有序n元组与笛卡尔积

❖有序n元组与笛卡尔积 Descartes product

❖多重集

Rene Descartes

笛卡尔积，法国

平面坐标系（x,y）

有序n元组与笛卡尔积

❖概念：序偶-由两个具有固定次序的个体组成的序列，称为序偶(ordered pair)（又称有序对），记作‹a, b›或(a, b)。其中个体a, b称为序偶的分量。

定义1：两个有序对〈x，y〉与〈u，v〉，当其元素依次对应相等时，称这两个有序对相等，记为〈x，y〉=〈u，v〉，即

$$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Leftrightarrow x=u, y=v$$

{a,b}={b,a}?

有序n元组与笛卡尔积

❖n个有确定次序的事物构成的整体称为一个有序n元组（ n-tuple ）

$<a_1, a_2, \ldots, a_n>$ 或（$a_1, a_2, \ldots, a_n$）

第*i*个元素（或第*i*个分量）：a_i ($1 \le i \le n$)

有序n元组与笛卡尔积

❖定义2：两个有序*n*元组相等

$$<a_1, a_2, \ldots, a_n> = <b_1, b_2, \ldots, b_n>$$

$$\Leftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2, \ldots, a_n=b_n$$

有序n元组与笛卡尔积

定义3 设*A*，*B*为两个集合，集合
$A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A, y\in B\}$ 称为*A*与*B*的笛卡尔积．

例 设$A=\{a, b\}$，$B=\{1, 2\}$，$C=\{\alpha\}$，
则 $A\times B=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$

$(A\times B)\times C=\{\langle\langle a, 1\rangle, \alpha\rangle, \langle\langle a, 2\rangle, \alpha\rangle, \langle\langle b, 1\rangle, \alpha\rangle, \langle\langle b, 2\rangle, \alpha\rangle\}$

$A\times(B\times C)=\{\langle a, \langle 1, \alpha\rangle\rangle, \langle a, \langle 2, \alpha\rangle\rangle, \langle b, \langle 1, \alpha\rangle\rangle, \langle b, \langle 2, \alpha\rangle\rangle\}$

$A\times B\times C=\{\langle a, 1, \alpha\rangle, \langle a, 2, \alpha\rangle, \langle b, 1, \alpha\rangle, \langle b, 2, \alpha\rangle\}$

有序n元组与笛卡尔积

例 设A = {a, b, c}，B = {0, 1}，则

$A \times B = \{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}$

$B \times A = \{\langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 0, c\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle\}$

$A \times A = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$

$B \times B = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

所以有 $A \times B \neq B \times A$

(除非 $A = \varnothing$ 或 $B = \varnothing$ 或 $A = B$)

即笛卡尔积不满足交换律。

有序n元组与笛卡尔积

例 设A = {a, b}, B = {0, 1}, C = {u, v} 则

A × B × C = {‹a, 0, u›, ‹a, 0, v›, ‹a, 1, u›, ‹a, 1, v›, ‹b, 0, u›, ‹b, 0, v›, ‹b, 1, u›, ‹b, 1, v›}

(A × B) × C ={‹a, 0›, ‹a, 1›, ‹b, 0›, ‹b, 1›} × {u, v}

={‹‹a, 0›, u›, ‹‹a, 0›, v›, ‹‹a, 1›, u›, ‹‹a, 1›, v›,

‹‹b, 0›, u), ‹‹b, 0›, v), ‹‹b, 1›, u), ‹‹b, 1›, v›}

A × (B × C) = {a, b} × {‹0, u›, ‹0, v›, ‹1, u›, ‹1, v›}

= {‹a, ‹0, u››, ‹a, ‹0, v››, ‹a, ‹1, u››, ‹a, ‹1, v››,

‹b, ‹0, u››, ‹b, ‹0, v››, ‹b, ‹1, u››, ‹b, ‹1, v››}

(A × B) × C ≠ A × (B × C) (除非A = ∅ 或 B = ∅ 或 C = ∅),

即笛卡尔积不满足结合律。

有序n元组与笛卡尔积

❖定理1 设A，B，C为三个集合，则有

(1) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

(2) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

(3) $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$

(4) $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$

有序n元组与笛卡尔积

❖证明 定理1 (2) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

A × (B∩C) = (A × B)∩(A × C),

∀ ‹x, y›∈ A × (B∩C)

⇔ x∈A∧y∈(B∩C)

⇔ x∈A∧(y∈B∧y∈C)

⇔ (x∈A∧y∈B)∧(x∈A∧y∈C)

