图　论

- 图—基本概念
  - 图、路与连通、最短路、有向图、图的矩阵
- Euler图与Hamilton图
- 树
  - 树、生成树、有向树
- 平面图　图的着色
  - 平面图、对偶图、顶点着色、面着色
- 网络　匹配　独立集

图　论

- 图—基本概念
  - 图、路与连通、最短路、有向图、图的矩阵
- Euler图与Hamilton图
- 树
  - 树、生成树、有向树
- 平面图　图的着色
  - 平面图、对偶图、顶点着色、面着色
- 网络　匹配　独立集

图的矩阵表示

- ❖关联矩阵(有向图/无向图)，$A(G)$/A(D)
- ❖邻接矩阵(有向图/无向图)，$X(G)$/ $X(D)$
- ❖路径矩阵，$P(G)$

无向图的关联矩阵

❖ **定义1** 设G是一个无自环的图，$n\times m$矩阵 $A(G)=(a_{ij})_{n\times m}$称为$G$的关联矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{关联于}e_j, \\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$$

❖ n是图G顶点个数，m是图G的边的条数。

无向图的关联矩阵

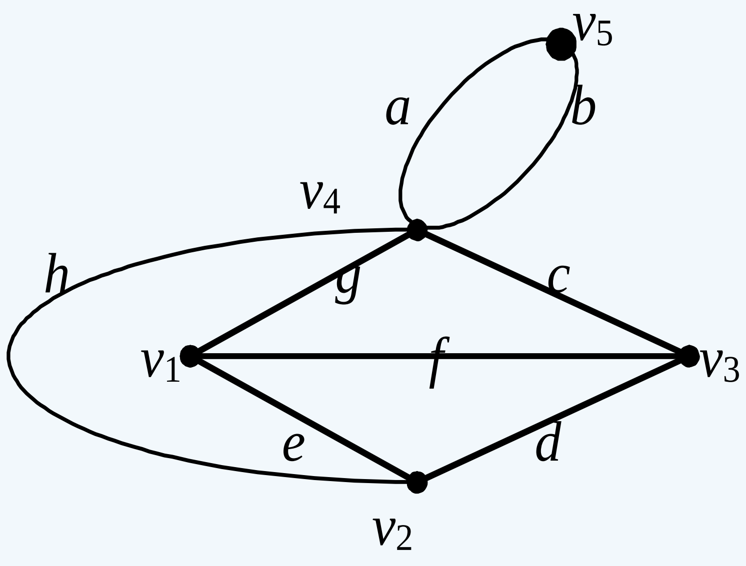


图 G

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \end{array}$$

图G的关联矩阵的性质？

无向图的关联矩阵

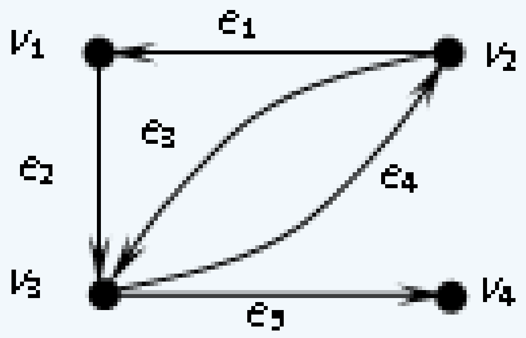
图G的关联矩阵有下列性质：

- （1）G中每一边关联两个顶点，所以$A(G)$中每一列恰好有两个1；
- （2）每一行中1的个数是对应顶点的度数；
- （3）平行边对应的列全同；
- （3）若G有两个分支G_1，G_2，则适当调整顶点及边的顺序，可使关联矩阵呈块对角形

$$A(G)=\begin{bmatrix} A(G_1) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{bmatrix}$$

