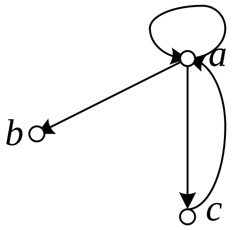
第三章作业题解答

1. 设 $X=\{a,b,c\}$，给出 X 上的一个二元关系，使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系，并画出 R 的关系图。

【解】设 $X=\{a,b,c\}$，R 是 X 上的二元关系，$R=\{(a,a),(a,c),(a,b),(c,a)\}$，则 R 同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性。R 的关系图为：



2. 设 R 是 X 上的二元关系，下面的结论是否正确？并证明你的结论。

（1）如果 R 是自反的，则 $R\cdot R$ 也是自反的。

（2）如果 R 是对称的，则 $R\cdot R$ 也是对称的。

（3）如果 R 是反自反和传递的，则 R 是反对称的。

【证明】

（1）正确。$\forall a\in X$，因为 R 是自反的，所以 $(a,a)\in R$，于是 $(a,a)\in R\cdot R$，所以 $R\cdot R$ 也是自反的。

（2）正确。假设 $(a,b)\in R\cdot R$，则 $\exists c\in X$ 使得 $(a,c)\in R$ 且 $(c,b)\in R$，又因为 R 是对称的，所以 $(b,c)\in R$ 且 $(c,a)\in R$，于是 $(b,a)\in R\cdot R$，因此 $R\cdot R$ 也是对称的。

（3）正确。假设 $(a,b)\in R$ 且 $(b,a)\in R$，因为 R 是传递的，所以 $(a,a)\in R$，这与 R 是反自反的矛盾，因此 $(a,b)\in R$ 与 $(b,a)\in R$ 不能同时成立，故 R 是反对称的。

3. 设 R,S 是 X 上的二元关系，试证：$(R\bigcup S)^{-1}=R^{-1}\bigcup S^{-1}$。

【证明】假设 $(x,y)\in(R\bigcup S)^{-1}$，则 $(y,x)\in R\bigcup S$，即 $(y,x)\in R$ 或 $(y,x)\in S$。于是 $(x,y)\in R^{-1}$ 或 $(x,y)\in S^{-1}$，即 $(x,y)\in R^{-1}\bigcup S^{-1}$，因而 $(R\bigcup S)^{-1}\subseteq R^{-1}\bigcup S^{-1}$。

反之，假设 $(x,y)\in R^{-1}\bigcup S^{-1}$，则 $(x,y)\in R^{-1}$ 或 $(x,y)\in R^{-1}$。于是 $(y,x)\in R$ 或 $(y,x)\in S$，即 $(y,x)\in R\bigcup S$。从而 $(x,y)\in(R\bigcup S)^{-1}$，因此，$R^{-1}\bigcup S^{-1}\subseteq(R\bigcup S)^{-1}$。

综上，$(R\bigcup S)^{-1}=R^{-1}\bigcup S^{-1}$。

4. 设 R,S 为 X 上的二元关系，试证：$(R\bigcup S)^{+}\supseteq R^{+}\bigcup S^{+}$。

【证明】将关系的传递闭包运算看作一个函数，则它相对于 $\subseteq$ 是单调递增的，于是，因为 $R\subseteq R\bigcup S$ 且 $S\subseteq R\bigcup S$，所以 $R^{+}\subseteq(R\bigcup S)^{+}$ 且 $S^{+}\subseteq(R\bigcup S)^{+}$，因此 $R^{+}\bigcup S^{+}\subseteq(R\bigcup S)^{+}$。

5. 由置换 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&6&5&8&1&2&7&4\end{pmatrix}$ 确定了 $X=\{1,2,\cdots,8\}$ 上的一个关系 $\cong$，$\forall i,j\in X$，$i\cong j$ 当且仅当 i 与 j 在 σ 的循环分解式中的同一循环置换中，证明：$\cong$ 是 X 上的等价关系，求 $X/\cong$。

