第七章作业题解答

1. $a_1,a_2,\cdots,a_p$是正整数，$\sum_{i=1}^{p}a_i=2(p-1)$，$p\geq 2$，证明：有一棵树$T=(V,E)$，$|V|=p$，使$a_1,a_2,\cdots,a_p$为T的各个顶点的度。

【证明】采用数学归纳法，施归纳于 p。

因为$a_1+a_2=2(p-1)=2\times(2-1)=2$，所以$a_1=a_2=1$，对应一棵两个顶点的树，因此 p=2 时结论成立。

假设$a_1,a_2,\cdots,a_{p-1}$满足条件时有树 T 使得$a_1,a_2,\cdots,a_{p-1}$为 T 的度序列。

今设$a_1,a_2,\cdots,a_p$为正整数序列，且$\sum_{i=1}^{p}a_i=2(p-1)$，往证有一棵 p 个顶点的树 T，使其各顶点的度分别为$a_1,a_2,\cdots,a_p$。易见$a_1,a_2,\cdots,a_p$中必有一个数为 1，不妨设$a_1=1$；又必有一个数大于等于 2，不妨设$a_p\geq 2$，于是，$a_2,a_3,\cdots,a_p-1$是满足条件的$p-1$个正整数，由归纳假设有一棵树T'，将T'增加一个顶点 u，并将与对应度为a_p-1的顶点间加一条边得树T,则T的顶点度序列正好是$a_1,a_2,\cdots,a_p$。

2. 证明：若 G 的直径大于 3，则G^c的直径小于 3。

【证明】设$G=(V,E)$，$G^c=(V,E^c)$，$\forall u,v\in V$。

⑴ 如果$uv\notin E$，则$uv\in E^c$，从而在G^c中$d(u,v)=1$。

⑵ 如果$uv\in E$，则$uv\notin E^c$，则分两种情况讨论：

① G 中任意顶点至少和u,v之一相连，此时，G 中任意两个顶点w,w'有$d(w,w')\leq 3$，这与 G 的直径大于 3 相矛盾。

② $\exists w\in V$，使得$uw\notin E$且$vw\notin E$，则在G^c中，$uw,vw\in E^c$，此时$d(u,v)=2$。

综上，在G^c中，对于$\forall u,v\in V$均有$d(u,v)\leq 2$，因此，G^c的直径小于 3。

3. 证明：设$G=(V,E)$是连通图,G 的任意一条边必是它的某个生成树的一条边。

4. 证明：设$G=(V,E)$连通，$e\in E$，则e属于 G 的所有生成树$\Leftrightarrow e$是 G 的桥。

【证明】$\Leftarrow$因为e是 G 的桥，因此$G-e$不连通，因而没有生成树，所以 G 的所有生成树必含有e。

$\Rightarrow$采用反证法。假设e不是 G 的桥，则$G-e$连通，从而 G 有生成树不含e，矛盾，因此e是 G 的桥。

5. 设 T 是一个正则 2 元树，它有 i 个内顶点（出度为 2），如果 E 为所有内顶点深度之和，I 为所叶顶点深度之和，证明：$I=E+2i$。

【证法一】树T中的内顶点数为i,所以叶顶点数就必为$i+1$,从而弧的条数就为$2i$。

现在考虑树 T 中的一条弧（u,v）,弧（u,v）包含在以 v 为根的子树中内顶点和叶顶点的度数计算中，由于这个子树中叶顶点比内顶点恰好多一个，所以在 I 的计算中比 E 的计算中多计算一次，对所有边重复这个推断，我们得到 $I=E+$T 中边的条数$=E+2i$。

【证法二】采用数学归纳法。施归纳于 i。

显然 $i=1$ 时结论成立。

假设内顶点树少于 i 时结论成立，往证内顶点树为 i 时结论成立。

去掉 T 的根节点得两个正则二元树 T_1 和 T_2，假设 T_1 具有 i_1 个内顶点，E_1 为 T_1 的所有内顶点深度之和，I_1 为 T_1 的所有叶节点深度之和，T_2 具有 i_2 个内顶点，

E_2 为 T_2 的所有内顶点深度之和，I_2 为 T_2 的所有叶节点深度之和，则因为 $i_1<i$，$i_2<i$，根据归纳假设，$I_1=E_1+2i_1$，$I_2=E_2+2i_2$，又因为 $E= E_1+ E_2+ i_1+ i_2$，$I=I_1+I_2+i_1+i_2+2$，所以 $I=E+2i$。

6. 证明：一个三次图有一个割点当且仅当它有一条桥。

【证明】$\Rightarrow$因为 G 有一个割点 v，所以$G-v$至少有两个支，设其中的一个支为 G_1，其它支记为 G_2，则因为 $deg\,v=3$，所以$G-v$中与 v 邻接的三个顶点中存在一个顶点在 G_1 中(或者在 G_2 中)，于是，从 G 中至多去掉 1 条边即可得到不连通图，因此 G 中有桥。

$\Leftarrow$因为 G 中有桥，显然去掉桥的一个端点即可得到一个不连通图，从而 G 有割点。