第五章 命题逻辑与谓词逻辑

陈建文

December 11, 2024

1 命题公式及真值

字符集

(1) 表示命题的符号：$p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$

(2) 联结词集合：$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) 辅助符号：$()$

定义 1. *(1)* 任意一个表示命题的符号为命题公式（这样的命题公式又称为原子公式）；

(2) 如果A, B是命题公式，则$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是命题公式;

(3) 有限次使用（*1*）与（*2*）复合所得到的结果都是命题公式。

例. $((\neg p) \vee q)$，$(\neg(p \vee q))$，$((p \vee q) \rightarrow (r \wedge s))$都是命题公式。

最外层的括号可以省略;
五个逻辑联结词优先级从高到低依次为$\neg, (\wedge, \vee), \rightarrow, \leftrightarrow$;
$\wedge, \vee$左结合。

例. $((\neg p) \vee q)$，$(\neg(p \vee q))$，$((p \vee q) \rightarrow (r \wedge s))$可以简写为$\neg p \vee q$，$\neg(p \vee q)$，$p \vee q \rightarrow r \wedge s$。

定义 2. 设$A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$为一个含有n个命题变元$p_1, p_2, \cdots, p_n$的命题公式，$\alpha : \{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$称为一个真值指派。$\forall i, 1 \leq i \leq n$，当$p_i$的真值为$\alpha(p_i)$时，如果公式$A$的真值为$T$，记为$\alpha(A) = T$；如果公式$A$的真值为$F$，记为$\alpha(A) = F$。

例. 设$\alpha(p) = T, \alpha(q) = F$，则$\alpha(\neg p \vee q) = F$；设$\alpha(p) = T, \alpha(q) = T$，则$\alpha(\neg p \vee q) = T$。

定义 3. 如果公式A对任一真值指派其真值均为真，则称之为重言式（永真式）。

例. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$，$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$，$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 都是重言式。

定义 4. 如果公式A对任一真值指派其真值均为假，则称之为永假式。

例. $P \wedge \neg P$为永假式。

定义 5. 如果公式A存在一个真值指派使其真值为真，则称之为可满足式。

例. $A \to (B \to C)$，$A \vee B$都是可满足式。

2 逻辑蕴含与逻辑等价

定义 6. 设A, B为任意两个公式，对任意的指派α，如果$\alpha(A) = T$，那么$\alpha(B) = T$，则称A逻辑蕴含B，记为$A \Rightarrow B$。设$\Gamma = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$为一个公式集，$B$为任意一个公式，对任意的指派$\alpha$，如果$\forall i, 1 \le i \le n, \alpha(A_i) = T$，那么$\alpha(B) = T$，则称$\Gamma$逻辑蕴含$B$，记为$\Gamma \Rightarrow B$。

例. 判定下列逻辑蕴含是否成立。

(1) $\neg A \Rightarrow A \to B$

(2) $\Gamma \Rightarrow A \to C$，其中公式集$\Gamma = \{A \to (B \to C), B\}$

*(1)*成立。

解法一.

A	B	$\neg A$	$A \to B$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

从以上真值表可以看出使得$\neg A$为真的指派也使得$A \to B$为真。 □

解法二. 对任意的指派α，如果$\alpha(\neg A) = T$，则$\alpha(A) = F$，此时必有$\alpha(A \to B) = T$。 □

*(2)*成立。

解法一. 使得Γ中的每个公式为真的指派分别为

$\alpha_1(B) = T, \alpha_1(A) = F, \alpha_1(C) = T$，此时$\alpha_1(A \to C) = T$

$\alpha_2(B) = T, \alpha_2(A) = F, \alpha_2(C) = F$，此时$\alpha_2(A \to C) = T$

$\alpha_3(B) = T, \alpha_3(A) = T, \alpha_3(C) = T$，此时$\alpha_3(A \to C) = T$

故$\Gamma \Rightarrow A \to C$成立。 □

解法二. 对任意的指派α，如果$\alpha(A \to C) = F$，则$\alpha(A) = T$，$\alpha(C) = F$，此时如果$\alpha(B) = T$，则$\alpha(A \to (B \to C)) = F$。于是，对任意的指派$\alpha$，如果$\alpha(A \to (B \to C)) = T$，$\alpha(B) = T$，必有$\alpha(A \to C) = T$，从而$\Gamma \Rightarrow A \to C$成立。 □

定义 7. 设A, B为任意两个公式，如果$A \Rightarrow B$并且$B \Rightarrow A$，则称A与B逻辑等价，记为$A \Leftrightarrow B$。

$p \wedge (q \vee r)$与$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$逻辑等价。

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

$p \vee (q \wedge r)$与$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$逻辑等价。

p	q	r	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

$p \vee (p \wedge q)$与p逻辑等价。
$p \wedge (p \vee q)$与p逻辑等价。
$\neg(p \wedge q)$与$\neg p \vee \neg q$逻辑等价。

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

$\neg(p \vee q)$与$\neg p \wedge \neg q$逻辑等价。

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

$p \to q$与$\neg p \vee q$逻辑等价。

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

$p \leftrightarrow q$与$(p \to q) \wedge (q \to p)$逻辑等价。

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

3 范式

定义 8 (文字)**.** 一个命题符号或者其否定称为一个文字。

例. p，$\neg p$都是文字。

定义 9 (合取式)**.** $B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n (n \geq 1)$称为一个合取式，其中$B_i (1 \leq i \leq n)$为一个文字。单独的一个文字也称为一个合取式。

例. $p \wedge \neg q$，$\neg p \wedge \neg q$都是合取式。

定义 10 (析取式)**.** $B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n (n \geq 1)$称为一个析取式，其中$B_i (1 \leq i \leq n)$为一个文字。单独的一个文字也称为一个析取式。

例. $p \vee \neg q$，$\neg p \vee \neg q$都是析取式。

定义 11 (合取范式)**.** $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n (n \geq 1)$称为一个合取范式，其中$A_i (1 \leq i \leq n)$为析取式，称为一个合取项。

例. $(\neg p \vee q) \wedge (r \vee s)$，$\neg p \vee r \vee s$都是合取范式。

定义 12 (析取范式)**.** $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n (n \geq 1)$称为一个析取范式，其中$A_i (1 \leq i \leq n)$为合取式，称为一个析取项。

例. $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge s)$，$\neg p \wedge r \wedge s$都是析取范式。

例. 求公式$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$的合取范式和析取范式。

解.

$$
\begin{aligned}
& (p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \\
\Leftrightarrow & \neg (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \\
\Leftrightarrow & \neg p \vee \neg q \vee (\neg q \wedge r) \quad \text{析取范式} \\
\Leftrightarrow & (\neg p \vee \neg q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \\
\Leftrightarrow & (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \quad \text{合取范式} \\
\Leftrightarrow & \neg p \vee \neg q \quad \text{既是析取范式又是合取范式}
\end{aligned}
$$

□

合取范式和析取范式的求解过程：

(1) 消去“$\leftrightarrow$”：$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

(2) 消去“$\rightarrow$”：$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

(3) 进行公式变形：$\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \neg\neg A \Leftrightarrow A, A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(4) 公式化简：$A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A, A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