有向图的关联矩阵

$D = < V, E >$ $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$



$$A(D) = (a_{ij})_{n\times m} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{为}e_j\text{的起点} \\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联} \\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

$$A(D) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, m$

(2) 每行中1的个数是该点的出度，-1的个数是该点的入度。

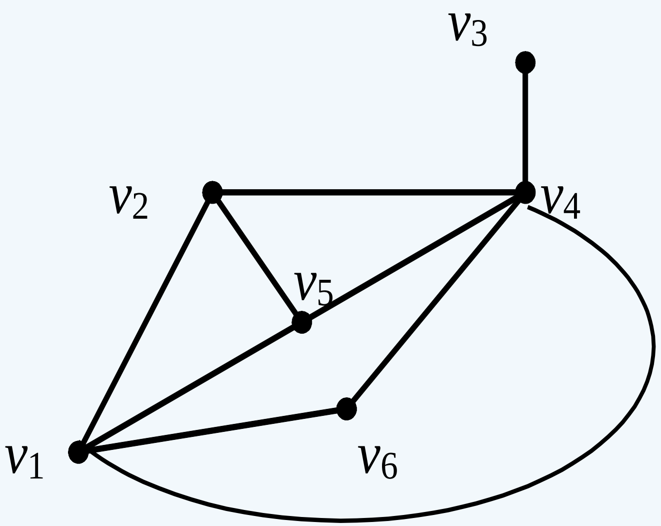
无向图的邻接矩阵

❖ **定义 2** 设G是无多重边的图，$n\times n$矩阵 $X(G)=(x_{ij})_{n\times n}$称为图$G$的邻接矩阵，其中

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}v_j\text{相邻}, \\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$$

