第三章关系

陈建文

October 22, 2024

定义1. 设A与B为两个集合。一个从$A \times B$到$\{T, F\}$的映射R，称为从A到B的一个二元关系。$\forall (a, b) \in A \times B$，如果$(a, b)$在$R$下的象为$T$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$; 如果$(a,b)$在$R$下的象为$F$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，记为$a\not{R}b$。如果$A = B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

例1. 设集合$X = \{1, 2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为一个从$2^X \times 2^X$到$\{T, F\}$的映射，

$\subseteq (\phi, \phi) = T, \subseteq (\phi, \{1\}) = T, \subseteq (\phi, \{2\}) = T, \subseteq (\phi, \{1, 2\}) = T,$
$\subseteq (\{1\}, \phi) = F, \subseteq (\{1\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{1\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1, 2\}) = T,$
$\subseteq (\{2\}, \phi) = F, \subseteq (\{2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{2\}, \{1, 2\}) = T,$
$\subseteq (\{1, 2\}, \phi) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1, 2\}) = T$

定义2. 设A与B为两个集合。$A \times B$的任一子集R称为从A到B的一个二元关系。如果$(a, b) \in R$，则称a与b符合关系R，记为aRb；如果$(a, b) \notin R$，则称a与b不符合关系R，并记为$a\not{R}b$。如果$A = B$，则称R为A上的二元关系。

例2. 设集合$X = \{1, 2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为$2^X \times 2^X$的一个子集，

$$\begin{aligned}\subseteq = \{&(\phi, \phi), (\phi, \{1\}), (\phi, \{2\}), (\phi, \{1, 2\}),\\ &(\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}),\\ &(\{1, 2\}, \{1, 2\})\}\end{aligned}$$

例3. 自然数集$\mathbb{N}$上的小于等于关系"$\leq$"为$\mathbb{N}$上的一个二元关系。

定义3. 设$R \subseteq A \times B$，集合

$$\{x \in A | \exists y \in B \text{使得} (x, y) \in R\}$$

称为R的定义域，记为$dom(R)$；集合

$$\{y \in B | \exists x \in A \text{使得} (x, y) \in R\}$$

称为R的值域，记为$ran(R)$。

定义4. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合，一个$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的子集$R$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$间的一个$n$元关系，每个$A_i$称为$R$的一个域。

The term relation is used here in its accepted mathematical sense. Given sets $S_1, S_2, \cdots, S_n$ (not necessarily distinct)，R is a relation on these n sets if it is a set of n-tuples each of which has its first element from S_1, its second element from S_2, and so on. More concisely, R is a subset of the Cartesian product $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$.

1	5	9
2	5	7
3	5	2
2	6	12
3	6	3
4	7	1
6	7	1

[Codd, 1974]E. F. Codd. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. Information Retrieval, 13(6): 1970.

定义5. 集合X上的二元关系R称为自反的，如果对X的任意元素x都有xRx。

例4. 判断下列二元关系是否为自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$ *(不是)*
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$ （是）
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ （不是）
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$ （不是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ （是）

定义6. 集合X上的二元关系R称为反自反的，如果对X的任意元素x都有$(x,x) \notin R$。

例5. 判断下列二元关系是否为反自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$*(是)*
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$ （不是）
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（不是）

定义7. 集合X上的二元关系R称为对称的，如果对X的任意元素x，y，只要xRy就有yRx。

例6. 判断下列二元关系是否为对称的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$(不是)
2. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（不是）
3. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（是）
4. 集合X上的二元关系$R=\{(2,3)\}$（不是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

定义8. 集合X上的二元关系R称为反对称的，如果对X的任意元素x，y，xRy且yRx，则$x=y$。

例7. 判断下列二元关系是否为反对称的。设集合$X=\{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$（是）
2. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（是）
3. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）
4. 集合X上的二元关系$R=\{(2,3)\}$（是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

定义9. 集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。

例8. 判断下列二元关系是否为传递的。设集合$X=\{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$（是）
2. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（不是）
3. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）
4. 集合X上的二元关系$R=\{(2,3)\}$（是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

