

第一章作业题

1. 试用枚举法和概括法分别给出一个现实中的集合的例子。
2. 设 A, B, C 是集合, 证明 $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ 。
3. 设 A, B 是集合, 证明 $B = (A \Delta B) \Leftrightarrow A = \Phi$ 。
4. 设 A, B 是集合, 证明 $(A \setminus B) \cup B = (A \cup B) \setminus B \Leftrightarrow B = \Phi$ 。
5. 设 A, B, C 是集合, 证明 $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ 。
6. 设 A, B 是集合, 证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow 2^A \subseteq 2^B$ 。
7. 设 A, B 是集合, 证明 $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ 。
8. M_1, M_2, \dots 和 N_1, N_2, \dots 是集合 S 的子集序列, $i, j = 1, 2, \dots, i \neq j$ 时 $N_i \cap N_j = \Phi$ 。令

$Q_1 = M_1, Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c, n = 2, 3, \dots$ 。证明: $N_n \Delta Q_n \subseteq \bigcup_{i=1}^n (N_i \Delta M_i)$ 。

9. 设 A_1, A_2, A_3, \dots 是集合的无穷序列, \bar{A} 由这样的元素 x 构成: x 属于集序列 A_1, A_2, A_3, \dots 的无穷多项, \bar{A} 称为 A_1, A_2, A_3, \dots 的上极限, 记为 $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ 。 \underline{A} 由这样的元素 x 构成: 集序列 A_1, A_2, A_3, \dots 只有有限项不包含 x , \underline{A} 称为 A_1, A_2, A_3, \dots 的下极限, 记为 $\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ 。

试证明: 1° $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$;

2° $\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$;

3° $\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n$;

4° $\underline{A}^c = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n^c, \bar{A}^c = \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c$;

5° 如果 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$, 则 $\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ 。

10. 设 A, B, C, D 是集合, 证明 “如果 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$, 则 $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ ” 是正确的, 而 “如果 $(A \times B) \subseteq (C \times D)$, 则 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ ” 是错误的。

11. 设 A, B, C, D 是集合, 证明 $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$, 并举例说明 $(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D)$ 。

12. 利用德·摩根公式的规则 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 证明 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 。

13. 设 A, B 是集合, 证明 $A \times B = B \times A$ 当且仅当下列条件之一成立: ① $A = \Phi$; ② $B = \Phi$; ③ $A = B$ 。

14. 设 A 是某高校师生之集, $B \subseteq A \times A$, 请给出一种具有合理现实意义的 B 的解释, 如 B 是同班同学关系。

15. 一些人组成一个团体。试证可以把这些人分为两组, 使每个人在其所在的组中的朋友数至多是他在团体中的朋友数的一半。提示: 朋友可以看成是笛卡尔乘积中元素的一种性质, 用 $P((a, b))$ 表示 a 与 b 是朋友。