❖ $X(G)$是对称矩阵。

无向图的邻接矩阵



图

$$X(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

图G的邻接矩阵的性质？

多选题 3分

设置

无向图G的邻接矩阵的性质有下列哪些条？

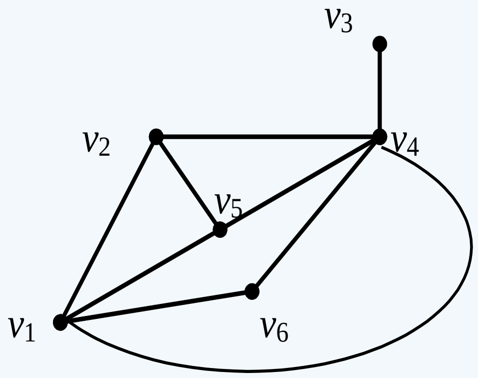
A 矩阵中1的个数就是图中边的条数

B 矩阵中1的个数就是所有顶点的度数之和

C 每一行中的1的个数是对应顶点的度数

D 矩阵是对称的矩阵

E 矩阵中的每个1都代表有一条对应顶点之间的通路（路径）



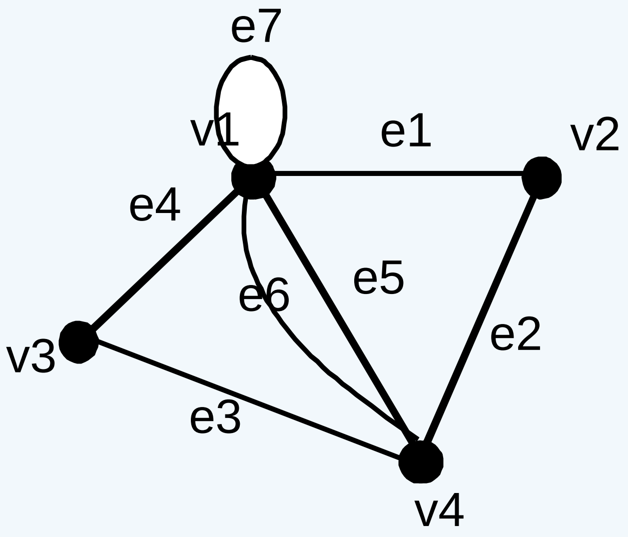
图

$$
X(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix} \end{array}
$$

提交

无向图的邻接矩阵

若G是有多重边或自环的图，邻接矩阵将如何定义？



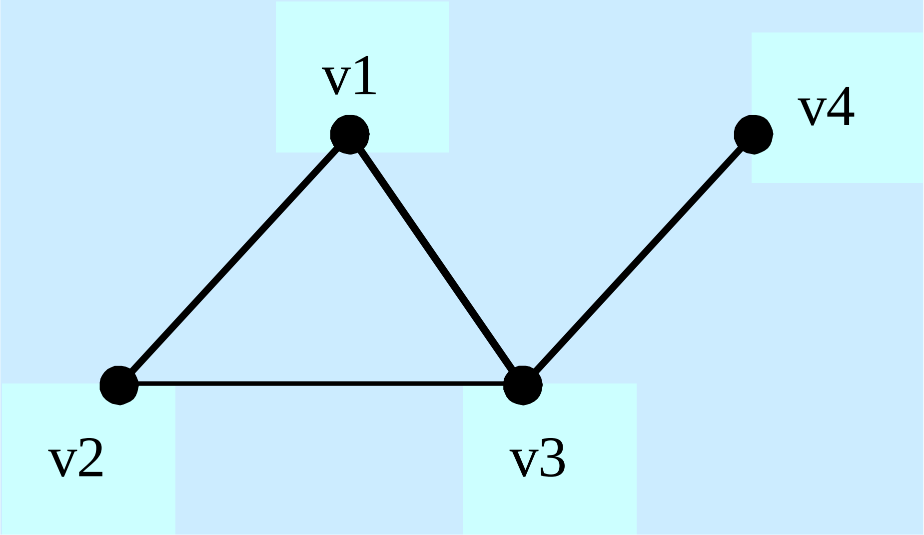
e7自环

e5,e6平行边

$$
X(G) = \begin{array}{c} \\ V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V1 & V2 & V3 & V4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

无向图的邻接矩阵

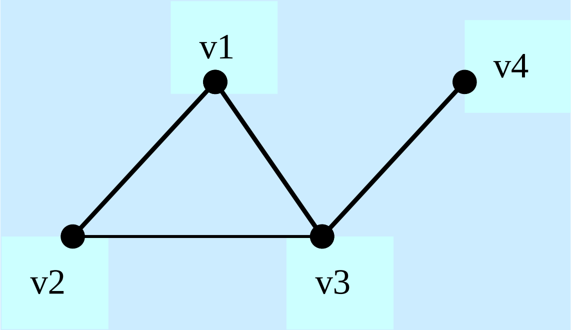
无向图的邻接矩阵的计算



G

$$X(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

无向图的邻接矩阵



G

$$X^2(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_{3,3}^{(2)} = 3$?

v3到v3的长度为2的回路有三条:

V3v1v3; v3v2v3; v3v4v3

$x_{2,4}^{(2)} = 1$?

v2到v4的长度为2的通路有一条:

V2v3v4;

