第二章映射

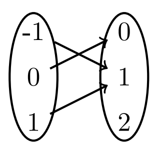
陈建文

October 14, 2024

定义1. 设X和Y为两个集合。一个从X到Y的**映射**f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应，记为$f(x)$。从X到Y的映射f常记为$f : X \to Y$。

例. 设集合$X = \{-1, 0, 1\}$，集合$Y = \{0, 1, 2\}$，$\forall x \in X, f(x) = x^2$，即$f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$，则$f$为从集合$X$到集合$Y$的映射。

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$



定义2. 设X和Y为两个集合。一个从X到Y的**映射**为一个满足以下两个条件的$X \times Y$的子集f：

1. 对X的每一个元素x，存在一个$y \in Y$，使得$(x, y) \in f$；

2. 若$(x, y) \in f$，$(x, y') \in f$，则$y = y'$。

$(x, y) \in f$记为$y = f(x)$。

例. 设集合$X = \{-1, 0, 1\}$，集合$Y = \{0, 1, 2\}$，$f \subseteq X \times Y$，$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$，则$f$为从集合$X$到集合$Y$的映射。

定义2.1和定义2.2是等价的。

练习1. 设$X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}, f \subseteq X \times Y$，则下列为映射的是（$D$）
$A.\ f = \{(0, 3), (1, 4)\}$
$B.\ f = \{(0, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 5)\}$
$C.\ f = \{(0, 3), (0, 4)\}$
$D.\ f = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3)\}$

映射定义的符号化表示：
$f : X \to Y$
$f \subseteq X \times Y$
1) $\forall x \in X \exists y \in Y (x, y) \in f$

即：$\forall x(x \in X \to (\exists y y \in Y \wedge (x,y) \in f))$

2) $\forall x \in X \forall y \in Y \forall y' \in Y((x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \to y = y')$

即：$\forall x(x \in X \to (\forall y y \in Y \to \forall y'(y' \in Y \to ((x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \to y = y'))))$

定义3. 设f为从集合X到集合Y的映射，$f : X \to Y$，　如果$y = f(x)$，则称y为x在f下的**象**，称x为y的**原象**。X称为f的**定义域**；集合$\{f(x)|x \in X\}$称为f的**值域**，记为$Im(f)$。

P(x):x为偶数

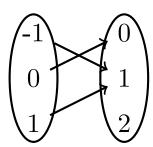
$P : Z \to \{T, F\}$

$P \subseteq Z \times \{T, F\}$

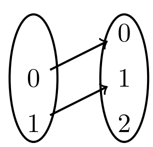
$P = \{\ldots, (-2,T), (-1,F), (0,T), (1,F), (2,T), \ldots\}$

定义4. 设$f : X \to Y$，$A \subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\phi : A \to Y$，$\forall x \in A$，$\phi(x) = f(x)$。ϕ称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来表示ϕ。反过来，我们也称f为ϕ在X上的扩张。

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$



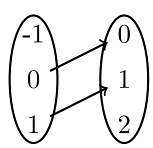
$A \xrightarrow{\phi} Y$



定义5. 设$f : A \to Y$，$A \subseteq X$，则称f为X上的一个部分映射。

一个部分映射的例子：

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$

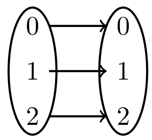


定义6. 两个映射f与g称为是相等的当且仅当f和g都为从X到Y的映射，并且$\forall x \in X$总有$f(x) = g(x)$。

定义7. 设$f : X \to X$，如果$\forall x \in X, f(x) = x$，则称$f$为$X$上的恒等映射。$X$上的恒等映射常记为$I_X$。

一个恒等映射的例子：

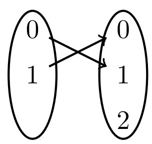
$X \xrightarrow{\text{f}} X$



定义8. 设$f : X \to Y$，如果$\forall x_1, x_2 \in X$，只要$x_1 \neq x_2$，就有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的**单射**。

