第五章作业题

1.证明 $A\to(B\to A)$是重言式。

【证明】

A	B	$B\to A$	$A\to(B\to A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

由上表可以看出，公式 $A\to(B\to A)$对任一真值指派的真值均为真，所以 $A\to(B\to A)$是重言式。

2.证明 $A\to(B\to C)\Rightarrow A\wedge B\to C$。

【证法一】

A	B	C	$A\to(B\to C)$	$A\wedge B\to C$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

由上表可以看出，弄真 $A\to(B\to C)$的指派也弄真 $A\wedge B\to C$，所以 $A\to(B\to C)\Rightarrow A\wedge B\to C$。

【证法二】利用替换原理进行等价变换。

$(A\to(B\to C))\Rightarrow\neg A\vee(\neg B\vee C)\Rightarrow(\neg A\vee\neg B)\vee C\Rightarrow\neg(A\wedge B)\vee C\Rightarrow A\wedge B\to C$。

【证法三】证明$(A\to(B\to C))\to(A\wedge B\to C)$为永真式。

$(A\to(B\to C))\to(A\wedge B\to C)$

$\Rightarrow\neg(\neg A\vee(\neg B\vee C))\vee(\neg(A\wedge B)\vee C)$

$\Rightarrow(A\wedge\neg(\neg B\vee C))\vee(\neg(A\wedge B)\vee C)$

$\Rightarrow(A\wedge(B\wedge\neg C))\vee(\neg(A\wedge B)\vee C)$

$\Rightarrow((A\wedge B)\wedge\neg C)\vee(\neg(A\wedge B)\vee C)$

$\Rightarrow((A\wedge B)\wedge\neg C)\vee\neg((A\wedge B)\wedge\neg C)$

$\Rightarrow 1$ 为永真式。

3.在 PC 中证明下列事实：

(1) $\vdash(A\to(A\to B))\to(A\to B)$

【证法一】

①$(A\to B)\to(A\to B)$　　T1

②$A\to((A\to B)\to B)$　　T6

③$(A\to((A\to B)\to B))\to(A\to(A\to B))\to(A\to B)$　　A2

④$(A\to(A\to B))\to(A\to B)$　　②+③r_{mp}

【证法二】

①$(\neg A\to(A\to B))\to(((A\to B)\to(A\to B))\to((\neg\neg A\to(A\to B))\to(A\to B)))$　　T14

②$\neg A\to(A\to B)$　　T3

③$((A\to B)\to(A\to B))\to((\neg\neg A\to(A\to B))\to(A\to B))$　　①+②r_{mp}

④$(A\to B)\to(A\to B)$　　T1

⑤$(\neg\neg A\to(A\to B))\to(A\to B)$　　③+④r_{mp}

⑥$(\neg\neg A\to A)\to((A\to(A\to B))\to(\neg\neg A\to(A\to B)))$　　T7

⑦$\neg\neg A\to A$　　T9

⑧$(A\to(A\to B))\to(\neg\neg A\to(A\to B))$　　⑥+⑦r_{mp}

⑨$(A\to(A\to B))\to(A\to B)$　　⑧+⑤T7r_{mp}

(2) $\neg A\vdash A\to B$

【证明】

①$\neg A\to(A\to B)$　　T3

②$\neg A$　　前提

③$A\to B$　　①+③r_{mp}

(3) $\vdash((A\to B)\to A)\to A$

【证法一】

①$(\neg A\to(A\to B))\to(((A\to B)\to A)\to(\neg A\to A))$　　T7

②$\neg A\to(A\to B)$　　T3

③$((A\to B)\to A)\to(\neg A\to A)$　　①+②r_{mp}

④$(\neg A\to A)\to A$　　T8

⑤$((A\to B)\to A)\to A$　　③+④T7r_{mp}

【证法二】

①$\neg A\to(A\to B)$　　T3

②$(\neg A\to(A\to B))\to(\neg(A\to B)\to A)$　　T13

③$\neg(A\to B)\to A$　　①+②r_{mp}

④$(\neg(A\to B)\to A)\to((A\to A)\to((\neg\neg(A\to B)\to A)\to A))$　　T14

⑤$(A\to A)\to((\neg\neg(A\to B)\to A)\to A)$　　③+④r_{mp}

⑥$A\to A$　　T1

⑦$(\neg\neg(A\to B)\to A)\to A$　　⑤+⑥r_{mp}

⑧$\neg\neg(A\to B)\to(A\to B)$　　T9

⑨$(\neg\neg(A\to B)\to(A\to B))\to(((A\to B)\to A)\to(\neg\neg(A\to B)\to A))$　　T7

