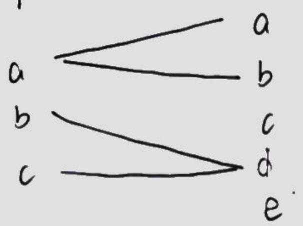
第二章（关系）· 习题一

(3) S是一个关系，且是定义在集合 $N\times N$ 到 $N\times N$ 的关系.

(4) R为A到B的关系矩阵如下：

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

关系图如下：



习题二

(2) ① R的矩阵如下：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$ 即 $R = I_A$

② $$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

③ ~~M~~ $R = \{ <1,2>, <2,3>, <1,3> \}$

④ $R = \{ <1,1>, <1,2>, <2,1> \}$.

(接上)，

3. 图一：自反性.

图二：自反性，传递性.

图三：自反性，对称性，传递性

图四：反自反性，反对称性.

P28 习题三.

(3) ① 先证 $R_1\circ(R_2\cup R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$

$\forall\langle a,c\rangle\in R_1\circ(R_2\cup R_3)$

有 $\langle a,b\rangle\in R_1$, $\langle b,c\rangle\in(R_2\cup R_3)$

不妨设 $\langle b,c\rangle\in R_2$ 有 $\langle a,b\rangle\in R_1$, $\langle b,c\rangle\in R_2$

$\Rightarrow\langle a,c\rangle\in(R_1\circ R_2)$ $\Rightarrow\langle a,c\rangle\in(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$

即 $R_1\circ(R_2\cup R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$ 得证.

再证 $(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)\subseteq R_1\circ(R_2\cup R_3)$

$\forall\langle a,c\rangle\in(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$

不妨设 $\langle a,c\rangle\in R_1\circ R_2$ $\Rightarrow\exists b$,满足 $\langle a,b\rangle\in R_1$, $\langle b,c\rangle\in R_2$

故 $\langle b,c\rangle\in(R_2\cup R_3)$

$\therefore\langle a,b\rangle\in R_1$, $\langle b,c\rangle\in(R_2\cup R_3)$ $\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R_1\circ(R_2\cup R_3)$

$\Rightarrow(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)\subseteq R_1\circ(R_2\cup R_3)$ 得证.

综上 $R_1\circ(R_2\cup R_3)=(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$.

② $\forall\langle a,c\rangle\in R_1\circ(R_2\cap R_3)$ 往证 $\langle a,c\rangle\in(R_1\circ R_2)\cap(R_1\cap R_3)$

$\because\forall\langle a,c\rangle\in R_1\circ(R_2\cap R_3)$

$\therefore\exists b$,满足 $\langle a,b\rangle\in R_1$, $\langle b,c\rangle\in R_2\cap R_3$.

$\therefore\langle b,c\rangle\in R_2$ 且 $\langle b,c\rangle\in R_3$

故 $\langle a,c\rangle\in R_1\circ R_2$ 且 $\langle a,c\rangle\in R_1\circ R_3$

$\therefore\langle a,c\rangle\in(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$

即 $R_1\circ(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$ 得证

5. 设 $\forall \langle a,b\rangle \in S$.

$\because$ S满足自反性.

$\therefore$ 一定有 $\langle a,a\rangle \in S$. $\langle b,b\rangle \in S$.

$\because \langle a,b\rangle \in S$. $\langle b,b\rangle \in S$ 且 S上满足传递性

$\therefore \langle a,b\rangle \circ \langle b,b\rangle = \langle a,b\rangle \in S\circ S$

$\therefore S \subseteq S\circ S$.

设 $\forall \langle a,b\rangle \in S\circ S$

则必存在 $c \in A$ 使 $\langle a,c\rangle \in S$

且 $\langle a,c\rangle \in S$. $\langle c,b\rangle \in S$.

又 $\because$ S满足传递性

$\therefore \langle a,b\rangle \in S$.

$\therefore S\circ S \subseteq S$

$\therefore$ 综上 $S = S\circ S$.