一个单射的例子：

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$

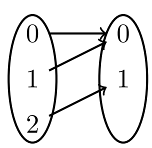


单射的符号化表示：
$f : X \to Y$
$\forall x1 \in X \forall x2 \in X(x1 \neq x2 \to f(x1) \neq f(x2))$
即：$\forall x1 \in X \forall x2 \in X(f(x1) = f(x2) \to x1 = x2)$

定义9. 设$f : X \to Y$，如果$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$使得$f(x) = y$，则称f为从X到Y的**满射**。

一个满射的例子：

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$

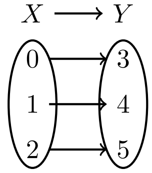


满射的符号化表示：
$f : X \to Y$
$\forall y \in Y \exists x \in X f(x) = y$

定义10. 设$f : X \to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的**双射**，或者称f为从X到Y的一一对应。这时也称X与Y**对等**，记为$X \sim Y$。

一个双射的例子：

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$



定义11. 从集合X到集合Y的所有映射之集记为Y^X，即$\{f|f:X\to Y\}$。

$$\{2,3\}^{\{0,1\}}=\{\{(0,2),(1,2)\},\{(0,3),(1,3)\},\{(0,2),(1,3)\},\{(0,3),(1,2)\}\}$$

定理1 (抽屉原理)**.** 如果把$n+1$个物体放到n个盒子里，则必有一个盒子里至少放了两个物体。

例. 从$1,2,\ldots,2n$中任意选出$n+1$个数，则这$n+1$个数中必有两个数，使得其中之一能除尽另一个。

证明. 每个整数均可写成$2^l\cdot d$的形式，其中l为非负整数，d为奇数。因此，当把选出的$n+1$个整数都写成这种形式时，便得到了$n+1$个奇数$d_1,d_2,\cdots,d_{n+1}$，并且$1\le d_i\le 2n-1$，$i=1,2,\cdots,n+1$。但1到$2n$之间仅有n个奇数，由抽屉原理可知，必有i,j使得$d_i=d_j$，$i\ne j$。于是，d_i与d_j对应的两个整数$2^{l_i}\cdot d_i$与$2^{l_j}\cdot d_j$中必有一个可以整除另外一个。 □

例. 任何 6 个人中，或有3个人互相认识，或有3个人互相不认识。

定理2 (抽屉原理的强形式)**.** 设q_1，q_2，…，q_n为n个正整数。如果把$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$个物体放到n个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有q_1个物体，或者第二个盒子中至少含有q_2个物体，…，或者第n个盒子中至少含有q_n个物体。

推论1. 如果把$n(r-1)+1$个物体放入n个盒子里，则至少有一个盒子里放了不少于r个物体。

推论2. 如果n个正整数$m_1,m_2,\ldots,m_n$的平均值

$$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}>r-1,$$

则$m_1,m_2,\ldots,m_n$中至少有一个正整数不小于r。

例. n^2+1个士兵站成一排，则可以使其中的至少$n+1$个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或站成一个按身高从大到小的队列。

对照以下的例子可以帮助我们理解证明过程。

5	9	10	4	7	2	8	3	6	1
3	2	1	3	2	3	1	2	1	1

证明. 从左到右依次用$h_1,h_2,\cdots,h_{n^2+1}$表示此队列中各士兵的身高，于是，我们得到了一个n^2+1项的数列

$$h_1,h_2,\cdots,h_{n^2+1} \tag{1}$$

我们的问题就是要证明此数列中或者有一个长（项数）至少为$n+1$的不减子序列，或者有一个长至少为$n+1$的不增子序列。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i=1,2,\cdots,n^2+1$。于是得到n^2+1个数$m_1,m_2,\cdots,m_{n^2+1}$，其中每个数m_i满足$1\le m_i\le n$。现在把这n^2+1个数放到n个盒子$1,2,\cdots,n$中，数m_i放

到第k个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n^2+1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},所以前面加一项h_{i_1}，就得到了一个以h_{i_1}为首项长度大于m_{i_1}的不减子序列，这是不可能的。