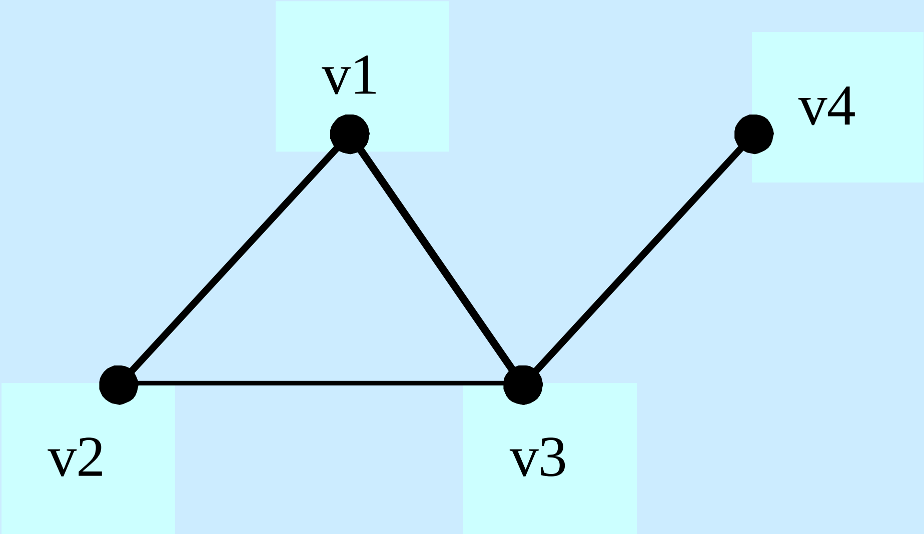
❖ **定理1(无向图的通路条数的计算)**

设G是一个简单图，X是G的邻接矩阵，

令 $X^{L} = (x_{ij}^{(L)})$。则$x_{ij}^{(L)}$ 等于顶点v_i，v_j之间

长度为L的通路（路径）数目。

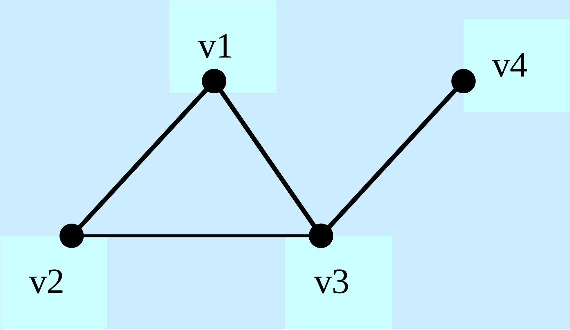
无向图的邻接矩阵



G

$$X(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

无向图的邻接矩阵



$$X^2(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{3,3}^{(2)} = 3\,?$$

v3到v3的长度为2的回路(通路)有三条:

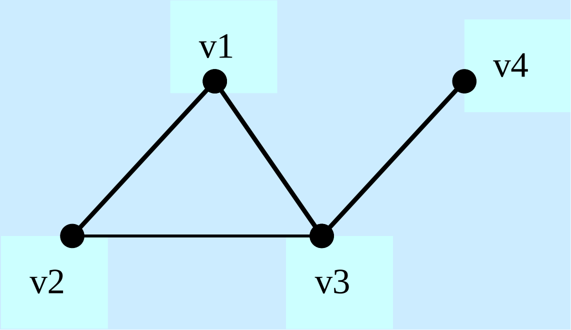
V3v1v3; v3v2v3; v3v4v3

$$x_{2,4}^{(2)} = 1\,?$$

v2到v4的长度为2的通路有一条:

V2v3v4;

无向图的邻接矩阵



$$X^3(G) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_{3,3}^{(3)} = 2$? $V_3V_1V_2V_3$ $V_3V_2V_1V_3$

$x_{3,4}^{(3)} = 3$? $x_{1,3}^{(3)} = 4$? $x_{4,4}^{(3)} = 0$?

长度为3的回路总数？ 2+2+2=6

长度为2的通路（除回路之外）总数？ 10

长度为3的通路（包括回路）总数？ $\sum X^3_{ij}(G)=38$

无向图的邻接矩阵

❖ 定理1的证明

对通路长度L进行归纳证明。

当L=1时，由邻接矩阵的特性可知命题成立。

当L=2时，由前面的例题可知命题成立。

假设当L=k时命题成立。

分析L=k+1时

无向图的邻接矩阵

❖ **定理1的证明**

$A^{k+1} = A^k \cdot A$

而 $a_{ij}^{(k+1)} = a_{i1}^{(k)} \cdot a_{1j} + a_{i2}^{(k)} \cdot a_{2j} + \ldots + a_{in}^{(k)} \cdot a_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k)} \cdot a_{lj}$

由归纳假设可知 $a_{il}^{(k)}$ 是 A^k 的第 (i,l) 项，表示从顶点 v_i 到顶点 v_l 长度为 k 的通路数。

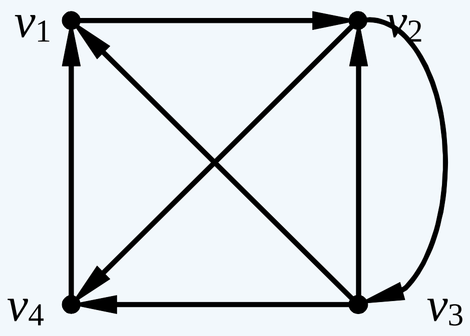
在上述归纳的基础上，$a_{il}^{(k)} \cdot a_{lj}$ 表示由顶点 v_i 经过顶点 v_l 到达顶点 v_j 长度为 $k+1$ 的通路。

所以，$\sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k)} \cdot a_{lj}$ 表示第 (i,j) 项，即从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k+1$ 的通路数目。