⑩$((A\to B)\to A)\to(\neg\neg(A\to B)\to A)$　　⑧+⑨r_{mp}

⑾$(((A\to B)\to A)\to(\neg\neg(A\to B)\to A))\to(((\neg\neg(A\to B)\to A)\to A)\to(((A\to B)\to A)\to A))$　　T7

⑿$((\neg\neg(A\to B)\to A)\to A)\to(((A\to B)\to A)\to A)$　　⑩+⑾r_{mp}

⒀$((A\to B)\to A)\to A$　　⑦+⑿r_{mp}

(4) $\vdash((A\to B)\to C)\to((C\to A)\to A)$

【证明】

①$(\neg A\to(A\to B))\to(((A\to B)\to C)\to(\neg A\to C))$　　T7

②$\neg A\to(A\to B)$　　T3

③$((A\to B)\to C)\to(\neg A\to C)$　　①+②r_{mp}

④$(C\to A)\to(\neg A\to\neg C)$　　T12

⑤$((C\to A)\to(\neg A\to\neg C))\to(\neg A\to((C\to A)\to\neg C))$　　T6

⑥$\neg A\to((C\to A)\to\neg C)$　　④+⑤r_{mp}

⑦$((C\to A)\to\neg C)\to(C\to\neg(C\to A))$　　T11

⑧$\neg A\to(C\to\neg(C\to A))$　　⑥+⑦T7r_{mp}

⑨$(\neg A\to(C\to\neg(C\to A)))\to((\neg A\to C)\to(\neg A\to\neg(C\to A)))$　　A2

⑩$(\neg A\to C)\to(\neg A\to\neg(C\to A))$　　⑧+⑨r_{mp}

⑾$(\neg A\to\neg(C\to A))\to((C\to A)\to A)$　　A3

⑿$(\neg A\to C)\to((C\to A)\to A)$　　⑩+⑾T7r_{mp}

⒀$((A\to B)\to C)\to((C\to A)\to A)$　　③+⑿T7r_{mp}

(5) $\vdash(\neg C\to(A\to B))\to((B\to C)\to(A\to C))$ T7′

①$(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ T12

②$\neg C\to((A\to B)\to(\neg B\to\neg A))$ T2

③$(\neg C\to((A\to B)\to(\neg B\to\neg A)))\to((\neg C\to(A\to B))\to(\neg C\to(\neg B\to\neg A)))$ A2

④$(\neg C\to(A\to B))\to(\neg C\to(\neg B\to\neg A))$ ②+③r_{mp}

⑤$(\neg C\to(\neg B\to\neg A))\to((\neg C\to\neg B)\to(\neg C\to\neg A))$ A2

⑥$(\neg C\to(A\to B))\to ((\neg C\to\neg B)\to(\neg C\to\neg A))$ ④+⑤T7r_{mp}

⑦$((\neg C\to\neg B)\to(\neg C\to\neg A))\to(((\neg C\to\neg A)\to(A\to C))\to((\neg C\to\neg B)\to(A\to C)))$ T7

⑧$(\neg C\to(A\to B))\to(((\neg C\to\neg A)\to(A\to C))\to((\neg C\to\neg B)\to(A\to C)))$⑥+⑦ T7$r_{mp}$

⑨$((\neg C\to\neg A)\to(A\to C))\to((\neg C\to(A\to B))\to((\neg C\to\neg B)\to(A\to C)))$ T6