4 主范式

定义 13 (主合取范式)**.** 设命题公式$A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$的合取范式为$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k(k\geq 1)$，如果其中每一个合取项$A_j(1\leq j\leq k)$的形式为$A_j=Q_1\vee Q_2\vee\cdots\vee Q_n$，这里$Q_i=p_i$或者$\neg p_i(1\leq i\leq n)$，则称$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k(k\geq 1)$为$A$的主合取范式。

定义 14 (主析取范式)**.** 设命题公式$A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$的析取范式为$A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_k(k\geq 1)$，如果其中每一个析取项$A_j(1\leq j\leq k)$的形式为$A_j=Q_1\wedge Q_2\wedge\cdots\wedge Q_n$，这里$Q_i=p_i$或者$\neg p_i(1\leq i\leq n)$，则称$A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_k(k\geq 1)$为$A$的主析取范式。

例. 求公式$(p\wedge q)\to(\neg q\wedge r)$的主合取范式和主析取范式。

解法一.

$$
\begin{aligned}
&(p\wedge q)\to(\neg q\wedge r)\\
\Leftrightarrow&\neg p\vee\neg q\\
\Leftrightarrow&\neg p\vee\neg q\vee(r\wedge\neg r)\\
\Leftrightarrow&(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\quad\text{主合取范式}\\
&(p\wedge q)\to(\neg q\wedge r)\\
\Leftrightarrow&\neg p\vee\neg q\\
\Leftrightarrow&(\neg p\wedge(q\vee\neg q))\vee((p\vee\neg p)\wedge\neg q)\\
\Leftrightarrow&(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\\
\Leftrightarrow&(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\\
\Leftrightarrow&(\neg p\wedge q\wedge(r\vee\neg r))\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge(r\vee\neg r))\vee(p\wedge\neg q\wedge(r\vee\neg r))\\
\Leftrightarrow&(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\\
&\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\\
&\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\quad\text{主析取范式}
\end{aligned}
$$

□

解法二.

p	q	r	$(p\wedge q)\to(\neg q\wedge r)$
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

主析取范式为$(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

主合取范式为$(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$ □

5　自然演绎推理系统（ND）的组成

ND:Natural Deduction

1. 字符集

(1) 表示命题的符号：$p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$

(2) 联结词集合：$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) 辅助符号：()

2. 命题公式：

(1) 任意一个表示命题的符号为命题公式；

(2) 如果A，B是命题公式，则$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是命题公式；

(3) 有限次使用（1）与（2）所得到的结果均是命题公式。

3. 公理

$\Gamma, A \vdash A$，其中Γ为公式集，$\Gamma \cup \{A\}$简记为Γ, A

4. 推理规则

(1)假设引入规则(假设+)

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

(2)假设消除规则(假设-)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B; \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

(3)∨引入规则 (∨+)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \vee A}$$

(4)∨消除规则 (∨−)

$$\frac{\Gamma, A \vdash C; \Gamma, B \vdash C; \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}$$

(5)∧引入规则 (∧+)

$$\frac{\Gamma \vdash A; \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

(6)∧消除规则 (∧−)

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

(7)→引入规则 $(\to +)$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

(8)→消除规则 $(\to -)$

$$\frac{\Gamma \vdash A; \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

(9)¬引入规则 $(\neg +)$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B; \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

(10)¬消除规则 $(\neg -)$

$$\frac{\Gamma \vdash A; \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

(11)¬¬引入规则 $(\neg\neg +)$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A}$$

(12)¬¬消除规则 $(\neg\neg -)$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

(13)↔引入规则 $(\leftrightarrow +)$

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B; \Gamma \vdash B \to A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}$$

(14)↔消除规则 $(\leftrightarrow -)$

$$\frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A \to B}, \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash B \to A}$$

5. 定理推导

演绎：在ND中，以下序列称为$\Gamma \vdash_{ND} A$中的一个证明（以下省去ND）：

$$\Gamma_1 \vdash A_1, \Gamma_2 \vdash A_2, \cdots, \Gamma_m \vdash A_m (= \Gamma \vdash A)$$

其中$\Gamma_i \vdash A_i (i = 1, 2, \cdots, m)$或为$ND$的公理，或为$\Gamma_j \vdash A_j (j < i)$，或为$\Gamma_{j_1} \vdash A_{j_1}, \Gamma_{j_2} \vdash A_{j_2}, \cdots, \Gamma_{j_k} \vdash A_{j_k} (j_1, j_2, \cdots, j_k < i)$使用推理规则导出的。

如果$\Gamma = \{A\}$，则$\Gamma \vdash B$简记为$A \vdash B$； 如果$\Gamma = \phi$，此时$\Gamma \vdash A$即为$\vdash A$，则称A为ND的定理。

定理. $A \to (B \to A)$

证明.

(1) $A, B \vdash A$ （公理）

(2) $A \vdash B \to A$ (1)$(\to +)$

(3) $\vdash A \to (B \to A)$ (2)$(\to +)$

$\square$

定理. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

证明.

(1) $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A$ （公理）

(2) $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A \to (B \to C)$ （公理）

(3) $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash B \to C$ (1)(2)$(\to -)$

(4) $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A \to B$ （公理）

(5) $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash B$ (1)(4)$(\to -)$

(6) $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash C$ (3)(5)$(\to -)$

(7) $A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C$ (6)$(\to +)$

(8) $A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to C)$ (7)$(\to +)$

(9) $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (8)$(\to +)$

$\square$

定理. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

证明.

(1) $\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash \neg A$ （公理）

(2) $\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash \neg A \to \neg B$ （公理）

(3) $\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash \neg B$ (1)(2)$(\to -)$

(4) $\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash B$ （公理）

(5) $\neg A \to \neg B, B \vdash \neg\neg A$ (3)(4)$(\neg +)$

(6) $\neg A \to \neg B, B \vdash A$ (5)$(\neg\neg -)$

(7) $\neg A \to \neg B \vdash B \to A$ (6)$(\to +)$

(8) $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ (7)$(\to +)$

$\square$

6　命题逻辑演算形式系统（PC）的组成

PC:Propositional Calculus

1. 字符集

(1) 表示命题的符号：$p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$

(2) 联结词集合：$\{\neg, \rightarrow\}$

(3) 辅助符号：()

2. 命题公式:

(1) 任意一个表示命题的符号为命题公式;

(2) 若A，B是命题公式，则$(\neg A), (A \rightarrow B)$是命题公式;

(3) 有限次使用（1）与（2）所得到的结果均是命题公式。

3. 公理

$A_1 : A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$A_2 : (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$A_3 : (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

4. 推理规则

$r_{mp} : A, A \rightarrow B, B$

5. 定理推导

证明：称下列公式序列为公式A在PC中的一个证明:

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

其中$A_i (i = 1, 2, \cdots, m)$或为$PC$的公理，或为$A_j (j < i)$，或为$A_j, A_k (j, k < i)$使用$r_{mp}$导出的公式。

定理：如果公式A在PC中有一个证明序列，则称A为PC的定理，记为$\vdash_{PC} A$,简记为$\vdash A$。

演绎：设Γ为PC中若干公式构成的公式集，称下列公式序列为公式A以Γ为前提的演绎:

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

其中$A_i (i = 1, 2, \cdots, m)$或为$PC$的公理，或为$\Gamma$中的成员，或为$A_j (j < i)$，或为$A_j$，$A_k (j, k < i)$使用$r_{mp}$导出的公式。记为$\Gamma \vdash_{PC} A$，简记为$\Gamma \vdash A$，并称$A$为$\Gamma$的演绎结果。

如果$\Gamma = \{B\}$，则$\Gamma \vdash A$简记为$B \vdash A$，表示公式A可由前提B在PC中演绎出来。如果此时还有$A \vdash B$，则称公式A和B演绎等价，记为$A \vdash\dashv B$。

定理 (T1)**.** $\vdash A \rightarrow A$

证明.

