# Recursive Algorithm Design

Instructor: Shizhe Zhou

Course Code:00125401

# Polynomial Evaluation

**问题** 给定一串实数 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$，以及一个实数 $x$，计算多项式 $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 的值。

- 1.直接估值: (n+1)*n/2次乘法, n次加法.
- 2. 从低次到高次递归: 2n次乘法, n次加法.
- 3. 反向递归: n次乘法, n次加法.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = ((\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})\cdots)x + a_1)x + a_0$$

# max derived graph

- A critical point: if n=k+1, it has to be a complete graph.

- Code:
- http://staff.ustc.edu.cn/~szhou/course/algorithmFundamentals2014/maxsubgraph.zip

# Find largest set with 1-1 map

**问题** 给定一个集合 $A$ 和一个从 $A$ 到自身的映射 $f$，寻找元素个数最多的一个子集 $S \subseteq A$，$S$ 满足：(1) $f$ 把 $S$ 中的每一个元素映射到 $S$ 中的另一元素（即 $f$ 把 $S$ 映射到它自身），(2) $S$ 中没有两个元素映射到相同的元素（即 $f$ 在 $S$ 上是一个一对一函数）。

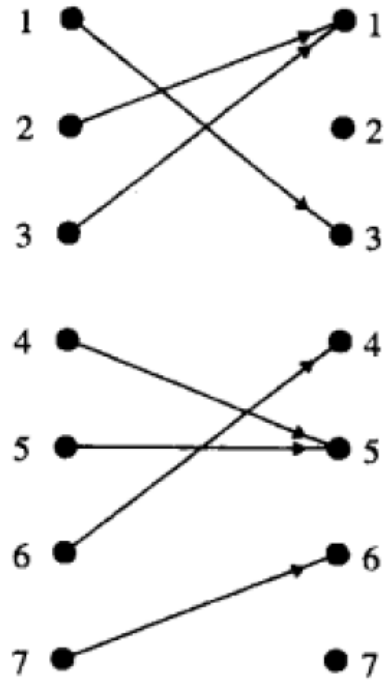



图 5.2 从一个集合到自身的映射（两侧是相同的集合）

```
算法 Algorithm Mapping ( f, n )
输入：  f（数组，其元素值为 1 到 n 的数值）
输出：  S（1 到 n 的整数集合的一个子集，f 是 S 上的一对一函数）
begin
    S := A; {A 是由 1 到 n 的整数组成的集合}
    for j := 1 to n do  c [j ] := 0;
    for j := 1 to n do  increment c [f [j ]];
    for j := 1 to n do
        if c [j ] = 0 then put j in Queue;
    while Queue is not empty do
        remove i from the top of the queue;
        S := S - {i};
        decrement c [f [i ]];
        if c [f [i ]] = 0 then put f [i ] in Queue
end
```