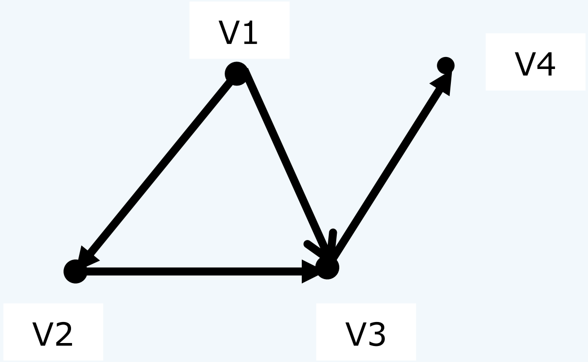
结论得证。

有向图的邻接矩阵

在有向图中，邻接矩阵中的元素代表路径的数目



D1

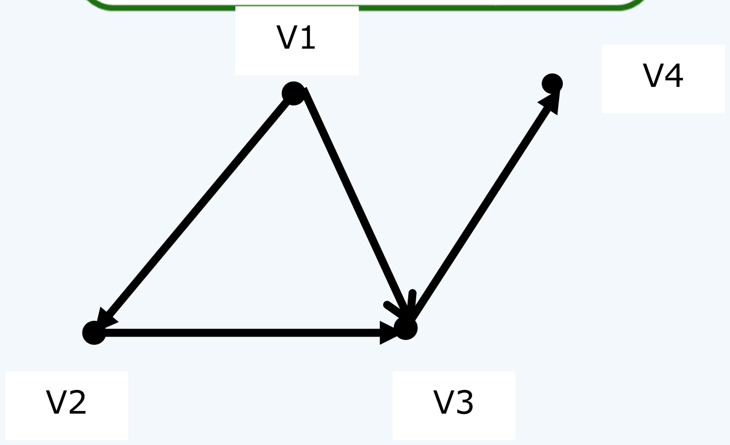


D2

$$X(D1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X(D2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵



$$X(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D2

$$X^2(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^3(D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{1,4}^{(3)} = 1\,?$$

