

第一章集合及其运算

陈建文

September 18, 2024

定义1. 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合 A 和一个元素 a ，用 $a \in A$ 表示 a 是 A 的一个元素，用 $a \notin A$ 表示 a 不是 A 的一个元素。

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $C = \{a, b, c, \dots, z\}$

2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合 $\{x|P(x)\}$

- $E = \{n|n \in \mathbb{Z} \wedge n \text{ is even}\}$, 这里 \wedge 表示“并且”， E 还可以等价的表示为 $E = \{n \in \mathbb{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为 ϕ 。

定义2. 设 A, B 为两个集合，如果 A 中的每个元素都是 B 中的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subseteq B$ ；如果 $A \subseteq B$ 且存在 $x \in B$ 使得 $x \notin A$ ，则称 A 为 B 的真子集，记为 $A \subset B$ 。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subseteq B : \forall x \in A, x \in B$ 即 $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A \subset B : A \subseteq B \wedge \exists x \in B, x \notin A$ 即 $A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$

设 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，则 $A \subseteq B$ ，其含义是 $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ 。对一些特殊的 x 的值分析如下：

- 当 $x = 1$ 时， $1 \in A \rightarrow 1 \in B$ ，即 $T \rightarrow T$ ，其真值为 T ；
- 当 $x = 3$ 时， $3 \in A \rightarrow 3 \in B$ ，即 $F \rightarrow T$ ，其真值为 T ；
- 当 $x = 0$ 时， $0 \in A \rightarrow 0 \in B$ ，即 $F \rightarrow F$ ，其真值为 T 。

定义3. 设 A, B 为两个集合，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称 A 与 B 相等，并记为 $A = B$ 。

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$
- $\{x \in \mathcal{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为 ϕ 。

定理1. 空集为任一集合的子集且空集是唯一的。

证明. 设 A 为任意一个集合，显然对任意的 x 属于空集，则 $x \in A$ ，因此空集为 A 的子集。

以下证明空集是唯一的。用反证法。假设存在两个不相等的空集 ϕ 和 ϕ' ，则 $\phi \subseteq \phi'$ 并且 $\phi' \subseteq \phi$ ，从而 $\phi = \phi'$ ，矛盾。

□

“空集为任一集合的子集”这一结论初学时，也可以用反证法证明其正确性。

空集为任一集合的子集。

证明. 用反证法。假设存在一个集合 A ， $\phi \not\subseteq A$ ，则存在 $x \in \phi$ ，但 $x \notin A$ ，这显然是不可能的，结论得证。

□

定义4. 集合 S 的所有子集构成的集合称为 S 的幂集，记为 2^S 或者 $\mathcal{P}(S)$ 。

例. $2^\phi = \{\phi\}$

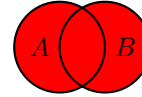
$2^{\{1\}} = \{\phi, \{1\}\}$

$2^{\{1,2\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$2^{\{1,2,3\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

例. $2^{\{\phi, \{\phi\}\}} = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

定义5. 设 A, B 为任意的两个集合，至少属于集合 A 与集合 B 之一的那些元素构成的集合称为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$ 。

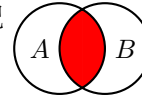


$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

(这里 \vee 表示“或者”)

例. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

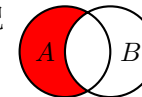
定义6. 设 A, B 为任意的两个集合，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$ 。



$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

例. $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

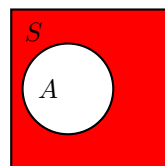
定义7. 设 A, B 为任意的两个集合，由属于集合 A 但不属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的差集，记为 $A \setminus B$ 。



$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

例. $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$

定义8. 在许多实际问题中, 常以某个集合 S 为出发点, 而所涉及的集合都是 S 的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合 S , 称为该问题的全集。如果 A 为 S 的子集, 则差集 $S \setminus A$ 称为集合 A 对集合 S 的补集, 记为 A^c 。



