Discrete Mathematics

回头看

$\langle R, +, \cdot\rangle$ 是一个代数系统，

（1） $\langle R, +\rangle$ 是一个Abel群.

（2） $\langle R, \cdot\rangle$ 是一个半群.

（3） $\cdot$ 对 $+$ 满足分配律，即

$$a\cdot(b+c) = (a\cdot b) + (a\cdot c)$$

$$(b+c)\cdot a = (b\cdot a) + (a\cdot c)$$

整数环 、高斯环 、模m剩余环 、**零环**

回头看

有单位元、无零因子的交换环称为整环

设R是一个有 1 的环， $R^*(\hat{R} = R - \{0\} \neq \phi)$

如果〈R*，·〉是一个群，则称R^*为除环，

可交换的除环称为域

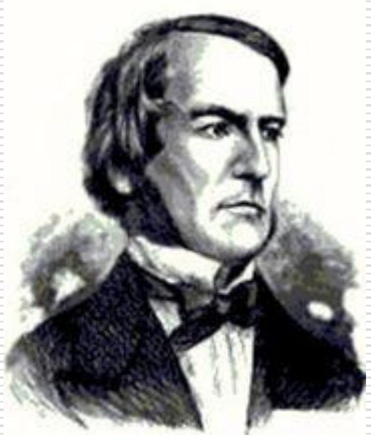
有限整环必为域. （域就是一种特殊的环。）

若p为素数，则〈**Z**p，$+p$，$\times p$〉为域.

Chapter 7

格与布尔代数

Lattices &Boolean Algebra



半加器 half adder

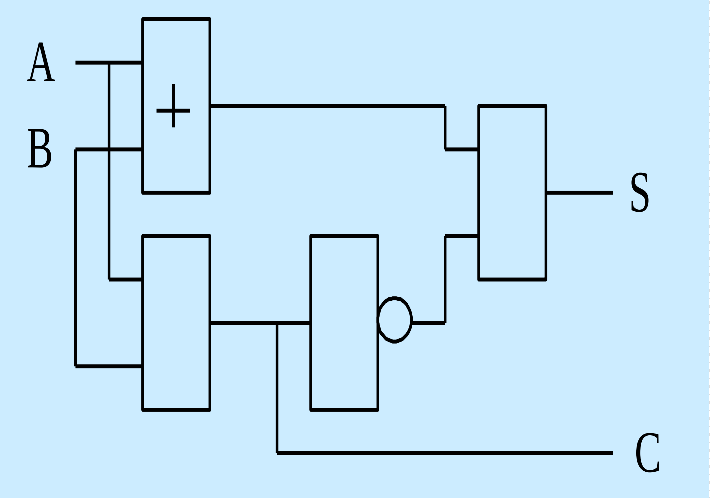
（一位加法器）

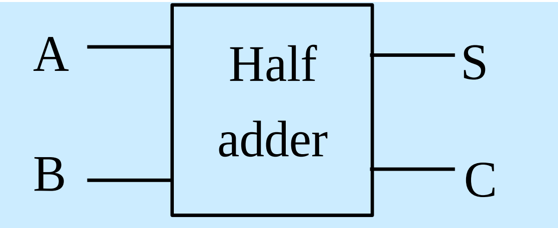
〈R，+，·〉代数系统

输入 A B	输出 S C
0 0	0 0
0 1	1 0
1 0	1 0
1 1	0 1

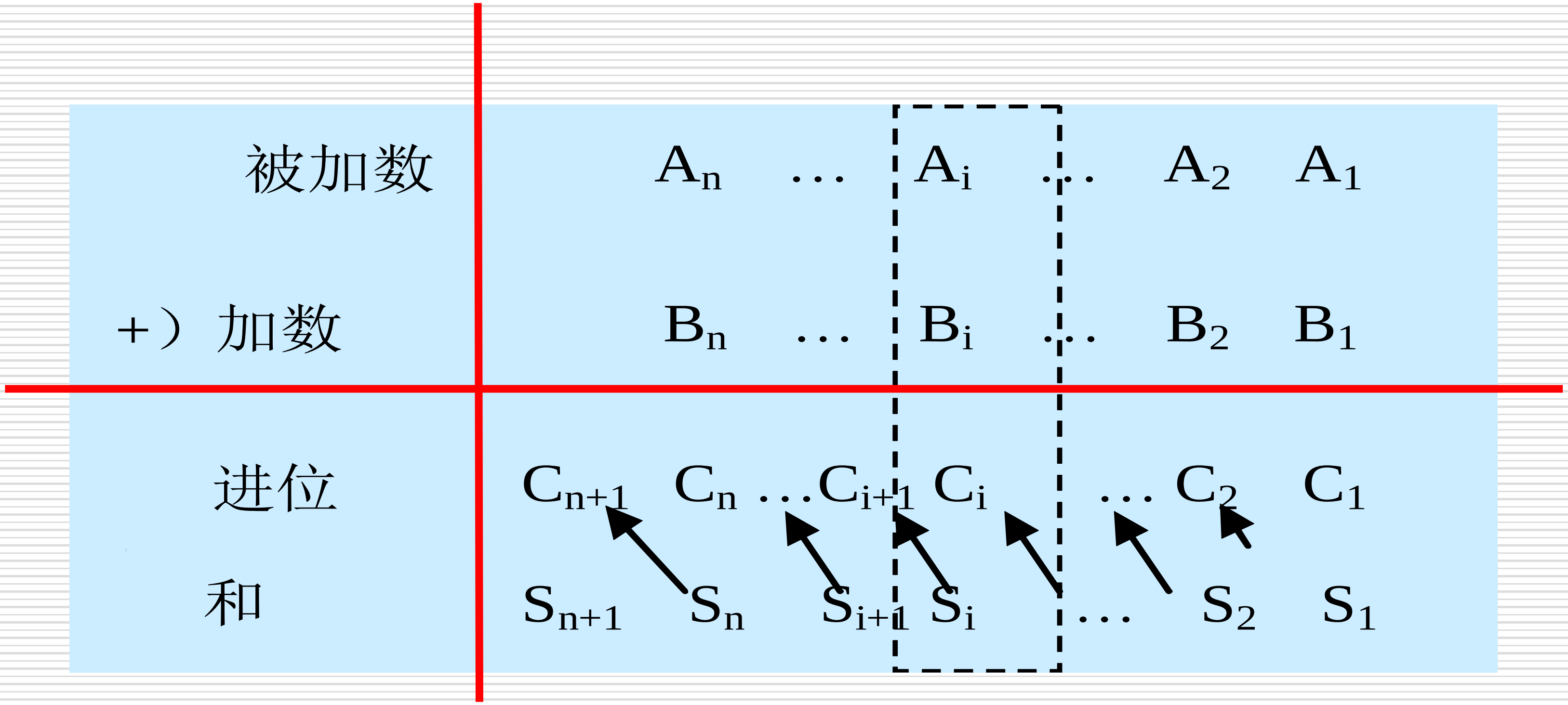
$$S = \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B} = (A+B)\cdot(\overline{A\cdot B})$$

$$C = A\cdot B$$





全加器 Full adder

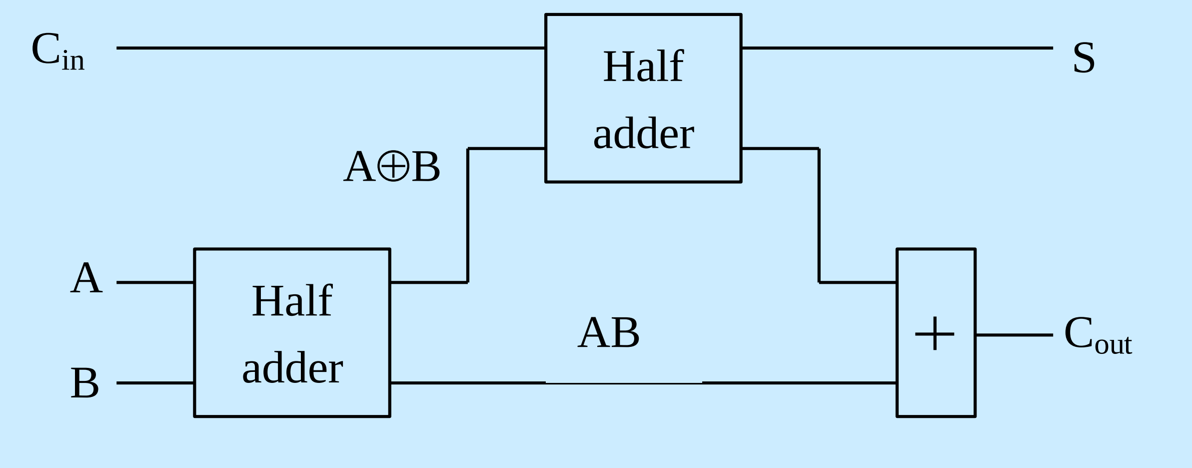


全加器 Full adder

Input A B Cin	Output S Cout
0 0 0	0 0
0 0 1	1 0
0 1 0	1 0
0 1 1	0 1
1 0 0	1 0
1 0 1	0 1
1 1 0	0 1
1 1 1	1 1

$$S = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C_{in} + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C_{in}} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C_{in}} + A\cdot B\cdot C_{in}$$

$$C_{out} = \overline{A}\cdot B\cdot C_{in} + A\cdot\overline{B}\cdot C_{in} + A\cdot B\cdot\overline{C_{in}} + A\cdot B\cdot C_{in}$$