定义10. 设R为从集合A到集合B的二元关系，R的逆R^{-1}定义为从集合B到集合A的二元关系

$$R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

例9. 设$X=\{1,2,3\},R=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$，则$R^{-1}=\{(2,1),(3,2),(3,1)\}$。

定理1. 设R和S为集合X上的二元关系，$R\subseteq S$，则$R^{-1}\subseteq S^{-1}$。

定理2. 设R为集合X上的二元关系，则$(R^{-1})^{-1}=R$。

定理3. 设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1}\subseteq R$。

证明. 由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R^{-1}$，则$(y,x) \in R$，由R为对称的知，$(x,y) \in R$。

由$R^{-1} \subseteq R$往证R为对称的。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R$，则$(y,x) \in R^{-1}$，由$R^{-1} \subseteq R$知$(y,x) \in R$。

□

定理4. 设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明. 只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。

如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。

由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，此时只需证$R \subseteq R^{-1}$。

由$R^{-1} \subseteq R$知由$(R^{-1})^{-1} \subseteq R^{-1}$，即$R \subseteq R^{-1}$。 □

定义11. 设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x,z) \in A \times C | \exists y \in B 使得 xRy 且 ySz\}$$

例10. 设$X = \{1,2,3\}, R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$，则$R \circ R = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$。

设R为集合X上的一个二元关系，R的非负整数次幂递归的定义如下：

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

在上例中，$R^0 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$，$R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$。

定理5. 设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\begin{aligned}
&\forall a \in A \forall d \in D \\
&(a,d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \\
\Leftrightarrow &\exists c \in C((a,c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c,d) \in R_3) \\
\Leftrightarrow &\exists c \in C(\exists b \in B((a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2) \wedge (c,d) \in R_3) \\
\Leftrightarrow &\exists b \in B((a,b) \in R_1 \wedge \exists c \in C((b,c) \in R_2 \wedge (c,d) \in R_3)) \\
\Leftrightarrow &\exists b \in B((a,b) \in R_1 \wedge (b,d) \in R_2 \circ R_3) \\
\Leftrightarrow &(a,d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)
\end{aligned}$$

□

定理6. 设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明. 由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。

对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a, c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，$(a, b) \in R$并且$(b, c) \in R$，由R为传递的知$(a, c) \in R$。

由$R \circ R \subseteq R$往证R为传递的。

对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in R$，$(b, c) \in R$，则$(a, c) \in R \circ R$，由$R \circ R \subseteq R$知$(a, c) \in R$。 □

定义12. 设$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为一个包含$m$个元素的集合，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$为一个包含$n$个元素的集合，$R$为从$X$到$Y$的一个二元关系。由$R$定义一个$m \times n$矩阵$B = (b_{ij})$如下：$\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$，

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} x_i R y_j \\ 0, & \text{如果} x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵B称为关系R的矩阵。

例11. 设集合$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，从X到Y的关系

$$S = \{(1, 3), (2, 5)\}$$

，则S的关系矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定义13. 设$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为一个包含$m$个元素的集合，$R$为$X$上的一个二元关系。由$R$定义一个$m \times m$矩阵$B = (b_{ij})$如下：$\forall (x_i, x_j) \in X \times X$，

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} x_i R x_j \\ 0, & \text{如果} x_i \not R x_j \end{cases}$$

则矩阵B称为关系R的矩阵。

例12. 设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned} R = &\{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), \\ &(4,4), (5,1), (5,3), (5,5), (6,6)\}, \end{aligned}$$

则关系R的矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理7. 设B为集合X上二元关系R的矩阵，则

1. R为自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为*1*;

2. R为反自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为0;

3. R为对称的，当且仅当B为对称矩阵;

4. R为反对称的，当且仅当$i \neq j$时b_{ij}与b_{ji}不同时为1;

5. R为传递的，当且仅当如果$b_{ij} = 1$且$b_{jk} = 1$，则$b_{ik} = 1$。

定理8. 设B为集合X上二元关系R的矩阵，则R^{-1}的矩阵为B^T。

定义14. 设B，C为两个布尔矩阵，B与C的逻辑乘为B与C的对应元素进行逻辑乘所得到的布尔矩阵，记为$B \wedge C$，即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