【证明】$\sigma=(1\quad 3\quad 5)(2\quad 6)(4\quad 8)(7)$。

$\forall i\in X$，i 与 i 必在 σ 的循环分解式中的同一个循环置换中，即 $i\cong i$，则 $\cong$ 是自反的。

$\forall i,j\in X$，若 $i\cong j$，即 i 与 j 在 σ 的循环分解式中的同一个循环置换中，则 j 与 i 也在 σ 的循环分解式中的同一个循环置换中，故 $j\cong i$。因而 $\cong$ 是对称的。

$\forall i,j,k\in X$，若 $i\cong j,j\cong k$，则 i 与 j 在 σ 的循环分解式中的同一个循环置换中，j 与 k 在 σ 的循环分解式的同一个循环置换中，因而 i 与 k 也在 σ 的循环分解式中的同一个循环置换中，即 $i\cong k$。因而 $\cong$ 是传递性的。

综上，$\cong$ 是 X 上的等价关系。

$X/\cong=\{\{1,3,5\}, \{2,6\}, \{4,8\}, \{7\}\}$。

6. 设$(S,\le_1),(T,\le_2)$是偏序集。在$S\times T$上定义二元关系$\le_3$如下：

$\forall(s,t)$，$(s',t')\in S\times T$，$(s,t)\le_3(s',t')\Leftrightarrow(s\le_1 s', t\le_2 t')$。

证明：（1）$\le_3$是$S\times T$上的偏序关系；

（2）若$(s,t)\le_3(s',t')\Leftrightarrow s\le_1 s'$或$t\le_2 t'$，则$\le_3$是$S\times T$上的偏序关系吗？

【证明】(1) $\forall(s,t)\in S\times T$ 均有 $s\in S, t\in T$。由于$(S,\le_1),(T,\le_2)$是偏序集，故有$s\le_1 s, t\le_2 t\Leftrightarrow(s,t)\le_3(s,t)$，因此$\le_3$是自反的；

$\forall(s_1,t_1),(s_2,t_2)\in S\times T$，若$(s_1,t_1)\le_3(s_2,t_2)$且$(s_2,t_2)\le_3(s_1,t_1)$，则

$(s_1\le_1 s_2 且 s_2\le_1 s_1)$且$(t_1\le_2 t_2 且 t_2\le_2 t_1)$。

由$(S,\le_1),(T,\le_2)$是偏序集可知，$s_1=s_2$且$t_1=t_2$，故$(s_1,t_1)=(s_2,t_2)$。

因此“$\le_3$”是对称的。

(3) $\forall(s_1,t_1),(s_2,t_2),(s_3,t_3)\in S\times T$，若$(s_1,t_1)\le_3(s_2,t_2)$且$(s_2,t_2)\le_3(s_3,t_3)$，有$(s_1\le_1 s_2, s_2\le_1 s_3)$且$(t_1\le_2 t_2, t_2\le_2 t_3)$。由$(S,\le_1),(T,\le_2)$是偏序集可知：$\le_1$与$\le_2$是传递的，所以$s_1\le_1 s_3$且$t_1\le_2 t_3$。故$(s_1,t_1)\le_3(s_3,t_3)$，因此$\le_3$是传递的。

综上可知：$\le_3$是$S\times T$上的一个偏序关系。

(2) 如果将$\le_3$的定义改为$(s,t)\le_3(s',t')\Leftrightarrow s\le_1 s'$或$t\le_2 t'$，则$\le_3$不是偏序关系。因为$\le_3$不满足反对称性。

例如，令$S=T=N$，则利用$(N,\le_1),(N,\le_2)$定义$(N\times N,\le_3)$为$(s,t)\le_3(s',t')\Leftrightarrow s\le_1 s'$或$t\le_2 t'$，则$(1,2)\le_3(2,1)$且$(2,1)\le_3(1,2)$，但$(1,2)\ne(2,1)$。故$\le_3$不满足反对称性，因此$\le_3$不是$N\times N$上的偏序关系。