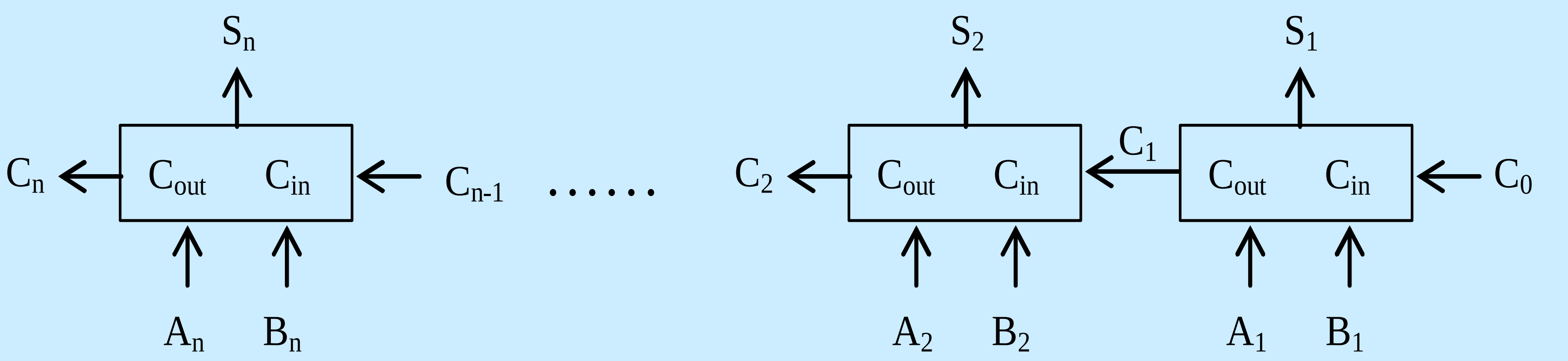
n位加法器 n-adder

布尔代数
Boolean Algebra

布尔表达式

$$S = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C_{in} + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C_{in}} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C_{in}} + A\cdot B\cdot C_{in}$$

$$C_{out} = \overline{A}\cdot B\cdot C_{in} + A\cdot\overline{B}\cdot C_{in} + A\cdot B\cdot\overline{C_{in}} + A\cdot B\cdot C_{in}$$



格与布尔代数
Lattice&Boolean Algebra

偏序集 $\langle P, \leq \rangle$ ⟵ ⟶ 格 $\langle L, \leq \rangle$
Posets

⟵ ⟶ （布尔）代数系统 $\langle L, \oplus, * \rangle$

§ 7.1 格

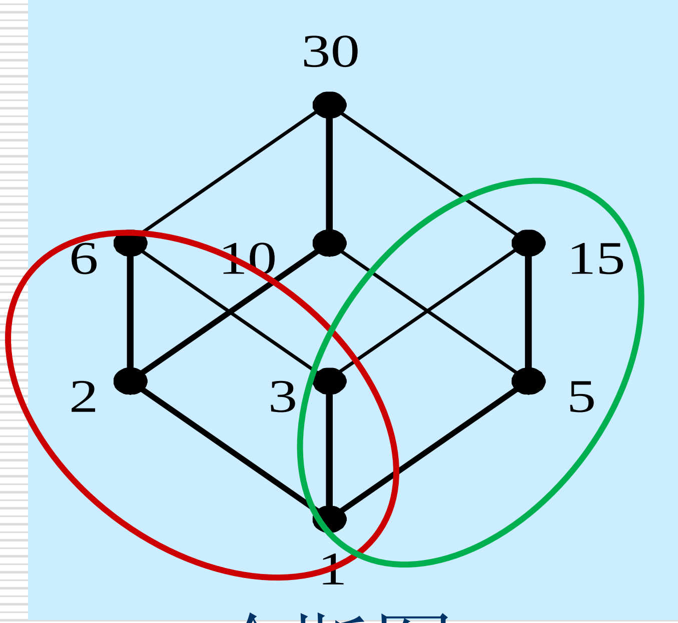
偏序集 Posets ⟨P，≤⟩ P是自反的，反对称的，可传递的

例 1:S_{30} = {1,2,3,5,6,10,15,30}

$| = \{<x,y> \mid x,y \in S_{30}$ 且 $x|y\}$

$S_6=\{1,2,3,6\} \subseteq S_{30}$

$S_{15}=\{1,3,5,15\} \subseteq S_{30}$



哈斯图

偏序集:

$<S_{30}, | >$, $<S_6, | >$，$<S_{15}, | >$

§ 7.1 格

定义 1　设〈L ,≤〉是一个偏序集，

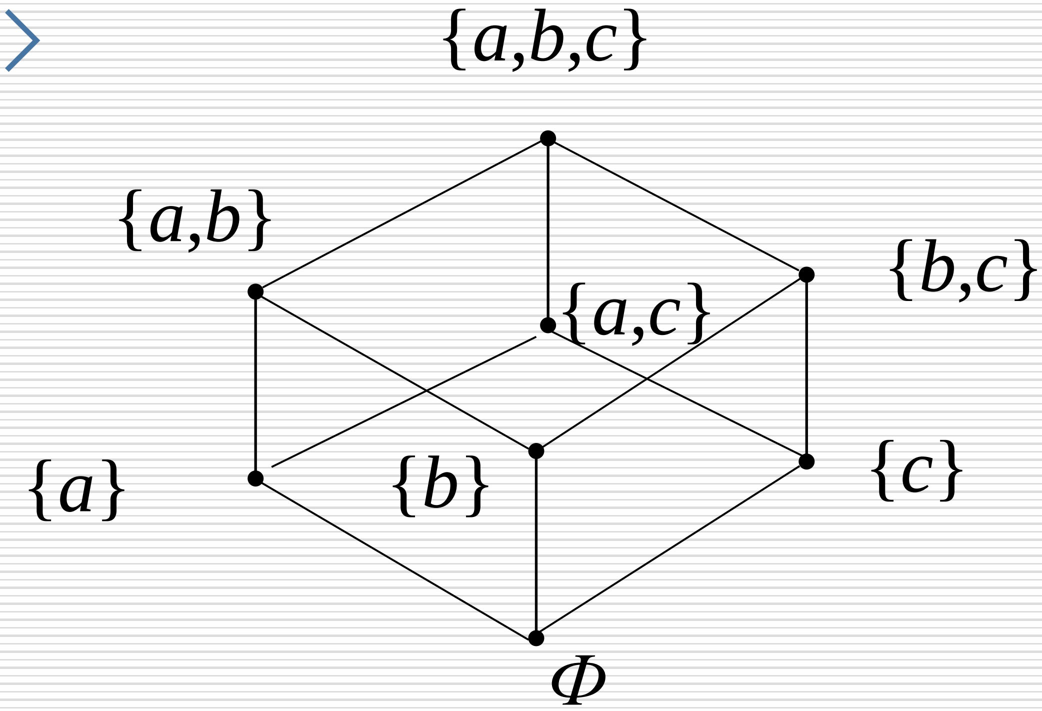
如果 $\forall x$, $y \in L$, $\{x$, $y\}$ 必有最小上界和最大下界，

则称〈L ,≤〉为格.

§ 7.1 格

$\langle P(S), \subseteq \rangle$

$P=\{a, b, c\}$.