B与C的逻辑加为B与C的对应元素进行逻辑加所得到的布尔矩阵，记为$B \vee C$，即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

定理9. 设R，S为从集合X到集合Y的二元关系，其矩阵分别为B_R和B_S。$R \cup S$与$R \cap S$的矩阵分别为$B_{R \cup S}$，$B_{R \cap S}$，则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

定义15. 设A为$m \times p$布尔矩阵，B为$p \times n$布尔矩阵，A与B的布尔乘积$A \circ B$定义为矩阵C，其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}),$$
$$i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

设布尔矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$B \circ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定理10. 设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

设集合$X = \{1, 2, 3\}$，$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$，关系$R$的矩阵为

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则关系$R \circ R$的矩阵为

$$B_{R \circ R} = B_R \circ B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

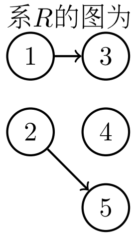
证明．设$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_p\}$，$Z=\{z_1,z_2,\ldots,z_p\}$，$B_R=(a_{ij})$，$B_S=(b_{ij})$，$B_{R\circ S}=(c_{ij})$，

$$
\begin{aligned}
&c_{ij}=1\\
\Leftrightarrow&(x_i,z_j)\in R\circ S\\
\Leftrightarrow&\exists y_k\in Y(x_i,y_k)\in R\wedge(y_k,z_j)\in S\\
\Leftrightarrow&(a_{i1}=1\wedge b_{1j}=1)\vee(a_{i2}=1\wedge b_{2j}=1)\vee\cdots\vee(a_{ip}=1\wedge b_{pj}=1)\\
\Leftrightarrow&(a_{i1}\wedge b_{1j})\vee(a_{i2}\wedge b_{2j})\vee\cdots\vee(a_{ip}\wedge b_{pj})=1
\end{aligned}
$$

□

关系除了用矩阵表示外，还可以用图来表示。设X和Y为有穷集合，R为从X到Y的二元关系。当用图表示R时，先把X与Y的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把R的任一序对(x,y)用从代表x的点画一条指向代表y的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”，称为关系R的图。

设$X=\{1,2\}$，$Y=\{3,4,5\}$，从X到Y的关系$R=\{(1,3),(2,5)\}$，则关系R的图为

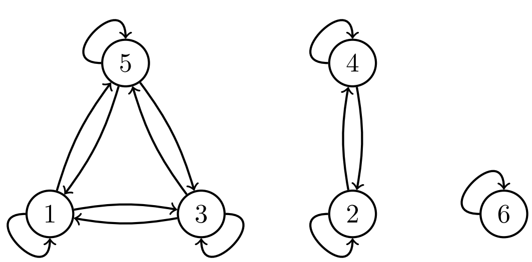


设X为有穷集合，R为集合X上的二元关系。当用图表示R时，先把X的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把R的任一序对(x,y)用从代表x的点画一条指向代表y的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”，称为关系R的图。注意，如果$(x,x)\in R$，则在代表x的点画一条又指向此点的矢线，称为环。

设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$
\begin{aligned}
R=&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\
&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},
\end{aligned}
$$

则关系R的图为



定理11. 设R为集合X上的二元关系，则

1. R为自反的，当且仅当R的图的每个顶点均有一个环；
2. R为反自反的，当且仅当R的图中没有环；
3. R为对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线；
4. R为反对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两条方向相反的矢线;
5. R为传递的，当且仅当在R的图中如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

定义16. 设R为集合X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系的交称为R的传递闭包，用R^+表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$$

定理12. 设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明. 由定义$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$，显然$R \subseteq R^+$。对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，$(x,y) \in R^+$并且$(y,z) \in R^+$，则对任意的$R'$，$R \subseteq R'$且$R'$是传递的，$(x,y) \in R'$并且$(y,z) \in R'$，由$R'$为传递的知$(x,z) \in R'$，从而$(x,z) \in R^+$，这证明了$R^+$为传递的。 □

定理13. 设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a,b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1},b) \in R$。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a,x_1) \in R$且$(x_1,b) \in R$，结论成立。

