第六章作业题解答

1. 证明：在(p,q)连通图中，有 $q \geq p-1$。

【证法一】证明其逆否命题“如果 $q<p-1$，则 G 不连通。”

采用数学归纳法，施归纳于 p。

$p=2$ 时，结论显然成立。假设 $p \geq 2$ 时结论成立，则对 $p+1$ 阶图 G，有一个顶点 u 使得 $\deg u=1$(若不存在则 G 不连通或前提不成立)，$G-u$ 不连通，从而 G 不连通。

【证法二】采用反证法。

假设 $q<p-1$，由于具有 p 个顶点的零图具有 p 个支，加一条边最多减少一个支，q 都加入，还剩下至少两个支，因此 G 不连通，矛盾，因此 $q \geq p-1$。

【证法三】学习了下一章的树之后，利用树的性质这道题就更容易证明了。

因为 G 连通，所以 G 有生成树 T，假设 T 是一个(p,q')图，则$q \geq q' = p-1$。

2. 证明：若$G=(V,E)$是不连通图，则 G 的补图G^c是连通的。

因为 G 不连通，所以 G 至少有两个支，设$G_1=(V_1,E_1)$是其中一个支，剩下的支记为$G_2=(V_2,E_2)$。对$\forall u,v \in V$，$u \neq v$，则⑴$u,v \in V_1$或$u,v \in V_2$，如果$u,v \in V_1$，则对于$\forall w \in V_2$，$uw \in E^c$且$vw \in E^c$，此时在G^c中u,v间有路uwv；如果$u,v \in V_2$，则对于$\forall w \in V_1$，$uw \in E^c$且$vw \in E^c$，此时在G^c中u,v间也有路uwv。

⑵$u \in V_1, v \in V_2$或者$u \in V_2, v \in V_1$，这两种情况下均有$uv \in E^c$，亦即在G^c中u,v间也有路uv。

综上可知，$\forall u,v \in V$，在G^c中u,v间均有路，因此G^c是连通的。

3. 证明：设$G=(V,E)$是一个(p,q)图且$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，则 G 连通。

【证法一】G^c中有$\frac{1}{2}p(p-1)-q<p-1$条边，由上面第 1 题可知G^c不连通，再由上面第 2 题可知 G 是连通的。

【证法二】采用数学归纳法，施归纳于 p。

$P=3$ 时，$q \geq 2$，G 连通。

假设 $p=k$ 时结论成立，当 $p=k+1$ 时，$q>\frac{1}{2}k(k-1)$，去掉一个顶点 v 时分为如下 3 种情况：

⑴ $\deg v=0$，此时$q \leq \frac{1}{2}k(k-1)$，这与$q>\frac{1}{2}k(k-1)$相矛盾。

⑵ $\deg v=k$，则 v 与所有顶点邻接，因此 G 是连通的。

⑶ $0<\deg v \leq k-1$，假设 $G-v$ 是(k,q')图，则

$q'>\frac{1}{2}k(k-1)-\deg v \geq \frac{1}{2}k(k-1)-(k-1)=\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$，根据归纳假设，$G-v$ 是连通的，从而 G 也是连通的。

4. 在一个有 n 个人的宴会上，每个人至少有 m 个朋友($2 \leq m \leq n$)。试证：有不少于 $m+1$ 个人，使得他们按某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左、右均是他的朋友。

【证】建模成图$G=(V,E)$，每个人是 V 中的一个顶点，如果两个人是朋友，则在他们所对应的顶点间连一条边，于是$\delta(G) \geq m$，问题转化为：“证明图 G 中存在一个长度至少为 $m+1$ 的圈。”

考查图 G 中的最长路 $v_1v_2\cdots v_{k-1}v_k$，因为 $\delta(G)\ge m$，所以 $\deg(v_1)\ge m$，且与 v_1 邻接的顶点全部都在最长路 $v_1v_2\cdots v_{k-1}v_k$ 上，按照它们在最长路上出现的顺序依次记为 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_{m-1}},v_{i_m}$，易见 $v_{i_1}=2$，$v_{i_m}\ge m+1$，则 $v_1v_2\cdots v_{i_m-1}v_{i_m}v_1$ 就是一个长度至少为 m+1 的圈。

5. 设 G 是一个(p,q)图，证明：

(1) $q\ge p$，则 G 中有回路；

【证】因为 $q\ge p$，所以 G 不是平凡图，也不是零图，且 $p\ge 3$。采用数学归纳法证明其逆否命题“如果 G 中没有回路，则 $q\le p-1$。”

施归纳于 p，显然，p=3 时，G 中没有回路，则 $q\le 2=p$-1，结论成立。

假设 p=k 时结论成立，往证 p=k+1 时结论成立。此时 G 是一个(k+1,q)图，因为 G 中没有回路，所以 G 存在一个度为 1 的顶点 v，G-v 是一个(k,q-1)图且 G-v 中没有回路，根据归纳假设 q-1$\le k$-1，亦即 $q\le(k+1)-1=p-1$，证毕。