于是，我们得到了一个长度至少为$n+1$的不增子序列(2)，这又与假设相矛盾。所以，本题结论成立。 □

练习2. 在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答. 用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16+3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。此时必存在10个圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和$S_1$将小于圆$C$之面积的9倍，即$3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$，矛盾。任取圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的公共重叠区域中的一点，在该点上放一个圆环，将覆盖住$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的圆心，这10个圆心都是圆内650个点中的点，结论得证。 □

定义12. 设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，A在f下的**象**定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

例. 设$f: \{-1,0,1\} \to \{0,1,2\}$，$f(x) = x^2$，则$f(\{-1,0\}) = \{0,1\}$

定义13. 设$f: X \to Y$，$B \subseteq Y$，B在f下的**原象**定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

例. 设$f: \{-1,0,1\} \to \{0,1,2\}$，$f(x) = x^2$，则$f^{-1}(\{1,2\}) = \{-1,1\}$

定理3. 设$f: X \to Y$，$C \subseteq Y$，$D \subseteq Y$，则

1. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
2. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
3. $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$
4. $f^{-1}(C^c) = (f^{-1}(C))^c$
5. $f^{-1}(C \triangle D) = f^{-1}(C) \triangle f^{-1}(D)$

定理4. 设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，$B \subseteq X$，则

1. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

2. $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

3. $f(A\setminus B)\supseteq f(A)\setminus f(B)$

4. $f(A\triangle B)\supseteq f(A)\triangle f(B)$

定义14. 设$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$为映射，映射f与g的**合成**$g\circ f:X\to Z$定义为

$$\forall x\in X(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

定理5. 设$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，$h:Z\to W$ 为映射，则

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$$

定理6. 设$f:X\to Y$，则$f=f\circ I_X=I_Y\circ f$。

定义15. 设$f:X\to Y$为双射，f的**逆映射**$f^{-1}:Y\to X$定义为：对任意的$y\in Y$，存在唯一的x使得$f(x)=y$,则$f^{-1}(y)=x$。

定义16. 设$f:X\to Y$为一个双射, 则$g:Y\to X, g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$称为$f$的**逆映射**，记为$g=f^{-1}$。

例. 设集合$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{4,5,6\}$，$f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$为从X到Y的双射，则$f^{-1}=\{(4,1),(5,2),(6,3)\}$。

定义17. 设$f:X\to Y$为一个映射。如果存在一个映射$g:Y\to X$使得

$$f\circ g=I_Y\text{且}g\circ f=I_X,$$

则称映射f为**可逆**的，而g称为f的**逆映射**。

例. 设集合$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{4,5,6\}$，$f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$为从X到Y的双射，$g=\{(4,1),(5,2),(6,3)\}$,由于$f\circ g=I_Y$且$g\circ f=I_X$，$f^{-1}=g$。

定理7. 定义*16*和定义*17*是等价的。

证明. 设f为从集合X到集合Y的映射，g为从集合Y到集合X的映射。

以下先假设g满足定义16，往证g满足定义17。

假设f为从集合X到集合Y的双射，g为从集合Y到集合X的映射，$g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$，则$(y,x)\in g$等价于$(x,y)\in f$，即$x=g(y)$等价于$y=f(x)$，易验证$f\circ g=I_Y$且$g\circ f=I_X$。

接下来，假设g满足定义17，往证g满足定义16。

假设f为从集合X到集合Y的映射，存在一个映射$g:Y\to X$使得$f\circ g=I_Y$且$g\circ f=I_X$,往证f为双射，且$g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$。

对任意的$x_1\in X$，$x_2\in X$，如果$f(x_1)=f(x_2)$，则$g(f(x_1))=g(f(x_2))$，再由$g\circ f=I_X$知$x_1=x_2$，从而f为单射。对任意的$y\in Y$，由$f\circ g=I_Y$知$f(g(y))=y$，从而f为满射。这证明了f为双射。

以下证明$g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$，这就是要证$(y,x)\in g$等价于$(x,y)\in f$，即要证$x=g(y)$等价于$y=f(x)$。如果$x=g(y)$，则$f(x)=f(g(y))$，由$f\circ g=I_Y$知$y=f(x)$；如果$y=f(x)$，则$g(y)=g(f(x))$，由$g\circ f=I_X$知$x=g(y)$。