假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k+1$时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x \in X$使得$(a,x) \in R^k$且$(x,b) \in R$。由归纳假设，$(a,x) \in R^k$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{k-1},x) \in R$。记$x_k = x$，则$(a,b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，$x_k \in X$，使得$(a,x_1) \in R, (x_1,x_2) \in R, \ldots, (x_{k-1},x_k) \in R, (x_k,b) \in R$。 □

定理14. 设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明. 首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a,b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$，$(b_1,b_2) \in R$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R$。由$R \subseteq R^+$知$(a,b_1) \in R^+$，$(b_1,b_2) \in R^+$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R^+$。又因为$R^+$为传递的，所以$(a,b) \in R^+$。于是，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。

因此，$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。 □

定理15. 设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明. 只须证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a,b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$, $(b_1,b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \le i < j \le k$。于是，我们有$(a,b_1) \in R, \cdots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \cdots, (b_{k-1}, b) \in R$,故$(a,b) \in R^{k-(j-i)}$，$p_1 = k-(j-i) < k$。若$p_1 = k-(j-i) > n$, 则重复上述过程又有$p_2 < p_1$使得$(a,b) \in R^{p_2}$。如此进行下去，必有$m \le n$使得$(a,b) \in R^m$。所以，$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。因此，$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。 □

定理16. 设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，B为R的关系矩阵，B_{R^+}为R^+的关系矩阵，简记为B^+，则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \cdots \vee B^{(n)}$$

以下为计算集合X上关系R的传递闭包的算法。

```
TRANSITIVE-CLOSURE(B)
   // B is the zero-one n × n matrix for relation R
   M = B
   A = M
   for i = 2 to n
       M = M ∘ B
       A = A ∨ M
   return A // A is the zero-one matrix for R+
```

定义17. *集合X上的二元关系R称为***等价关系***，如果R同时满足以下三个性质：*

1. *R为自反的，即对X中的任意元素x，xRx;*
2. *R为对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy，则yRx;*
3. *R为传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。*

这是在我们这门课中迄今为止所学的所有概念中最重要的概念之一，是不是有点抽象？我们可以借助一个具体的例子，帮助我们理解这些抽象的概念。从小学到现在，我们是不是学了许多类似于"$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$"的等式？这里的等价关系就是从"="抽象出来的。（1）$x=x$; （2）如果$x=y$，那么$y=x$;（3）如果$x=y$并且$y=z$，那么$x=z$。是不是显然成立呀?我们可以借助熟知的"="来理解等价关系的定义。

定义18. 设$a,b\in Z$，如果存在$q\in Z$使得$a=qb$，则称b整除a，记为$b|a$。

定义19. 设$a,b\in Z$，$b>0$，$a=qb+r$，$q\in Z$，$0\le r<b$，则称r为a除以b所得到的余数，记为$a \bmod b$。

定义20. 设$a,b,n\in Z$，$n>0$，如果$a \bmod n = b \bmod n$，则称a与b模n同余，记为$a\equiv b \pmod n$。

定理17. *$\forall a,b,n\in Z, n>0, a\equiv b \pmod n$等价于$n|(a-b)$。*

例13. 整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系为$\mathbb{Z}$上的等价关系。

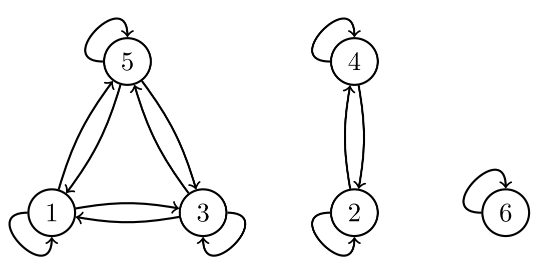
例14. 设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned}R=&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},\end{aligned}$$

则R为X上的等价关系。

证法一. 直接根据定义进行验证。 □

证法二. 画出R的关系图进行判断。



（1）在R的图中，每个顶点均有一个环，这说明R为自反的;

（2）在R的图中,如果任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线,这说明R为对称的;