(2)若 $q\ge p$+4，则 G 包含两个边不重的回路。

【证】只需证 q=p+4 时结论成立即可。施归纳于 p，p=5 时结论成立。

如果 G 有三角形或四边形，则去掉一个这样的圈 C_1 得 G_1，G_1 中 $q\ge p$，有圈 C_2，于是存在边不相交圈 C_1 和 C_2。于是，不妨设 G 中最小圈长为 5。

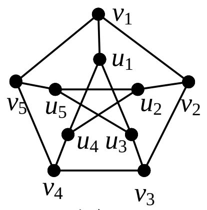
假设 $p\le k$ 时结论成立，往证 p=k+1 时结论也成立，设 $G=(V,E)$。

1）如果 $\exists v\in V$ 使得① $\deg(v)=0$，则令 G_1=G-v-x，$x\in E$；② $\deg(v)=1$，则令 G_1=G-v；③ $\deg(v)=2$，不妨设 $v_1v,vv_2\in E$，则令 G_1=G-v+v_1v_2。

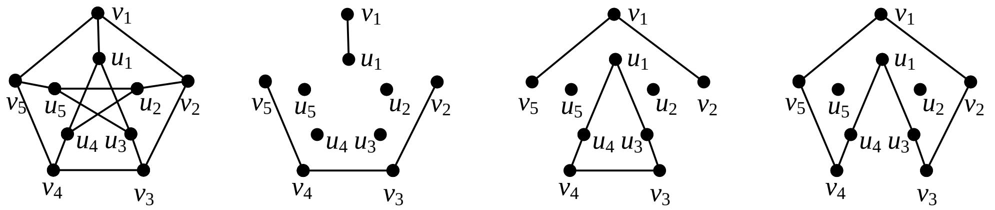
不难看出，这三种情况下，G_1 均满足归纳假设，于是 G_1 中有两个边不相交圈，易见 G 中也有两个边不相交圈。

2）$\forall v\in V$，$\deg(v)\ge 3$，且最小圈长大于等于 5，则 $p+4=q\ge 3p/2$，亦即 $p\le 8$。假设最小圈长为 g，则有圈 C_g，$g\ge 5$，令 S_0 为 C_g 上的顶点集，S_0 中每个顶点有伸向圈 C_g 外的边，记 C_g 外与 S_0 中某个顶点距离为 1 的顶点之集为 S_1，则 $|S_1|\ge|S_0|$，所以 $p\ge|S_1|+|S_0|\ge g+g\ge 10$，这与 $p\le 8$ 相矛盾。

6. 证明：图(1)所示的 Peterson 图不是哈密顿图。



图(1)



(1) (2) (3) (4)

【证】

图(2) Peterson 图及寻找哈密顿圈的示意图

假设 G 是哈密顿图，则有哈密顿圈 C，其外五边形 $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ 上的 5 条边不能全在 C 上。

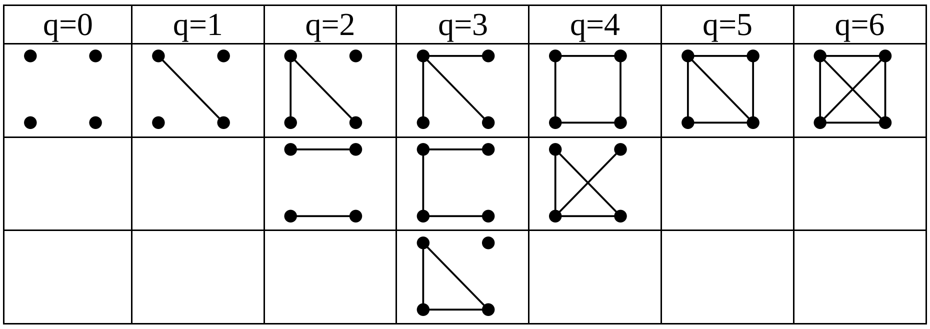
显然，$v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ 只有 1 条边或 2 条边在 C 上是不可能；

如果 $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ 有 3 条边在 C 上，则分为两种情况，第一种情况如图(2)-⑵所示，此时边 v_1v_2 和边 v_5v_1 不在 C 上，于是，与 v_1 关联的边只能有 1 条在 C 上，这是不可能的。第二种情况如图(2)-⑶所示，此时边 v_2v_3 和边 v_4v_5 不在 C 上，于是 u_3v_3、u_4v_4、u_3v_3 在 C 上，而 u_1v_1 不在 C 上，从而 u_1u_3，u_1u_4 在 C 上，此时 $u_1u_3v_3v_4u_4u_1$ 在 C 上形成了圈，这是不可能的；