Hass（哈斯）图

$\langle P(S), \subseteq \rangle$ 是格。

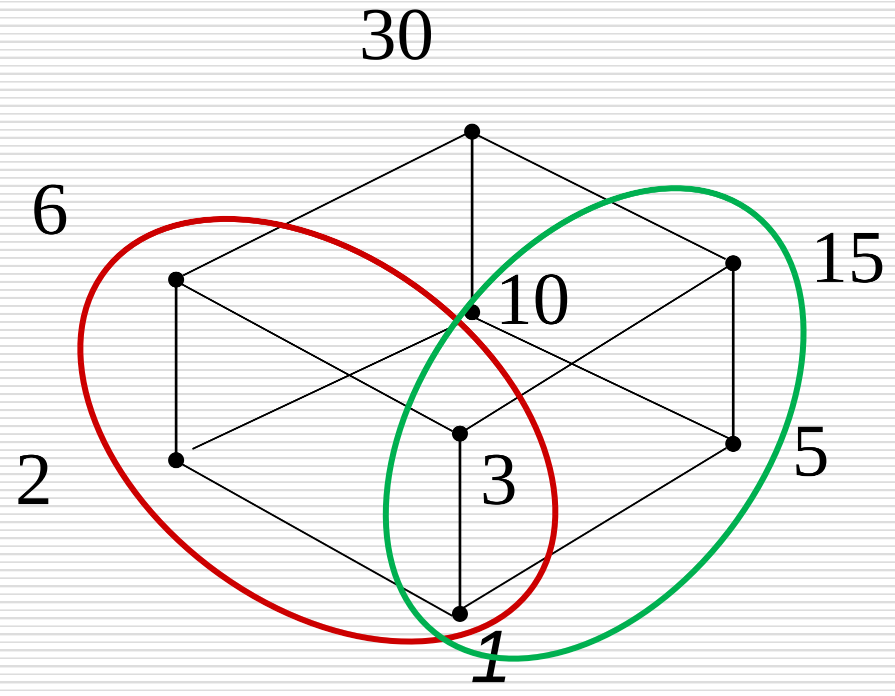
§ 7.1 格

Example：

<S$_{30,}$|>,

<S$_{6,}$|>,

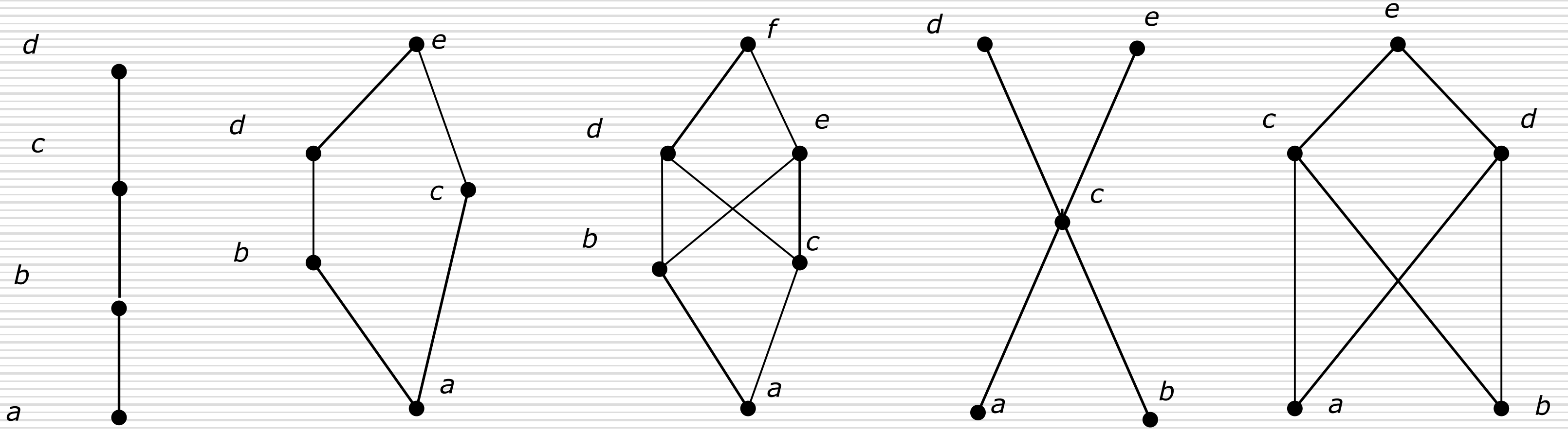
<S$_{15,}$|>,



<S$_{30,}$|>, <S$_{6,}$|>, <S$_{15,}$|>是格。

§7.1 格

例 判断下图中的哈斯图表示的偏序集是否构成格，说明为什么。



(1) (2) (3) (4) (5)

√ √ √ × ×

{a , b} 没有最大下界
{d , e} 没有最小上界

{a , b} 没有最大下界

§7.1 格

例 集合S的幂集P(S)和定义在其上的包含关系构成偏序集< P(S) ， $\subseteq$ >.

分析格中任意两个元素的最小上界和最大下界

对于任意子集A, B∈p(S)，{*A*, *B*} 必有最小上界和最大下界

因为A⊆A∪B ，B⊆A∪B，

而且若A ⊆ C, B ⊆ C, 则A∪B ⊆ C。

因此， {A, B} 的最小上界 A ⊕ B=A∪B。

同理{A, B} 的最大下界 A ∗ B=A∩B。

于是，< P(S) ， $\subseteq$ >是格 ； $(\langle P(S), \oplus, * \rangle, \langle P(S), \cup, \cap \rangle)$。

由集合S={a, b, c}得到的格<L， $\subseteq$ >的Hass图，如下图所示。

§7.1 格

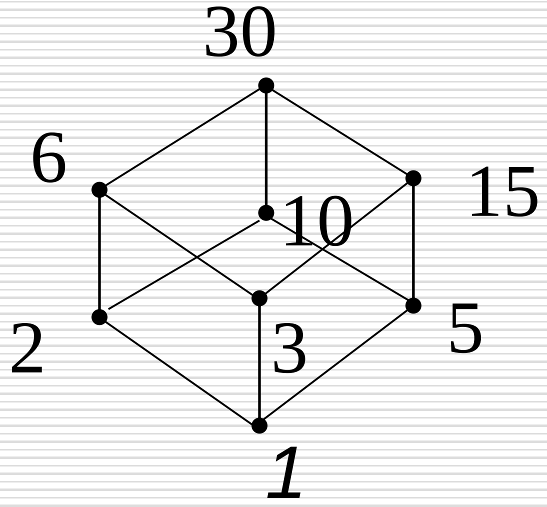
例 设Z^+为正整数集合，对于$a,b \in Z^+$，关系“≤”定义为： $a \leqslant b$当且仅当a整除b（$a|b$）。则偏序集$\langle Z^+, \leqslant \rangle$构成格，

其中:

$a \oplus b$ 是a,b的最小公倍数(记作LCM, Least Common Multiple)

$a * b$ 是a,b的最大公因数(记作GCD, Greatest Common Divisor)

即$a \oplus b = \mathrm{LCM}(a,b)$， $a * b = \mathrm{GCD}(a,b)$



$\langle Z^+, | \rangle$格 代数系统$\langle Z^+, \oplus, * \rangle$

$\langle Z^+, \mathrm{LCM}, \mathrm{GCD} \rangle$

并运算与交运算

在格〈L，≤〉中，〈L, ⊕ ，* 〉

a*, *b的最小上界用 ***a*⊕*b*** 表示，

a*, *b的最大下界用 ***a*b***表示.

∀ ***a*, *b***∈***L***，由最小上界、最大下界的唯一性，***a*⊕*b***，***a*b***都在***L***上唯一确定

将 ⊕, * 视为***L***上的两个运算，通常称为〈***L***，≤〉上的并(**Join**,∨)运算与交(**Meet**,∧)运算.

并、交 运算的性质

定理 1 设〈L，$\leq$〉是一个格，并运算⊕与交运算 * 满足如下性质：

（并运算⊕ 求取最小上界，交运算 *求取最大下界）

$L1$ $a \oplus a = a$ $a * a = a$ （幂等律）

$L2$ $a \oplus b = b \oplus a$ $a * b = b * a$ （交换律）

$L3$ $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

$(a * b) * c = a * (b * c)$ （结合律）

$L4$ $a \oplus (a * b) = a$

$a * (a \oplus b) = a$ （吸收集）

L1：$a \oplus a = a \qquad a * a = a$

定义7　设$\langle P, \leq \rangle$是偏序集，$A \subseteq P$，$\exists\, a \in P$，
如果$\forall x \in A$，都有$x \leq a$，称a为A的上界.
如果$\forall x \in A$，都有$a \leq x$，称a为A的下界.

定义 8　设$\langle P, \leq \rangle$是偏序集，$A \subseteq P$，
若$\boldsymbol{a}$是A的上界，且对A的任意上界b，有$a \leq b$，则称$\boldsymbol{a}$为A的最小上界（上确界），
若$\boldsymbol{a}$是A的下界，且对A的任意下界b，有$b \leq a$，则称$\boldsymbol{a}$为A的最大下界（下确界）.

L1：$a \oplus a = a$　　　$a * a = a$

$\langle L, \le \rangle$　　　$\langle L, \oplus, * \rangle$

证明：

由于$a \le a$，故a是$A=\{a, a\}$的上界，又设c是$A=\{a, a\}$的任一上界，则$a \le c$，故a是$\{a, a\}$的最小上界，即$a \oplus a = a$，

同理可证 $a * a = a$，即$L1$成立.

（并运算$\oplus$ 求取最小上界，交运算 $*$求取最大下界）

L_2：$a \oplus b = b \oplus a$， $a * b = b * a$

证明

由于 $\{a, b\} = \{b, a\}$，故$a \oplus b = b \oplus a$,

同理$a * b = b * a$. 即$L2$成立.

L3: $(a * b) * c = a * (b * c)$

$(a * b) * c \le a * b \le a$ (依据 * 交运算的定义)
$(a * b) * c \le a * b \le b$
$(a * b) * c \le c$

最大下界也是下界

因此，**$(a*b) *c$是b，c**的下界，从而小于等于其最大下界，即
$(a * b) * c \le b * c$ ($x \le a$且$x \le b$,则$x \le b \wedge c$)

因此又知 $(a * b) * c$ 是a，$b * c$ 的下界，从而

$$(a * b) * c \le a * (b * c) \quad (1)$$

同理 $a * (b * c) \le (a * b) * c \quad (2)$
所以 $a * (b * c) = (a * b) * c$

（并运算⊕ 求取最小上界，交运算 *求取最大下界）

L_4： $a*(a\oplus b)=a \quad a\oplus(a*b)=a$

由于a是{a，$a\oplus b$}的下界，

故$a\leq a*(a\oplus b)$，

再由*的定义，

$a*(a\oplus b)\leq a$，从而$a*(a\oplus b)=a$.

同理 $a\oplus(a*b)=a$

格 $\langle L, \leq \rangle \overset{\text{定理 1}}{\Rightarrow}$ 代数系统 $\langle L, \oplus, * \rangle$

（并运算⊕ 求取最小上界，交运算 *求取最大下界）

$\Leftarrow$?

定理 1

$L1$ $\quad a \oplus a = a \qquad a * a = a$ （幂等律）

$L2$ $\quad a \oplus b = b \oplus a \qquad a * b = b * a$ （交换律）

$L3$ $\quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

$\quad (a * b) * c = a * (b * c)$ （结合律）

$L4$ $\quad a \oplus (a * b) = a$

$\quad a * (a \oplus b) = a$ （吸收集）

单选题 2分

设置

偏序集 $\langle L,\leq\rangle$ 构成格，则 $\forall A\subseteq L$，子集A必有最小上界和最大下界。

A 正确

B 错误

提交

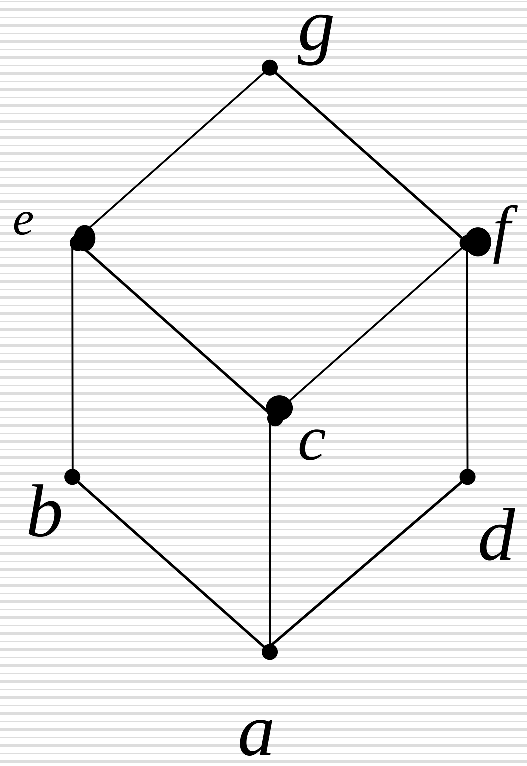
单选题 1分

设置

右图哈斯图所表示的偏序关系是否是格？

A 是格

B 不是格

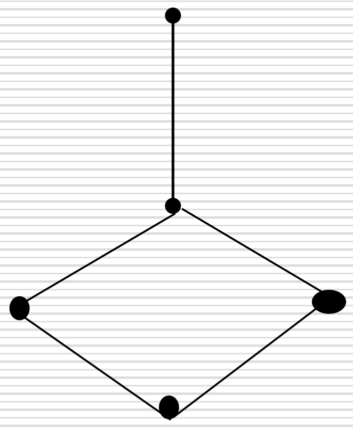


提交

单选题 1分

设置

右图哈斯图所表示的偏序关系是否是格？



A 是格

B 不是格

提交

单选题 2分

设置

设Z^+为正整数集合，$\forall a, b \in Z^+$，则偏序集$\langle Z^+, | \rangle$构成格$\langle Z^+, \oplus, * \rangle$，