图 5.3　算法 *Mapping*

# 社会名流问题

**问题** 给定一个 $n \times n$ 连结矩阵，确定是否存在一个 $i$，其满足在第 $i$ 列所有项（除了第 $i_i$ 项）都为 1，并且第 $i$ 行所有项（除了第 $i_i$ 项）都为 0。

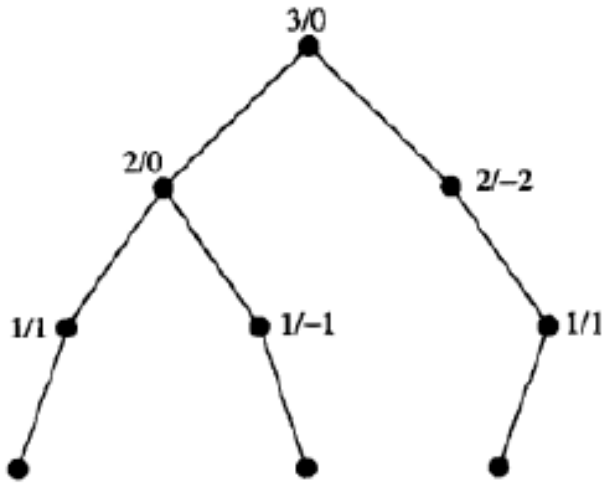
- http://staff.ustc.edu.cn/~szhou/course/algorithmFundamentals/celebrity.zip

```
算法 Celebrity (Know)
输入：Know（一个 n × n 的布尔数组）
输出：celebrity
begin
    i := 1 ;
    j := 2 ;
    next := 3 ;
    {第一阶段，通过消除只留下一个候选者}
    while next ⩽ n + 1 do
        if Know[i, j] then i := next
        else j := next ;
        next := next + 1 ;
        {i 和 j 的其中之一被消除}
    if i = n + 1 then
        candidate := j
    else
        candidate := i ;
    {现在检查候选者确实是社会名流}
    wrong := false ;
    k := 1 ;
    Know[candidate, candidate] := false ;
        {虚构的变量通过检验}
    while not wrong and k ⩽ n do
        if Know[candidate, k] then wrong := true ;
        if not Know[k, candidate] then
            if candidate ≠ k then wrong := true ;
        k := k + 1 ;
    if not wrong then celebrity := candidate
    else celebrity := 0{没有社会名流}
end
```

图 5.4　算法 *Celebrity*

# Balance Factor for BST tree

**问题** 给定一棵 $n$ 个节点的二叉树 $T$，计算其所有节点的平衡因子。



# Find maximum consecutive subsequence

**问题** 给定一个实数序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$（不必是正数），寻找一个（连续的）子序列 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_j$，使得其数值之和在所有连续子序列数值之和中是最大的。

**算法** ***Maximum_Consecutive_Subsequence (X, n)***

**输入：** *X*（大小为 *n* 的数组）

**输出：** *Global_Max*（最大连续子序列之和）

```
begin
    Global_Max := 0 ;
    Suffix_Max := 0 ;
    for i := 1 to n do
        if x[i] + Suffix_Max > Global_Max then
            Suffix_Max := Suffix_Max + x[i] ;
            Global_Max := Suffix_Max
        else if x[i] + Suffix_Max > 0 then
                Suffix_Max := x[i] + Suffix_Max
            else Suffix_Max := 0
end
```

# Knapsack problem

**问题** 给定一个整数 $K$ 和 $n$ 个不同大小的物品，第 $i$ 个物品的大小为整数 $k_i$，寻找一个物品的子集，它们的大小之和正好为 $K$，或者确定不存在这样的子集。

**算法 *Knapsack* (*S*, *K*)**

**输入：** *S*（存储物品尺寸的大小为 *n* 的数组）和 *K*（背包的大小）

**输出：** *P*（一个二维数组，如果对于前 *i* 个元素和大小为 *k* 的背包存在解，则 *P*[*i*, *k*].*exit* = true，同时若该解包括了第 *i* 个元素，则 *P*[*i*, *k*].*belong* = true）

{关于算法改进的提示参见习题 5.15}

```
begin
    P [0, 0].exist := true ;
    for k := 1 to K do
        P [0, k ].exist := false ;
        {不需要对 P[i, 0], i≥1 进行初始化，因为其值将由 P[0, 0]计算得到}
    for i := 1 to n do
        for k := 0 to K do
            P [i, k ].exist := false ;{默认值}
            if P [i − 1, k ].exist then
                P [i, k ].exist := true ;
                P [i, k ].belong := false
            else if k − S [i ] ≥ 0 then
                    if P [i − 1, k − S [i ]].exist then
                        P [i, k ].exist := true ;
                        P [i, k ].belong := true
end
```

图 5.10　算法 *Knapsack*

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_1$=2 | O | - | I | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| $k_2$=3 | O | - | O | I | - | I | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| $k_3$=5 | O | - | O | O | - | O | - | I | I | - | I | - | - | - | - | - | - |
| $k_4$=6 | O | - | O | O | - | O | I | O | O | I | O | I | - | I | I | - | I |