

数理逻辑

刘宇轩

2025 年 1 月 3 日

题目1. $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

解答.

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad T1$$

$$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \quad T6(1)rimp$$

$$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (2)A2rimp$$

题目2. $\neg A \vdash A \rightarrow B$

解答.

$$\neg A \quad \text{前提}$$

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad T3$$

$$A \rightarrow B \quad (1)(2)rimp$$

题目3. $\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A, A \rightarrow B \vdash A \rightarrow C$

解答.

$$\begin{aligned}
 & \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \quad \text{前提} \\
 & A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad (1)A3rmp \\
 & (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (2)A2rmp \\
 & A \rightarrow B \quad \text{前提} \\
 & A \rightarrow C \quad (3)(4)rmr
 \end{aligned}$$

题目4. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow (D \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow (D \rightarrow C)))$

解答.

$$\begin{aligned}
 & (B \rightarrow C) \rightarrow ((D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)) \quad T5 \\
 & A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C))) \quad (1)A1rmp \\
 & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow (D \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow (D \rightarrow C))) \quad (2)A2rmp
 \end{aligned}$$

题目5. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$

解答.

$$\begin{aligned}
 & (C \rightarrow D) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D)) \quad T5 \\
 & A \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D))) \quad (1)A1rmp \\
 & (C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D))) \quad (2)T6rmp \\
 & (A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D))) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D))) \quad (3)A2rmp \\
 & (C \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D))) \quad (3)(4)T7rmp \\
 & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D))) \quad (5)T6rmp
 \end{aligned}$$

题目6. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$

解答.

$$\begin{aligned} B \rightarrow (A \rightarrow B) & \quad A1 \\ ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) & \quad (1)T7rmp \end{aligned}$$

题目7. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$

解答.

$$\begin{aligned} B \rightarrow (A \rightarrow B) & \quad A1 \\ ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) & \quad (1)T7rmp \\ B \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) & \quad (2)T6rmp \\ (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A) & \quad (3)A2rmp \\ ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) & \quad T6 \\ ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A) & \quad (4)(5)T7rmp \end{aligned}$$

题目8. $\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B))$

解答.

$$\begin{aligned} A \rightarrow (C \rightarrow A) & \quad A1 \\ (C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)) & \quad T7 \\ A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)) & \quad (1)(2)T7rmp \end{aligned}$$

题目9. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

解答.

$$\begin{aligned}
 & \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad T3 \\
 & ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \quad (1)T7rmp \\
 & (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A \quad T8 \\
 & ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \quad (2)(3)T7rmp
 \end{aligned}$$

题目10. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A)$

解答.

$$\begin{aligned}
 & \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad T3 \\
 & ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C) \quad (1)T7rmp \\
 & \neg A \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow C) \quad (2)T6rmp \\
 & (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow C)) \quad T12 \\
 & \neg A \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow C)) \quad (3)(4)T7rmp \\
 & (\neg A \rightarrow \neg C) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow C)) \quad (5)A2rmp \\
 & (C \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg C) \quad T12 \\
 & (C \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow C)) \quad (7)(8)T7rmp \\
 & (\neg A \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow C)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow A) \quad A3 \\
 & (C \rightarrow A) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow A) \quad (9)(10)T7rmp \\
 & ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A) \quad (11)T6rmp
 \end{aligned}$$

题目11. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$

解答.

$$\neg C \rightarrow (C \rightarrow B) \quad T2$$

$$A \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)) \quad (1)A1rmp$$

$$\neg C \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B)) \quad (2)T6rmp$$

$$(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \quad A2$$

$$\neg C \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \quad (3)(4)T7rmp$$

$$((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)) \quad T12$$

$$\neg C \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)) \quad (5)(6)T7rmp$$

$$(\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)) \quad (7)A2rmp$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \quad T12$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)) \quad (8)(9)T7rmp$$

$$(\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C) \quad A3$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C) \quad (10)(11)T7rmp$$

题目12. $\vdash (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D))$

解答.

$$\begin{aligned}
& \neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \quad T3 \\
& \neg((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (1)T13rmp \\
& (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad T12 \\
& \neg((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad (2)(3)T7rmp \\
& \neg D \rightarrow (\neg((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)) \quad (4)A1rmp \\
& (\neg D \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow C)) \rightarrow (\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)) \quad (5)A2rmp \\
& (\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)) \quad A2 \\
& (\neg D \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow C)) \rightarrow ((\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)) \quad (6)(7)T7rmp \\
& (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow C)) \quad T12 \\
& (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)) \quad (8)(9)T7rmp \\
& (B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg B) \quad T12 \\
& ((\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)) \quad (11)T7rmp \\
& (\neg D \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow D) \quad A3 \\
& ((B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)) \quad (13)T5rmp \\
& ((\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)) \quad (12)(14)T7rmp \\
& (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)) \quad (10)(15)T7rmp
\end{aligned}$$

题目13. $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$

解答.

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad T3$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \quad (1)T7rmp$$

$$\neg A \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B) \quad (2)T6rmp$$

$$(((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B)) \quad T12$$

$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B)) \quad (3)(4)T7rmp$$

$$\neg C \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B))) \quad (5)A1rmp$$

$$(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg C \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B))) \quad (6)A2rmp$$

$$(\neg C \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B))) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B))) \quad A2$$

$$(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B))) \quad (7)(8)T7rmp$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A) \quad T12$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B))) \quad (9)(10)T7rmp$$

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B) \quad T12$$

$$((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B)))T7rmp$$

$$(\neg C \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C) \quad A3$$

$$((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))(14)T5rmp$$

$$((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow B))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))T7rmp$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C)) \quad (11)(16)T7rmp$$

题目14. $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow C))$

解答.

$$\neg B \rightarrow (B \rightarrow A) \quad T3$$

$$((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \quad (1)T7rmp$$

$$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \quad T13$$

$$((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \quad (2)(3)T7rmp$$

$$\neg A \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow B) \quad (4)T6rmp$$

$$(((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \quad T12$$

$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \quad (5)(6)T7rmp$$

$$(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg C \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A))) \quad (7)T5rmp$$

$$(\neg C \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A)))A2$$

$$(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A))) \quad (8)(9)T7rmp$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A) \quad T12$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A))) \quad (10)(11)T7rmp$$

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B) \quad T12$$

$$((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A)))T7rmp$$

$$(\neg C \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow C) \quad A3$$

$$((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow C))T5rmp$$

$$((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg((B \rightarrow A) \rightarrow A))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow C))T7rmp$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow C)) \quad (12)(17)T7rmp$$