□

定理8. 设$f: X \to Y$为可逆映射，则$(f^{-1})^{-1} = f$。

定理9. 设$f : X \to Y$，$g : Y \to Z$都为可逆映射，则$g \circ f$也为可逆映射并且$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。

定义18. 设$f: X \to Y$为一个映射，如果存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$，则称f为左可逆的，g称为f的左逆映射；如果存在一个映射$h: Y \to X$ 使得$f \circ h = I_Y$，则称f为右可逆的，h称为f的右逆映射。

定理10. 设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明. 先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，存在$g: Im(f) \to X$使得$g \circ f = I_X$。扩充g到Y上：对任意的$y \in Y$，若$y \in Im(f)$，则$g(y)$不变，而当$y \in Y \setminus Im(f)$时，规定$g(y)$为X中任意一个固定的元素x_0，则g为从集合Y到集合X的映射，且$g \circ f = I_X$。所以，f为左可逆的。

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g: Y \to X$，其定义为，对任意的$y \in Y$，$g(y) = x$，其中x为$f^{-1}(\{y\})$中一个特定元素。于是，对任意的$y \in Y$，设$g(y) = x$，则$f(x) = y$，从而$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = I_Y(y)$。所以$f \circ g = I_Y$，即$f$为右可逆的。 □

定义19. 有穷集合S到自身的一一对应称为S上的一个置换。如果$|S| = n$，则S上的置换就说成是n次置换。

设$S = \{1, 2, \ldots, n\}$，$\sigma : S \to S$为S上的一个置换，$\sigma(1) = k_1$，$\sigma(2) = k_2$，$\ldots$，$\sigma(n) = k_n$，我们用如下的一个表来表示置换σ:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$$

S上所有的n次置换构成的集合记为S_n。

例. 设$S = \{1, 2, 3, 4\}$，$\sigma : S \to S$，$\sigma(1) = 3$，　$\sigma(2) = 2$，　$\sigma(3) = 4$，$\sigma(4) = 1$，则σ可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

这里，列的次序无关紧要，例如，σ还可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

定义20. 设α与β为集合S上的两个置换，则α与β为两个从S到S的双射，讨论置换时，我们用$\alpha\beta$表示α与β的合成$\beta \circ \alpha$。注意这里α与β的次序，从运算的角度看有一定的便利性，但也有的教材中采用相反的顺序。按照我们的写法，讨论置换时，如果$i \in S$，则用$(i)\alpha$表示i在α下的像，简记为$i\alpha$。

例. 设$S = \{1, 2, 3\}$，α和β为S上的两个置换，

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

，则

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

，

若α与β为两个n次置换，当把β的表示式中的上一行按α的下一行的顺序写出时，则$\alpha\beta$的下一行就是β的新表示式中的下一行。

例. 设$S = \{1, 2, 3\}$，α和β为S上的两个置换，

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

，则

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

，

定义21. 设σ为S上的一个n次置换，若$i_1\sigma = i_2$，$i_2\sigma = i_3$，$\cdots$，$i_{k-1}\sigma = i_k$，$i_k\sigma = i_1$，而$\forall i \in S \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$，$i\sigma = i$，则称$\sigma$为一个$k$循环置换，记为$(i_1 i_2 \cdots i_k)$。$2-$循环置换称为对换。

例. 设$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，则

$$(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, (23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

定理11. 每个置换都能被分解成若干个没有共同数字的循环置换的乘积。如果不计这些循环置换的顺序以及略去的$1-$循环置换，这个分解是唯一的。

定理12. 当$n \geq 2$时，每个n次置换都能被分解成若干个对换的乘积。

定理13. 如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

定义22. 能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为偶置换；能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为奇置换。

定理14. 当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明. 设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，从而$\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$，即$\sigma_1 = \sigma_2$。同时，易验证$f$为满射，这是因为对任意的$\tau \in B$，$f(\tau(12)) = \tau(12)(12) = \tau$。从而$f$为双射，这证明了$|A| = |B|$。再由$|A| + |B| = n!$知，$|A| = |B| = \frac{n!}{2}$。 □

