第九章作业题解答

1.利用教材 284 页例 9.2.2 的结论证明图 9-1 中没有同时包含边 x 和 y 的哈密顿圈。

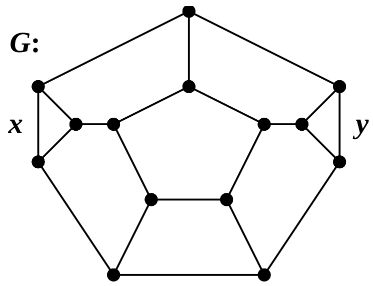

图 9-1

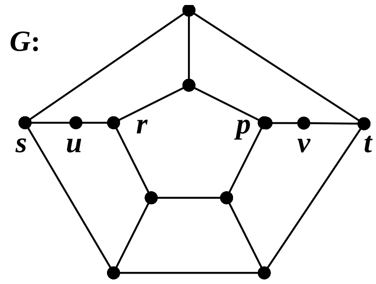

图 9-1-1

【证明】采用反证法。假设图 9-1 中有一个同时包含边 x 和 y 的哈密顿圈，则把 x, y 两边缩为两点 s 和 t 得到图 9-1-1 所示的图，于是，u,v 变成度为 2 的顶点，其两个邻边在哈密顿圈上，将 sur 和 tvp 看作一条边就可得到图 9.2.2，它们在一个哈密顿圈上，矛盾。

2.利用上面第 1 题的结论证明图 9-2 所示的 Tutte 图不是哈密顿图。

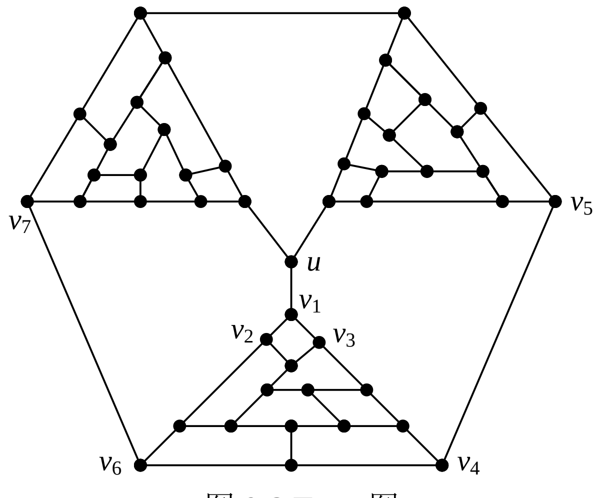

图 9-2 Tutte 图

【证明】假设 Tutte 图是哈密顿图，则有哈密顿圈 C，因为$\deg u = 3$，所以与 u 关联的 3 条边只能有 2 条在 C 上，不妨设uv_1不在 C 上，则$G - uv_1$仍有哈密顿圈 C，此时$\deg v_1 = 2$，因此v_1v_2和v_1v_3都在 C 上。$G - uv_1$中如果去掉v_4v_5则v_6v_7将变成桥，故v_4v_5和v_6v_7均在 C 上，且$v_4v_5 \cdots v_7v_6$是 C 上的一条路，将其收缩为v_4v_6后得到的图为哈密顿图，从而有哈密顿圈 C_1，且v_4v_6在 C_1 上，v_1v_2和v_1v_3亦在 C_1 上，将v_1v_2和v_1v_3收缩为v_2v_3后仍在 C_1 上，即v_2v_3和v_4v_6在同一个哈密顿圈 C_1 上，根据第 1 题的结论这是不可能的，所以，Tutte 图不是哈密顿图。

3.设 G 是具有 p 个顶点的平面连通图，面数为 f，则

1)如果 $p\geq 3$，则 $f\leq 2p-4$；

2)如果$\delta(G)=4$，则 G 中至少有 6 个顶点的度小于等于 5。

【证明】

⑴ 因为 $p-q+f=2$，所以 $f=q+2-p$，又因为$q\leq 3p-6$，所以 $f\leq 2p-4$。

⑵ 采用反证法。假设 G 中至多含有 5 个度小于等于 5 的顶点，则因为 $\delta(G)=4$，所以 $2q=\sum_{v\in V}\deg v\geq 5\times 4+6\times(p-5)$，亦即 $q\geq 3p-5$，这与 $q\leq 3p-6$ 矛盾。因此，G 中至少有 6 个顶点的度小于等于 5。

4.设 $G=(V, E)$，色数 $\kappa(G)=k$，则 G 中至少有 $k(k-1)/2$ 条边。

【证明】设 G 着 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 色的顶点集为$V_1,V_2,\cdots,V_k$，则对 $\forall i\forall j(i\neq j)$，$V_i$ 与 V_j 间至少有一条边，否则V_i 与 V_j 可以着同一色，于是 $\kappa(G)=k-1$，这与 $\kappa(G)=k$ 矛盾。因此，G 中至少有 $C_k^2=k(k-1)/2$ 条边。