⇔ ‹x, y›∈ A × B∧‹x, y›∈ A × C

⇔ ‹x, y›∈ (A × B)∩(A × C)。

有序n元组与笛卡尔积

定义4 设A_1, A_2,…,A_n为n个集合，集合

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{<a_1,a_2,\cdots,a_n>|a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

称为A_1, A_2,…,A_n的笛卡尔积．

对任意集合A， $A\times A\times\ldots\times A$（$n$个）常记为 A^n

有序n元组与笛卡尔积

定理２ 设A_1, A_2,…, A_n是有限集，则

$$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n| = |A_1|\cdot|A_2|\cdots|A_n|$$

有序n元组与笛卡尔积

例1：A, B, C是任意三个集合, C是非空集合,

(1) A ⊆ B的充分必要条件是A × C ⊆ B × C;

(2) A ⊆ B的充分必要条件是C × A ⊆ C × B。

证明 (1) 必要性: 因C非空, 存在c∈C。

若A ⊆ B, 则对任意的 ‹a, c›∈A × C,

其中a∈A⊆ B, c∈C, 必有‹a, c›∈B × C,

所以A × C ⊆ B × C。

充分性: 对任意的‹a, c›∈A × C其中a∈A, c∈C。

若A × C ⊆ B × C, 则‹a, c›∈B × C, 其中a∈B。

所以A ⊆ B。

同理可证(2)。

有序n元组与笛卡尔积

例2 设A，B，C，D为四个非空集合，则

$A \times B \subseteq C \times D$的充分必要条件是$A \subseteq C$, $B \subseteq D$

证明 必要性：若$A \times B \subseteq C \times D$,

又A, B, C, D都不是空集，故对任意的$a \in A$，$b \in B$,

$\langle a, b \rangle \in A \times B \subseteq C \times D$，则$a \in C$，$b \in D$,

因此$A \subseteq C$, $B \subseteq D$。

充分性：若$A \subseteq C$，因B非空,

故$A \times B \subseteq C \times B$。

又 $B \subseteq D$，因C非空,

又 $C \times B \subseteq C \times D$。 由$\subseteq$的传递性，可得 $A \times B \subseteq C \times D$。

有序n元组与笛卡尔积

- 有序n元组与笛卡尔积 Descartes product
- 多重集

多重集

- 如果有一组事物，其中可以有某些事物不加区别（或说某些事物可重复出现多次，且出现几次就看作是几个事物），这组事物构成的整体就称为一个多重集。
- {1，1，2，3，3，3，4}
- $\{a, a, a, a, a, a, a, b\}$
- 重复度 -- $M_A(a)$

多重集

- 一个多重集*A*，如果任何事物在*A*中的重复度只能为 1 或 0，则该多重集就是一个通常意义下的集合

多重集

定义１　设A，B是两个多重集，A与B的并A∪B是一个多重集，任一元素在A∪B中的重复度等于该元素在A，B中重复度的最大值，即：

$$M_{A \cup B}(x) = \max\{M_A(x),\ M_b(x)\}$$

多重集

定义2　设A，B是两个多重集，A与B的交A∩B是一个多重集，任一元素在A ∩ B中的重复度等于该元素在A，B中重复度的最小值，即

$$M_{A \cap B}(x) = \min\{M_A(x),\ M_b(x)\}$$

多重集

- 非负差 $m \dot{-} n = \begin{cases} m-n, & m \ge n \\ 0, & m < n \end{cases}$

定义 3　设A，B是两个多重集，A与B的差A - B是一个多重集，任一元素在A - B中的重复度等于该元素在A中重复度与其在B中重复度的非负差，即

$$M_{A-B}(x) = M_A(x) \dot{-} M_B(x)$$

Computer Science & Technology 18

多重集

定义 4　设A，B是两个多重集，A与B的和A + B是一个多重集，任一元素在A + B中的重复度等于该元素在A，B中重复度的和，即

$$M_{A+B}(x) = M_A(x) + M_B(x)$$

Computer Science & Technology 19

作业

- 作业：
- 习题四　1、2、3

Computer Science & Technology 20

∀∃∅∩∪⊆⊂⊄∉∀∈≤≥…ℵ∑{ }≡±°∞
αβσρυωζψηδεφλμπΔθ±∏∧∨∀ }∴√⊃
≌≈∽∞⊇∩∪℃‰≥≤∵∏∈∑≮≯½¼§¥{}?±
↔∨∧¬→←⇒⇔↓↑Λ⊕≠⊙—〈〉
☆★▿≮≯⌒∵∴∪∩≠–—〃
//∴∵∷⊥↘↗↙↖√
〔⌈–⌋÷×·º·‹2, b›⏝⏜Φ