8. R的关系矩阵如下:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore R^0 = I_A$

$\therefore R^1 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\}$

$R^2 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle\}$.

$R^3 = \{\langle a,b\rangle, \langle c,b\rangle\}$

$R^n = \{\langle a,b\rangle, \langle c,b\rangle\} \ (n \geq 3)$ ~

第二章、习题四

1. (1) $\forall x \in r(R_1)$

$\because r(R_1) = R_1 \cup I$

$\therefore x \in I$ 或 R_1

$\because R_1 \subseteq R_2$

$\therefore$ 则有 $x \in R_2 \cup I_A$

$\therefore r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $\forall x \in S(R_1)$

往证 $x \in S(R_2)$

$\because S(R_1) = R_1 \cup R_1^{-1}$

$\therefore x \in R_1$ 或 $x \in R_1^{-1}$

$\because R_1 \subseteq R_2$

$\therefore R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$

$\therefore x \in R_2 \cup R_2^{-1}$

$\therefore S(R_1) \subseteq S(R_2)$ 成立

(3) $\forall x \in t(R_1)$

往证 $x \in t(R_2)$

$\because t(R_1) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

且 $R_1 \subseteq R_2$

$\therefore R_1 \circ R_1 \subseteq R_2 \circ R_1 \subseteq R_2 \circ R_2$

$\therefore R_1^2 \subseteq R_2^2$

由数学规纳法可知

$R_1^n \subseteq R_2^n$

$\therefore \bigcup_{i=1}^{n} R_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R_2$

即 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$ 得证.

3. (1) $\forall x \in r(R_1 \cup R_2)$

往证 $x \in r(R_1) \cup r(R_2)$

$\because x \in r(R_1 \cup R_2)$

$\therefore x \in (R_1 \cup R_2) \cup I \in (R_1 \cup I) \cup (R_2 \cup I)$

$\therefore x \in r(R_1) \cup r(R_2)$

即 $r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$

再设 $\forall x \in r(R_1) \cup r(R_2)$

往证 $x \in r(R_1 \cup R_2)$

$\because x \in r(R_1) \cup r(R_2)$

$\therefore x \in (R_1 \cup I) \cup (R_2 \cup I)$

$\therefore x \in (R_1 \cup R_2) \cup I$

即 $x \in r(R_1 \cup R_2)$

$\therefore r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

综上 $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$

(2) 设 $\forall x \in S(R_1 \cup R_2)$

证证 $x \in S(R_1) \cup S(R_2)$

$x \in S(R_1 \cup R_2)$

$\Leftrightarrow x \in (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1}$

$\Leftrightarrow x \in (R_1 \cup R_2) \cup (R_1^{-1} \cup R_2^{-1})$

$\Leftrightarrow x \in (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (R_2 \cup R_2^{-1})$

$\Leftrightarrow x \in S(R_1) \cup S(R_2)$

由"$\Leftrightarrow$"的真值表可知.

$S(R_1 \cup R_2) = S(R_1) \cup S(R_2)$

(3) 设 $\forall x \in t(R_1) \cup t(R_2)$

往证 $x \in t(R_1 \cup R_2)$

$\because x \in t(R_1) \cup t(R_2)$

$\therefore$ 不妨设 $x \in t(R_1)$

则 $\exists m \le n \quad (n = |A|)$

使 $x \in R_1^{m}$

$\because R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$

$\therefore (R_1)^m \subseteq (R_1 \cup R_2)^m$

$\Rightarrow x \in (R_1 \cup R_2)^m$

故 $x \in t(R_1 \cup R_2)$ 成立

$\therefore t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$

成立.

反例说明: $t(R_1 \cup R_2) \neq t(R_1) \cup t(R_2)$

设 $R_1 = \{\langle 1, 2\rangle\}$ $R_2 = \{\langle 2, 1\rangle\}$. $R_2 \cup R_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

则 $t(R_1) \cup t(R_2) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$t(R_1 \cup R_2) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$.

