第 1 章

1. 给定非线性方程 $f(x) = e^{-x} - 2x = 0$，判断该方程有几个解？构造简单的单点迭代法求解该方程，讨论方法的收敛性。

2. 设 $\varphi(x) = x + c(x^2 - 3)$，考虑迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$，如何选取 c 才能具有局部收敛性？c 取何值时，迭代收敛最快？

3. 能否用简单迭代法求解下列方程？若不能，试将原方程改成能用迭代法求解的形式。

(1) $x = \varphi_1(x) = \frac{1}{4}(\cos x + \sin x)$；

(2) $x = \varphi_2(x) = 4 - 2^x$.

4. 设 a 是有界正数，求证

$$x_{i+1} = \frac{x_i(x_i^2 + 3a)}{3x_i^2 + a}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots,\ x_0 > 0,$$

是计算 $\sqrt{a}$ 的 3 阶方法。

5. 设 $f(x) = (x^3 - 5)^2$. (1) 应用 Newton 迭代法求解方程 $f(x) = 0$，导出求 $\sqrt[3]{5}$ 的迭代公式，并讨论迭代公式的收敛速度；(2) 尝试改进导出的迭代公式以提高收敛速度，并用改进后的迭代公式计算 $\sqrt[3]{5}$（初值取为 $x_0 = 1.8$，迭代 4 次）。

第 2 章

1. 用 Gauss 消元法求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -7 \end{cases}$$

2. 用 Gauss-Jordan 消元法求下面矩阵的逆

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 用 Doolittle 分解和 Crout 分解法求解对称正定线性方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 17 & 10 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

4. 求证对于下面的方程组，用 Jacobi 迭代法求解发散，而用 Gauss-Seidel 迭代法求解却收敛

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. 利用迭代格式 $x^{k+1} = x^k + \alpha(b - Ax^k)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, 求解给定线性方程组 $Ax = b$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1) 实数 a 取何值时，迭代收敛，(2) 实数 a 取何值时，迭代收敛最快？

第 3 章

1. 设 $l_k(x),\, k=0,1,\cdots,n$ 为关于两两互异节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 n 次拉格朗日插值基函数，则对于任意的 $x\in[a,b]$，求 $\sum_{j=0}^{n} l_j(x)$ 和 $\sum_{j=0}^{n} x_j l_j(x)$.

2. 若 $f(x)=9x^5+4$, 求其一阶差商 $f[0,1]$ 的值、五阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_5]$ 的值、八阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_8]$ 的值。

3. 已知函数 $y = f(x)$ 满足条件 $f(-1) = -2$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f'(0) = 0$, 根据上述条件构造三次 Hermite 插值多项式并写出其余项。

4. 定义内积 $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 试在空间 Span$\{1, x\}$ 中寻求对于 $f(x) = \sqrt{x}$ 的最佳平方逼近函数。

5. 求 a, b 使积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + b - \sin x)^2 \mathrm{d}x$ 为最小。

6. 设 $g_2(x) = x^2 + ax + b$, 对于任意常数 c_0, c_1 均满足条件

$$\int_0^1 g_2(x)(c_0 + c_1 x)\mathrm{d}x = 0$$

试求 a, b.

7. 设函数表中节点为 $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, 节点对应的函数值为 $f(x_0) = 1.9$, $f(x_1) = 2.7$, $f(x_2) = 2.9$, $f(x_3) = 3.5$, 令 $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$ 为基函数，求 $\mathrm{Span}\{\varphi_0, \varphi_1\}$ 空间中逼近函数表 $\big(x_i, f(x_i)\big)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ 的最小二乘逼近函数 $\varphi^*(x)$ (取权重 $\rho_i = 1$, $i = 0, 1, 2, 3$)。

第 4 章

1. 确定下述求积公式中待定参数，使其代数精度尽量高

$$\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx H_{-1}f(-h) + H_0 f(0) + H_1 f(h).$$

2. 确定两点求积公式

$$\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(-\frac{2}{\sqrt{3}}) + A_1 f(\frac{2}{\sqrt{3}})$$

中的系数 A_0, A_1，使求积公式有尽可能高的代数精度。判断该求积公式是否为 Gauss 型求积公式。同时利用此公式计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x$ (结果保留 4 位小数)。

3. 已知 $x_0 = \frac{1}{4}, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{4}$, (1) 推导在 $[0, 1]$ 上以这三个点作为求积节点的插值型求积公式；(2) 指明此求积公式的代数精度；(3) 用所求公式计算 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$。

第 6 章

1. 利用如下的二级二阶 Runge-Kutta 法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}K_1 + \dfrac{h}{2}K_2, \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_n + h,\, y_n + hK_1), \end{cases}$$

求解微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y, \quad 0 < x \le b, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

取 $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, 计算 Runge-Kutta 法迭代一步的计算结果 y_1 (计算结果保留 4 位小数)。

2. 利用如下的三级三阶 Runge-Kutta 法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3), \\ \quad K_1 = f(x_n, y_n), \\ \quad K_2 = f(x_n + \dfrac{1}{2}h,\, y_n + \dfrac{1}{2}hK_1), \\ \quad K_3 = f(x_n + h,\, y_n - hK_1 + 2hK_2), \end{cases}$$

求解微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2, \quad 1 < x \leq b, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

取 $h = 0.1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, 计算 Runge-Kutta 法迭代一步的计算结果 y_1 (计算结果保留 4 位小数)。

3. 求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad a < x \leq b \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

的如下线性多步法为

$$y_{n+1} = \frac{1}{4}y_n + \frac{3}{4}y_{n-1} + h\big(\frac{15}{8}y'_n - \frac{1}{8}y'_{n-1}\big),$$

回答以下问题：（1）求该方法的阶数；（2）讨论该方法的收敛性；（3）给出该方法的绝对稳定区间。

提示：在局部截断误差中 $C_r = \frac{1}{r!}\Big(1 - \big(\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i + r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i\big)\Big), r = 2,3,\cdots$. **参考定理**：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $|x_1|<1$ 且 $|x_2|<1$ 的充要条件是 $|b|<1+c$，$|c|<1$.