环与域：

习题一：

2. $Z(\sqrt{5}) = \{a+b\sqrt{5} \mid a,b\in Z\}$.

先分析 加法

由于加法为实域上加法，因此

一定满足：交换律，结合，消去律，封闭性，

且 0 为单位元

$\therefore \langle Z(\sqrt{5}),+\rangle$ 为 Abel 群；

再分析 * 法.

$\because (a+b\sqrt{5}) * (c+d\sqrt{5}) = (ac+5bd) + (bc+ad)\sqrt{5} \in Z(\sqrt{5})$

$\therefore$ * 满足封闭性

又 $\because (a+b\sqrt{5}) * (c+d\sqrt{5}) = (c+d\sqrt{5}) * (a+b\sqrt{5})$

$\therefore \langle Z,*\rangle$ 为半群.

$\because (a_3+b_3\sqrt{5})[(a_1+b_1\sqrt{5})+(a_2+b_2\sqrt{5})] = [(a_1+b_1\sqrt{5})+(a_2+b_2\sqrt{5})](a_3+b_3\sqrt{5})$

$= [a_3(a_1+a_2)+5b_3(b_1+b_2)] + [a_3(b_1+b_2)+b_3(a_1+a_2)]\sqrt{5}$

$\therefore$ "*" 对 "+" 满足左、右分配律 $\therefore$ 分配律成立

综上 $Z(\sqrt{5})$ 是关于实数加法和乘法的环.

7. 设 e 为 $\langle R,\oplus,\otimes\rangle$ 的单位元.

则 $\forall a\in R$

有 $a*e = a = a+e-ae$

$\Rightarrow e(a-1)=0$

$\therefore$ 实数 0 为 "*" 单位元

下证 R 在 "+", "*" 上构成群

先分析 "+"

$\because a\oplus b = b\oplus a = a+b-1$

$\therefore$ 交换律成立

$\because a\oplus 1 = a+1-1 = a$

$\therefore$ "+" 单位元为 1

$\because a\oplus(2-a) = 1$

$\therefore \forall a\in R$ 逆元为 $2-a$

$\because (a\oplus b)\oplus c = a\oplus(b\oplus c)$

$= a+b+c-2$

$\therefore$ 结合律成立.

$\because a\oplus b = a+b-1 \in R$

封闭性成立

$\therefore \langle R,+\rangle$ 为 Abel 群

$\because a\otimes b\otimes c = (a\otimes b)\otimes c$

$= a\otimes(b\otimes c)$

$= a+b+c-ab-ac-bc+abc$

$\therefore$ "*" 满足结合律.

又 $\because (a\oplus b)\otimes c = a\otimes c + b\otimes c$

$c\otimes(a\oplus b) = c\otimes a + c\otimes b$

故 "⊗" 对 "⊕" 分律

$\therefore$ 综上 R 为有单位元的环.

习题二：

1. 假设幺环 R 中存在元素 a.

满足 $a \cdot a^{-1} = e$

且 $a + b = 0$　　$(b \neq 0)$

则：有 $a^{-1}a = e$

$\Rightarrow a^{-1}ab = eb$

$\Rightarrow a^{-1}0 = b \Rightarrow b = 0$.

显然与条件中 $b \neq 0$ 矛盾

∴ 不存在 a 即是可逆元又是零因子

故. 幺环中可逆元一定不是零因子.

2、设 R 中存在右零因子 a.

则 $\exists b \in R$　$ba = 0$.

即 $\exists a \in R$.　$ba = 0$　$\Rightarrow$ R 中存在左零因子 b.

设 R 存在左零因子 b

则 $\exists a \in R$　$ba = 0$.

$\Rightarrow \exists b \in R$　$ba = 0$　$\Rightarrow$　R 中存在右零因子 a.

4. 设 R 为有 1 的有限环.

设 $\forall a \in R$　$a \neq 0$

∵ 环有限

∴ 考察 $a^1, a^2, a^3, \cdots a^n$. 中一定有重复

不妨设为 $a^m = a^n$　$(n > m)$

$\Rightarrow a^m(a^{n-m} - 1) = 0$.　下面考虑三种情况

① 若 $a^m = 0 \Rightarrow a \cdot a^{m-1} = 0$　若 $a^{m-1} \neq 0 \Rightarrow a$ 为零因子.
若 $a^{m-1} = 0 \Rightarrow a \cdot a^{m-2} = 0$. 经过有限次上述过程
可证明 若 $a^m = 0$. a 为零因子.

② 若 $a^{n-m} - 1 = 0 \Rightarrow a^{n-m} = 1$

∴ $a^1 \cdot a^{n-m-1} = 1$

故　$a^{-1} = a^{n-m-1}$，a 可逆

③ 若 $a^m \neq 0$ 且 $a^{n-m} \neq 1$

则考察 $a^m(a^{n-m} - 1) = 0$

$\Rightarrow a[a^{m-1}(a^{n-m} - 1)] = 0$.

若 $a^{m-1}(a^{n-m} - 1) \neq 0$

则 a 为零因子.

否则考虑 $a^{m-1}(a^{n-m} - 1) = 0$

$\Rightarrow a[a^{m-2}(a^{n-m} - 1)] = 0$

经过有限次上述后.

有 $k \in [1, m)$

$a^{m-k-1}(a^{n-m} - 1) \neq 0$

$a^{k}(a^{n-m} - 1) = 0$

故 a 为零因子

∴ 综上①②③.

非零元不是零因子就是可逆元