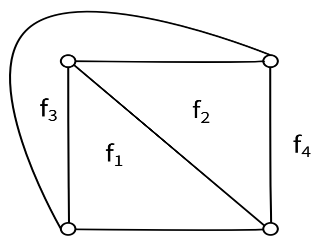
第九章平面图和图的着色

陈建文

December 11, 2024

定义1. 图G称为被嵌入平（曲）面S内，如果G的图解已画在S上，而且任意两条边均不相交（除可能在端点相交外）。已嵌入平面内的图称为**平面图**。如果一个图可以嵌入平面，则称此图为**可平面的**。

定义2. 平面图G把平面分成了若干个区域，这些区域都是连通的，称之为G的面，其中无界的那个连通区域称为G的外部面，其余的连通区域称为G的内部面。



定理1 (欧拉公式)**.** 如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则$p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而$q=p-1$,$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，$k\geq 1$。此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则$G-x$就是一个有p个顶点，$q-1$条边，k个面的平面连通图。由归纳假设，对$G-x$结论成立，即

$$p-(q-1)+k=2$$

因此，

$$p-q+(k+1)=2$$

即当$f=k+1$时结论也成立。 □

推论1. 若平面连通图G有p个顶点q条边且每个面都是由长为n的圈围成的，则

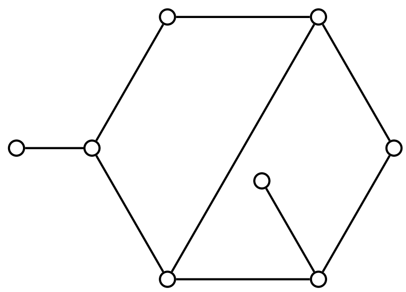
$$q=n(p-2)/(n-2)$$

一个**最大可平面图**是一个可平面图，对此可平面图中不能再加入边而不破坏其可平面性。

推论2. 设G为一个有p个顶点q条边的最大可平面图，$p \geq 3$，则G的每个面都为三角形，而且$q = 3p - 6$。

推论3. 设G为一个(p, q)可平面连通图，而且G的每个面都是由一个长为4的圈围成的，则$q = 2p - 4$。

推论4. 若G为一个有p个顶点q条边的可平面图，$p \geq 3$，则$q \leq 3p - 6$；进一步，若G中没有三角形，则$q \leq 2p - 4$。



证明. 不妨设G为连通的可平面图，否则可以加边使之变成连通的。由于每个面至少含有3条边，因此

$$2q \geq 3f$$

即

$$\frac{2q}{3} \geq f$$

由欧拉公式

$$p - q + f = 2$$

知

$$f = 2 - p + q$$

因此

$$\frac{2q}{3} \geq 2 - p + q$$

化简得：

$$q \leq 3p - 6$$

进一步，若G中没有三角形，则G中的每个面至少含有4条边，因此

$$2q \geq 4f$$

即

$$\frac{q}{2} \geq f$$

由欧拉公式

$$p - q + f = 2$$

知

$$f = 2 - p + q$$

得

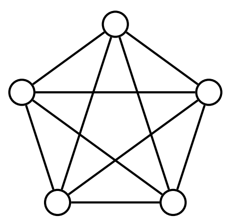
$$\frac{q}{2} \geq 2 - p + q$$

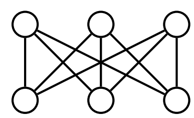
化简得:

$$q \leq 2p - 4$$

□

推论5. K_5和$K_{3,3}$都不是可平面图。





证明. 先证明K_5不是可平面图。用反证法，假设K_5为可平面图，其顶点数$p = 5$, 边数$q = 10$，此时

$$q \leq 3p - 6$$

即

$$10 \leq 3 \times 5 - 6 = 9$$

矛盾。因此K_5不是可平面图。
接下来证明$K_{3,3}$不是可平面图。用反证法，假设$K_{3,3}$为可平面图，其顶点数为$p = 6$，边数$q = 9$，由$K_{3,3}$中没有三角形知

$$q \leq 2p - 4$$

即

$$9 \leq 2 * 6 - 4 = 8$$

矛盾。因此$K_{3,3}$不是可平面图。 □

推论6. 每个可平面图G中顶点度的最小值不超过5,即$\delta(G) \leq 5$。

证明（证法一）. 当图G的顶点数$p = 1, 2$时，结论显然成立。当$p \geq 3$时，设可平面图G有q条边，则

$$\delta p \leq 2q$$

由G为可平面图知

$$q \leq 3p - 6$$

从而

$$\delta p \leq 6p - 12$$

两边同时除以p，得：

$$\delta \leq 6 - \frac{12}{p}$$

即

$$\delta \leq 5$$

□

证明（证法二）．当图G的顶点数$p = 1, 2$时，结论显然成立。当$p \geq 3$时，用反证法证明结论也成立。假设$\delta(G) \geq 6$，设G有q条边，则

$$6p \leq 2q$$

由G为可平面图知

$$q \leq 3p - 6$$

从而

$$6p \leq 6p - 12$$

矛盾。 □

1852年Francis 四色猜想

定义3. 图的一种**着色**是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个临接的顶点有同一种颜色。图G的一个$n-$**着色**是用n种颜色对G的着色。