（3）在R的图中，如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线，这说明R为传递的。

□

如果我们写个程序进行判断，首先要将该二元关系在计算机中表示出来。矩阵表示法为我们提供了一种解决方案。

证法三. 关系R的矩阵表示为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1)B的对角线上的元素全为1说明R为自反的;
(2)B为对称矩阵说明R为对称的;
(3)

$$B \circ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由$B \circ B$中的每个元素小于等于B中的每个元素知R为传递的。 □

定义21. 设$\cong$为集合X上的一个等价关系，$x \in X$，X的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为x关于$\cong$的等价类，记为$[x]$，即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

例15. 设集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下:

$$\begin{aligned} R = &\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2), \\ &(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\}, \end{aligned}$$

在例*14*中，我们知道R为X上的等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 我们先尝试写出集合X上每个元素关于关系R的等价类:

$$
\begin{aligned}
[1] &= \{1,3,5\} \\
[2] &= \{2,4\} \\
[3] &= \{1,3,5\} \\
[4] &= \{2,4\} \\
[5] &= \{1,3,5\} \\
[6] &= \{6\}
\end{aligned}
$$

你发现了什么？有重复！于是关系R的所有等价类所构成的集合为$\{[1],[2],[6]\}$，即$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$。 □

通过以上的例子，我们发现了以下的结论：

定理18. 设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x]=[y]$。

证明. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x]=[y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$x \cong y$及$\cong$的传递性知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[y] \subseteq [x]$。由$x \cong y$及$\cong$的对称性知$y \cong x$，由前面的证明过程知$[x] \subseteq [y]$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$[x]=[y]$往证$x \cong y$。由$\cong$的自反性知$y \cong y$，从而$y \in [y]$，再由$[x]=[y]$知$y \in [x]$，从而$x \cong y$。 □

定义22. 设X为集合，X的一些非空子集形成的集族$\mathscr{A}$称为X的一个**划分**，如果$\mathscr{A}$具有性质

1. $\forall A, B \in \mathscr{A}$，如果$A \neq B$，则$A \cap B = \phi$;
2. $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A = X$

例16. 集合$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$ 构成了集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$的一个划分。

定理19. 设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成了集合X的一个划分。

证明. 这就是要证明$\{[x] | x \in X\}$构成了集合X的一个划分。

对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。

对任意的$x \in X$,$y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，由$z \in [y]$知$y \cong z$。由$\cong$的对称性可得$z \cong y$，再由$\cong$的传递性可得$x \cong y$，从而$[x]=[y]$，矛盾。

由对任意的$x \in X$，$x \in [x]$易知$\bigcup_{x \in X} [x] = X$。

综上，我们证明了$\{[x] | x \in X\}$构成了集合X的一个划分。 □

定理20. 设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分，令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$为集合X上的一个等价关系且$\mathscr{A}$就是$\cong$的等价类之集。

这个定理的符号不太好理解吧？在以后学习的过程中，遇到类似这个定理中的抽象的符号应该怎么办？具体的例子可以帮助我们很好的理解这些抽象的符号。例如，设集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$，$\mathscr{A} = \{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$为集合$X$的一个划分，则

$$\begin{aligned}&\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A\\ =&(\{1,3,5\}\times\{1,3,5\})\cup(\{2,4\}\times\{2,4\})\cup(\{6\}\times\{6\})\\ =&\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4),(6,6)\}\end{aligned}$$

为集合X上的一个等价关系。

证明. 这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，否则$A\cap B=\phi$，这与$y\in A$并且$y\in B$矛盾。从而，$x\in A$，$z\in A$，因此，$(x,z)\in A\times A$,于是$(x,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足传递性。

设$A\in\mathscr{A}, x\in A$，以下证明$A=[x]$。对任意的$y\in A$，则$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，从而$y\in[x]$；对任意的$y\in[x]$，则$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$。于是，存在$B\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in B\times B$，如果$B\neq A$，那么$x\in A$且$x\in B$，这与$A\cap B=\phi$矛盾，从而$B=A$，因此$y\in A$。这证明了$[x]=A$。

对任意的$A\in\mathscr{A}$，以下证明A为等价关系$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$的一个等价类。由$A$非空知，存在$x$,$x\in A$，于是$A=[x]$，这里$[x]$表示$x$关于等价关系$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$的一个等价类。

