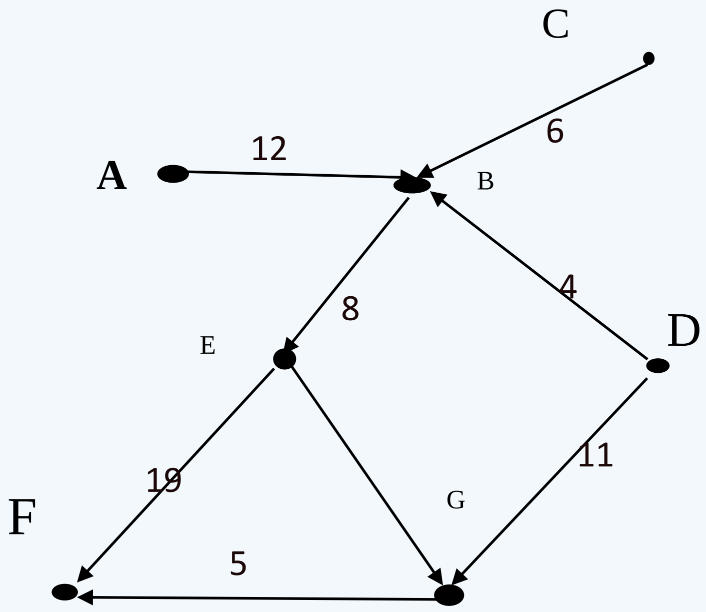
图　论

- 图—基本概念
  - 图、路与连通、最短路、有向图、图的矩阵
- Euler图与Hamilton图
- 树
  - 树、生成树、有向树
- 平面图　图的着色
  - 平面图、对偶图、顶点着色、面着色
- 网络　匹配　独立集

网络模型

- 定义：N=⟨V,U⟩为**带权有向图**，存在X,Y⊆V,满足X∩Y=Φ ，X的所有顶点的入度为0，Y中的所有顶点的出度为0，则称N为网络。
- X中的顶点称为源点，Y中的顶点称为聚点（汇点），其它顶点称为中间点，N上的权值函数称为容量函数，一条弧a=<i,j>的权值称为的容量，记为c(a)或c(<i,j>)，或c(i,j)，

