v_{i_s-1}v_kv_{k-1}\cdots v_{i_s}v_1$为$G$中的一个圈。

由于G为连通的，$k<p$，所以G必有某个顶点v，v不在C上，但与C上某个顶点v_i邻接。于是得到G的一条更长的路，这就出现了矛盾。 □

定理13. 设G为有$p(p\geq 3)$个顶点的图。如果对G的任一对不邻接的顶点u和v，均有

$$\deg u+\deg v\geq p,$$

则G为一个哈密顿图。



证明. 由定理6.12知，G有哈密顿路，记为$v_1v_2\cdots v_p$。

以下证明$v_1v_2\cdots v_p$必在同一个圈上，从而G中有哈密顿圈。

设$v_{i_1},v_{i_2},\ldots,v_{i_r}$与$v_1$邻接，$2=i_1<i_2<\cdots<i_r\leq p$，则$v_p$必与某个$v_{i_s-1}$邻接。否则，$v_p$至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg v_1+\deg v_p\leq r+((p-1)-r)=p-1$$

与已知条件矛盾。于是，$v_1v_2\cdots v_{i_s-1}v_pv_{p-1}\cdots v_{i_s}v_1$为$G$中的一个圈。 □

定义36. 设$G=(V,E)$为一个图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$。$p\times p$矩阵$A=(a_{ij})$称为G的邻接矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{如果}\{v_i,v_j\}\in E\\ 0, \text{如果}\{v_i,v_j\}\notin E\end{cases}$$

定义37. 设$G=(V,E)$为一个有p个顶点q条边的图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，$E=\{x_1,x_2,\ldots,x_q\}$，$p\times q$矩阵$H=(h_{ij})$称为G的关联矩阵，其中

$$h_{ij}=\begin{cases}1, \text{如果顶点}v_i\text{与边}x_j\text{相关联}\\ 0, \text{如果顶点}v_i\text{与边}x_j\text{不相关联}\end{cases}$$

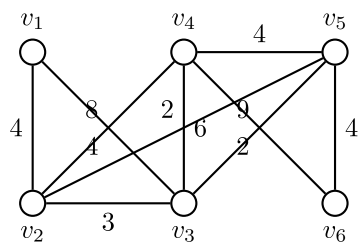
定义38. 设$D=(V,A)$为一个有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，$p\times p$矩阵$B=(b_{ij})$称为D的邻接矩阵，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{如果}(v_i,v_j)\in A\\ 0, \text{如果}(v_i,v_j)\notin A\end{cases}$$

定义39. 设$D=(V,A)$为一个有p个顶点q条弧的有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_q\}$，$p\times q$矩阵$H=(h_{ij})$称为D的关联矩阵，其中

$$h_{ij}=\begin{cases}1, \text{如果}v_i\text{为弧}x_j\text{的起点}\\ -1, \text{如果}v_i\text{为弧}x_j\text{的终点}\\ 0, \text{如果}v_i\text{既不是弧}x_j\text{的起点也不是弧}x_j\text{的终点}\end{cases}$$

最短路径问题：



初始时：

	1	2	3	4	5	6
label	1	0	0	0	0	0
dist	0	4	8	∞	∞	∞
predecessor	-1	1	1	-1	-1	-1

第一轮：

	1	2	3	4	5	6
label	1	1	0	0	0	0
dist	0	4	7	8	10	∞
predecessor	-1	1	2	2	2	-1

第二轮：

	1	2	3	4	5	6
label	1	1	1	0	0	0
dist	0	4	7	8	9	∞
predecessor	-1	1	2	2	3	-1

第三轮：

	1	2	3	4	5	6
label	1	1	1	1	0	0
dist	0	4	7	8	9	17
predecessor	-1	1	2	2	3	4

第四轮：

	1	2	3	4	5	6
label	1	1	1	1	1	0
dist	0	4	7	8	9	13
predecessor	-1	1	2	2	3	5

Dijkstra算法的基本思想为：

输入：图$G=(V,E,f)$，其中$|V|=p$，$|E|=q$，f为从E到R^+的映射，源点v_i

输出：源点v_i到图中其他各顶点的最短路径的长度

设S为已求出最短路径的顶点的集合。初始时，$S=\{v_i\}$。

数组dist[1:p]用来保存求出的最短路径长度，dist[j]为v_i到v_j的最短路径的长度。初始时，dist[i] = 0; 当$j\neq i$时，如果$v_iv_j\in E$，则$dist[j]=f(v_iv_j)$，否则dist[j]=∞。

数组predecessor[1:p]用来保存从源点v_i到顶点v_j的最短路径上v_j的前一个顶点的编号。初始时，如果$v_iv_j\in E$，则$predecessor[j]=i$，否则$predecessor[j]=-1$。

执行时，先从S以外的顶点对应的dist数组元素中，找出其值最小的元素dist[m]，该元素值就是从源点v_i到顶点v_m的最短路径长度。接着把v_m并于集合S中，对S以外的每个顶点v_j，比较$dist[m] + f(v_m v_j)$和$dist[j]$的大小，如果$dist[m] + f(v_m v_j) < dist[j]$，则用$dist[m] + f(v_m v_j)$代替$dist[j]$，同时将$predecessor[j]$设为$m$。

重复以上过程$p-2$次，即可在$dist$数组中得到从源点v_i到其余各顶点的最短路径长度。