如果 $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ 有 4 条边在 C 上，如图(2)-⑷所示，不妨设 v_3v_4 不在 C 上，于是 u_4v_4、u_3v_3 在 C 上，又因为 u_1v_1 不在 C 上，所以 u_1u_3，u_1u_4 在 C 上，此时 $v_1v_2v_3u_3u_1u_4v_4v_5v_1$ 在 C 上形成了圈，这是不可能的。

7. 画出具有 4 个顶点的所有无向图，同构的只画一个。

【解】设 $G=(V,E)$ 是一个 $(4,q)$ 图，根据 q 的不同，G 的可能形状如图(3)所示。



图(3)

8. 设 $G=(V,E)$ 是一个 (p,q) 图，证明：若 $q=\frac{1}{2}(p-1)(p-2)+2$，则 G 是哈密顿图。

【证】由条件知 $p\ge 3$，而 K_p 有 $\frac{1}{2}p(p-1)$ 条边，故 G^c 的边数为

$\frac{1}{2}p(p-1)-q=\frac{1}{2}p(p-1)-\frac{1}{2}(p-1)(p-2)-2=p-3$。亦即 G 是从 K_p 中去掉 p-3 条边得到的，从而 G 的任意两个不邻接顶点 u，v 均有 $\deg u+\deg v\ge p$，由 Ore 定理知 G 是哈密顿图。实际上，完全图中，u,v 的度数和为 $2(p-1)$，现在少了 $p-3$ 条边，最极端情况下，这 $p-3$ 条边均与 u,v 相关联，而且其中一条还是 uv（因为 u,v 不邻接），亦即 $\deg u+\deg v$ 最多少了 $p-2$，于是 $\deg u+\deg v\ge 2(p-1)-(p-2)$。

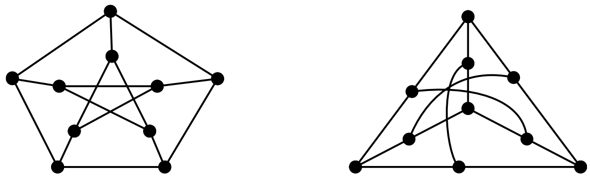
9. 一个邮递员从邮局出发投递信件，然后返回邮局。若他必须至少一次走过他所管辖范围内的每条街道，那么如何选择投递路线，以便走尽可能少的路程。这个问题是我国数学家管梅谷于 1962 年首先提出的，国外称之为中国邮路问题。(1) 试将中国邮路问题用图论术语描述出来。(2)中国邮路问题、欧拉图问题及最短路问题之间有何联系?

【解】(1)建模成带权图 $G=(V,E,w)$，顶点集 V 表示路口之集，边集 E 表示街道之集，$w:E\to R_+$ 为边的权重，即街道长度。则中国邮路问题为：求 G 的一个包含 E 中所有边的闭迹，使得该闭迹上的边权之和最小。

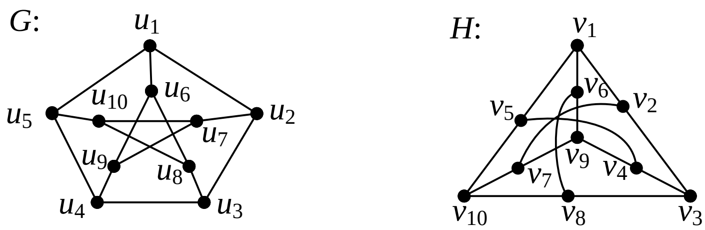
(2)如果 G 是欧拉图，则欧拉闭迹即为中国邮路问题的解。如果 G 不是欧拉图，且 G 只有两个奇度顶点 v_i，v_j，则 v_i 到 v_j 的欧拉开迹加上 v_i，v_j 间的最短路径就

是中国邮路问题的解。如果 G 不是欧拉图，且 G 有 $2n$ 个奇度顶点，则求出所有奇度顶点间的最短路径和距离，以奇度顶点为顶点造一个边带权的完全图 K_{2n}，其边权为顶点间的距离，设 M 为 K_{2n} 的最小匹配，造伪图 $G' = G + \{E_{ij} \mid E_{ij}\text{为}v_i,v_j\text{间最短路的边集}, v_iv_j \in M\}$，则 G' 是欧拉图，其欧拉迹就是中国邮路问题的解。

10.下面的两个图同构吗？为什么？



【解】同构。如图(4)所示，



图(4)

设 $G=(U,E)$，$H=(V,F)$，其中，$U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$，$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$，令 $\varphi: U \to V$，$\forall i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$\varphi(u_i)=v_i$，显然，$\varphi$ 是一一对应，容易验证，$u_iu_j \in E \Leftrightarrow v_iv_j \in F$，因此 $G \cong H$。