$a \oplus b$ 是a,b的最小公倍数(记作LCM, Least Common Multiple)；

$a * b$ 是a,b的最大公因数(记作GCD, Greatest Common Divisor)

即$a \oplus b = \mathrm{LCM}(a,b)$， $a * b = \mathrm{GCD}(a,b)$

A 正确

B 错误

提交

单选题 1分

设置

对于任意格〈L ,≤〉都可以找到与其对应的代数系统〈L，⊕，*〉，其中⊕代表并运算， *代表交运算。

A 上述论述正确

B 上述论述错误

提交

单选题 2分

设置

对于任意格〈L ,≤〉所对应的代数系统〈L，⊕，＊〉，并运算⊕与交运算＊分别满足幂等律，交换律，结合律，分配律。

A 上述论述正确

B 上述论述错误

提交

§7.1 格

格与代数系统的关系

设<L,⊕,*>是一个代数系统，⊕和*是L上的两个二元运算，如果这两个运算满足幂等律（L_1）、交换律(L_2)、结合律（L_3）和吸收律(L_4),则称<L,⊕,* >是一个格(Lattice)。

$$<L, \oplus, *> \overset{\text{定理 1}}{\Leftrightarrow} <L, \leq>$$

§7.1 格

例 $<P(S), \subseteq>$是格

表示为$<P(S), \oplus, * >$

又可表示为$<P(S), \cup, \cap>$ 幂等律，交换律，结合律，吸收集

例 $\langle Z^+, \leqslant\rangle$, **或** $\langle Z^+, |\rangle$

$<Z^+, \oplus, * >$

$<Z^+, \mathrm{LCM}, \mathrm{GCD}>$ 幂等律，交换律，结合律，吸收集

§7.2 格——代数系统

格〈L，≤〉中**自然存在**两个运算 ⊕ 和 ＊，从而派生出一个代数系统〈L，⊕，＊〉

⊕与 ＊ 满足L1 —L4 。

反之，若给定一个代数系统〈L，⊕，＊〉，其中，运算 ⊕ 与 ＊ 满足L1 —L4，是否一定能找到一个与该代数系统对应的格？

是，一定能。

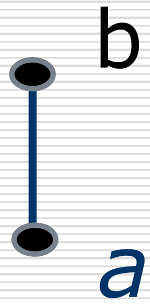
§7.2 格——代数系统

先定义运算 并运算⊕ 求取最小上界，交运算 *求取最大下界

定理 1　设〈L，≤〉是一个格，　则对任意a，$b \in L$

$$a \le b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b$$

$a \le b$



哈斯图

证明: $a \le b \Leftrightarrow a*b=a$

设$a \le b$，则a是｛a，b｝的下界，故$a \le a*b$，

又$a*b \le a$，从而$a*b=a$；

反之，设$a*b=a$，则由$a*b \le b$ 即知 $a \le b$.

同理可证　$a \le b \Leftrightarrow a \oplus b = b$

§7.2 格——代数系统

如何定义偏序？

偏序 $\leq$ 必须满足 $a \leq b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b$

用$a \leq b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b$

定义偏序$\leq$

首先要求给定的运算 $\oplus$与$*$满足$a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b$

§7.2 格——代数系统

引理　设〈L，$\oplus$，$*$〉是一个代数系统，$\oplus$，$*$ 满足 $L1-L4$(幂等，交换，结合，吸收律)，

则　　$a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b$.

证明　设 $a * b = a$，则

$a \oplus b = (a * b) \oplus b = b \oplus (b * a) = b$

反之，设　$a \oplus b = b$ 则

$a * b = a * (a \oplus b) = a$。

§7.2 格——代数系统

引理告诉我们在偏序关系上寻找* 是可行的。

用 $a \le b \Leftrightarrow a * b = a$（$a \oplus b = b$）

规定关系 ≤ 是可行的

但这样规定的关系 ≤ 是否一定是要求的偏序关系呢?

§7.2 格——代数系统

定理 2 设〈L，⊕，$*$〉是一个代数系统，运算 ⊕ 与 $*$ 满足 $L1-L4$

令 L 上的关系 ≤ 定义如下：

$$a \le b \Leftrightarrow a * b = a \ (a \oplus b = b)$$

则 ≤ 是一个偏序关系，

且 $\forall a$，$b \in L$，$a*b$，$a \oplus b$ 分别为 a，b 在〈L，≤〉中的最大下界与最小上界，即

$$a * b = \inf\{a, b\};\quad a \oplus b = \sup\{a, b\}$$

从而〈L，≤〉是一个格，其中的并、交运算恰为给定的 ⊕ 与 $*$.

§7.2 格——代数系统

证明 $\leq$ 为偏序关系

(1)自反性;$\forall a \in L$，因为$a * a = a$，故$a \leq a$，即$\leq$满足自反性;

(2)反对称性;$\forall a, b \in L$，设$a \leq b$，$b \leq a$，则$a * b = a$，$b * a = b$，因为$a * b = b * a$，故$a = b$，即$\leq$满足反对称性;

(3)传递性$\forall a, b, c \in L$，设$a \leq b$，$b \leq c$，则$a * b = a$，$b * c = b$，故$a * c = (a * b) * c = a * (b * c) = a * b = a$，即$a \leq c$，故$\leq$满足传递性.

§7.2 格——代数系统

证〈L，$\le$〉为要求的格 $a \oplus b$ 最小上界；$a * b$ 最大下界

$\forall a，b \in L$，$(a*b)*a \underset{L2}{=} a*(a*b) \underset{L3}{=} (a*a)*b \underset{L1}{=} a*b$，故 $a*b \le a$，

同理$a*b \le b$，因此$a*b$是$\{a，b\}$的下界，

又设c是$\{a，b\}$的任一下界，即$c \le a$，$c \le b$，则 $a*c=c$，$b*c=c$，于是$(a*b)*c=a*(b*c)=a*c=c$，即 $c \le a*b$，所以 $a*b$是$\{a，b\}$的最大下界，即 $a*b=\inf\{a，b\}$，

同理可证 $a \oplus b=\sup\{a，b\}$，

这就证明了〈L，$\le$〉是格且其中的并、交运算分别为 $\oplus$，$*$.

§7.2 格——代数系统

代数格

定义 1　设〈*L*，⊕，＊〉是一个代数系统，如果 ⊕ ，＊　满足 *L* 1 －*L* 4 ，则称〈*L*，⊕，＊〉为格.

例 1 设**N**是自然数集合，对任意a，$b \in \mathbf{N}$，规定$a \oplus b = \mathrm{lcm}(a, b)$，，$a * b = \gcd(a, b)$，

由于任意两自然数a，b都有唯一确定的最小公倍数与最大公因数，故＊，⊕ 是**N**上的两个运算.

L_1、L_2、L_3、L_4 是不是成立？　可以验证是成立的。

§7.2 格——代数系统

例 2　设S是一个集合，$\cup$，$\cap$为集合的并、交运算，则 $\langle P(S), \cup, \cap\rangle$ 是格，且其中的偏序为集合的包含关系.

§7.2 格——代数系统

定理 3　设 $\langle L, \leq\rangle$ 是格，a，$b \in L$，则

（1）$a*b \leq a$　　$a*b \leq b$

（2）$a \leq a \oplus b$　　$b \leq a \oplus b$

定理 4　设 $\langle L, \leq\rangle$ 是格，a，b，$c \in L$.