定义4. 图G的**色数**是使G为$n-$着色的数n的最小值，图G的色数记为$\chi(G)$。若$\chi(G) \leq n$，则称G为$n-$**可着色**的。若$\chi(G) = n$，则称G为n**色**的。

定理2. 一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

定理3. 设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k (k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。
设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，$G - v$是$\Delta(G - v) + 1$可着色的。又由于$\Delta(G - v) \leq \Delta$，从而$G - v$为$\Delta + 1$可着色的。假设已经用至多$\Delta + 1$种颜色对$G - v$进行了顶点着色，使得任意相邻的顶点着不同的颜色，那么此时在G中与v邻接的顶点用了至多Δ种颜色，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，从而用至多$\Delta + 1$种颜色就可以对G的顶点进行着色使得相邻的顶点着不同的颜色，即G为$\Delta + 1$可着色的。

□

定理4. 每个可平面图为6$-$可着色的。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k (k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设可平面图G有$k + 1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有k个顶点的可平面图，由归纳假设，$G - v$是6$-$可着色的。假设用至多6种颜色对$G - v$进行了着色。由于$\deg v \leq 5$，在$G - v$中用至多6种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了5种颜色。此时，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，这样用至多6种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G为6$-$可着色的。 □

定理5. 每个可平面图为5$-$可着色的。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$时结论也成立。设可平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有$k - 1$个顶点的可平面图，由归纳假设，$G - v$是5$-$可着色的。假设用至多5种颜色对$G - v$进行了着色。
如果$\deg v \leq 4$，则在$G - v$中用至多 5 种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了4种颜色，如图 1所示。此时，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G是5$-$可着色的。
如果$\deg v = 5$，按顺时针方向，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。

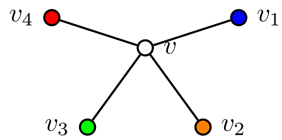


图 1: $\deg v \leq 4$的情况

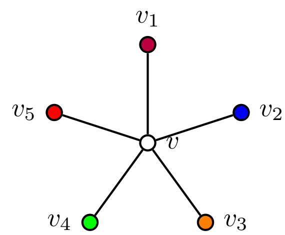


图 2: $\deg v = 5$的情况

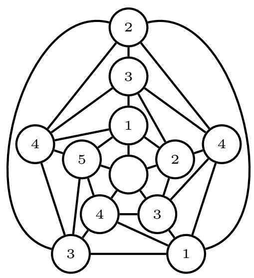


图 3: v_1和v_3在G_{13}的不同的枝中的情况

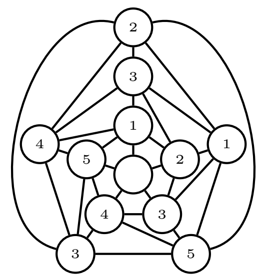


图 4: v_1和v_3在G_{13}的同一个枝中的情况

令G_{13}为图$G-v$中由着c_1色或c_3色的顶点之集导出的子图。如果v_1和v_3在G_{13}的不同支中（如果图 3所示），则在含v_1的枝中交换着c_1色顶点与着c_3色顶点的颜色，即原着c_1色的顶点改着c_3色，原着c_3色的顶点改着c_1色，然后用c_1色给顶点v着色，便得到G的一种5-着色。

如果v_1和v_3在G_{13}的同一个枝中（如图 4所示），则在G_{13}中有一条从v_1到v_3的路。于是，在G中v_1vv_3与这条路合起来形成一个圈。这个圈或把v_2圈在圈内或把v_4和v_5圈在圈内。在任意一种情况下，不存在联结v_2和v_4的路且路上各顶点或着c_2色或着c_4色。令G_{24}表示图$G-v$的由着c_2色或c_4色的顶点导出的子图，则v_2和v_4属于G_{24}的不同的枝。于是，同前面一样，交换G_{24}的含v_2的枝中着c_2色顶点与着c_4色顶点的颜色，得到$G-v$的又一个5-着色。然后，用c_2色为v着色得到G的一个5-着色。 □

定理6 (四色猜想)**.** 每个可平面图为4−可着色的。