⑩$(\neg C\to\neg A)\to(A\to C)$ A3

⑪$(\neg C\to(A\to B))\to((\neg C\to\neg B)\to(A\to C))$ ⑨+⑩r_{mp}

⑫$(\neg C\to\neg B)\to((\neg C\to(A\to B))\to (A\to C))$ T6

⑬$(B\to C)\to(\neg C\to\neg B)$ T12

⑭$(B\to C)\to((\neg C\to(A\to B))\to(A\to C))$ ⑫+⑬T7r_{mp}

⑮$(\neg C\to(A\to B))\to((B\to C)\to(A\to C))$ T6

(6)用 T7′证明 T14

欲证$(A\to C)\to ((B\to C)\to ((\neg A\to B)\to C))$

因为$(\neg C\to((\neg A\to B)\to B))\to((B\to C)\to ((\neg A\to B)\to C))$ T7′

只要$(A\to C)\to(\neg C\to((\neg A\to B)\to B))$

只要$(A\to C)\to((\neg A\to B)\to(\neg C\to B))$+T6

只要$(\neg C\to\neg A)\to((\neg A\to B)\to(\neg C\to B))$ T7

(7)用 T14 证明 T7′

欲证$(\neg C\to(A\to B))\to((B\to C)\to(A\to C))$

只要 $C\to((B\to C)\to(A\to C))$和$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$

对于前者又只要$(B\to C)\to(C\to(A\to C))$

(8)$((A\to B)\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$

【证法一】

$B\to(A\to B)$

$((A\to B)\to(A\to C))\to(B\to(A\to C))$

$(B\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$

$((A\to B)\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$

【证法二】

$B\to(A\to B)$

$((A\to B)\to C)\to(B\to C)$

$(A\to ((A\to B)\to C))\to(A\to(B\to C))$

$((A\to B)\to(A\to C))\to(A\to((A\to B)\to C))$

$((A\to B)\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$

【证法三】

利用 T14，

$(\neg(A\to B) \to(A\to(B\to C)))\to$

$(((A\to C) \to(A\to(B\to C)))\to((\neg\neg(A\to B)\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))))$

只要⑴$(A\to C)\to(A\to(B\to C))$

⑵$\neg(A\to B)\to(A\to(B\to C))$

⑴$(A\to C)\to(A\to(B\to C))$

【证明】
$C\to(B\to C)$
$(A\to C)\to(A\to(B\to C))$
⑵$\neg(A\to B)\to(A\to(B\to C))$
【证法一】
$B\to(A\to B)$
$((A\to B)\to C)\to(B\to C)$
$A\to((A\to B)\to C)\to(B\to C)$
$((A\to B)\to C)\to(A\to(B\to C))$
$\neg(A\to B)\to((A\to B)\to C))$
$\neg(A\to B)\to(A\to(B\to C))$
【证法二】
$B\to(A\to B)$
$((A\to B)\to C)\to(B\to C)$
$\neg(A\to B)\to((A\to B)\to C))$
$\neg(A\to B)\to(B\to C)$
$A\to(\neg(A\to B)\to(B\to C))$
$\neg(A\to B)\to(A\to(B\to C))$
【证法三】
$\neg B\to(B\to C)$
$\neg(B\to C)\to B$
$A\to(\neg(B\to C)\to B)$
$\neg(B\to C)\to(A\to B)$
$\neg(A\to B)\to(B\to C)$
$(B\to C)\to(A\to(B\to C))$
$\neg(A\to B)\to(A\to(B\to C))$
【证法四】
$(A\to B)\to(\neg(A\to B)\to C))$
$B\to(A\to B)$
$B\to(\neg(A\to B)\to C))$
$\neg(A\to B)\to(B\to C)$
$(B\to C)\to(A\to(B\to C))$
$\neg(A\to B)\to(A\to(B\to C))$
【证法五】
$\neg B\to(B\to C)$
$A\to(\neg B\to(B\to C))$
$\neg B\to(A\to(B\to C))$
$B\to(A\to B)$
$\neg(A\to B)\to\neg B$
$\neg(A\to B)\to(A\to(B\to C))$
【证法六】
$\neg B\to(B\to C)$
$A\to(\neg B\to(B\to C))$
$\neg B\to(A\to(B\to C))$
$\neg(A\to(B\to C))\to B$
$A\to(\neg(A\to(B\to C))\to B)$
$\neg(A\to(B\to C))\to(A\to B)$