v1v2v3v4

上节课总结

1、最短路算法，标号法，Dijkstra’s Algorithm-迪杰斯屈拉

2、有向图；有向弧（边），可达，双向连通，强连通图，单向连通，弱连通，竞赛图等

3、图的矩阵表示

❖ 图G的关联矩阵, $A(G)$

❖ 无向图G的邻接矩阵, $X(G)$：可以计算通路数

❖ 有向图D的邻接矩阵, $X(D)$：可以计算有向通路数

邻接矩阵的运算可以解决图中通路（回路）条数的计算。

❖ 图G的路径矩阵, $P(G)$：可以计算一个图是否是连通图

多选题 4分

设置

关于最短路算法(迪杰斯屈拉算法)，下列论述正确的有：

A 算法的时间复杂度是O（n^3）

B 算法的每次运行可以求出任意顶点到其他顶点的最短通路长度

C 对算法稍作改造可以求取带权图中顶点之间的最长距离

D 算法结束时的顶点标号就是到达该顶点的最短通路长度

E 算法不能正常结束说明图中指定两顶点间的最短通路不存在

F 算法可以解决有向图中指定两顶点间的最短通路问题

提交

多选题 5分

设置

关于图的邻接矩阵的性质，下列哪些论述是正确的。（多选）

A 无向图的邻接矩阵是对称矩阵

B 有向图的邻接矩阵也是对称矩阵

C 有向图的邻接矩阵中的元素可以是0，1，-1

D 邻接矩阵的L次方中的非零元素代表了对应顶点的通路数目（回路）

E 有向图的邻接矩阵中1的个数等于图中有向边的条数

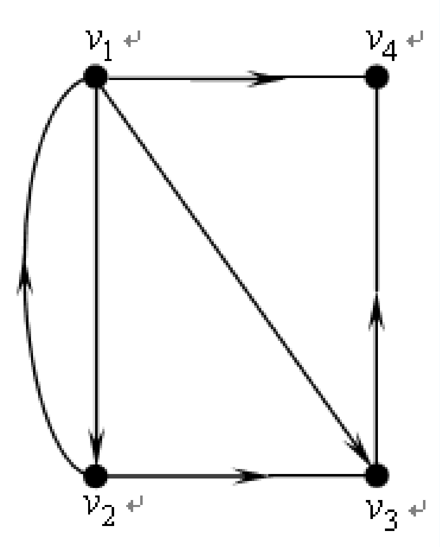
F 无向图的邻接矩阵除对角线元素外全为1，说明该图是完全图

提交

多选题 3分

设置

利用邻接矩阵，求解下列问题：



$$D = <V, E>$$

长度为2的通路总数是多少？

A 5

B 7

长度为3的通路总数是多少？

C 4

D 7

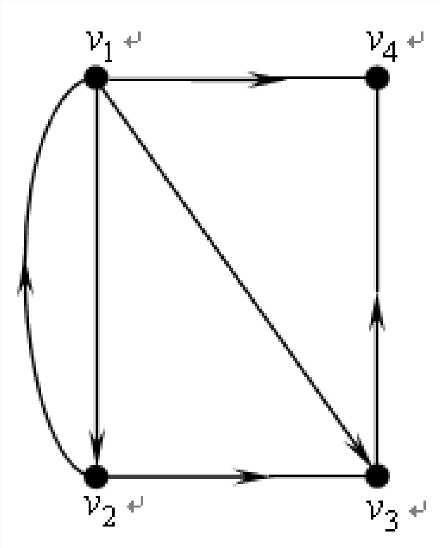
长度为4的通路总数是多少？

E 3

F 7

提交

有向图的邻接矩阵



$$D = < V, E >$$

利用邻接矩阵，求解下列问题：长度为2，3，4的通路总数分别是多少？

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以：长度为2，3，4的通路总数分别是7,7,7

路径矩阵

❖ **定义 3**

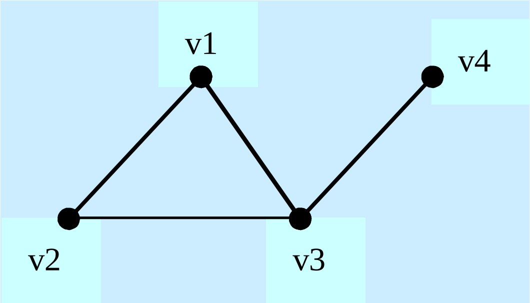
设G是一个无平行边的图，$n \times n$矩阵

$P(G) = (p_{ij})$称为G的路径矩阵，其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{存在}(v_i,\ v_j)\text{路}, \\ 0, & \text{否则。} \end{cases}$$

❖ **G是连通图 $\Leftrightarrow$ $P(G)$中元素全为1。**

路径矩阵



G

$$X(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$X^2(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&3&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$X^3(G)=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&3&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4&1\\3&2&4&1\\4&4&2&3\\1&1&3&0\end{bmatrix}$$

$$P(G)=X(G)\vee X^2(G)\vee X^3(G)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

G是连通图 $\Leftrightarrow$ $P(G)$中元素全为1。

习题

习题1 证明 若G不连通，则～G连通。

解：∵ G不连通 ∴$\omega(G)\geq 2$ 设其中一个连通分支为$G1=<V1,E1>$且 $V1,V2=V-V1$都非空

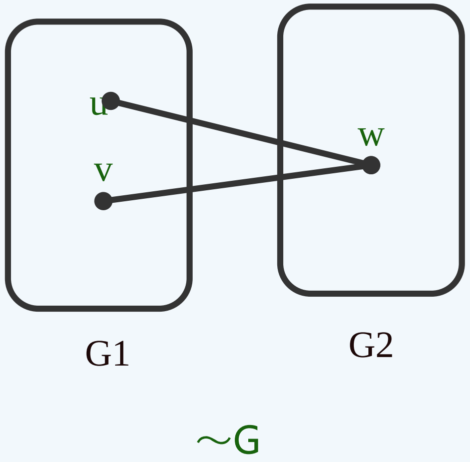
取$\forall u, v\in V$(在G中任取两个顶点) 则u,v在～G一定是连通的。

（1）若$u\in V1, v\in V2$；∵ u, v在G中分别属于不同的分支， ∴ u, v在G中不连通

∴在～G中u, v一定有边连接； ∴ u, v在～G连通。

（2）若u，$v\in V1$（或V2），取$w\in V2$；则边uw，wv在～G一定存在，

∴在～G中有通路uwv， ∴ u, v在～G连通。



习题

习题2 如果一个简单图G与它的补图～G同构，则称G是自补图。 证明：若n阶无向简单图是自补图，则 n=0,1(mod 4) 即n=4k或n=4k+1（k为正整数）。