显然, $t(R_1 \cup R_2) \neq t(R_1) \cup t(R_2)$

第二章习题五

2. ① ∵ R是满足自反性

∴ $\forall a \in A$ $\langle a,a\rangle$, $\langle a,a\rangle \in R$

∴ $\langle a,a\rangle \in T$

∴ T亦满足自反性.

② $\forall \langle a,b\rangle \in T \Leftrightarrow \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle \in R$

$\Leftrightarrow \langle b,a\rangle, \langle a,b\rangle \in R \Leftrightarrow \langle b,a\rangle \in T$

∴ T满足对称性

③ $\forall \langle a,b\rangle \in T$, $\langle b,c\rangle \in T$

有 $\langle a,b\rangle$ $\langle b,a\rangle$, $\langle c,b\rangle$, $\langle b,c\rangle \in R$

又∵ R有传递性

∴ $\langle a,c\rangle$, $\langle c,a\rangle \in R$

∴ $\langle a,c\rangle \in T$

∴ T满足传递性

∴ 综上, T为等价关系.

3. ① ∵ $\frac{a}{a}=\frac{b}{b}$ $(a\neq 0)$ ∴ 均任意正整数.

∴ $\langle\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle\rangle \in R$

∴ R满足自反性.

② $\forall \langle a,b\rangle R \langle c,d\rangle$

有 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

∴ $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$

即 $\langle c,d\rangle R \langle a,b\rangle$ 成立

∴ R满足对称性

③ $\forall \langle a,b\rangle R \langle c,d\rangle$

$\langle c,d\rangle R \langle e,f\rangle$

有 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}=\frac{c}{d}$

∴ $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$

∴ $\langle a,b\rangle R \langle e,f\rangle$

∴ R满足传递性

综上①②③

得证 R为等价关系

4. ① 充分性.

设 $\langle a,b\rangle \in R$, $\langle a,c\rangle \in R \Rightarrow \langle b,c\rangle \in R$

往证 R为等价关系.

∵ $\langle a,b\rangle \in R$, $\langle a,c\rangle \in R$ 时

有 $\langle b,c\rangle \in R$

∴ 令 $c=a$ 有

$\langle a,b\rangle \in R$ $\langle a,a\rangle \in R$

则 $\langle b,a\rangle \in R$

∴ R有对称性.

∵ $\langle a,b\rangle \in R$, $\langle a,c\rangle \in R$ $\Rightarrow \langle b,c\rangle \in R$.

且 $\langle b,a\rangle \in R$

∴ $\langle b,a\rangle \in R$, $\langle a,c\rangle \in R$

$\Rightarrow \langle b,c\rangle \in R$

∴ R有传递性.

∴ 综上, 充分性得证

②必要性.
设R为等价关系 往证原蕴含式永真.

∵ $\forall \langle a,b\rangle \in R$, $\langle a,c\rangle \in R$

有 $\langle b,a\rangle \in R$. 且 R为有传递性

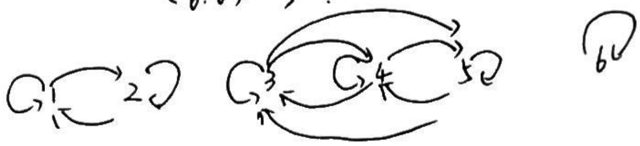
∴ $\langle b,c\rangle \in R$

∴原命题永真, ∴必要性得证.

7. 将原集合分块. 可分为 1个块, 2个块. 3个块.
若分为1个块 则 只有一个等价关系.
若分为 2个块 则有 $C(3,1)=3$ 种等价关系.
若分为 2个块 则有 $C(3,3)$ 种等价关系
分为3个块 则有 $C(3,3)$ 种 等价关系

共5种

8.
$R=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 6,6\rangle\}$



习题六.(第二章)

2. $\forall x_0 \in \langle P, \le\rangle$.
若 $x_0=a$ 则 $x_0 \ge a$
否则.若 $x_0 \ne a$. 则 x_0 不是极大元
必有 $\exists x_1, x_0 > x_1$.
若 $x_1=a$ 则 $x_0>a$
否则 $x_1 \ne a \Rightarrow \exists x_2, x_2 \le x_1$

∵ P有限
∴在随有限次选取后
会终止上述过程.
即 $\exists k$, 使
$x > x_1 > x_2 > x_3 \cdots > x_k = a$
即, $\forall x \in \langle P, \le\rangle$
有 $x \ge a$
∴有限偏序集中 极小元唯一 则a是最小元. 成立

12

4.