若　$c \leq a$，$c \leq b$ 则 $c \leq a*b$

若　$a \leq c$，$b \leq c$ 则 $a \oplus b \leq c$

定理 5　设 $\langle L, \leq\rangle$ 是一个格，a_1，a_2，b_1，$b_2 \in L$，

如果　$a_1 \leq b_1$，$a_2 \leq b_2$，

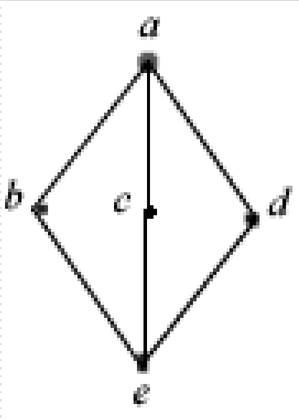
则 $a_1 * a_2 \leq b_1 * b_2$，$a_1 \oplus a_2 \leq b_1 \oplus b_2$

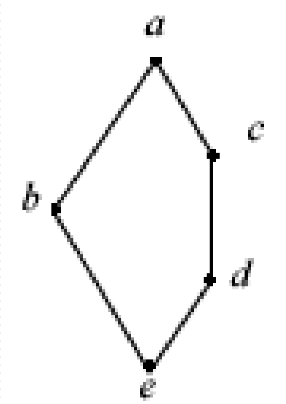
§ 7.2 格——代数系统

定理 6　设L是一个格，a，b，$c \in L$，则

$$a * (b \oplus c) \geq (a * b) \oplus (a * c)$$

$$a \oplus (b * c) \leq (a \oplus b) * (a \oplus c)$$





$b * (c \oplus d) = b * a = b$

$(b * c) \oplus (b * d) = e \oplus e = e$

$b \geq e$

$c * (b \oplus d) = c * a = c$

$(c * b) \oplus (c * d) = e \oplus d = d$

$c \geq d$

§7.3 子格与格同态

定义 1 子格(Sublattice)：

设$\langle L, \oplus, * \rangle$是一个格，如果$\langle S, \oplus, * \rangle$是$\langle L, \oplus, * \rangle$的子代数，则称$\langle S, \oplus, * \rangle$是$\langle L, \oplus, * \rangle$的子格 。

子格也是一个格，因为当运算$\oplus$和$*$限制在S上时，幂等律、交换律、结合律和吸收律也是成立的。

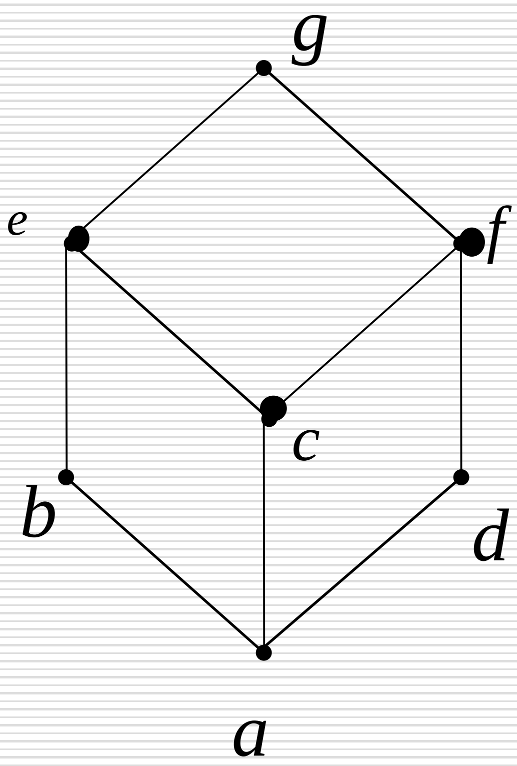
例设〈L，⊕, ∗〉是一个格，如下图

令 $S_1=\{c,e,f,g\}$ $S_2=\{a,b,e,g\}$

$S_3=\{a,e,f,g\}$

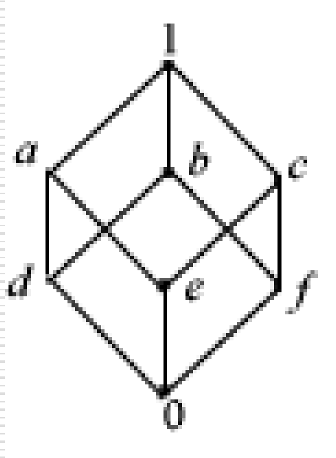
则〈S_1，⊕，∗〉和〈S_2，⊕，∗〉是〈L, ⊕, ∗〉的一个子格,

〈S_3，⊕, ∗〉不是〈L，⊕, ∗〉的子格，这是因为 $e*f=c\notin S_3$

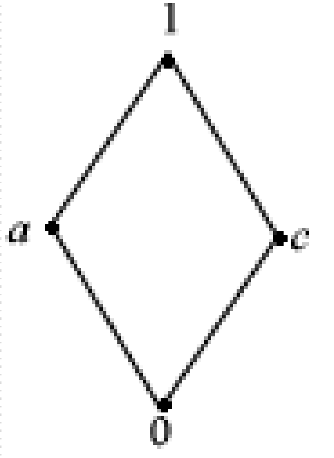


§ 7.3 子格与格同态

$\langle L, \leq \rangle$



$\langle S, \leq \rangle$



$S = \{1, a, c, 0\}$，$\langle S, \leq \rangle$ 本身是一个格，但它不是 $\langle L, \leq \rangle$ 的子格.

§ 7.3 子格与格同态

例如 $<S_{30,}|>$是格,$<S_{6,}|>$,$<S_{15,}|>$是子格。

例$<$N，⊕，* $>$ 或 $<$N，|$>$对任意a，b∈**N**，

规定， $a\oplus b$＝［a，b］（LCM（a,b)),

$a * b$＝（a，b）（GCD (a,b)）

令S为**N**中所有偶数构成的集合

S是**N**的子格

§7.4 完全格、有界格、补格

定义1　设〈L，≤〉是一个格，如果L的任意子集均有最小上界和最大下界，则称其为**完全格**.

有限格必为完全格.

整数集**Z**在通常数的小于等于关系≤下是一个格，其子集E＝｛…，－4，－2，0，2，…｝既无最小上界也无最大下界。因此〈**Z**，≤〉不是完全格。

§7.4 完全格、有界格、补格

例 1 实数闭区间［0，1］在通常的小于等于关系 $\leq$ 下是完全格，实数开区间（0，1）则不然.

例 2 集合A的幂集格〈P（A），$\subseteq$〉是完全格.

§7.4 完全格、有界格、补格

定义 2　设〈L，≤〉是一个格，如果L中存在最大元与最小元，则称L是有界格.

最大元也称为全上界或单位元，用 1 表示；最小元也称为全下界或零元，用 0 表示，对应地，有界格也称为有单位元和零元的格

有界格的一种更明确的表示〈L , ⊕,*,0,1〉

完全格必为有界格.

§7.4 完全格、有界格、补格

例 3　设A是集合，A的幂集格$\langle P(A), \subseteq \rangle$是有界格，其单位元（全上界）为$A$，零元（全下界）为$\varnothing$.

例 4　实数开区间（0，1）在通常小于等于关系$\leq$下构成的格不是有界格．而闭区间［0，1］是有界格。

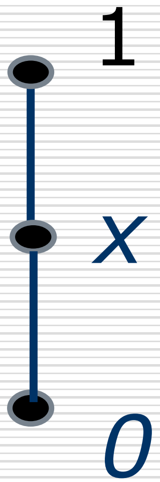
§ 7.4 完全格、有界格、补格

定理 1

设L是一个有界格，则对任意$x \in L$，有

$x \oplus 0 =$　　　　$x \oplus 1 =$

$x * 0 =$　　　　$x * 1 =$



§ 7.4 完全格、有界格、补格

定义 3

设L是一个有界格，对于$a\in L$，如果存在$b\in L$使

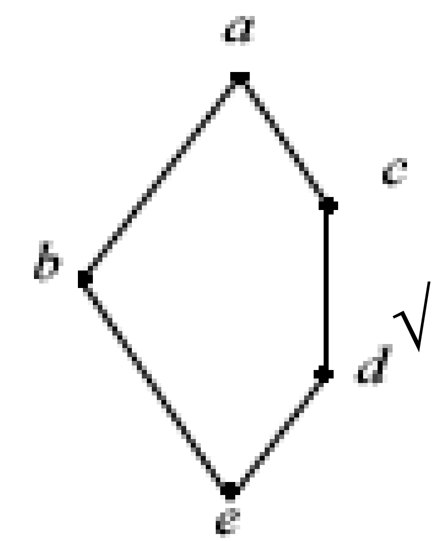
$$a \oplus b = 1\ ;\ a * b = 0$$

则称b是a的补元 。

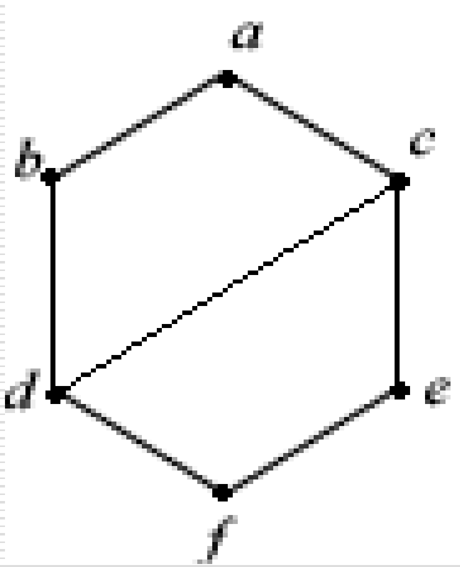
§ 7.4 完全格、有界格、补格

例 5 〈P（A），$\subseteq$〉是A的幂集格，则对$P(A)$中任意元素S，有$A-S$是S的补元（单位元为A，零元为$\varnothing$）.