证明: ∵ G是自补图 ∴ G≌ ～G ∴ G和 ～G 的边的条数相等。

设G的边数为m; ∵ G与～G的并使完全图Kn

∴n(n-1)/2=2m ∴ $m=\frac{n}{4}(n-1)$

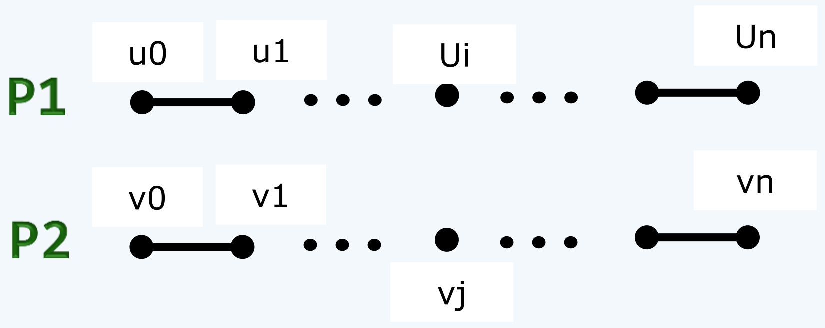
m是自然数 ∴ n=4k或n=4k+1（k为正整数）

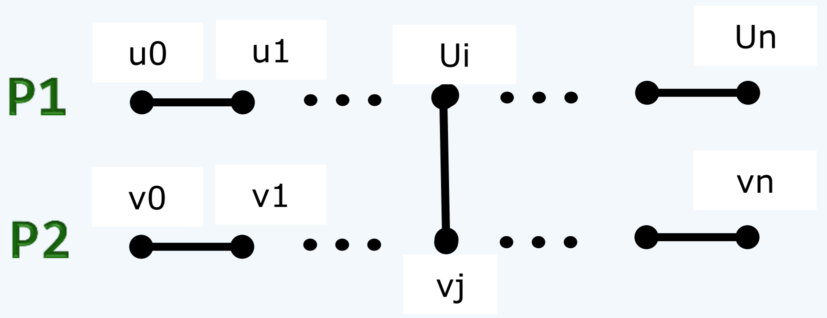
习题

习题3 证明 连通图G中，任意两条最长路必有公共顶点。

证明 路顶点均不相同的通路。

设P1：$u_0u_1u_2…u_n$ ；P2：$v_0v_1v_2…v_n$是两条不同的最长路





取ui ∈V（P1），vj ∈V（P2）∵G是连通的 ∴Ui与Vj是连通的；即Ui与Vj有通路存在

如果 Ui≠Vj 则P（ui，vj）≥1 则存在长度大于P1,P2的通路：u0u1u2…uivj…vn 或v0v1v2…viui…Un或 。。。

∴Ui=Vj 即P1与P2有公共顶点。

习题

习题4 证明 若e在G的某回路中，则e在G的某圈中。

证明：设C是e所在的某回路；若回路中有相同的边（如下图1），此时的回路C可以表示成图2，则删除相同的边及多余回路，只保留一条包含边e的回路C1；如C1中仍有重复的边做同样处理。直至没有相同的边。（但还不一定是圈，还要看顶点是否相同）