(1) 假设集合A存在2个最小上界 a, b.

则由最小上界的定义知

$a \le b$　　$b \le a$

又∵"≤"有反对称性.

∴ $a=b$.

故最小上界存在必唯一.

(2) 假设集合A存在2个最大下界 a, b

则由最大下界定义知.

$a \le b$.　$b \le a$

又∵ "≤" 有反对称性

∴ $a=b$

∴ 最大下界存在必唯一.

7.

法1. 反证法:

假设 $\langle A, \le \rangle$ 中不存在极大元.

则 A 中不存在一个元素, 使其他元素不大于他

即 $\forall x \in A$. 不存在 $b \in A$. $b > x$.

由极大元定义知: x 即为极大元.

∴ $\forall x \in A$. x 均为极大元.

与假设矛盾

∴ $\langle A, \le \rangle$ 中至少存在一个极大元 (同理可证至少存在一个极小元)

法2:

若 $\langle A, \le \rangle$ 中有最大(小)元.

则该最大(小)元必为极大(小)元.

若 $\langle A, \le \rangle$ 中无最元.

则任取 $x \in A$.

若 $\forall x_0 \in A$. $x_0 \ne x$

不存在 $x_0 > x$ 则 x 为极大元.

若 $\exists x_0 > x$ 则考虑剩余元素中.

若 $\forall x_1$, $x_1 \ne x_0 \ne x$, 都无 $x_1 > x_0$.

则 x_0 为极大元.

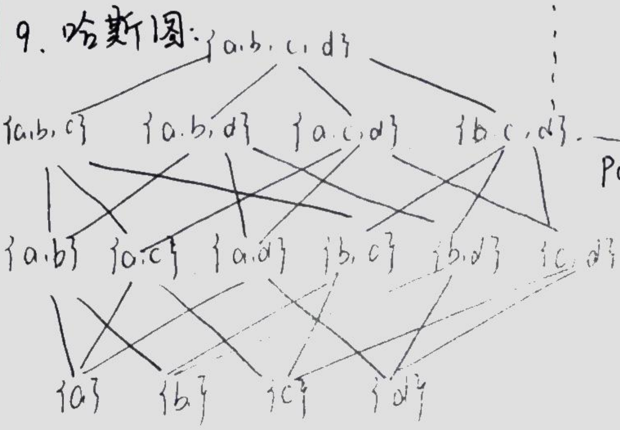
∵ $\langle A, \le \rangle$ 有限.

∴有限步后一定有 $x_k \in A$.

$\forall x_i \in A$. 无 $x_i > x_k$.

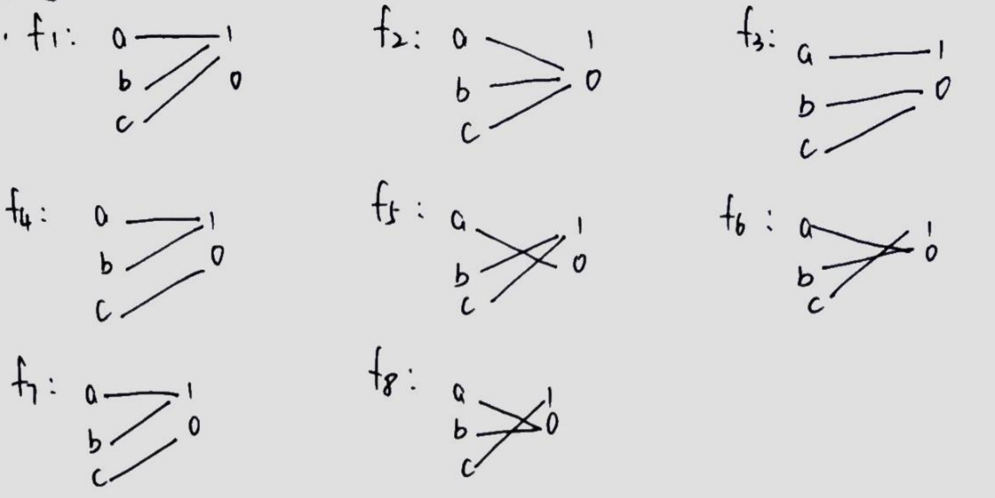
∴ x_k 为极大元.