(1) $(A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$　　A_2

(2) $A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$　　A_1

(3) $(A \to (B \to A)) \to (A \to A)$ $\quad$ $(1)(2)r_{mp}$

(4) $A \to (B \to A)$ $\quad$ A_1

(5) $A \to A$ $\quad$ $(3)(4)r_{mp}$

□

定理 (T2)**.** 若$\Gamma \vdash P$，则$\Gamma \vdash A \to P$。

证明.

(1) P

(2) $P \to (A \to P)$ $\quad$ A_1

(3) $A \to P$ $\quad$ $(1)(2)r_{mp}$

□

定理. 若$\Gamma \vdash A \to B$，$\Gamma \vdash B \to C$，则$\Gamma \vdash A \to C$

证明.

(1) $\Gamma \vdash B \to C$ $\quad$ 已知条件

(2) $\Gamma \vdash A \to (B \to C)$ $\quad$ T_2

(3) $\Gamma \vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ $\quad$ A_2

(4) $\Gamma \vdash (A \to B) \to (A \to C)$ $\quad$ $(2)(3)r_{mp}$

(5) $\Gamma \vdash A \to B$ $\quad$ 已知条件

(6) $\Gamma \vdash A \to C$ $\quad$ $(4)(5)r_{mp}$

□

定理 (T3)**.** $\vdash \neg A \to (A \to B)$

证明.

(1) $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ $\quad$ A_1

(2) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ $\quad$ A_3

(3) $\neg A \to (A \to B)$ $\quad$ 定理

□

定理 (T4)**.** $\neg\neg A \vdash A$

证明.

(1) $\neg\neg A$ $\quad$ （前提）

(2) $\neg\neg A \to (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A)$ A_1

(3) $\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$ $(1)(2)r_{mp}$

(4) $(\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$ A_3

(5) $\neg A \to \neg\neg\neg A$ $(3)(4)r_{mp}$

(6) $(\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$ A_3

(7) $\neg\neg A \to A$ $(5)(6)r_{mp}$

(8) A $(1)(7)r_{mp}$

□

定理 (T5). $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

证明.

(1) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ A_2

(2) $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$ A_1

(3) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (1)(2)定理

□

定理 (T7). $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

证明.

(1) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ T_5

(2) $((B \to C) \to (A \to B)) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ $(1)A_2 r_{mp}$

(3) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B)) A_1$

(4) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ (2)(3)定理

□

定理 (T6). $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

证明.

(1) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ A_2

(2) $B \to (A \to B)$ A_1

(3) $(B \to (A \to B)) \to (((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C)))$ T_7

(4) $((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C))$ $(2)(3)r_{mp}$

(5) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ $(1)(4)T_7 r_{mp}$

□

定理 (T8)**.** $\vdash (\neg A \to A) \to A$

证明.

(1) $\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A))$ $\quad T_3$

(2) $(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A))$ $\quad (1)A_2 r_{mp}$

(3) $(\neg A \to \neg(\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A)$ $\quad A_3$

(4) $(\neg A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A)$ $\quad (2)(3)T_7 r_{mp}$

(5) $((\neg A \to A) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A)$ $\quad (4)A_2 r_{mp}$

(6) $(\neg A \to A) \to (\neg A \to A)$ $\quad T_1$

(7) $(\neg A \to A) \to A$ $\quad (5)(6)r_{mp}$

□

定理 (T9)**.** $\vdash \neg\neg A \to A$

证明.

(1) $(\neg A \to A) \to A$ $\quad T_8$

(2) $(\neg\neg A) \to ((\neg A \to A) \to A)$ $\quad (1)T_2$

(3) $(\neg\neg A \to (\neg A \to A)) \to (\neg\neg A \to A)$ $\quad (2)A_2 r_{mp}$

(4) $\neg\neg A \to (\neg A \to A)$ $\quad T_3$

(5) $\neg\neg A \to A$ $\quad (3)(4)r_{mp}$

□

定理 (T10)**.** $\vdash A \to \neg\neg A$

证明.

(1) $(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$ $\quad A_3$

(2) $\neg\neg\neg A \to \neg A$ $\quad T_9$

(3) $A \to \neg\neg A$ $\quad (1)(2)r_{mp}$

□

定理 (T11)**.** $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

证明.

(1) $(\neg\neg A \to A) \to ((A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B))$ $\quad T_7$

(2) $\neg\neg A \to A \qquad T_{10}$

(3) $(A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B)(1)(2)r_{mp}$

(4) $(\neg\neg A \to \neg B) \to (B \to \neg A) \qquad A_3$

(5) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A) \qquad (3)(4)T_7 r_{mp}$

□

定理 (T12)**.** $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

证明.

(1) $(B \to \neg\neg B) \to ((A \to B) \to (A \to \neg\neg B)) \qquad T_5$

(2) $B \to \neg\neg B \qquad T_{10}$

(3) $(A \to B) \to (A \to \neg\neg B) \qquad (1)(2)r_{mp}$

(4) $(A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A) \qquad T_{11}$

(5) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A) \qquad (3)(4)T_7 r_{mp}$

□

定理 (T13)**.** $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

证明.