对任意的$x\in X$，设$[x]$为关于等价关系$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$的一个等价类，以下证明$[x]\in\mathscr{A}$。由$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A=X$知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$。于是$[x]=A\in\mathscr{A}$。

□

定义23. 设$\cong$为X上的等价关系，$\cong$的所有等价类之集称为X对$\cong$的商集，记为$X/\cong$。即

$$X/\cong=\{[x]|x\in X,[x]\text{为}x\text{关于}\cong\text{的等价类}\}$$

例17. 设$\cong$为整数集Z上的模7同余关系，求$Z/\cong$。

解. $Z/\cong=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6]\}$,其中

$$\begin{aligned}
[0]&=\{\cdots,-14,-7,0,7,14,\cdots\}\\
[1]&=\{\cdots,-13,-6,1,8,15,\cdots\}\\
[2]&=\{\cdots,-12,-5,2,9,16,\cdots\}\\
[3]&=\{\cdots,-11,-4,3,10,17,\cdots\}\\
[4]&=\{\cdots,-10,-3,4,11,18,\cdots\}\\
[5]&=\{\cdots,-9,-2,5,12,19,\cdots\}\\
[6]&=\{\cdots,-8,-1,6,13,20,\cdots\}
\end{aligned}$$

□

例18. 设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$，$\cong$为集合X的等价关系，$X/\cong=\{\{1,2\},\{3,5\},\{4,6\}\}$，试求$\cong$。

定义24. 集合X上的二元关系R称为**偏序关系**，如果R同时满足以下三个性质：

1. R为自反的，即对X中的任意元素x，xRx；
2. R为反对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy且yRx，则$x=y$；
3. R为传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

定义25. 设$\leq$为集合X上的一个偏序关系，则称二元组$(X,\leq)$为一个**偏序集**。

例19. 实数集$\mathbb{R}$上通常的"小于等于"关系$\leq$为一个偏序关系，所以$(\mathbb{R},\leq)$为一个偏序集。

例20. 设S为一个集合，S的子集间的包含关系$\subseteq$为2^S上的一个偏序关系，所以$(2^{\mathbb{S}},\subseteq)$为一个偏序集。

定义26. 设$\leq$为集合X上的偏序关系，如果$\forall x,y\in X$，$x\leq y$与$y\leq x$至少有一个成立，则称$\leq$为X上的全序关系。相应的，二元组$(X,\leq)$称为全序集。

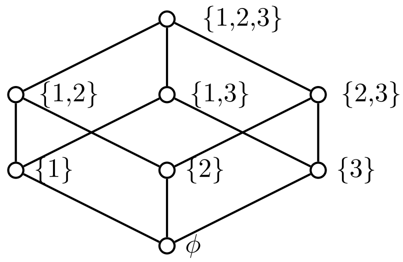
例21. 设集合$X=\{a,b,c,d\}$上的关系R定义如下：

$$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,d),(c,c),(c,d),(d,d)\}$$

则R为X上的偏序关系。

设$\leq$为集合X上的一个偏序关系。由于$\leq$为自反的，所以$\leq$的关系图中每个顶点都有一个环，略去每个顶点的环；由于$\leq$为传递的，如果$x\leq y$，且$y\leq z$，略去从顶点x到顶点z的矢线；由于$\leq$为反对称的，如果从顶点x到顶点y有矢线，则将顶点y画在顶点x的上方，并略去矢线的箭头。按这种方法画出的图称为$(X,\leq)$的哈斯图（Hasse图）。

例22. 设$X=\{1,2,3\}$，画出偏序集$(2^X,\subseteq)$的哈斯图。



我们用$x<y$表示$x\le y$并且$x\ne y$，$x\ge y$表示$y\le x$，$x>y$表示$x\ge y$并且$x\ne y$。

定义27. 设$(X,\le)$为一个偏序集，$A\subseteq X$。如果存在一个元素$s\in A$使得$\forall x\in A$有$s\ge x$，则称s为A的**最大元素**；如果存在一个元素$t\in A$使得$\forall x\in A$有$t\le x$，则称t为A的**最小元素**。