$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$

例. $S = \{0, 1\}, A = \{0\}$, 则 $A^c = \{1\}$ 。

定理2. 设 S 为全集, \emptyset 为空集, A, B, C 为 S 的子集, 则

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$.
4. $A \cup S = S, A \cap S = A$.
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
6. $A \cup A^c = S, A \cap A^c = \emptyset$.
7. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B), C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
- 7'. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

以下只证明结论5和结论7的第一条, 其他结论的证明留给读者自己完成。

证明. 先证 $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in A \cup (B \cap C)$, 则 $x \in A$ 或者 $x \in B \cap C$ 。如果 $x \in A$, 则 $x \in A \cup B$ 并且 $x \in A \cup C$, 即 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$; 如果 $x \in B \cap C$, 则 $x \in B$ 并且 $x \in C$, 从而 $x \in A \cup B$ 并且 $x \in A \cup C$, 于是 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。总之, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

再证 $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 则 $x \in A \cup B$ 并且 $x \in A \cup C$ 。如果 $x \in A$, 则 $x \in A \cup (B \cap C)$; 如果 $x \notin A$, 由 $x \in A \cup B$ 知 $x \in B$, 由 $x \in A \cup C$ 知 $x \in C$, 于是 $x \in B \cap C$, 从而 $x \in A \cup (B \cap C)$; 总之, $x \in A \cup (B \cap C)$ 。□

接下来证明结论7的第一条。

证明. 先证 $C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in C \setminus (A \cup B)$, 则 $x \in C$ 并且 $x \notin A \cup B$, 从而 $x \in C$ 并且 $x \notin A$ 并且 $x \notin B$, 因此, $x \in C \setminus A$ 并且 $x \in C \setminus B$, 于是 $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ 。

再证 $(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cup B)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$, 则 $x \in C \setminus A$ 并且 $x \in C \setminus B$, 从而, $x \in C$, $x \notin A$, $x \notin B$, 于是 $x \in C$ 并且 $x \notin A \cup B$, 所以 $x \in C \setminus (A \cup B)$ 。□

练习1. 设 A, B, C 为任意三个集合, 以下结论是否正确:

- (1) 如果 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$;
- (2) 如果 $A \cap B = A \cap C$, 则 $B = C$;
- (3) 如果 $A \cup B = A \cup C$ 并且 $A \cap B = A \cap C$, 则 $B = C$ 。

解. (1) 该等式不成立。举反例如下：设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, 则 $A \cup B = A \cup C$, 但 $B \neq C$ 。

(2) 该等式不成立。举反例如下：设 $A = \phi$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, 则 $A \cap B = A \cap C$, 但 $B \neq C$ 。

(3) 该等式成立。证明如下：

先证 $B \subseteq C$ 。

对任意的 $x \in B$, 分两种情况讨论：

1) 若 $x \in A$: 此时 $x \in A \cap B$, 由 $A \cap B = A \cap C$ 知 $x \in A \cap C$, 从而 $x \in C$ 。

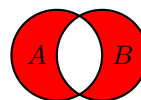
2) 若 $x \notin A$: 此时由 $x \in B$ 知 $x \in A \cup B$, 再由 $A \cup B = A \cup C$ 知 $x \in A \cup C$, 再由 $x \notin A$ 知 $x \in C$ 。

综合以上两种情况知对任意的 x , 当 $x \in B$ 时 $x \in C$, 即 $B \subseteq C$ 。

由 B 和 C 的对称性知 $C \subseteq B$, 因此 $B = C$ 。

□

定义9. 设 A, B 为任意的两个集合, $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 的并集称为 A 与 B 的**对称差**, 记为 $A \triangle B$ 。



$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

例.

$$\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} = \{1, 3\}$$

$$\{1, 2\} \triangle \{1\} = \{2\}$$

$$\{1, 2\} \triangle \phi = \{1, 2\}$$

$$\{1, 2\} \triangle \{1, 2\} = \phi$$

定理3. 设 A, B 为任意两个集合, 则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

定理4. 设 A, B, C 为任意三个集合, 则

$$1. A \triangle B = B \triangle A.$$

$$2. (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

$$3. \emptyset \triangle A = A.$$

$$4. A \triangle A = \emptyset.$$

$$5. A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

以下证明结论 5, 其他结论留给读者思考。

证明.