(1) $(B \to \neg\neg B) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg\neg B)) \qquad T_5$

(2) $B \to \neg\neg B \qquad T_{10}$

(3) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg\neg B)(1)(2)r_{mp}$

(4) $(\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to A) \qquad A_3$

(5) $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A) \qquad (3)(4)T_7 r_{mp}$

□

定理. 设A，B为命题公式，且满足$\vdash A \to B$，$\vdash B \to A$，公式D是将公式C中A的某次出现替换为公式B所得到的公式，则$\vdash C \to D$，$\vdash D \to C$。

证明. 根据定义，每个命题公式都有一个形成规则，例如公式$\neg(A \to B)$可以如下形成:

(1) A是命题公式;

(2) B是命题公式;

(3) $(A \to B)$是命题公式;

(4) $(\neg(A \to B))$是命题公式。

这里我们称$\neg(A \to B)$可以由4步形成。

以下对命题公式C形成的步数n归纳证明结论成立。

当$n = 1$时，此时$C = A$，$D = B$，由$\vdash A \to B$，$\vdash B \to A$知$\vdash C \to D$，$\vdash D \to C$。

假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。

如果$C = \neg C_1$，此时如果$C = A$，则$D = B$，由$\vdash A \to B$，$\vdash B \to A$知$\vdash C \to D$，$\vdash D \to C$。如果$C \neq A$，假设C_1中对应A的出现替换为B后所得到的公式为D_1，则$D = \neg D_1$。 由归纳假设$\vdash C_1 \to D_1$,$\vdash D_1 \to C_1$。 从以下证明序列知

(1) $C_1 \to D_1$

(2) $D_1 \to C_1$

(3) $(C_1 \to D_1) \to (\neg D_1 \to \neg C_1)$ $\quad T_{12}$

(4) $\neg D_1 \to \neg C_1$ $\quad (1)(3)r_{mp}$

(5) $(D_1 \to C_1) \to (\neg C_1 \to \neg D_1)$ $\quad T_{12}$

(6) $\neg C_1 \to \neg D_1$ $\quad (2)(5)r_{mp}$

$\vdash C \to D$，$\vdash D \to C$。

如果$C = C_1 \to C_2$，此时如果$C = A$，则$D = B$，由$\vdash A \to B$，$\vdash B \to A$知$\vdash C \to D$，$\vdash D \to C$。 如果$C \neq A$，分两种情况讨论：假设C_1中对应A的出现替换为B后所得到的公式为D_1，则$D = D_1 \to C_2$。由归纳假设，$\vdash C_1 \to D_1$,$\vdash D_1 \to C_1$， 从以下证明序列知

(1) $D_1 \to C_1$

(2) $(D_1 \to C_1) \to ((C_1 \to C_2) \to (D_1 \to C_2))$ $\quad T_7$

(3) $(C_1 \to C_2) \to (D_1 \to C_2)$ $\quad (1)(2)r_{mp}$

(4) $C_1 \to C_2$

(5) $D_1 \to C_2$ $\quad (3)(4)r_{mp}$

$\vdash C \to D$，同理可证$\vdash D \to C$。

假设C_2中对应A的出现替换为B后所得到的公式为D_2，则$D = C_1 \to D_2$。此时由归纳假设$\vdash C_2 \to D_2$,$\vdash D_2 \to C_2$。 从以下证明序列知

(1) $C_2 \to D_2$

(2) $(C_2 \to D_2) \to ((C_1 \to C_2) \to (C_1 \to D_2))$ $\quad T_5$

(3) $(C_1 \to C_2) \to (C_1 \to D_2)$ $\quad (4)(5)r_{mp}$

(4) $C_1 \to C_2$

(5) $C_1 \to D_2$ $\quad (3)(4)r_{mp}$

$\vdash C \to D$，同理可证$\vdash D \to C$。 □

定理 (T14)**.** $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$

证明.

(1) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to B)$ T_1

(2) $((\neg A \to B) \to (\neg A \to B)) \to (\neg A \to ((\neg A \to B) \to B))$ T_6

(3) $\neg A \to ((\neg A \to B) \to B)$ $(1)(2)r_{mp}$

(4) $((\neg A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))$ T_{12}

(5) $\neg A \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))$ $(3)(4)T_7 r_{mp}$

(6) $(\neg A \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))) \to ((\neg C \to \neg A) \to (\neg C \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))))$ T_5

(7) $(\neg C \to \neg A) \to (\neg C \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B)))$ $(5)(6)r_{mp}$

(8) $(\neg C \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))) \to ((\neg C \to \neg B) \to (\neg C \to \neg(\neg A \to B)))$ A_2

(9) $(\neg C \to \neg A) \to ((\neg C \to \neg B) \to (\neg C \to \neg(\neg A \to B)))$ $(7)(8)T_7 r_{mp}$

(10) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$ (8)定理r_{mp}

□

定理. 设Γ为任意公式的集合，A，B为任意两个公式，则$\Gamma, A \vdash B$当且仅当$\Gamma \vdash A \to B$。

证明. 充分性：由$\Gamma \vdash A \to B$知从前提集Γ出发，在PC中能够得到公式$A \to B$的一个演绎序列，即$A_1, A_2, \cdots, A_n (= A \to B)$，则从$\Gamma \cup \{A\}$出发，可以得到如下的演绎序列：$A_1, A_2, \cdots, A_n (= A \to B), A, B$，即第$n+2$步的结论可由已知的第$n$步的结论$A \to B$加上第$n+1$步的已知前提条件$A$通过$r_{mp}$所得，即$\Gamma, A \vdash B$。

必要性：由$\Gamma, A \vdash B$知从前提集$\Gamma \cup \{A\}$出发，在PC中能够得到公式B的一个演绎序列，即$B_1, B_2, \cdots, B_k (= B)$，下面通过数学归纳法来证明$\Gamma \vdash A \to B$，施归纳于此演绎序列的长度$k$：

（1）当$k = 1$时，根据演绎的定义知此时B或者为公理，或者$B \in \Gamma \cup \{A\}$。如果B为公理，则从前提集Γ出发存在如下的演绎序列：

B(公理)$, B \to (A \to B)$(公理)$, A \to B (r_{mp})$

即$\Gamma \vdash A \to B$；

如果$B \in \Gamma$，则从前提集Γ出发存在如下的演绎序列：

B(前提)$, B \to (A \to B)$(公理)$, A \to B (r_{mp})$

即$\Gamma \vdash A \to B$；

如果$B \in \{A\}$,则$B = A$，此时$A \to B$即为$A \to A$，而$A \to A$为PC中已证的定理，从而$\Gamma \vdash A \to A$。

（2）假设当$k < n$时结论成立，即对上述演绎序列中的公式$B_i(i < n)$,均有$\Gamma \vdash A \to B_i$。则当$k = n$时，$B_k = B_n = B$或为公理，或者$B \in \Gamma \cup \{A\}$，或由$B_i, B_j(i, j < n)$通过r_{mp}所得。如果此时$B_k = B_n = B$为公理，或者$B \in \Gamma \cup \{A\}$，则讨论情况同(1)；如果B由B_i，$B_j(i, j < n)$通过r_{mp}导出，则不妨设$B_j = B_i \to B$，根据归纳假设，

$$\Gamma \vdash A \to B_i, \Gamma \vdash A \to B_j$$

即

$$\Gamma \vdash A \to B_i, \Gamma \vdash A \to (B_i \to B)$$

又

$$(A \to (B_i \to B)) \to ((A \to B_i) \to (A \to B))$$

所以

$$\Gamma \vdash (A \to B_i) \to (A \to B)$$

从而

$$\Gamma \vdash A \to B$$

□

例. 利用演绎定理证明

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((C \to D) \to (A \to (B \to D)))$$