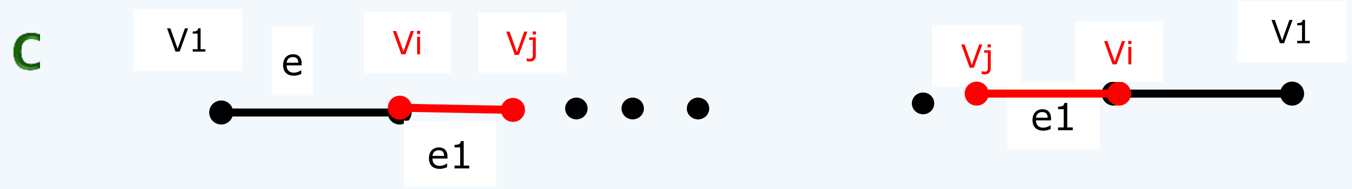


图1

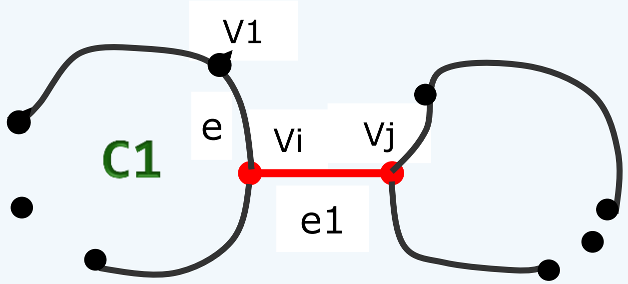
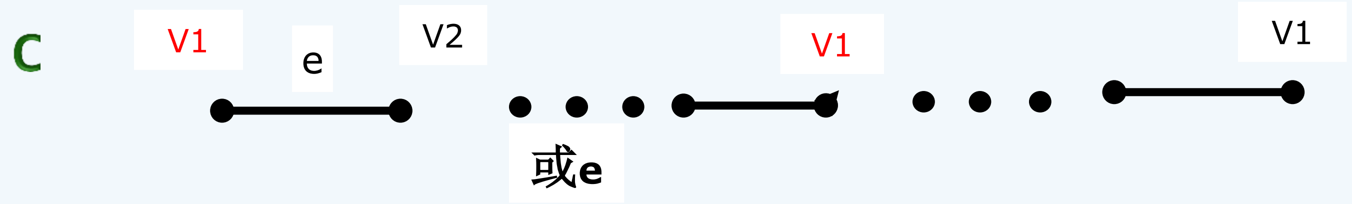


图2

习题

若回路中没有相同的顶点，回路C就是存在的圈。

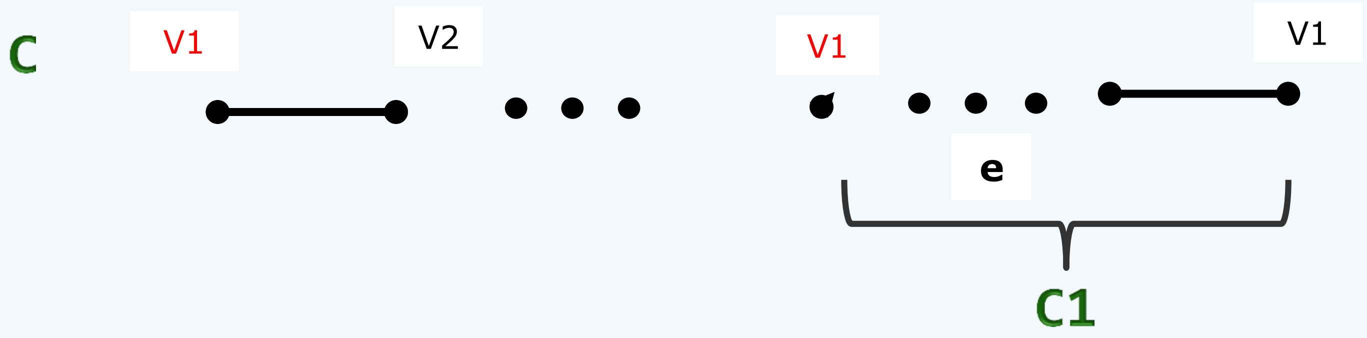
若回路中有相同的顶点；且边e出现在相同顶点间通路上，即：



则从C中取v1到v1节，即构成圈；

习题

若相同的顶点间的通路上没出现边e，而e又必须在回路C中，所以删除相同顶点间的通路仍能构成含有边e的回路C1，对新回路C1做同样上述分析处理，最终一定能找到含边e的圈。



∀∃∅∩∪⊆⊂⊄∉∀∈≤≥…ℵ∑{ }≡±°∞

αβσρυωζψηδεφλμπΔθ±∏∧∨∀ }.∴.√⊃

≌≈∽∞⊇∩∪℃‰≥≤∵∏∈∑≮≯½¼§¥{}?±

↔∨∧¬→←⇒⇔↓↑Λ⊕≠⊙— 〈〉

☆★▿≮≯⌒∵∴∪∩≠–— 〃

// ∴ ∵ ∷ ⊥ ↘ ↗ ↙ ↖ √

〔 ⌈–⌋ ÷×·º·‹2, b›⏟⏞Φ