$$\begin{aligned}
 & A \cap (B \triangle C) \\
 &= A \cap (B \setminus C \cup C \setminus B) \\
 &= (A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (A \cap B) \triangle (A \cap C) \\
 &= (A \cap B) \setminus (A \cap C) \cup (A \cap C) \setminus (A \cap B) \\
 &= (A \cap B) \setminus A \cup (A \cap B) \setminus C \cup (A \cap C) \setminus A \cup (A \cap C) \setminus B \\
 &= (A \cap B) \setminus C \cup (A \cap C) \setminus B \\
 &= (A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \tag{2}
 \end{aligned}$$

由式(1)和式(2)知 $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ 。 \square

定义10. 以集合为元素的集合称为集族。如果 I 为任意一个集合, 对 I 中每个元素 α 都有一个唯一的集合与之对应, 这个集合记为 A_α , 那么所有这些 A_α 形成的集族可以用 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 表示, 其中 I 称为标号集。

定义11. 集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的并集 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \exists \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的交集 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

例. 如果 $I = \{1, 2, 3\}$, 则 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cup A_2 \cup A_3$;
 如果 $I = \{1, 2, 3\}$, 则 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cap A_2 \cap A_3$;
 如果 $I = \mathbb{N}$, 则 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha$;
 如果 $I = \mathbb{N}$, 则 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha$;
 如果 $I = \mathbb{Z}^+$, 则 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha$;
 如果 $I = \mathbb{Z}^+$, 则 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = \bigcap_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha$ 。

例. 设 $I = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$, $\forall x \in I, A_x = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < x\}$, 则

$$\bigcup_{x \in I} A_x = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}, \bigcap_{x \in I} A_x = \emptyset$$

定理5. 设 A 为任意集合, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为任意一个集族, 则

1. $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
2. $A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$

证明. 留给读者自己完成。 \square

定理6. 设 C 为任意集合, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为任意一个集族, 则

$$1. C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$$

$$2. C \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$$

以下只证明第1条，其他结论的证明留给读者自己完成。

证明. 先证明 $C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$ 。

对任意的 x ，如果 $x \in C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ ，则 $x \in C$ ，且 $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ ，从而 $x \in C$ ，且存在 $\alpha \in I$ ， $x \notin A_\alpha$ 。于是，存在 $\alpha \in I$ ， $x \in C \setminus A_\alpha$ 。因此， $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$ ，故 $C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$ 。

再证明 $\bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha) \subseteq C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ 。

对任意的 x ，如果 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$ ，则存在 $\alpha \in I$ ， $x \in C \setminus A_\alpha$ 。因此，存在 $\alpha \in I$ ， $x \in C$ 且 $x \notin A_\alpha$ ，故 $x \in C$ 且 $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 。于是， $x \in C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ 。所以， $\bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha) \subseteq C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ 。

由集合相等的定义知， $C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$ 。 \square

将以上定理中的集合 C 替换为全集 S ，我们可以得到如下结论：

定理7. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为任意一个集族，则

$$1. (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

$$2. (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

定义12. 两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**有序对**。如果第一个对象为 a ，第二个对象为 b ，则该有序对记为 (a, b) 。 $(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 并且 $b = d$ 。

定义13. 设 A 与 B 为任意两个集合，则称集合 $\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ 为 A 与 B 的**笛卡尔乘积**，记为 $A \times B$ 。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

例. 如果 $X = \{1, 2\}$ ， $Y = \{3, 4, 5\}$ ，那么 $X \times Y = ?$ ， $Y \times X = ?$

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

$$Y \times X = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$$

定义14. n 个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个 **n 元组**。如果第一个对象为 a_1 ，第二个对象为 a_2 ，...，第 n 个对象为 a_n ，则该 n 元组记为 (a_1, a_2, \dots, a_n) 。