证明. 根据演绎定理只需证：

$A \to (B \to C) \vdash (C \to D) \to (A \to (B \to D))$

只需证：

$A \to (B \to C), (C \to D) \vdash (A \to (B \to D))$

只需证：

$A \to (B \to C), (C \to D), A \vdash (B \to D)$

只需证：

$A \to (B \to C), (C \to D), A, B \vdash D$

(1) A 前提

(2) $A \to (B \to C)$ 前提

(3) $B \to C$ (1)(2)r_{mp}

(4) B 前提

(5) C (3)(4)r_{mp}

(6) $C \to D$ 前提

(7) D (5)(6)r_{mp}

□

例. 利用演绎定理证明

$$\vdash ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$$

证明. 根据演绎定理只需证:

$(A \to B) \to (A \to C) \vdash (A \to (B \to C))$

只需证:

$(A \to B) \to (A \to C), A \vdash (B \to C)$

只需证:

$(A \to B) \to (A \to C), A, B \vdash C$

(1) B 前提

(2) $B \to (A \to B)$ A_1

(3) $A \to B$ $(1)(2)r_{mp}$

(4) $(A \to B) \to (A \to C)$ 前提

(5) $A \to C$ $(3)(4)r_{mp}$

(6) A 前提

(7) C $(5)(6)r_{mp}$

□

例. 利用演绎定理证明

$$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$$

证明. 根据演绎定理只需证:

$A \to C \vdash ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$

只需证:

$A \to C, B \to C \vdash ((\neg A \to B) \to C)$

只需证:

$A \to C, B \to C, \neg A \to B \vdash C$

(1) $\neg A \to B$ 前提

(2) $B \to C$ 前提

(3) $\neg A \to C$ 定理

(4) $(\neg A \to C) \to (\neg C \to A)$ 定理

(5) $\neg C \to A$ $(3)(4)r_{mp}$

(6) $A \to C$ 前提

(7) $\neg C \to C$ $(5)(6)A_7r_{mp}$

(8) $(\neg C \to C) \to C$

(9) C $\quad$ (7)(8)r_{mp}

$\square$

例.

(1) 所有的人都是要死的；

(2) 苏格拉底是人；

(3) 所以苏格拉底是要死的。

谓词$M(x): x$是人
谓词$D(x): x$是要死的
个体常元a表示"苏格拉底"
谓词：表示研究对象的性质或研究对象之间关系的词称为谓词。

(1) $\forall x(M(x) \to D(x))$

(2) $M(a) \to D(a)$

(3) $M(a)$

(4) $D(a)$

例. *(1)* $\forall x \forall y x + y = y + x$

(2) $\forall x \forall y \forall z (x + y) + z = x + (y + z)$

(3) $\forall x 0 + x = x \wedge x + 0 = x$

(4) $\forall x \exists y (y + x = 0 \wedge x + y = 0)$

(5) $\forall x \forall y x * y = y * x$

(6) $\forall x \forall y \forall z (x * y) * z = x * (y * z)$

(7) $\forall x 1 * x = x * 1 = x$

(8) $\forall x (\neg (x = 0) \rightarrow \exists y (y * x = 1 \wedge x * y = 1))$

(9) $\forall x \forall y \forall z x * (y + z) = x * y + x * z$

(10) $\forall x \forall y \forall z (y + z) * x = y * x + z * x$

$\forall x \forall y (x + y) * (x + y) = x * x + (1 + 1) * x * y + y * y$
字符集:

(1) 表示个体变元的符号：$v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$

(2) 联结词集合：$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) 量词：$\forall, \exists$

(4) 辅助符号：()

(5) 表示谓词的符号：$P, Q, \cdots$

(6) 表示函词的符号：$f, g, \cdots$

(7) 表示个体常元的符号：$a, b, c, \cdots$

定义 15.

(1) 个体常元和个体变元都是项;

(2) 如果f为一个n元函词，$t_1, t_2, \cdots, t_n$是项，则$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$也是项;

(3) 由（*1*）（*2*）有限次复合所产生的结果都是项。

定义 16.

(1) 设$t_1, t_2, \cdots, t_n$为n个项，P为任意一个n元谓词符号，则$P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$为合式公式（这样的合式公式又称为原子谓词公式）;

(2) 如果A, B为合式公式，则$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$为合式公式;

(3) 如果A为合式公式，x为任意一个变量，则$\forall x A$和$\exists x A$为合式公式;

(4) 有限次使用（*1*），（*2*）和（*3*）复合所得到的结果都是合式公式。

合式公式简称公式。

例.

(1) $\forall x(M(x) \to D(x))$

(2) $M(a) \to D(a)$

(3) $M(a)$

(4) $D(a)$

谓词$M(x)$: x是人
谓词$D(x)$: x是要死的
个体常元a表示"苏格拉底"
谓词$M(x)$: x是有两个角相等的三角形
谓词$D(x)$: x是等腰三角形
个体常元a表示一个具体的三角形

例. *(1)* $\forall x \forall y x + y = y + x$

(2) $\forall x \forall y \forall z (x + y) + z = x + (y + z)$

(3) $\forall x 0 + x = x \wedge x + 0 = x$

(4) $\forall x \exists y (y + x = 0 \wedge x + y = 0)$

(5) $\forall x \forall y x * y = y * x$

(6) $\forall x \forall y \forall z (x * y) * z = x * (y * z)$

(7) $\forall x 1 * x = x * 1 = x$

(8) $\forall x (\neg (x = 0) \to \exists y (y * x = 1 \wedge x * y = 1))$

(9) $\forall x \forall y \forall z x * (y + z) = x * y + x * z$

(10) $\forall x \forall y \forall z (y + z) * x = y * x + z * x$
结构*I*:$(R, +, *, 0, 1)$
结构*II*:$(\{0, 1\}, \oplus, \wedge, 0, 1)$

定义 17. 设Σ为一个符号集，D为任意一个非空集合，称为论域；I为一个定义在由Σ中的常量符号、函词符号和谓词符号所构成的集合上的一个映射，称为一个解释，

(1) 对任意一个常元a，$I(a)$为论域D中的一个个体，简记为$\bar{a}$；

(2) 对任意一个n元函词f，$I(f)$为D上的一个n元函数，简记为$\bar{f}$；

(3) 对任意一个n元谓词P，$I(P)$为D上的一个n元关系，简记为$\bar{P}$。

(D, I)称为一个结构。

定义 18. 映射$s : \{v_1, v_2, \cdots\} \to D$称为一个指派，对任意一个变元$v_i$，$s(v_i) \in D$为$v_i$在指派$s$下的值。

定义 19. 指派s可以扩展为从项集合到论域的映射$\bar{s}$：对任意的项t，

$$\bar{s}(t) = \begin{cases} s(v) & \text{当}t\text{为变元}v\text{时} \\ \bar{a} & \text{当}t\text{为常元}a\text{时} \\ \bar{f}(\bar{s}(t_1), \bar{s}(t_2), \cdots, \bar{s}(t_n)) & \text{当}t\text{为}n\text{元函词}f\text{时} \end{cases}$$