例 6



√



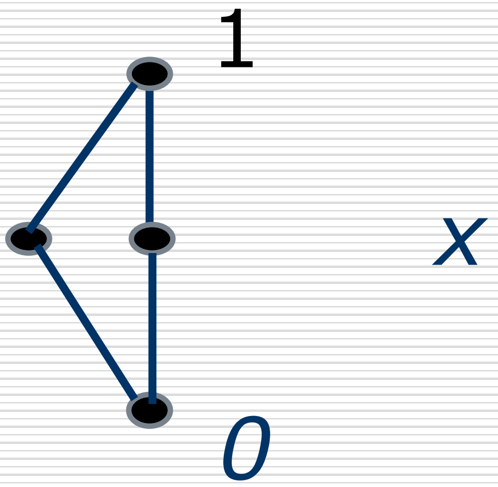
×

单位元为a，零元为c
b的补元是c,d

单位元为a，零元为f
b的补元是e, d,c无补元

§ 7.4 完全格、有界格、补格

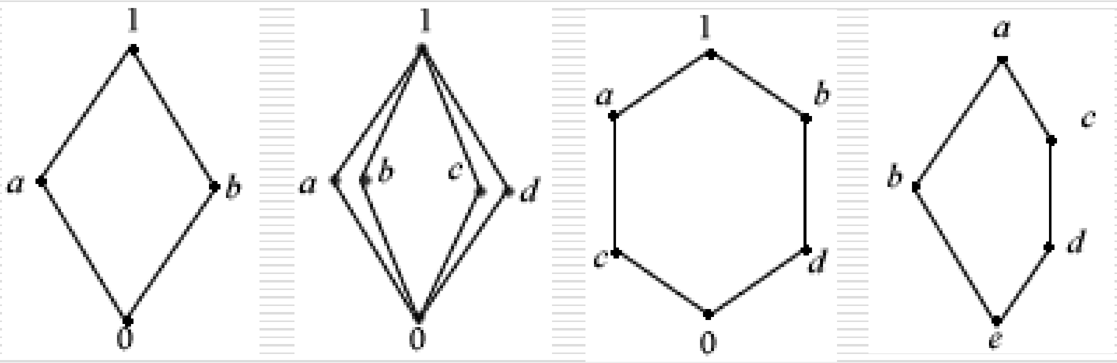
定理 2　设L是有界格，则单位元 1 是零元 0 的唯一补元 。



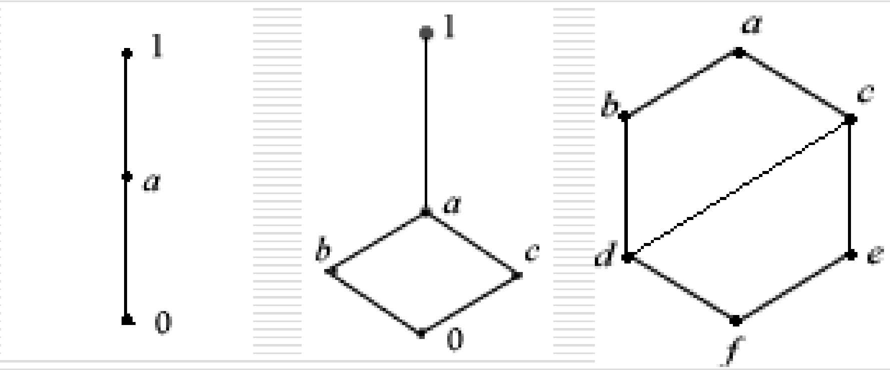
§7.4 完全格、有界格、补格

定义 4　设L是一个有界格，如果L中每个元素都有补元，则称其为**补格**或**有补格**.

例如：集合A的幂集格P（A）是补格



补格



非补格

§ 7.4 完全格、有界格、补格

完全格、有界格、补格讨论d的是元素之间的结构关系，并不涉及运算之间的关系。

定理 6 设L是一个格，a，b，$c \in L$，则

$$a * (b \oplus c) \geq (a * b) \oplus (a * c)$$

$$a \oplus (b * c) \leq (a \oplus b) * (a \oplus c)$$

若$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$

$$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$$

§7.5 分配格与模格

定义 1　设L是一个格，如果L中的并、交运算互相可分配，即对任意a，b，$c \in L$

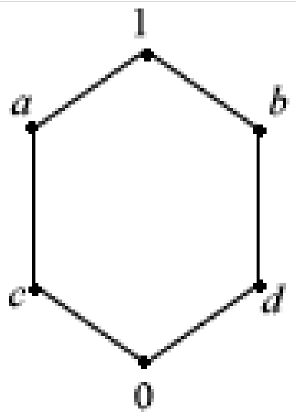
$$a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$$

$$a\oplus(b*c)=(a\oplus b)*(a\oplus c)$$

则称L是分配格.

$a*(b\oplus c)=a*1=a$

$(a*b)\oplus(a*c)=0\oplus a=a$



$a\oplus(b*c)= a\oplus 0=a$

$(a\oplus b)*(a\oplus c)=1*a=a$

§ 7.5 分配格与模格

定理 1 设L是一个格，如果L中的交对并可分配，则并对交必可分配．反之亦然．

证明：若 $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$

则 $(a \oplus b) * (a \oplus c)$

$= ((a \oplus b) * a) \oplus ((a \oplus b) * c)$ 分配

$= a \oplus ((a \oplus b) * c)$ 吸收

$= a \oplus ((a * c) \oplus (b * c))$ 分配

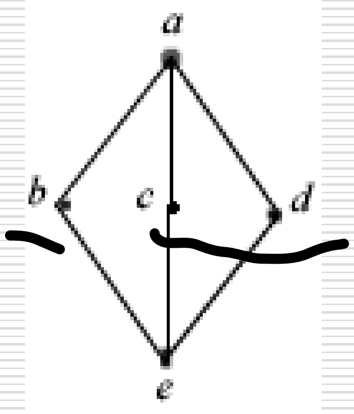
$= (a \oplus (a * c)) \oplus (b * c)$ 结合

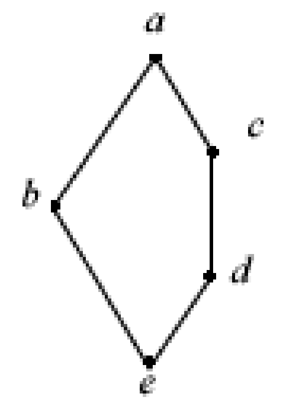
$= a \oplus (b * c)$ 吸收

§ 7.5 分配格与模格

例 1　集合*A*的幂集格*P*（*A*）是分配格

例 2　下图所示的两个格都不是分配格





$b*(c\oplus d)=b*a=b$

$(b*c)\oplus(b*d)=e\oplus e=e$

$c*(b\oplus d)=c*a=c$

$(c*b)\oplus(c*d)=e\oplus d=d$

§ 7.5 分配格与模格

定理 2　设 $\langle L, \oplus, * \rangle$ 是一个分配格，a，b，$c \in L$，如果　$a * b = a * c$，$a \oplus b = a \oplus c$

则 $b = c$.

证明：

$$
\begin{aligned}
b &= b * (b \oplus a) && \text{吸收律 L4} \\
&= b * (a \oplus b) && \text{交换律 L2} \\
&= b * (a \oplus c) && \text{代入} \\
&= (b * a) \oplus (b * c) && \text{分配律} \\
&= (a * c) \oplus (b * c) && \text{代入} \\
&= (a \oplus b) * c && \text{分配律} \\
&= (a \oplus c) * c && \text{代入} \\
&= c && \text{吸收律L4}
\end{aligned}
$$

§7.5 分配格与模格

推论　设 $\langle L, \oplus, * \rangle$ 是一个分配格，$a \in L$，a 的补元若存在则是唯一的.

证明：设 a_1，a_2 都是 a 的补元，则由补元的定义，有

$$a * a_1 = 0 = a * a_2$$

$$a \oplus a_1 = 1 = a \oplus a_2$$ 由定理2可得。

$$a_1 = a_2$$

§ 7.5 分配格与模格

例 在有界分配格中，所有有补元构成的集合为一个子格。

例 在格中，若$a \le b \le c$，则有

1. $a \oplus b = b * c$
2. $(a * b) \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$

§7.6 布尔代数

布尔格-有补分配格 Boolean lattice

定义:有补分配格中每个元素的补元唯一,从而可定义一个“取补”的一元运算.因此,此种格是一个有两个二元运算,一个一元运算和常数0,1的代数 $\langle L, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$,称为布尔代数.

(例如,幂集格$\langle \rho(S), \cap, \cup, ', \varnothing, S\rangle$是布尔代数.)

§7.6 布尔代数

定义1: 布尔代数是有补分配格.

定义2(公理化定义): 有两个二元运算的代数$\langle B, \oplus, * \rangle$称为布尔代数,如果对任意元素$a,b,c \in B$,成立:

§ 7.6 布尔代数

①(交换律) $a*b=b*a, a\oplus b=b\oplus a$;

②(分配律) $a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$,

$a\oplus(b*c)=(a\oplus b)*(a\oplus c)$;

③(有界) 存在$0,1\in B$,使得

$a*1=a, a\oplus 0=a, a\in B$;

④(有补) B的每一元a都有(唯一)$a'\in S$,使得

$a*a'=0$, $a\oplus a'=1$.

§ 7.6 布尔代数

例如:

1 幂集代数: $\langle p(S), \cap, \cup, ', \varnothing, S \rangle$;

2 命题代数: $\langle B, \vee, \wedge, \neg, F, T \rangle$;

§7.6 布尔代数

例题：设集合L={1，2，5，10，11，22，55，110}，是110的正因子集合，≤是整除关系，偏序集< L , ≤ >是否构成布尔代数，为什么？

§7.6 布尔代数

布尔表达式

定义：假设 B 是一个布尔代数，$x_1,x_2,\ldots,x_n$是 B 上的变量，B上由$x_1,x_2,\ldots,x_n$生成的布尔表达式归纳定义如下：

(1) B中的元素是B上由$x_1,x_2,\ldots,x_n$生成的布尔表达式；

(2) B上任意变量x_i（$i=1,2,\ldots,n$）是B上由$x_1,x_2,\ldots,x_n$生成的布尔表达式；

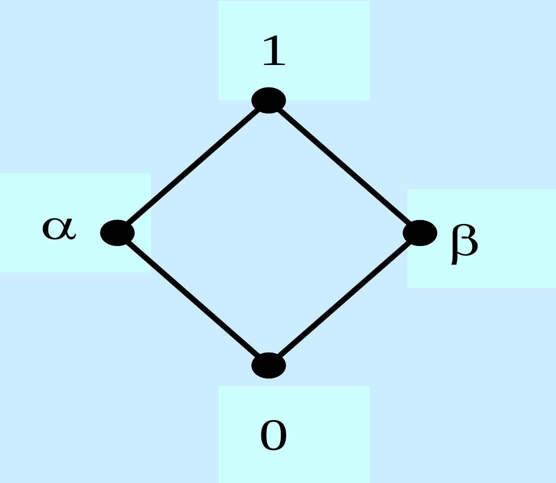
(3)如果α，β是B上由$x_1,x_2,\ldots,x_n$生成的布尔表达式，则$\alpha\vee\beta$，$\alpha\wedge\beta$，α'（α的补元）是B上由$x_1,x_2,\ldots,x_n$生成的布尔表达式；