$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 。

定义15. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为任意 n 个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为 A_1, A_2, \dots, A_n 的**笛卡尔乘积**，记为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，简记为 $\prod_{i=1}^n A_i$ 。即

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ 时, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 简记为 A^n , 例如 $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$ 。我们以前熟知的二维空间 R^2 即为 $R \times R$, 三维空间 R^3 即为 $R \times R \times R$ 。

例. 如果 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$, $Z = \{5, 6\}$ 那么 $X \times Y \times Z = ?$

$$X \times Y \times Z = \{(1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 4, 6), \\ (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6)\}$$

定义16. 设 X 和 Y 为两个集合。一个从 X 到 Y 的映射 f 为一个法则, 根据 f , 对 X 中的每个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 $f(x)$ 与之对应。从 X 到 Y 的映射 f 常记为 $f: X \rightarrow Y$ 。

定义17. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 只要 $x_1 \neq x_2$, 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为从 X 到 Y 的单射。

定义18. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的满射。

定义19. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 X 到 Y 的双射, 或者称 f 为从 X 到 Y 的一一对应。

定义20. 设 A 为一个集合, 如果 $A = \Phi$, 其基数定义为0;如果 $A \neq \Phi$ 且存在一个自然数 n 使得 A 与集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 之间存在一个一一对应, 则定义 A 的基数为 n 。 A 的基数记为 $|A|$ 。如果 $|A|$ 为0或某个自然数 n , 则称 A 为有穷集;如果 A 不是有穷集, 则称 A 为无穷集。

定理8. 设 A, B 为两个不相交的有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B|$ 。

定理9. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个两两不相交的有穷集, 则

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

定理10. 设 A, B 为有穷集, 则 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ 。

定理11. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

定理12. 设 A 为有穷集, $B \subseteq A$, 则 $|A \setminus B| = |A| - |B|$ 。

定理13. 设 A, B 为有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。

定理14. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$\begin{aligned} & |\bigcup_{i=1}^n A_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \cdots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 2$ 时, 结论显然成立。

假设当 $n = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。实际上,

$$\begin{aligned}
& \left| \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right| \\
&= \left| \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cup A_{k+1} \right| \\
&= \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| + |A_{k+1}| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cap A_{k+1} \right| \\
&= \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})|
\end{aligned} \tag{3}$$

由归纳假设

$$\begin{aligned}
& \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| \\
&= \sum_{i=1}^k |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_t| \\
&\quad - \cdots \\
&\quad + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
& |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})| \\
&= \sum_{i=1}^k |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1})| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1}) \cap (A_t \cap A_{k+1})| \\
&\quad - \cdots \\
&\quad + (-1)^{k+1} |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap \cdots \cap (A_k \cap A_{k+1})| \\
&= \sum_{i=1}^k |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |(A_i \cap A_j \cap A_{k+1})| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_t \cap A_{k+1}| \\
&\quad - \cdots \\
&\quad + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}|
\end{aligned} \tag{5}$$

将(4)和(5)代入(3)得

$$\begin{aligned}
& \left| \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right| \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k+1} |A_i \cap A_j \cap A_t| \\
&\quad - \dots \\
&\quad + (-1)^{k+1+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}|
\end{aligned}$$

□

例. 试求从1到1000中能被2或3或5整除的自然数的个数。

解. 设

$$A_2 = \{n | 1 \leq n \leq 1000 \wedge 2|n\}$$

$$A_3 = \{n | 1 \leq n \leq 1000 \wedge 3|n\}$$

$$A_5 = \{n | 1 \leq n \leq 1000 \wedge 5|n\}$$

则

$$\begin{aligned}
& |A_2 \cup A_3 \cup A_5| \\
&= |A_2| + |A_3| + |A_5| \\
&\quad - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \\
&= \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor \\
&= 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 \\
&= 734
\end{aligned}$$

□