例. 在结构(R, I)中，设$I(+) =$实数中的加法"$+$"$, I(0) = 0$实数0，则结构(R, I)又可以简记为$(R, +, 0)$。设$s(x) = 1, s(y) = 2, s(z) = 3$，则$\bar{s}((x + y) + z) = \bar{s}(x + y) + \bar{s}(z) = (\bar{s}(x) + \bar{s}(y)) + \bar{s}(z) = (s(x) + s(y)) + s(z) = 6$。

定义 20. 公式A在结构$U = (D, I)$和指派s下的取值为真记为$\models_U A[s]$，定义如下：

(1) 当A为原子公式$P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$时，$\models_U A[s]$ *iff* $(\bar{s}(t_1), \bar{s}(t_2), \cdots, \bar{s}(t_n)) \in \bar{P}$；

(2) 当A为公式$\neg B$时，$\models_U A[s]$ *iff* $\not\models_U B[s]$；

(3) 当A为公式$B \wedge C$时，$\models_U A[s]$ *iff* $\models_U B[s]$并且$\models_U C[s]$；

(4) 当A为公式$B \vee C$时，$\models_U A[s]$ *iff* $\models_U B[s]$或者$\models_U C[s]$；

(5) 当A为公式$B \to C$时，$\models_U A[s]$ *iff* 如果$\models_U B[s]$，那么$\models_U C[s]$；

(6) 当A为公式$B \leftrightarrow C$时，$\models_U A[s]$ *iff* 如果$\models_U B[s]$，那么$\models_U C[s]$，并且如果$\models_U C[s]$，那么$\models_U B[s]$；

(7) 当A为公式$\forall v B$时，$\models_U A[s]$ *iff* 对任意的$d \in D$，$\models_U B[s(v|d)]$，这里$s(v|d)$表示除了对变元v用指定元素d赋值外，对其他变元的赋值与s相同的指派；

(8) 当A为公式$\exists v B$时，$\models_U A[s]$ *iff* 存在$d \in D$使得$\models_U B[s(v|d)]$。

$\models_U A$表示在结构U中，对任意的指派s，公式A均为真。
$\models A$表示公式A在任意结构和任意指派下均为真。

例. $\models \forall x \forall y \forall z((y + z) * x = y * x + z * x) \to \forall y \forall z((y + z) * x = y * x + z * x)$

定义 21.

(1) 受量词约束的变元称为约束变元；

(2) 不受量词约束的变元称为自由变元。

定义 22. 设Γ为任意一个公式集，B为任意一个公式，如果对任意的使得Γ中每个公式均为真的结构U和指派s，B也为真，则称Γ逻辑蕴含B，记为$\Gamma \models B$。如果$\Gamma = \{A\}$，则$\Gamma \models B$简记为$A \models B$，称为A逻辑蕴含B，即对任意的结构U和任意的指派s，如果$\models_U A[s]$，则$\models_U B[s]$。对任意的两个公式A和B，如果$A \models B$并且$B \models A$，则称A与B逻辑等价。

例. $\forall x\forall y\forall z((y+z)*x=y*x+z*x)\vDash\forall y\forall z((y+z)*x=y*x+z*x)$

谓词演算自然推理系统FND(First order Natural Deduction)在命题演算自然推理系统的基础上添加了下列规则:

1.$\forall$引入规则　　$(\forall+)$

$\frac{\Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash\forall vA}$，$v$在$\Gamma$中无自由出现。

2.$\forall$消除规则　　$(\forall-)$

$\frac{\Gamma\vdash\forall vA}{\Gamma\vdash A_t^v}$，项$t$对变元$v$可代入。

3.$\exists$引入规则　　$(\exists+)$

$\frac{\Gamma\vdash A_t^v}{\Gamma\vdash\exists vA}$，项$t$对变元$v$可代入。

4.$\exists$消除规则　　$(\exists-)$

$\frac{\Gamma\vdash\exists vA;\Gamma,A_c^v\vdash B}{\Gamma\vdash B}$，其中常元$c$在$\Gamma$及公式$A$，$B$中均无出现。

$\Sigma=\{...,=\}$
$=$自反性:
$t=t,t$为任意一个项。
$=$可代入性:
$\frac{\Gamma\vdash A_t^v}{\Gamma,t=t'\vdash A_{t'}^v}$，项$t$和$t'$对$v$可代入。

定理 (=对称性)**.** 如果$\Gamma\vdash t_1=t_2$，那么$\Gamma\vdash t_2=t_1$。

证明.

(1) $\Gamma\vdash t_1=t_1$　　（公理）

(2) $\Gamma,t_1=t_2\vdash t_2=t_1$　　(1) =可代入性

(3) $\Gamma\vdash(t_1=t_2)\to(t_2=t_1)$　　(2)$(\to+)$

(4) $\Gamma\vdash t_1=t_2$　　已知条件

(5) $\Gamma\vdash t_2=t_1$　　(3)(4)$(\to-)$

□

定理 (=传递性)**.** 如果$\Gamma\vdash t_1=t_2,\Gamma\vdash t_2=t_3$，那么$\Gamma\vdash t_1=t_3$。

证明.

(1) $\Gamma\vdash t_1=t2$　　已知条件

(2) $\Gamma,t_2=t_3\vdash t_1=t_3$　　(1) =可代入性

(3) $\Gamma \vdash (t_2 = t_3) \to (t_1 = t_3)$ (2)$(\to +)$

(4) $\Gamma \vdash t_2 = t_3$ 已知条件

(5) $\Gamma \vdash t_1 = t_3$ (3)(4)$(\to -)$

$\square$

演绎：在FND中，以下序列称为$\Gamma \vdash_{FND} A$中的一个证明（以下省去FND）：

$$\Gamma_1 \vdash A_1, \Gamma_2 \vdash A_2, \cdots, \Gamma_m \vdash A_m (= \Gamma \vdash A)$$

其中$\Gamma_i \vdash A_i (i = 1, 2, \cdots, m)$或为$FND$的公理，或为$\Gamma_j \vdash A_j (j < i)$，或为$\Gamma_{j_1} \vdash A_{j_1}, \Gamma_{j_2} \vdash A_{j_2}, \cdots, \Gamma_{j_k} \vdash A_{j_k} (j_1, j_2, \cdots, j_k < i)$使用推理规则导出的。

如果$\Gamma = \{A\}$，则$\Gamma \vdash B$简记为$A \vdash B$； 如果$\Gamma = \phi$，此时$\Gamma \vdash A$即为$\vdash A$，则称A为FND的定理。

以上在FND中关于演绎的定义与ND中的定义是相同的，但是其中的所涉及的公式指的是谓词公式。

定义 23. 代入：对公式A中的自由变元v的所有自由出现都换为项t，记为A_t^v。如果A中没有v出现，则$A_t^v = A$。

定义 24. 可代入：设v为谓词公式A中的自由变元，t为一个项，在A中将v替换为t之后，t中每个变元没有变成约束变元，则称项t对v是可代入的。

$\Sigma = \{..., =\}$

例. $\Gamma \vdash \forall x \forall y (x + y) * (x + y) = x * x + (1 + 1) * x * y + y * y$

其中$\Gamma = \{$

(1) $\forall x \forall y x + y = y + x$

(2) $\forall x \forall y \forall z (x + y) + z = x + (y + z)$

(3) $\forall x 0 + x = x \wedge x + 0 = x$

(4) $\forall x \exists y (y + x = 0 \wedge x + y = 0)$

(5) $\forall x \forall y x * y = y * x$

(6) $\forall x \forall y \forall z (x * y) * z = x * (y * z)$

(7) $\forall x 1 * x = x * 1 = x$

(8) $\forall x (\neg (x = 0) \to \exists y (y * x = 1 \wedge x * y = 1))$

(9) $\forall x \forall y \forall z x * (y + z) = x * y + x * z$

(10) $\forall x \forall y \forall z (y + z) * x = y * x + z * x$

$\}$

证明.