(4)只有通过有限次使用(1),(2),(3)得到的符号串是B上由$x_1,x_2,\ldots,x_n$生成的布尔表达式。

§ 7.6 布尔代数

布尔表达式

例： 假设 B={0,1,α,β} 是由图示确定的一个布尔代数，x,y 是 B 上的变量。B上的布尔表达式为：



$$f(x,y)=(\beta\wedge x'\wedge y)\vee(\beta\wedge x\wedge(x\vee y)')\vee(\alpha\wedge(x'\wedge y))$$

$$f(0,0)=(\beta\wedge 1\wedge 0)\vee(\beta\wedge 0\wedge(0\vee 0)')\vee(\alpha\wedge(1\wedge 0))=0$$

$$f(1,0)=(\beta\wedge 0\wedge 0)\vee(\beta\wedge 1\wedge(1\vee 0)')\vee(\alpha\wedge(0\wedge 0))=0$$

$$f(\alpha,\beta)=(\beta\wedge\beta\wedge\beta)\vee(\beta\wedge\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)')\vee(\alpha\wedge(\beta\wedge\beta))=\beta$$

§7.6 布尔代数

布尔函数

设 $B=\{0,1\}$，$B^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_i \in B$ 其中 $1 \le i \le n\}$ 是n元有序对集合。函数 $f: B^n \to B$,为布尔函数。

§ 7.6 布尔代数

布尔函数

例如：计算由下式表示的布尔函数的值。

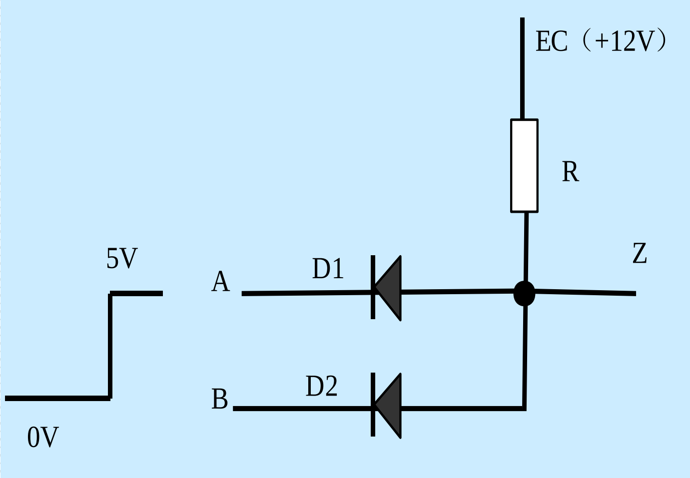
$$f(x,y)=(x'\cdot y)+(x\cdot(x+y)')+(x\cdot y')$$

x	y	x′	x′ ·y	x+y	(x+y)′	y′	x·y′	f(x,y)
0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0

§7.6 布尔代数

门电路

(1) AND 门



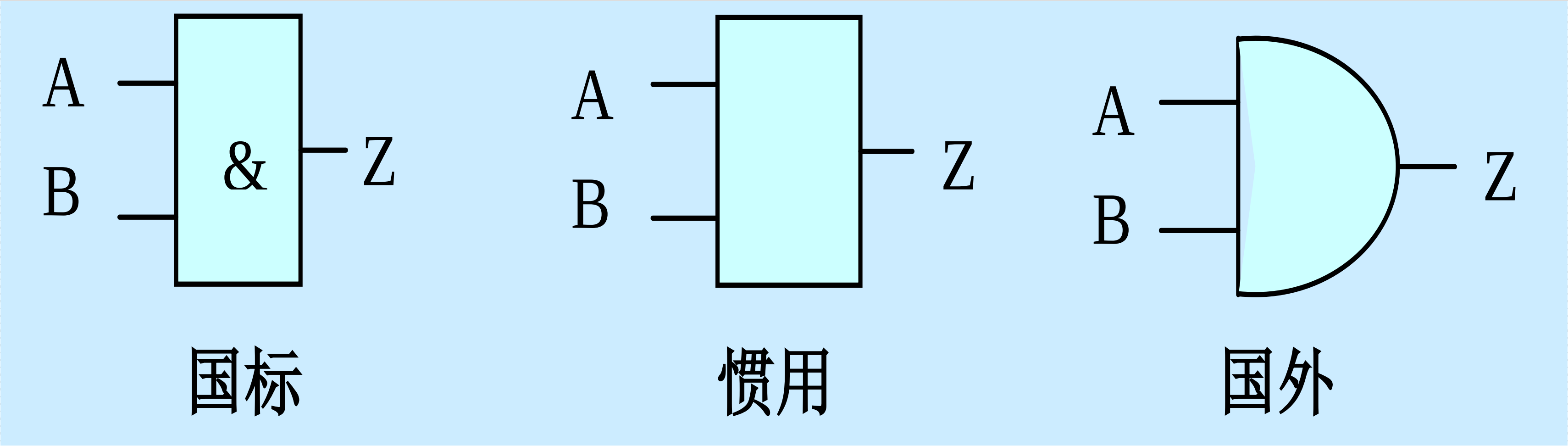
V_A	V_B	V_Z	*D1*	*D2*
0V	0V	0V	通	通
0V	5V	0V	通	止
5V	0V	0V	止	通
5V	5V	5V	通	通