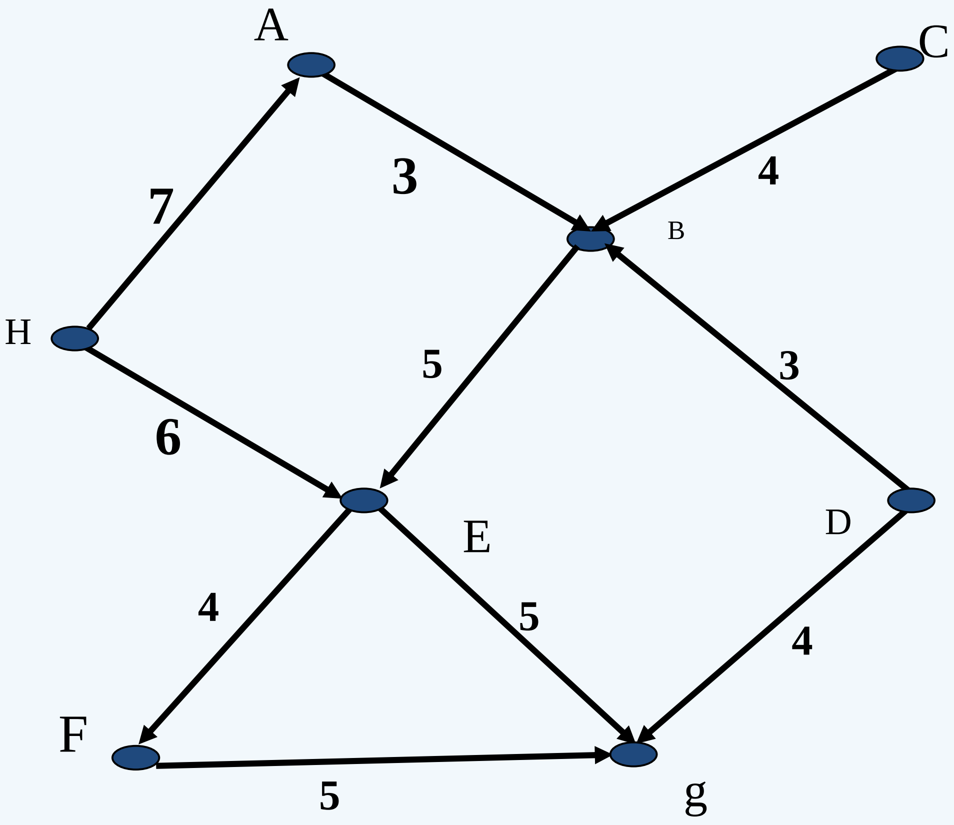


源点集 X={A,C,D}

聚点集 Y={F}

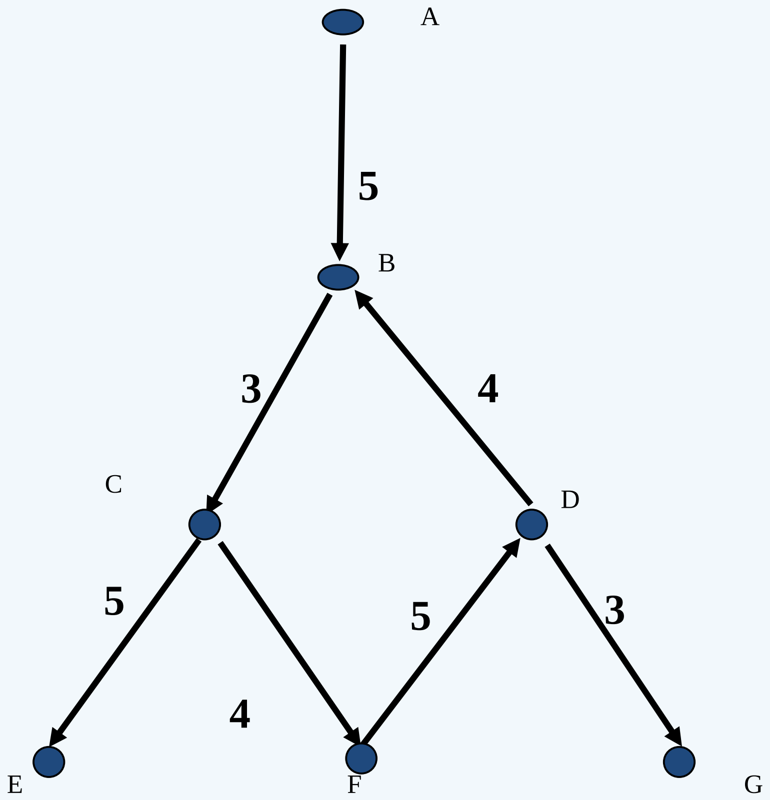
B,E,G为中间点

网络模型



X={C,D,H}

Y={g}



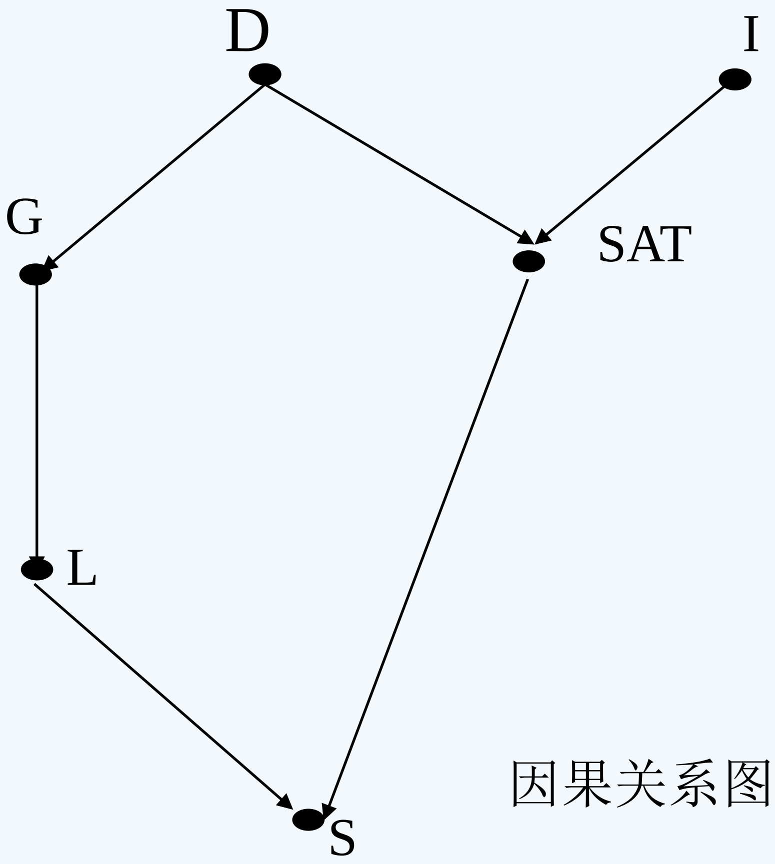
X={A}

Y={e,g}

其中，
节点D:Difficulty;
节点I:Intelligence;
节点G:Grade;
SAT:Scholastic Assessment Test
节点L:Letter
节点S:School

CPT表为：

- P(D) = 0.5
- P(I) = 0.2
- P(SAT|D, I) = 0.9
- P(G|D) = 0.4
- P(L|G) = 0.6
  - P(S|L) = 0.1



因果关系图 例

网络模型

- 如果|X|=|Y|=1，即网络有一个源点，一个聚点的网络，中间点记为I
- N=⟨V,U⟩为一个源点，一个聚点的网络,f为权重函数,V1,V2⊆V, <V1,V2>表示起点在V1中 终点在V2中的的弧的集合,则
- F(V1,V2)= $\sum_{a\in<v1,v2>} f(a)$;若 V1={i},则F(V1,V2)简记为 F(i,V2),同样F(V1,i) 。