(1) $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z x * (y+z) = x*y + x*z$ 公理

(2) $\Gamma \vdash \forall y \forall z x * (y+z) = x*y + x*z$ (1)($\forall -$)

(3) $\Gamma \vdash \forall z x * (w+z) = x*w + x*z$ (2)($\forall -$)

(4) $\Gamma \vdash \forall w \forall z x * (w+z) = x*w + x*z$ (3)($\forall +$)

(5) $\Gamma \vdash \forall x \forall w \forall z x * (w+z) = x*w + x*z$ (4)($\forall +$)

(6) $\Gamma \vdash \forall w \forall z (x+y) * (w+z) = (x+y)*w + (x+y)*z$ (5)($\forall -$)

(7) $\Gamma \vdash \forall z (x+y) * (x+z) = (x+y)*x + (x+y)*z$ (6)($\forall -$)

(8) $\Gamma \vdash (x+y) * (x+y) = (x+y)*x + (x+y)*y$ (7)($\forall -$)

(9) $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z (y+z) * x = y*x + z*x$ 公理

(10) $\Gamma \vdash \forall y \forall z (y+z) * x = y*x + z*x$ (9)($\forall -$)

(11) $\Gamma \vdash \forall z (x+z) * x = x*x + z*x$ (10)($\forall -$)

(12) $\Gamma \vdash (x+y) * x = x*x + y*x$ (11)($\forall -$)

(13) $\Gamma \vdash (x+y) * (x+y) = (x*x + y*x) + (x+y)*y$ (8)(12) $=$可代入性

(14) $\Gamma \vdash (x+y) * (x+y) = (x*x + y*x) + ((x*y) + (y*y))$?

(15) $\Gamma \vdash (x+y) * (x+y) = (x*x + x*y) + ((x*y) + (y*y))$?

(16) $\Gamma \vdash (x+y) * (x+y) = (x*x + x*y) + ((x*y) + (y*y))$?

(17) $\Gamma \vdash (x+y) * (x+y) = ((x*x + x*y) + (x*y)) + (y*y)$?

(18) $\Gamma \vdash (x+y) * (x+y) = (x*x + (x*y + x*y)) + (y*y)$?

(19) $\Gamma \vdash (x+y) * (x+y) = (x*x + (1*(x*y) + x*y)) + (y*y)$?

(20) $\Gamma \vdash (x+y) * (x+y) = (x*x + (1*(x*y) + 1*(x*y))) + (y*y)$?

(21) $\Gamma \vdash (x+y) * (x+y) = (x*x + ((1+1)*(x*y))) + (y*y)$?

(22) $\Gamma \vdash \forall y (x+y) * (x+y) = (x*x + ((1+1)*(x*y))) + (y*y)$?

(23) $\Gamma \vdash \forall x \forall y (x+y) * (x+y) = (x*x + ((1+1)*(x*y))) + (y*y)$?

□

例. $\vdash \exists v A \to \neg \forall v \neg A$

证明.

(1) $\exists v A \vdash \exists v A$ 公理

(2) $\exists v A, A^v_c, \forall v \neg A \vdash \forall v \neg A$ 公理

(3) $\exists vA, A_c^v, \forall v\neg A \vdash \neg A_c^v$ $(\forall -)$

(4) $\exists vA, A_c^v, \forall v\neg A \vdash A_c^v$ 公理

(5) $\exists vA, A_c^v \vdash \neg\forall v\neg A$ (3)(4)$(\neg+)$

(6) $\exists vA \vdash \neg\forall v\neg A$ (1)(5)$(\exists-)$

(7) $\vdash \exists vA \to \neg\forall v\neg A (6)(\to +)$

□

例. $\vdash \neg\forall v\neg A \to \exists vA$

证明.

(1) $A \vdash A$ （公理）

(2) $A \vdash \exists vA$ (1)$(\exists+)$

(3) $A, \neg\exists vA \vdash \exists vA$ (2)(假设+)

(4) $A, \neg\exists vA \vdash \neg\exists vA$ （公理）

(5) $\neg\exists vA \vdash \neg A$ (2)(3)$(\neg+)$

(6) $\neg\exists vA \vdash \forall v\neg A$ (5)$(\forall+)$

(7) $\neg\exists vA, \neg\forall v\neg A \vdash \forall v\neg A$ (6)(假设+)

(8) $\neg\exists vA, \neg\forall v\neg A \vdash \neg\forall v\neg A$ (7)(假设+)

(9) $\neg\forall v\neg A \vdash \neg\neg\exists vA$ (8)(假设+)

(10) $\neg\forall v\neg A \vdash \exists vA$ (10)$(\neg\neg-)$

□

例. $\forall x\exists yy > x \vdash \exists yy > x$，但是$\forall x\exists yy > x \nvdash \exists yy > y$。

例. $x > 1 \vdash x > 1$，但是$x > 1 \nvdash \forall xx > 1$。

例.

(1) $x = c, y > x \vdash y > x$

(2) $x = c, y > x \vdash \exists yy > x$

(3) $x = c, y > x, c > x \vdash c > x$

(4) $x = c, y > x, c > x \vdash c > c$

(5) $x = c, y > x \vdash c > c$

由于c在$x = c$中出现，以上演绎过程是错误的。

例.