$\neg(A\to B)\to(A\to(B\to C))$

4.利用演绎定理在 PC 中证明：

(1) $\vdash(B\to A)\to(\neg A\to\neg B)$

【分析】

只需证 $B\to A\vdash\neg A\to\neg B$

只需证 $B\to A\vdash\neg\neg B\to\neg\neg A$

只需证$\{B\to A,\neg\neg B\}\vdash\neg\neg A$

【证明】

①$\neg\neg B$　　前提

②B　　T4

③$B\to A$　　前提

④A　　②+③r_{mp}

⑤$\neg\neg A$　　④+T10

(2) $\vdash(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$

【分析】

只需证 $A\to B\vdash(B\to C)\to(A\to C)$

只需证$\{A\to B,B\to C\}\vdash A\to C$

【证明】

①$A\to B$　　前提

②$B\to C$　　前提

③$A\to C$　　①+②T7r_{mp}

5.设 A,B 为 FC 中任意公式，v 在 A 中无自由出现，试证：

(1) $\vdash(A\to\exists vB)\to\exists v(A\to B)$

【分析】只需证 $A\to\neg\forall v\neg B\vdash\neg\forall v\neg(A\to B)$

【证明】采用反证法。

①$\{A\to\neg\forall v\neg B,\forall v\neg(A\to B)\}\vdash\forall v\neg(A\to B)$　　前提

②$\forall v\neg(A\to B)\to\neg(A\to B)$　　$T_{FC}1$

③$\{A\to\neg\forall v\neg B,\forall v\neg(A\to B)\}\vdash\neg(A\to B)$　　①+②r_{mp}

④$\neg A\to(A\to B)$　　T3

⑤$\neg(A\to B)\to A$　　④+T13r_{mp}

⑥$\{A\to\neg\forall v\neg B,\forall v\neg(A\to B)\}\vdash A$　　③+⑤r_{mp}

⑦$\{A\to\neg\forall v\neg B,\forall v\neg(A\to B)\}\vdash A\to\neg\forall v\neg B$　　前提

⑧$\{A\to\neg\forall v\neg B,\forall v\neg(A\to B)\}\vdash\neg\forall v\neg B$　　⑥+⑦r_{mp}

⑨$B\to(A\to B)$　　A1

⑩$\neg(A\to B)\to\neg B$　　⑨+T12r_{mp}

⑾$\{A\to\neg\forall v\neg B,\forall v\neg(A\to B)\}\vdash\neg B$　　③+⑩r_{mp}

⑿$\{A\to\neg\forall v\neg B,\forall v\neg(A\to B)\}\vdash\forall v\neg B$　　全称推广(v 在$\neg B$ 中无自由出现)

⒀ $A\to\neg\forall v\neg B\vdash\neg\forall v\neg(A\to B)$　　⑧+⑿反证法

(2) $\vdash\exists v(A\to B)\to(A\to\exists vB)$

【分析】只需证 $A\to(\exists v(A\to B)\to\exists vB)$

只需证 $A\to(\neg\forall v\neg(A\to B)\to\neg\forall v\neg B)$

【证明】

①$(A\to B)\to(A\to B)$　　T1

②$A\to((A\to B)\to B)$　　①T6

③$((A\to B)\to B)\to(\neg B\to\neg(A\to B))$　　T12

④$A\to(\neg B\to \neg(A\to B))$　　②+③T7r_{mp}

⑤$\forall v(A\to(\neg B\to \neg(A\to B)))$　　全称推广

⑥$\forall vA\to\forall v(\neg B\to \neg(A\to B))$　　⑤+AX3r_{mp}

⑦$A\to\forall vA$　　AX4

⑧$A\to\forall v(\neg B\to \neg(A\to B))$　　⑥+⑦T7r_{mp}

⑨$\forall v(\neg B\to \neg(A\to B))\to(\forall v\neg B\to\forall v\neg(A\to B))$　　AX3

⑩$A\to(\forall v\neg B\to\forall v\neg(A\to B))$　　⑧+⑨T7r_{mp}

⑾$(\forall v\neg B\to\forall v\neg(A\to B))\to(\neg\forall v\neg(A\to B)\to \neg\forall v\neg B)$　　T12

⑿$A\to(\neg\forall v\neg(A\to B)\to \neg\forall v\neg B)$　　⑩+⑾T7r_{mp}

(3) $\vdash(\forall vB\to A)\to\exists v(B\to A)$

【分析】只需证$(\neg A\to\exists v\neg B)\to\exists v(\neg A \to\neg B)$

【证明】

由上述 5-(1)根据替换原理即可得证。

(4) $\vdash\exists v(B\to A)\to(\forall vB\to A)$

【分析】只需证$\exists v(\neg A\to\neg B)\to(\neg A\to\exists v\neg B)$

【证明】

由上述 5-(2)根据替换原理即可得证。