第八章作业题解答

1. 设 G 是一个有 p 个顶点的图，$\delta(G)\geq((p+k)-1)/2$，试证：G 是 k-连通的。

【证明】从 G 中任意删掉 k-1 个顶点得图 G_1，假设 G_1 是 (p_1,q_1) 图，在 G_1 中，$\delta(G_1)\geq(p+k-1)/2-(k-1)=(p-k+1)/2$，因为 $p_1 = p-k+1$，所以 $\delta(G_1)\geq p_1/2$，故 G_1 连通，因此 $\kappa(G)\geq k$，亦即 G 是 k-连通的。

2. 设 G 是一个三次图，试证：$k(G)=\lambda(G)$。

【证明】如果 G 不连通，则 $\kappa(G)=\lambda(G)=0$。

设 G 连通，因为 G 是 3-正则图，因此 $\kappa(G)\leq 3$，分以下三种情况讨论：

1° 如果 $\kappa(G)=3$，则由定理 8.1.1 可知，$\kappa(G)=\lambda(G)=\delta(G)=3$。

2° 如果 $\kappa(G)=1$，则由下面的第 3 题可知，$\kappa(G)=\lambda(G)=1$。

3° 如果 $\kappa(G)=2$，则可能的 3-正则图连接情况如图 8-1 所示，因此 $\lambda(G)=2$。

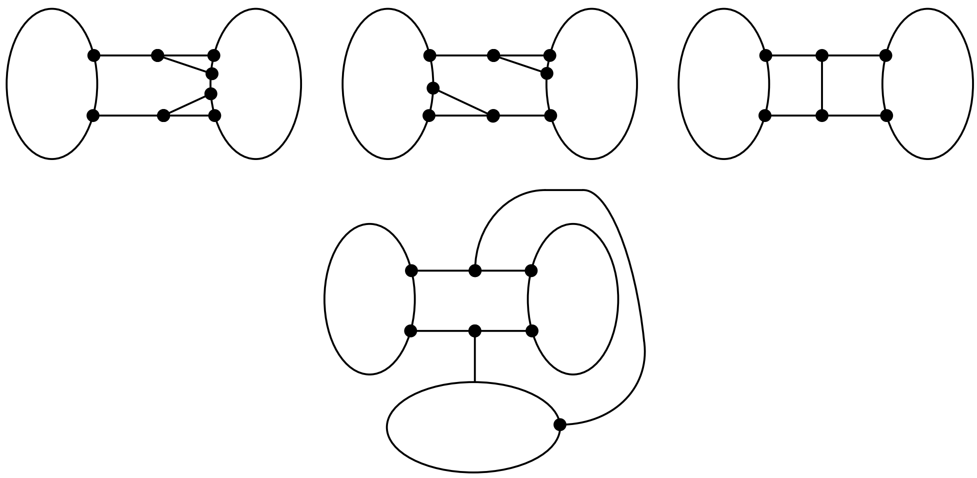

图 8-1 $\kappa(G)=2$ 时的 3-正则图连接示意

3. 设 $r\geq 2$, G 是 r-正则图且 $k(G)=1$。试证：$\lambda(G)\leq[r/2]$。

【证明】因为 $\kappa(G)=1$，所以 G 连通且有割点 v，从而 G-v 至少有两个支，设一个支为 $G_1=(V_1,E_1)$，剩下的支构成的子图记为 $G_2=(V_2,E_2)$，因为 $\deg v=r$，根据抽屉原理，$|V_1|\leq\left[\dfrac{r}{2}\right]$ 或者 $|V_2|\leq\left[\dfrac{r}{2}\right]$，于是 $\lambda(G)\leq\left[\dfrac{r}{2}\right]$。

4. 证明：图 G 是 2-边连通的当且仅当任两个不同顶点间至少有两条边不重路。

【证明】$\Leftarrow$ 假设 G 不是 2-边连通的，则 G 中有桥，设 $e=uv$ 是 G 的桥，因为 u,v 间有两条边不重路，因此 e 必然与某条路构成圈，从而去掉 e 后 G 仍连通，这与 e 是桥相矛盾，因此图 G 是 2-边连通的。

$\Rightarrow$ 参照定理 8.1.5 的必要性的证明。

5. 求集合 S_1={1,2,3}，S_2={1,3}，S_3={1,3}，S_4={3,4,5}的所有相异代表系。

【解】按照从 S_1,S_2,S_3,S_4 取出元素的顺序将相异代表系依次记为：①2,1,3,4②2,3,1,4③2,1,3,5④2,3,1,5。

6. 请给出如图 8-2 所示的图的一个最大匹配和一个最小覆盖。

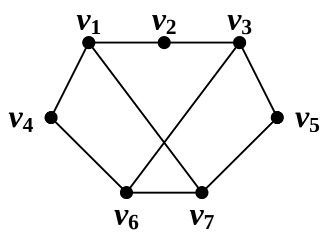

图 8-2 一个无向图

【解】图 8-2 所示的图的一个最大匹配为$\{v_1v_7, v_3v_5, v_4v_6\}$，一个最小覆盖为$\{v_1,v_3,v_6,v_7\}$。

7. 给定如图 8-3 所示的一个运输网络，假设 v_1 为源点，v_6 为汇点，请为该网络找出一个最大流和一个最小割。

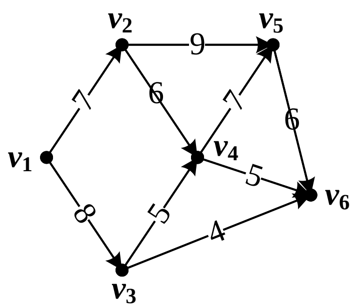

图 8-3 一个容量网络

【解】图 8-3 所示的容量网络的一个最大流如图 8-4 所示。其最小割为$\{v_1v_2, v_1v_3\}$。

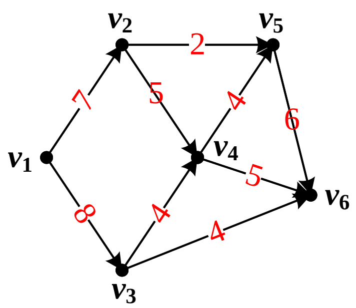

图 8-4 图 8-3 所示的容量网络的最大流。