定义28. 设$(X,\le)$为一个偏序集，$A\subseteq X$。如果存在一个元素$s\in A$,在A中没有元素x使得$x>s$，则称s为A的**极大元素**；如果存在一个元素$t\in A$，在A中没有元素x使得$x<t$，则称t为A的**极小元素**。

定义29. 设$(X,\le)$为一个偏序集，$A\subseteq X$。如果存在一个元素$s\in X$使得$\forall x\in A$有$s\ge x$，则称s为A的一个**上界**；如果存在一个元素$t\in X$使得$\forall x\in A$有$t\le x$，则称t为A的一个**下界**。

定义30. 设$(X,\le)$为一个偏序集，$A\subseteq X$。如果A有上界且A的一切上界之集有最小元素，则这个最小上界称为A的**上确界**，记为$\sup A$；如果A有下界且A的一切下界之集有最大元素，则这个最大下界称为A的**下确界**，记为$\inf A$。

定义31. 设$(X,\le)$为一个偏序集，$A\subseteq X$。如果$\forall a,b\in A$，$a\le b$与$b\le a$必有一个成立，则称A为X中的链；如果对A中任意两个不同的元素a和b，$a\le b$与$b\le a$均不成立，则称A为X中的一个反链。$|A|$称为链（反链）的长度。

定理21. 设$(X,\le)$为一个偏序集，如果X中所有链长度的最大值为n，则X的全部元素可以被分成n个非空不相交反链的并集。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n。

当$n=1$时，X中最长链的长度为1，所以X中任意两个不同的元素不能比较，从而，X就是反链，故定理的结论成立。

假设当$n=k(k\ge 1)$时结论成立，往证当$n=k+1$时结论也成立。设$(X,\le)$中最长链的长度为$k+1$，则X中有极大元。令M为X的所有极大元之集，则$M\ne\phi$且$M\ne X$。易证$X\setminus M$中最长链的长度为k。由归纳假设，$X\setminus M$可分解成k个非空不相交反链之并。M也是一个非空反链，所以X可以被分解成$k+1$个非空不相交反链之并。 □

推论1. 设$(X,\le)$为一个偏序集，$|X|=mn+1$，则X中或存在一个长至少为$n+1$的链，或存在一个长至少为$m+1$的反链。

证明. 用反证法。假设结论不成立，则X中每个链的长度$\leq n$，并且每个反链的长度$\leq m$。设X中最长链的长度为k，则X能被分成k个不相交反链之并。这里$k \leq n$，再由每个反链的长度$\leq m$，可以得到

$$|X| \leq km \leq mn$$

这与假设$|X| = mn + 1$矛盾。 □

例23. 证明：每个由$n^2 + 1$个实数组成的序列$a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$中必有长至少为$n + 1$的不减子序列，或有一个长至少为$n + 1$的不增子序列。

证明. 记$A = \{(a_i, i) | 1 \leq i \leq n^2 + 1\}$，在$A$上定义二元关系$\leq'$为：$(a_i, i) \leq' (a_j, j)$当且仅当$a_i \leq a_j$并且$i \leq j$，这里$\leq$为实数间通常的小于等于关系。

易验证$\leq'$为自反的，反对称的和传递的，从而为集合A上的偏序关系。

A中或有长为$n + 1$的链，或有长为$n + 1$的反链。如果A中有长为$n + 1$的链$\{(a_{i_1}, i_1), (a_{i_2}, i_2), \cdots, (a_{i_{n+1}}, i_{n+1})\}$，这里$i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1}$，则$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$为序列$a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$的不减子序列。如果$A$中有长为$n$+1的反链$\{(a_{j_1}, j_1), (a_{j_2}, j_2), \cdots, (a_{j_{n+1}}, j_{n+1})\}$，这里$j_1 < j_2 < \ldots < j_{n+1}$，则$a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_n}$为序列$a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$的不增子序列。

这是因为$(a_{j_k}, j_k) \leq' (a_{j_{k+1}, j_{k+1})}$不成立，而$j_k < j_{k+1}$，所以$a_{j_k} \leq a_{j_{k+1}}$不成立，从而$a_{j_k} > a_{j_{k+1}}$，于是

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \ldots > a_{j_{n+1}}$$

□