(1) $x > c \vdash x > c$

(2) $x > c \vdash \exists x x > c$

(3) $x > c, d > c \vdash d > c$

(4) $x > c \vdash d > c$

由于d在$d > c$中出现，以上演绎过程是错误的。

一阶谓词演算形式系统
FC:First Order Predicate Calculus
1. 字符集

(1) 表示个体变元的符号：$v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$

(2) 联结词集合：$\{\neg, \rightarrow\}$

(3) 量词：$\forall$

(4) 辅助符号：()

(5) 表示谓词的符号：$P, Q, \cdots$

(6) 表示函词的符号：$f, g, \cdots$

(7) 表示个体常元的符号：$a, b, c, \cdots$

2. 公式：

(1) 设$t_1, t_2, \cdots, t_n$为n个项，P为任意一个n元谓词符号，则$P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$为合式公式；

(2) 如果A, B为合式公式，则$(\neg A), (A \rightarrow B)$为合式公式；

(3) 如果A为合式公式，x为任意一个变量，则$\forall x A$为合式公式；

(4) 有限次使用（1），（2）和（3）复合所得到的结果都是合式公式。

合式公式简称公式。
3. 公理
$A_1 : A \rightarrow (B \rightarrow A)$
$A_2 : (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
$A_3 : (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
$A_4 : \forall v A \rightarrow A_t^v$(项$t$对$v$可代入)
$A_5 : \forall v(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall v A \rightarrow \forall v B)$
$A_6 : A \rightarrow \forall v A$($v$在$A$中无自由出现)
设A为任意一个公式，$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_n}$为任意$n$个变量，则$\forall v_{i_1} \forall v_{i_2} \cdots \forall v_{i_n} A$称为公式$A$的全称化。$FC$的公理为$A_1, A_2, \cdots, A_6$及其全称化。
4. 推理规则

$r_{mp}: A, A \to B, B$
5. 定理推导
证明：称下列公式序列为谓词公式A在FC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

其中$A_i(i = 1, 2, \cdots, m)$或为FC的公理，或为$A_j(j < i)$，或为$A_j, A_k(j, k < i)$使用r_{mp}导出的谓词公式。
定理：如果谓词公式A在PC中有一个证明序列，则称A为PC的定理，记为$\vdash_{PC} A$,简记为$\vdash A$。
演绎：设Γ为FC中若干公式构成的公式集，称下列公式序列为公式A以Γ为前提的演绎：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

其中$A_i(i = 1, 2, \cdots, m)$或为FC的公理，或为Γ中的成员，或为$A_j(j < i)$，或为A_j，$A_k(j, k < i)$使用r_{mp}导出的公式。记为$\Gamma \vdash_{FC} A$，简记为$\Gamma \vdash A$，并称A为Γ的演绎结果。
如果$\Gamma = \{B\}$，则$\Gamma \vdash A$简记为$B \vdash A$，表示公式A可由前提B在FC中演绎出来。

例. 在FND中证明：$\vdash \forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$

证明.

(1) $\forall v(A \to B), \forall vA \vdash \forall vA$　　公理

(2) $\forall v(A \to B), \forall vA \vdash A$　　(1)($\forall-$)

(3) $\forall v(A \to B), \forall vA \vdash \forall v(A \to B)$　　公理

(4) $\forall v(A \to B), \forall vA \vdash A \to B$　　(3)($\forall-$)

(5) $\forall v(A \to B), \forall vA \vdash B$　　(2)(4)($\to -$)

(6) $\forall v(A \to B), \forall vA \vdash \forall vB$　　(5)($\forall+$)

(7) $\forall v(A \to B) \vdash \forall vA \to \forall vB$　　(6)($\to +$)

(8) $\vdash \forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$　　(7)($\to +$)

□

定理. 设Γ为FC中任意的一个公式集，A为FC中的任意一个公式，v为任意一个变元，v不在Γ的任意一个公式里自由出现，如果$\Gamma \vdash A$，则$\Gamma \vdash \forall vA$。

证明. 施归纳于A的证明长度k。
（1）当$k = 1$时，如果A为公理，则$\forall vA$为A的全称化，也是公理。如果$A \in \Gamma$，则v不在Γ中自由出现，从而不在A中自由出现，由$A, A \to \forall vA$和r_{mp}规则可以推出$\forall vA$。
（2）假设当$k < n$时结论成立，往证当$k = n$时结论也成立。 假设存在证明序列$A_1, A_2, \cdots, A_n$，这里$A_n = A$，根据归纳假设，$\forall i < n$，$\forall vA_i$，此时A_n或为公理，或属于Γ，或为$A_i(i < n)$，或为由$A_i, A_j(i, j < n)$通过r_{mp}规则得到。

(I)如果A_n为公理，则$\forall v A_n$为A_n的全称化，也是公理。

(II)如果$A_n \in \Gamma$，v不在Γ中自由出现，从而不在A_n中自由出现，由$A_n, A_n \to \forall v A_n$和$r_{mp}$规则可以推出$\forall v A_n$。

(III)如果A_n为$A_i (i < n)$，由归纳假设，$\forall v A_n$成立。

(IV)如果A_n为由$A_i, A_j (i, j < n)$通过r_{mp}规则得到，不妨设$A_j = A_i \to A_n$，则由归纳假设$\forall v A_i, \forall v (A_i \to A_n)$，由公理知$\forall v (A_i \to A_n) \to (\forall v A_i \to \forall v A_n)$，由$\forall v (A_i \to A_n)$和$\forall v (A_i \to A_n) \to (\forall v A_i \to \forall v A_n)$及$r_{mp}$规则知$\forall A_i \to \forall v A_n$，由$\forall v A_i$和$\forall v A_i \to \forall v A_n$及$r_{mp}$规则知$\forall v A_n$。 □

例. $\forall x \forall y x * y = y * x \vdash \forall x (x + x) * x = x * (x + x)$

证明.

(1) $\forall x \forall y x * y = y * x$ 前提

(2) $\forall x \forall y x * y = y * x \to \forall y (x + x) * y = y * (x + x)$ A_4

(3) $\forall y (x + x) * y = y * (x + x)$ (1)(2)r_{mp}

(4) $\forall y (x + x) * y = y * (x + x) \to (x + x) * x = x * (x + x)$ A_4

(5) $(x + x) * x = x * (x + x)$ (3)(4)r_{mp}

(6) $\forall x (x + x) * x = x * (x + x)$ (5)全称推广

□

例. $\forall x \forall y x * y = y * x \vdash \forall x (x + x) * x = x * (x + x)$

证明.

(1) $\forall x \forall y x * y = y * x$ 前提

(2) $\forall x \forall y x * y = y * x \to \forall x \forall x \forall y x * y = y * x$ A_6

(3) $\forall x \forall x \forall y x * y = y * x$ (1)(2)r_{mp}

(4) $\forall x (\forall x \forall y x * y = y * x \to \forall y (x + x) * y = y * (x + x))$ A_4

(5) $\forall x (\forall x \forall y x * y = y * x \to \forall y (x + x) * y = y * (x + x)) \to \forall x \forall x \forall y x * y = y * x \to \forall x \forall y (x + x) * y = y * (x + x)$ A_5

(6) $\forall x \forall x \forall y x * y = y * x \to \forall x \forall y (x + x) * y = y * (x + x)$ (4)(5)r_{mp}

(7) $\forall x \forall y (x + x) * y = y * (x + x)$ (3)(6)r_{mp}

(8) $\forall x (\forall y (x + x) * y = y * (x + x) \to (x + x) * x = x * (x + x))$ A_4

(9) $\forall x (\forall y (x+x) * y = y * (x+x) \to (x+x) * x = x * (x+x)) \to \forall x \forall y (x+x) * y = y * (x + x) \to \forall x (x + x) * x = x * (x + x)$ A_4

(10) $\forall x \forall y (x + x) * y = y * (x + x) \to \forall x (x + x) * x = x * (x + x)$(8)(9)$r_{mp}$

(11) $\forall x (x + x) * x = x * (x + x)$ (7)(10)r_{mp}

□