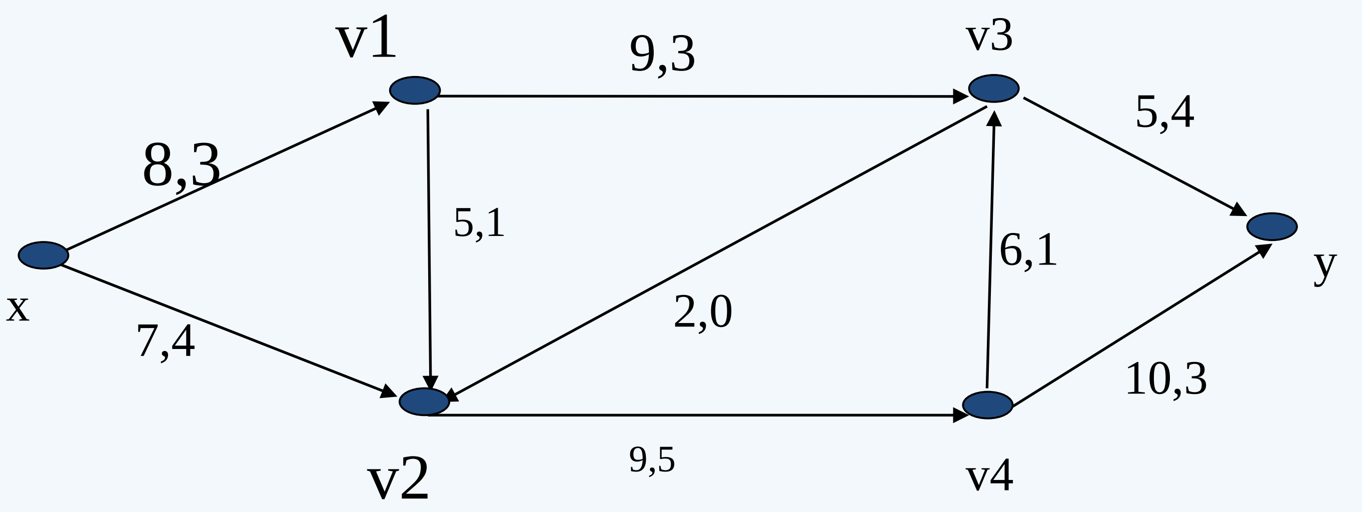
网络模型

- 定义 f为网络N=⟨V,U⟩的弧集上U的实数值函数,
- 如果函数f满足:

  (1)容量约束条件,$0 \le f(i,j) \le c(i,j) \quad \forall <i,j> \in U$;

  (2)守恒条件,$f<i,V> = f<V,i>$, $\forall i \in I$

  则称函数为网络N的一个容许流,简称为流.

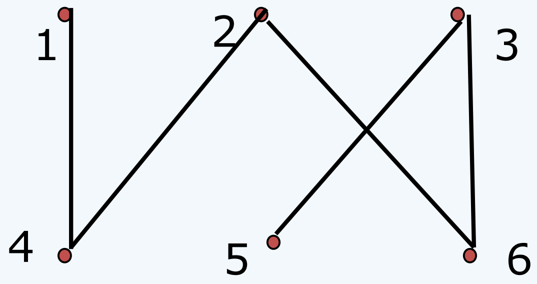


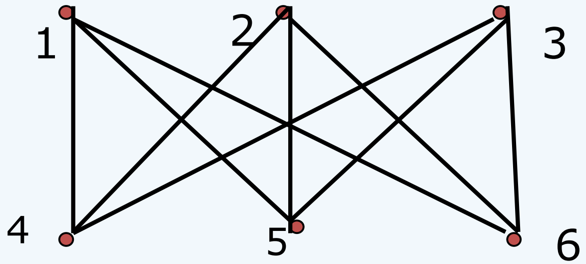
二分图的匹配与最大匹配

❖ 定义: 简单无向图G=⟨V,E⟩称为二分图,

如果V可划分为两个子集X和Y使得E中每条边的二端点都分别属于X,Y.二分图G常记为 G=⟨X,E,Y⟩.

❖ 二分图G=⟨X,E,Y⟩称为完全二分图,如果X的每一点都与Y的每一点邻接,完全二分图常记为$K_{m,n}$,其中, m=|X|, n=|Y|.

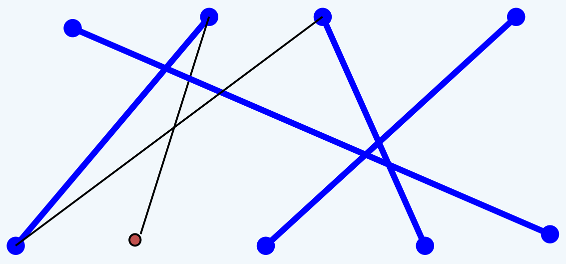




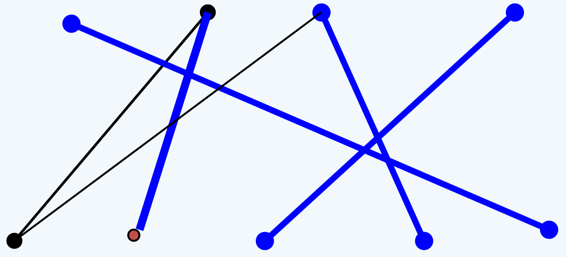
二分图的匹配与最大匹配

- 定义:(二分) 取图 G=⟨X,E,Y⟩ 的边集E的子集M, M⊆E，如果M的任意二边都没有公共端点;称M为G的一个匹配（又称对集），
- G中边数最多的匹配称为最大匹配(不唯一);
- 含有G的所有顶点的匹配称为完美匹配(必为最大匹配仍不唯一).
- 下面是最大,完美匹配的例子(用粗线表示):