9. 哈斯图:



P(A) = { {a}, {b}, {c}, {d},
{a,b}, {a,c}, {a,d}, {c,b},
{b,d}, {c,d},
{a,b,c}, {a,b,d}, {b,c,d},
{a,c,d}, {a,b,c,d} }.

习题七：

2.


单射：不存在．　满射：f_3. f_4. f_5、f_6, f_7、f_8．双射：不存在．

8. (1) 单射：$n!$ 种．　满射：$n!$　双射：$n!$

(2) 单射：$C_m^n \cdot n!$ ，满射．双射 不存在．

习题八：

2.(1)

∵ $g\circ f$ 为满射

∴ $\forall y \in C$,

$\exists x \in A$

使 $g\circ f(x) = y$

由函数的定义知

$\forall x_0 \in A$，总$\exists$ $f(x_0) \in B$

与之对应

∴ 一定有 $f(x) \in B$

记 $f(x)$ 为 a

则 $g\circ f(x) = g(f(x)) = g(a)$

故 $\forall y \in C$

有 $a \in B$　$g(a) = y \in C$.

∴ g 是满射 成立．

(2) ∵ $g\circ f$ 为单射

∴ $\forall x_1, x_2 \in A$.

$g\circ f(x_1) \neq g\circ f(x_2)$ 即 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$

∵ 不同象对应原像一定不同

∴ $f(x_1) \neq f(x_2)$

∴ $\forall x_1 \neq x_2$. $f(x_1) \neq f(x_2)$

∴ f 为单射

(3) 由(1)(2)知．当 $g\circ f$ 为双射时．f 为单射．g 为满射．

4. 由题知．$B = \{ f \mid f: A \to \{0,1\} \}$

不妨设 $g: A_1 \to f(A_1)$．　$A_1 \in P(A)$．$f(A_1) \in B$．

可建立如下对应法则：

∵ $A_1 \in P(A)$　$A_1 \in A$

∴ A_1 可看做是 A 中元素存在或不存在选择后的结果．

∵ $f_1: A \to \{0,1\}$　∴ $\forall x \in A$．$f(x) = 0$ 或 1．

不妨设若 $\forall x \in A$．$x \in A_1$．则 $f(x) = 1$．　$x \notin A_1$．$f(x) = 0$

再证

① g 为单射

不妨设 $\forall A_1, A_2 \in P(A)$

$A_1 \neq A_2$，f_1．f_2 为 A_1 A_2 的象

则一定存在 $x \in A_1$．$x \notin A_2$

(或 $x \in A_2$ $x \notin A_1$)

若 $x \in A_1$．$x \notin A_2$

则 $f_1(x) = 1$　$f_2(A_2) = 0$

$\Rightarrow f_1(x) \neq f_2(x)$

$\Rightarrow \forall A_1 \neq A_2 \in P(A)$．$f_1 \neq f_2$

∴ $g(x)$ 为单射成立．

② ∵ $|P(A)| = 2^n$　($|A| = n$)

$|B| = 2^n$

∴ $|P(A)| = |B|$

又∵ g 为单射

∴ g 为满射成立

综上：g 即为单射．又是满射

∴ g 为双射