真值表

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

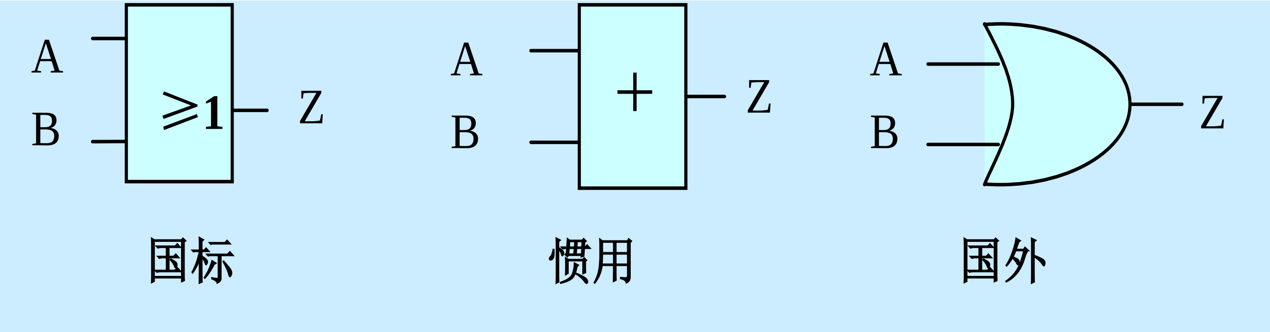
§7.6 布尔代数

(1) AND 门



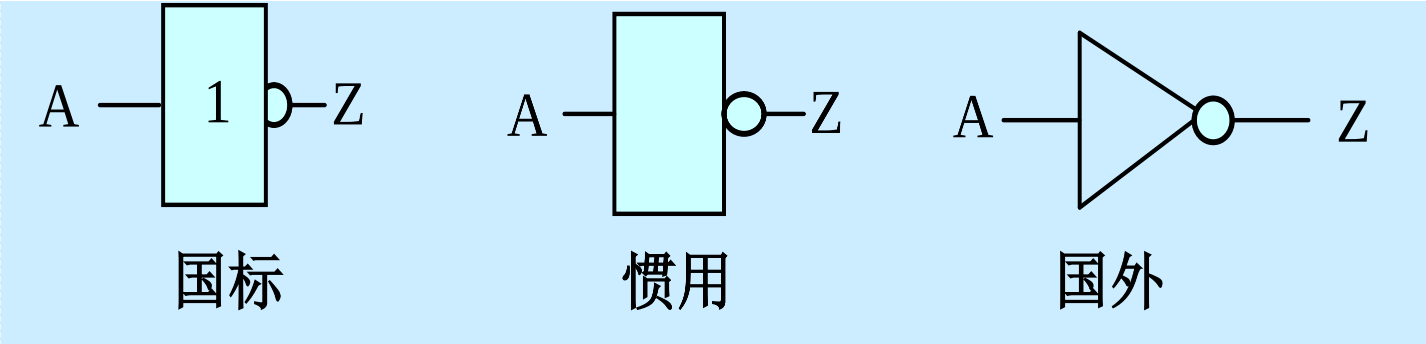
§7.6 布尔代数

(2) OR 门



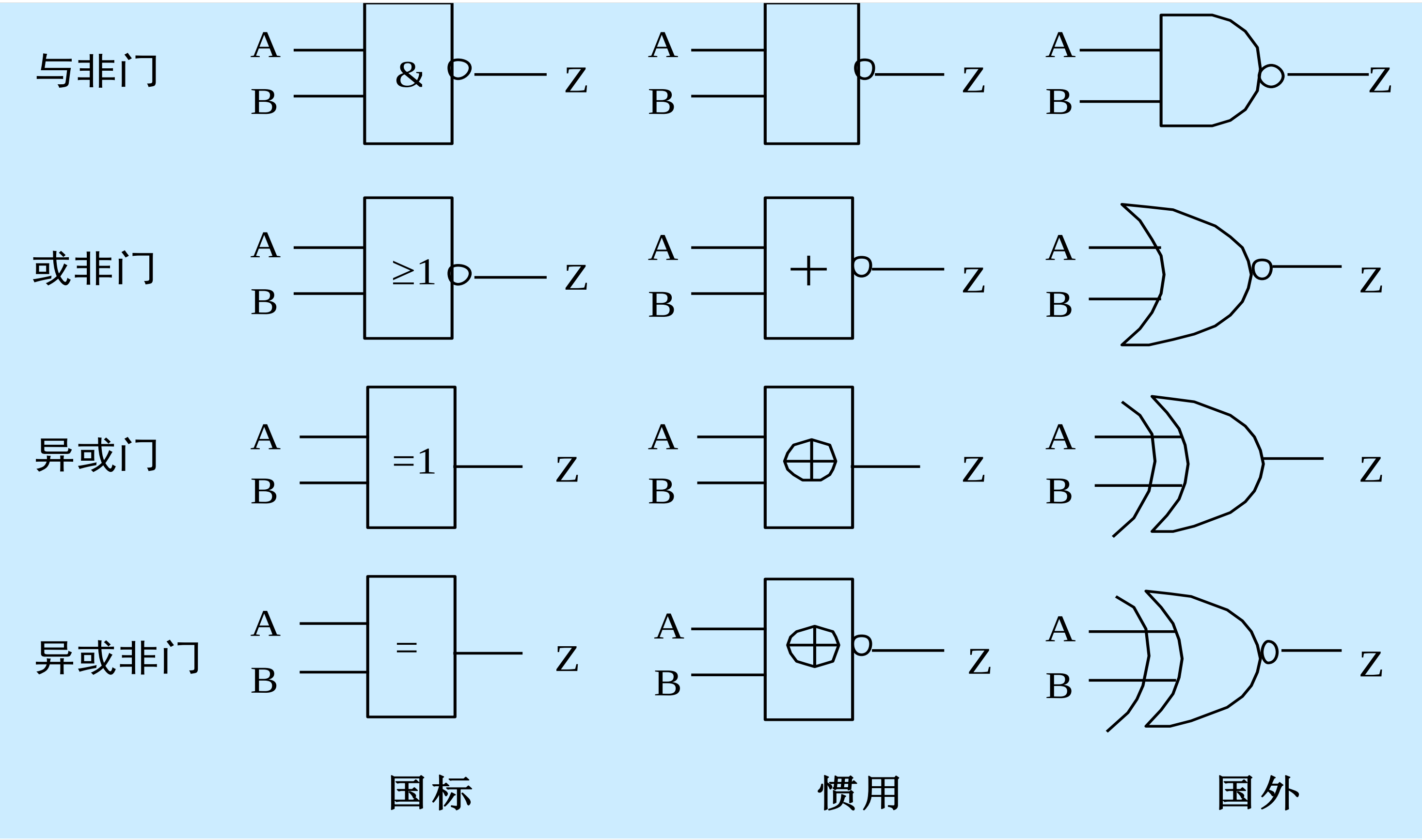
§ 7.6 布尔代数

(3) NOT 门



§ 7.6 布尔代数

组合门

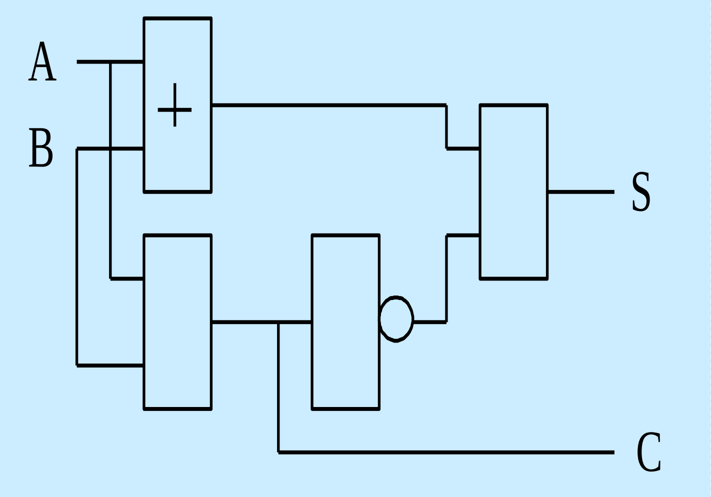


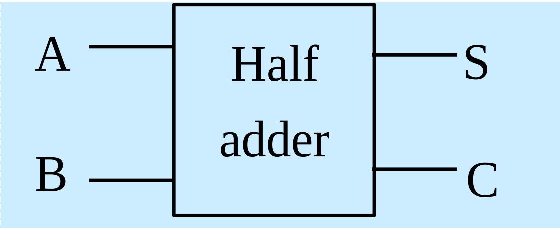
半加器 half adder

输入		输出	
A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$S = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = (A + B) \cdot (\overline{A \cdot B})$$

$$C = A \cdot B$$



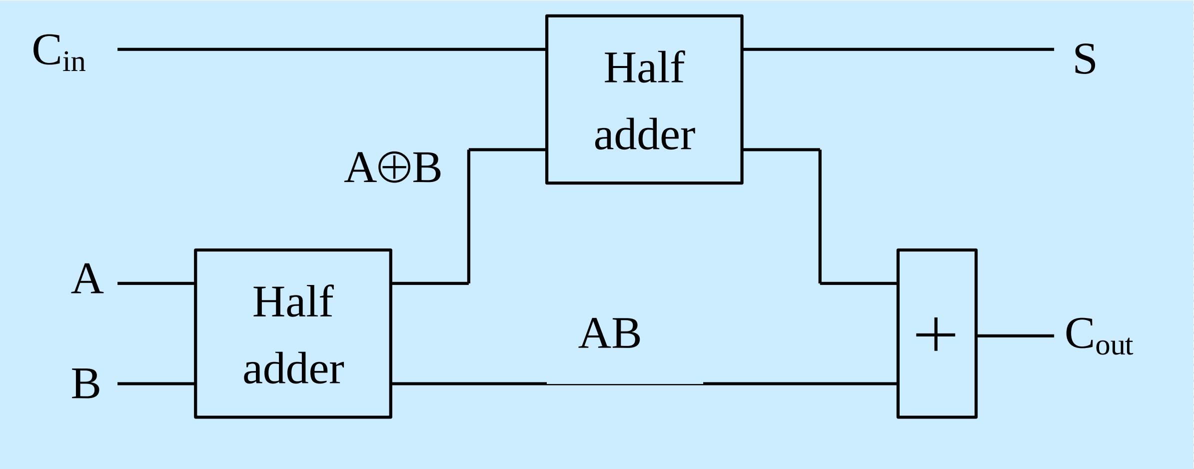


全加器 Full adder

Input			Output	
A	B	Cin	S	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$S = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C_{in} + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C_{in}} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C_{in}} + A\cdot B\cdot C_{in}$$

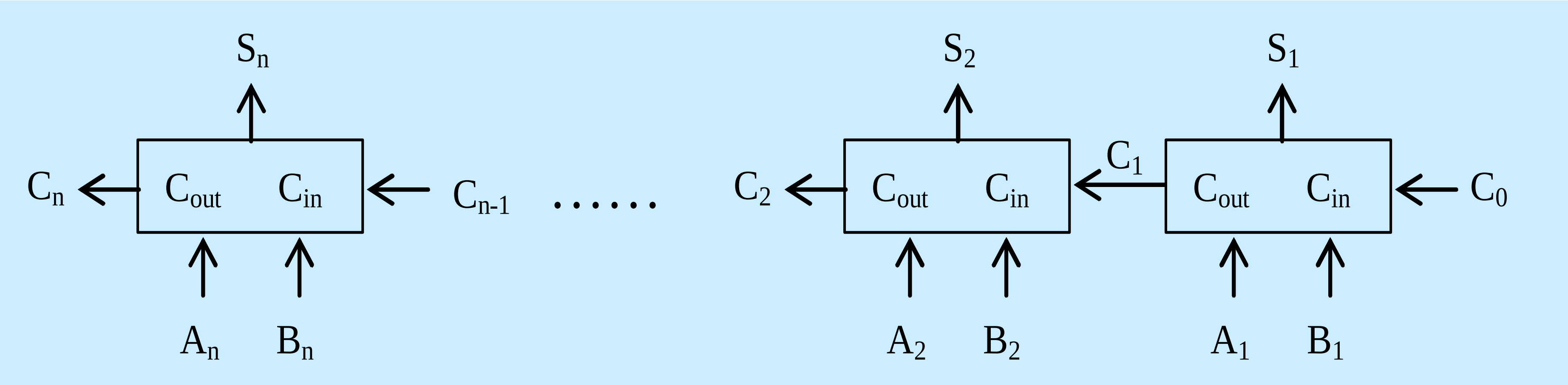
$$C_{out} = \overline{A}\cdot B\cdot C_{in} + A\cdot\overline{B}\cdot C_{in} + A\cdot B\cdot\overline{C_{in}} + A\cdot B\cdot C_{in}$$



n位加法器 n-adder

$$S = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C_{in} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C_{in}} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C_{in}} + A \cdot B \cdot C_{in}$$

$$C_{out} = \overline{A} \cdot B \cdot C_{in} + A \cdot \overline{B} \cdot C_{in} + A \cdot B \cdot \overline{C_{in}} + A \cdot B \cdot C_{in}$$



作业

习题一 1，2

习题二 3

习题三 1

习题四 1，2，3

习题五 1，2，3

习题六 1

∀∃∅∩∪⊆⊂⊄∉∀∈≤≥…ℵ∑⎱⎰≡±°∞

αβσρυωζψηδεφλμπΔ θ ±∏∧∨∀ }∴√⊃

≌≈∽∞⊇⋂⋃℃‰≥≤∵∏∈∑≮≯½¼ § ¥{}?±

↔∨∧¬→←⇒⇔ ↓↑Λ⊕≠⊙一 〈〉

☆★▽≮≯⌒∵∴∪∩≠—— 〃

// ∴ ∵ ∷ ⊥ ↘ ↗ ↙ ↖ √

〔「–」÷√×·º·‹2, b›︶︸Φ