定义23. 一个集合及其在该集合上定义的若干个代数运算合称为一个代数系。

我们熟知的实数集R，与其上的加法运算"$+$"和乘法运算"$*$"一起构成了一个代数系，满足如下性质：

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义24. 设X，Y，Z为任意三个非空集合。一个从$X \times Y$到Z的映射ϕ 称为X与Y到Z的一个二元（代数）运算。当$X = Y = Z$时，则称ϕ为X上的二元(代数)运算。

定义25. 从集合X到Y的任一映射称为从X到Y的一元(代数)运算。如果$X = Y$，则从X到X的映射称为X上的一元(代数)运算。

定义26. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, D$为非空集合。一个从$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$到$D$的映射$\phi$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$到$D$的一个$n$元（代数）运算。如果$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = D = A$，则称$\phi$为$A$上的$n$元代数运算。

定义27. 设"$\circ$"为集合X上的一个二元代数运算。如果$\forall a, b \in X$，恒有$a \circ b = b \circ a$，则称二元代数运算"$\circ$"满足交换律。

定义28. 设"$\circ$"为集合X上的一个二元代数运算。如果$\forall a, b, c \in X$，恒有$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$，则称二元代数运算"$\circ$"满足结合律。

定义29. 设"$+$"与"$\circ$"为集合X上的两个二元代数运算。
如果$\forall a,b,c\in X$，恒有

$$a\circ(b+c)=a\circ b+a\circ c,$$

则称二元代数运算"$\circ$"对"$+$"满足左分配律。如果$\forall a,b,c\in X$，恒有

$$(b+c)\circ a=b\circ a+c\circ a,$$

则称二元代数运算"$\circ$"对"$+$"满足右分配律。

定义30. 设$(X,\circ)$为一个代数系。如果存在一个元素$e\in X$使得对任意的$x\in X$恒有$e\circ x=x\circ e=x$，则称e为"$\circ$"的单位元素。

定义31. 设$(X,\circ)$为一个代数系，"$\circ$"有单位元素e，$a\in X$，如果$\exists b\in X$使得

$$a\circ b=b\circ a=e,$$

则称b为a的逆元素。

定义32. 设$(S,+)$与$(T,\oplus)$为两个代数系。如果存在一个一一对应$\phi:S\to T$，使得$\forall x,y\in S$，有

$$\phi(x+y)=\phi(x)\oplus\phi(y),$$

则称代数系$(S,+)$与$(T,\oplus)$同构，并记为$S\cong T$，ϕ称为这两个代数系之间的一个同构。

定义33. 设$(S,+,\circ)$与$(T,\oplus,*)$为两个代数系。如果存在一个一一对应$\phi:S\to T$，使得$\forall x,y\in S$，有

$$\phi(x+y)=\phi(x)\oplus\phi(y),$$
$$\phi(x\circ y)=\phi(x)*\phi(y),$$

则称代数系$(S,+,\circ)$与$(T,\oplus,*)$同构，并记为$S\cong T$，ϕ称为这两个代数系之间的一个同构。

p	q	p $\wedge$ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	p $\vee$ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\neg$ p
T	F
F	T

x	y	x $\wedge$ y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x	y	x $\vee$ y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

代数系$(\{T,F\},\wedge,\vee,\neg)$与$(\{1,0\},\wedge,\vee,\bar{\ })$是同构的。

定义34. 设X为一个集合，$E \subseteq X$。E的特征函数$\chi_E : X \to \{0,1\}$定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果} x \in E, \\ 0 & \text{如果} x \notin E. \end{cases}$$

定义35. 令$Ch(X) = \{\chi | \chi : X \to \{0,1\}\}$。$\forall \chi, \chi' \in Ch(X)$及$x \in X$，

$$\begin{aligned} (\chi \vee \chi')(x) &= \chi(x) \vee \chi'(x) \\ (\chi \wedge \chi')(x) &= \chi(x) \wedge \chi'(x) \\ \bar{\chi}(x) &= \overline{\chi(x)} \end{aligned} \tag{3}$$

