第四章无穷集合

陈建文

October 28, 2024

定义1. 如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

定义2. 如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一个一一对应$f : \mathbb{N} \to X$，则称集合X为可数无穷集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集合，简称不可数集。

定理1. 集合A为可数集的充分必要条件为A的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$$

定理2. 可数集的任一无限子集也是可数集。

定理3. 设A为可数集合，B为有穷集合，则$A \cup B$为可数集。

定理4. 设A与B为两个可数集，则$A \cup B$为可数集。

定理5. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为可数集合的一个无穷序列，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$为可数集。即可数多个可数集之并为可数集。

定理6. 设A与B为两个可数集，则$A \times B$为可数集。

定理7. 全体有理数之集$\mathbb{Q}$为可数集。

定理8. 区间$[0, 1]$中的所有实数构成的集合为不可数集。

定义3. 凡与集合$[0, 1]$存在一个一一对应的集合称为具有"连续统的势"的集合，简称连续统。

定理9. 无穷集合必包含有可数子集。

定理10. 设M为一个无穷集合，A为至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

证明. 先考虑$A \cap M = \phi$的情况。因为M为一个无穷集合，所以M中必有一个可数子集D。令$P = M \setminus D$，则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由$P \sim P$，$D \sim D \cup A$，得到$M \sim M \cup A$。

再考虑$A \cap M \neq \phi$的情况，此时$A \setminus M$为至多可数集合，从而$M \sim M \cup (A \setminus M) = M \cup A$。 □

定理11. 设M为无穷集合，A为M的至多可数子集，$M\setminus A$为无穷集合，则$M\sim M\setminus A$。

定理12. 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个两两不相交的连续统，则$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$为连续统。

定理13. 设$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$为两两不相交的连续统的序列，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$为连续统。

推论1. 全体实数之集是一个连续统。

推论2. 全体无理数之集是一个连续统。

定理14. 设A_1和A_2为连续统，则$A_1\times A_2$为连续统。

定义4. 集合A的基数为一个符号，凡与A对等的集合都赋以同一个记号。集合A的基数记为$|A|$。

定义5. 所有与集合A对等的集合构成的集族称为A的基数。

定义6. 集合A的基数与集合B的基数称为是相等的，记为$|A|=|B|$，当且仅当$A\sim B$。

定义7. 设A，B为任意两个集合，A的基数小于等于B的基数，记为$|A|\leq|B|$,当且仅当从集合A到集合B存在一个单射；A的基数小于B的基数，记为$|A|<|B|$，当且仅当$|A|\leq|B|$且$|A|\neq|B|$，即从集合A到集合B存在一个单射，但是从集合A到集合B不存在双射。

定理15 (康托)**.** 对任一集合M，$|M|<|2^M|$。

证明. 令$i:M\to 2^M$，其定义为对任意的$m\in M$，$i(m)=\{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M|\leq|2^M|$。以下证明：如果$f:M\to 2^M$为任意一个映射，则f一定不为满射。为此，接下来证明$\forall x\in M, f(x)\neq\{m\in M|m\notin f(m)\}$。用反证法。假设$\exists x_0\in M$，使得$f(x_0)=\{m\in M|m\notin f(m)\}$。此时如果$x_0\in f(x_0)$，则$x_0\notin f(x_0)$；如果$x_0\notin f(x_0)$，则$x_0\in f(x_0)$，矛盾。 □

定理16 (康托-伯恩斯坦)**.** 设A，B为两个集合。如果存在单射$f:A\to B$与单射$g:B\to A$，则$|A|=|B|$。

证明. 设$f:A\to B$和$g:B\to A$都为单射。令$\psi:2^A\to 2^A$,对任意的$E\in 2^A$，

$$\psi(E)=A\setminus g(B\setminus f(E))$$

易见，如果$E\subseteq F\subseteq A$，则$\psi(E)\subseteq\psi(F)$。令

$$\mathbb{D}=\{E\subseteq A|E\subseteq\psi(E)\}$$

，则$\phi\in\mathbb{D}$。又令

$$D=\bigcup_{E\in\mathbb{D}}E,$$

则对任意的$E\in\mathbb{D}$,由$E\subseteq D$知$E\subseteq\psi(E)\subseteq\psi(D)$，从而$D\subseteq\psi(D)$。于是$\psi(D)\subseteq\psi(\psi(D))$,故$\psi(D)\in\mathbb{D}$，因此，$\psi(D)\subseteq D$，所以

$$D=\psi(D)=A\setminus g(B\setminus f(D))$$

令$h: A \to B$，对任意的$x \in A$，定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果}x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果}x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中g^{-1}为视g为B到$g(B)$的一一对应时g的逆，易见h为一一对应。所以$|A| = |B|$。 $\square$

定义8. 设α,β为两个基数，A与B为两个不相交集合，$|A| = \alpha, |B| = \beta$，则集合$A \cup B$的基数称为基数$\alpha$与$\beta$的和，记为$\alpha + \beta$。

定义9. 设α,β为两个基数，A与B为两个集合，$|A| = \alpha, |B| = \beta$，则集合$A \times B$的基数称为基数$\alpha$与$\beta$的积，记为$\alpha \cdot \beta$ 或者$\alpha\beta$。

定义10. 设α,β为两个基数，A与B为两个集合，$|A| = \alpha, |B| = \beta$，则集合$B^A = \{f | f : A \to B\}$的基数称为$\beta$的$\alpha$次幂，记为$\beta^\alpha$。

定理17. 设a为可数集的基数，c为连续统的基数，则

1. $\forall n \in N \cup \{0\}, n + a = a.$
2. $\forall n \in N, n \cdot a = a.$
3. $\forall n \in N, n \cdot c = c.$
4. $a \cdot c = c.$
5. $c \cdot c = c.$
6. $2^a = c.$
7. $(2^a)^a = c.$
8. $a^a = 2^a.$

刻画集合的ZFC公理系统（Zermelo-Fraenkel-Choice axioms of set theory）：

公理1 (外延公理)**.**

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B)$$

公理2 (空集公理)**.**

$$\exists \phi \forall x x \notin \phi$$

公理3 (对公理)**.**

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理4 (并集公理)**.**

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow \exists b \in A x \in b)$$

公理5 (幂集公理)**.**

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq A)$$

公理6 (子集公理).

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x))$$

公理7 (无穷公理).

$$\begin{aligned} \exists A(\phi \in A \wedge \forall a \in A a^{+} \in A) \\ \text{其中} a^{+} = a \cup \{a\} \end{aligned}$$

公理8 (代换公理).

$$\begin{aligned} \forall A(\forall x \in A \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y2) \to y_1 = y_2) \\ \to \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow \exists x \in A \varphi(x, y))) \end{aligned}$$

公理9 (正则公理).

$$\forall A \neq \phi \exists m \in A m \cap A = \phi$$

公理10 (选择公理).

$$\forall A((\forall x \in A x \neq \phi \wedge \forall x \in A \forall y \in A(x \neq y \to x \cap y = \phi)) \to \exists C \forall x \in A |C \cap x| = 1)$$