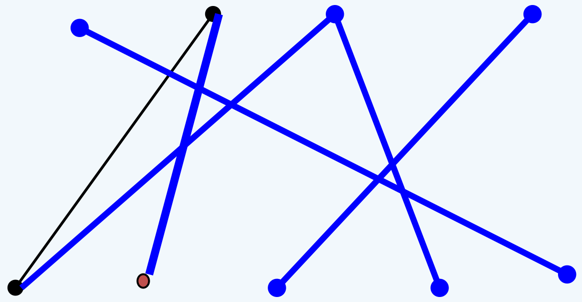
二部图的匹配与最大匹配



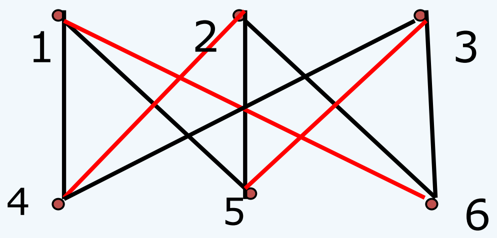
匹配　　最大匹配

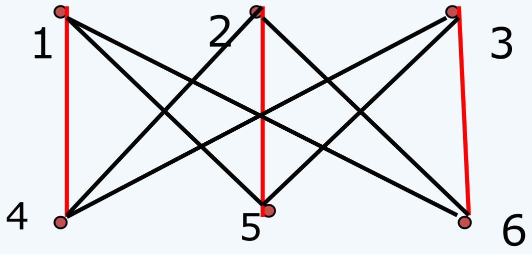


匹配　　最大匹配



边有公共顶点不是匹配　不是最大匹配

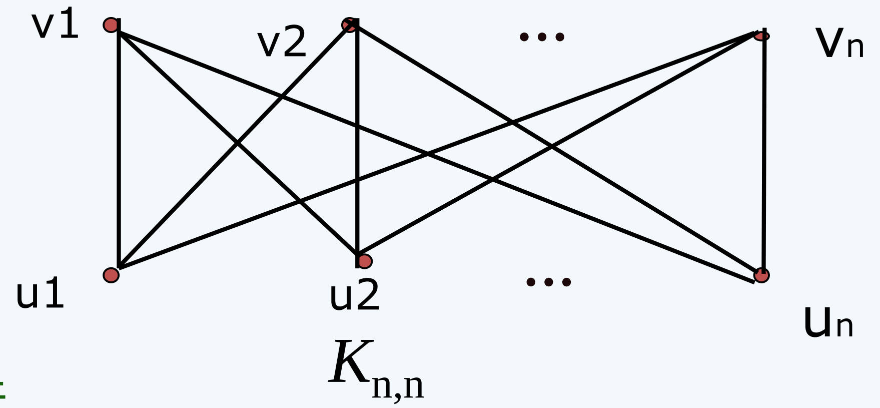




匹配　　最大匹配　　完美匹配

二分图的匹配与最大匹配

❖ **例 完全二分图 $K_{n,n}$=⟨X,E,Y⟩ 存在完美匹配，求$K_{n,n}$的不同完美匹配数。**



设$K_{n,n}$的不同完美匹配数为f（n）

f（1）=1

在中选择一个顶点v1，可供选择的有n种 ，

v1一旦选择一个顶点，剩余还需要对其余的n-1个顶点

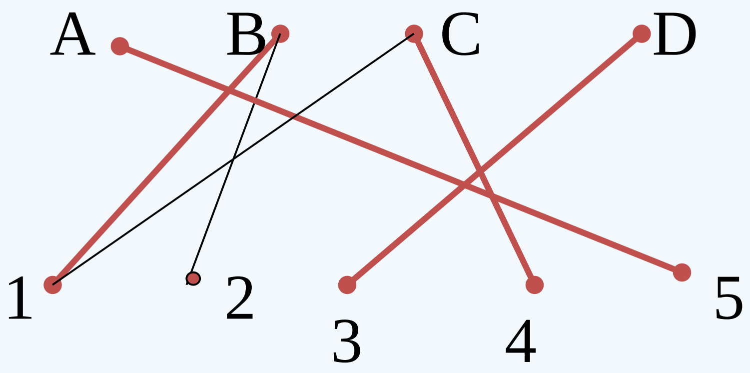
进行选择，即对子图$K_{n-1,n-1}$再做匹配选择，有f（n-1）种方法

所以f（n）=n × f（n-1）=n ×（ n-1 ）× f（n-2）=。。。

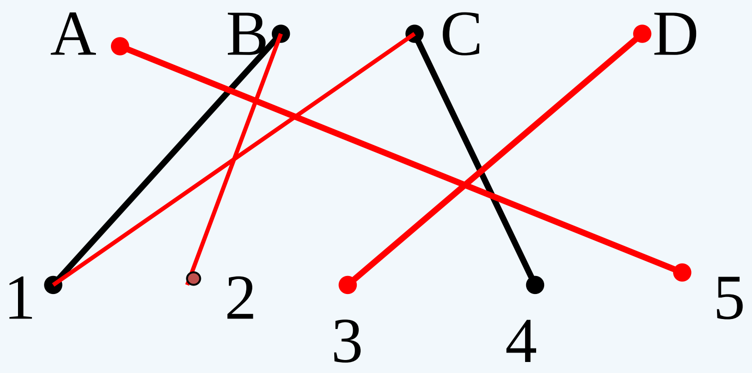