定理15. 设X为一个集合，则代数系$(2^X, \cup, \cap, ^c)$与$(Ch(X), \vee, \wedge, ^-)$同构。

例.

$$\begin{aligned}
X &= \{1,2,3\} \\
2^X &= \{ \\
&\phi, && \chi_1 : X \to \{0,1\} && \chi_1(1)=0, \chi_1(2)=0, \chi_1(3)=0 \\
&\{1\}, && \chi_2 : X \to \{0,1\} && \chi_2(1)=1, \chi_2(2)=0, \chi_2(3)=0 \\
&\{2\}, && \chi_3 : X \to \{0,1\} && \chi_3(1)=0, \chi_3(2)=1, \chi_3(3)=0 \\
&\{3\}, && \chi_4 : X \to \{0,1\} && \chi_4(1)=0, \chi_4(2)=0, \chi_4(3)=1 \\
&\{1,2\}, && \chi_5 : X \to \{0,1\} && \chi_5(1)=1, \chi_5(2)=1, \chi_5(3)=0 \\
&\{2,3\}, && \chi_6 : X \to \{0,1\} && \chi_6(1)=0, \chi_6(2)=1, \chi_6(3)=1 \\
&\{1,3\}, && \chi_7 : X \to \{0,1\} && \chi_7(1)=1, \chi_7(2)=0, \chi_7(3)=1 \\
&\{1,2,3\} && \chi_8 : X \to \{0,1\} && \chi_8(1)=1, \chi_8(2)=1, \chi_8(3)=1 \\
&\}
\end{aligned}$$

证明. 令$\phi : 2^X \to Ch(X)$，$\forall E \in 2^X, \phi(E) = \chi_E$，这里$\chi_E$为$E$的特征函数，即$\chi_E : X \to \{0,1\}$，

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果} x \in E, \\ 0 & \text{如果} x \notin E. \end{cases}$$

以下证明ϕ为从2^X到$Ch(X)$的双射。

首先验证ϕ为单射：$\forall E, F \in 2^X$，如果$E \neq F$，则$\exists x$，$x \in E$且$x \notin F$，或者$x \in F$且$x \notin E$。当$x \in E$且$x \notin F$时，$\chi_E(x) = 1$，$\chi_F(x) = 0$，$\chi_E(x) \neq \chi_F(x)$；当$x \in F$且$x \notin E$时，$\chi_E(x) = 0$,$\chi_F(x) = 1$，此时亦有$\chi_E(x) \neq \chi_F(x)$。因此，$\chi_E \neq \chi_F$，即$\phi(E) \neq \phi(F)$，从而ϕ为单射。

其次验证ϕ为满射：$\forall \chi \in Ch(X)$，令$E = \{x \in X | \chi(x) = 1\}$，$\phi(E) = \chi_E$。$\chi_E$和$\chi$都为从$X$到$\{0,1\}$的映射，并且$\forall x \in X$，$\chi_E(x) = 1 \Leftrightarrow x \in E \Leftrightarrow \chi(x) = 1$，从而$\chi_E = \chi$，即$\phi(E) = \chi$。

接下来验证ϕ为从$(2^X, \cup, \cap, ^c)$到$(Ch(X), \vee, \wedge, ^-)$的同构。

$\forall E, F \in 2^X$，$\phi(E \cup F) = \chi_{E \cup F}$，$\phi(E) \vee \phi(F) = \chi_E \vee \chi_F$。$\chi_{E \cup F}$和$\chi_E \vee \chi_F$都为从$X$到$\{0,1\}$的映射。$\forall x \in X$，$\chi_{E \cup F}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in E \cup F \Leftrightarrow x \in E \vee x \in$

$F \Leftrightarrow \chi_E(x) = 1 \vee \chi_F(x) = 1 \Leftrightarrow (\chi_E \vee \chi_F)(x) = 1$，这验证了$\chi_{E\cup F} = \chi_E \vee \chi_F$，即$\phi(E \cup F) = \phi(E) \vee \phi(F)$。 $\square$