7. 设R是X的自反且传递的二元关系，则

（1）给出R的一个实例；

（2）在X上定义二元关系$\sim$是：$x\sim y\Leftrightarrow xRy, yRx$。

证明：$\sim$是X上的等价关系。

（3）在商集$X/\sim$上定义二元关系$\le$：$[a]\le[b]\Leftrightarrow aRb$。

证明：$\le$是$X/\sim$上的偏序关系。

【证明】(1) 令$X=N$，$R=\le\subseteq N\times N$。

（2）$\forall x\in X$，$x\sim x$，所以$\sim$是自反的。

假设$x\sim y$，则xRy且yRx，因此$y\sim x$，故$\sim$是对称的。

假设$x\sim y 且 y\sim z$，则$xRy, yRx 且 yRz, zRy$，因为R是传递的，所以xRz且zRx，从而有$x\sim z$，故$\sim$是传递的。

综上，$\sim$是X上的等价关系。

（3）$\forall[a]\in X/\sim$，因为R是X上的自反关系，所以aRa，于是$[a]\le[a]$，所以$\le$是自反的；

$\forall[a],[b]\in X/\sim$，如果$[a]\le[b]$且$[b]\le[a]$，则aRb且bRa，即a与b在同一个等类中，故$[a]=[b]$，因此$\le$是反对称的；

$\forall[a],[b],[c]\in X/\sim$，如果$[a]\le[b]$且$[b]\le[c]$，则$aRb$且$bRc$，由$R$的传递性知$aRc$，于是$[a]\le[c]$，因此$\le$是传递的。

综上，$\le$是$X/\sim$上的偏序关系。

8. 设 R 是 X 上的偏序关系，证明：R 是 X 上的全序关系$\Leftrightarrow X\times X=R\bigcup R^{-1}$。

【证明】$\Rightarrow \forall(x,y)\in X\times X$，因为 R 是 X 上的全序关系，所以 $(x,y)\in R$ 或 $(x,y)\in R^{-1}$ 必有一个成立，亦即 $(x,y)\in R\bigcup R^{-1}$，因此 $X\times X\subseteq R\bigcup R^{-1}$；

反之，因为 R 是 X 上的关系，所以 $R\subseteq X\times X$，$R^{-1}\subseteq X\times X$，于是 $R\bigcup R^{-1}\subseteq X\times X$。

综上，$X\times X=R\bigcup R^{-1}$。

$\Leftarrow \forall(x,y)\in X\times X$，因为 $X\times X=R\bigcup R^{-1}$，所以 $(x,y)\in R$ 或 $(x,y)\in R^{-1}$，亦即 xRy 与 yRx 必有一个成立，因此 R 是 X 上的全序关系。

9. 设 $n=2^3 3^3$，X 为 n 的所有因子之集，$1,n\in X$。$\forall x,y\in X$，$x\le y\Leftrightarrow x|y$。

(1) 画出偏序集$(X,\le)$的哈氏图。

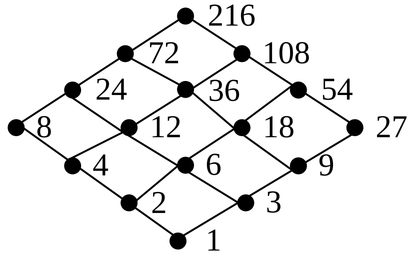
(2) 给出偏序集$(X,\le)$的一条最长链和一条最长反链。

(3) $(X,\le)$有最大元素吗？

(4) 证明：$(X,\le)$的最长链的最大元素一定是$(X,\le)$的最大元素。

【解】

(1) 偏序集$(X,\le)$的哈氏图为：



(2)$\{1,2,4,8,24,72,216\}$是$(X,\le)$的最长链，$\{8,12,18,27\}$是$(X,\le)$的最长反链。

(3)有，216 是$(X,\le)$的最大元素。

(4)采用反证法。假设$(X,\le)$的最长链 A 的最大元素不是$(X,\le)$的最大元素 a，则 $A\bigcup\{a\}$ 是$(X,\le)$的一条比 A 更长的链，矛盾。

10. 是否存在一个偏序关系≤，使得$(X,\ \le)$中有唯一的极大元素，但没有最大元素？若有请给出一个具体例子；若没有，请证明之。

【解】存在。例如：假设 $i=\sqrt{-1}$，$(N\bigcup\{i\},\le)$ 中有唯一的极大元素 i，但没有最大元素。