=n！

工作分配问题

- 问题 某研究室有4位教师:A,B,C,D. A能教课程5; B能教1,2; C能教1,4; D能教课程3.能否适当分配他们的任务,使4位教师担任4门不同课并且不发生安排教师教他不能教的课的情况?
- 此问题可归结为二分图的数学模型: G=⟨{A,B,C,D},E,{1,2,3,4,5}⟩,(X,y)∈E, 如果X能教y. 一个满足要求的工作分配正是一个含有4条边的一个最大匹配.



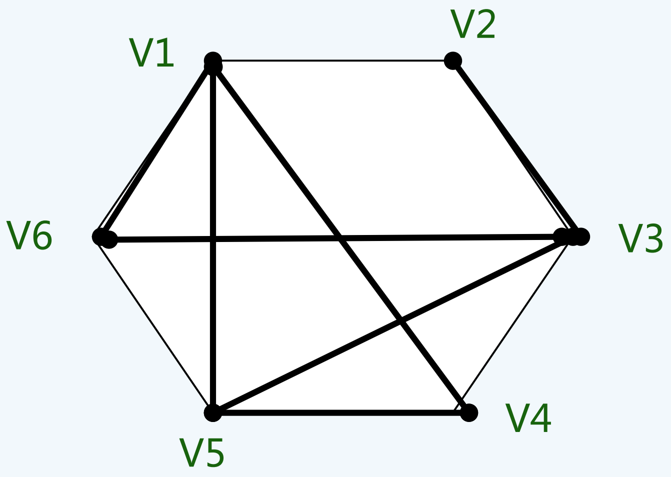
最大匹配



最大匹配

独立集

❖ 定义: 简单无向图G=⟨V,E⟩，S⊆V ,如果S中的任意两个顶点在G 中都不相邻接，称S为G独立集, 二分图的独立集是V1或V2



S= {v2, v4}　{v2, v5}　{v2, v6}　{v1, v3}

S= {v2, v4, v6}

∀∃∅∩∪⊆⊂⊄∉∀∈≤≥…ℵ∑﹜﹜≡±°∞

αβσρυωζψηδεφλμπΔθ±∏∧∨∀ }∴√⊃

≌≈∽∞⊇∩∪℃‰≥≤∵∏∈∑≮≯½¼§¥{}?±

↔∨∧¬→←⇒⇔↓↑Λ⊕≠⊙— 〈〉

☆★▽≮≯⌒∵∴∪∩≠–— 〃

// ∴∵∷⊥↘↗↙↖√

〔「–」÷×·º·‹2, b›⏝⏠Φ