

关于课程安排

- ✧ 集合(第一章、第二章、第三章)-3周
- ✧ 代数结构(第四章、第五章、第六章、第七章)-6周
- ✧ 图论(第八章、第九章、第十章、第十一章、第十二章)-5周
- ✧ 组合数学(第十三章、第十四章)-1周
- ✧ 数理逻辑(第十五章、第十六章)-2周

Computer Science & Technology

①

集合

- ✧ (1) 集合的概念及表示,
- ✧ (2) 子集, 幂集,
- ✧ (3) 集合的运算
- ✧ (4) 集合的运算 例题

Computer Science & Technology

①

1. 集合 sets

集合概念的提出. 1873.11.29

给朋友的信中提出: 全体正整数 N 与全体实数 R 能否建立一一对应关系?

全体正整数 N , 离散的, 且是实数的一部分。

全体正整数 N 的势是 N_0 (阿列夫)

全体实数 R 的势是 2^{N_0}

连续统假设。增加了对实数集的认识, 无限的认识。



康托尔 (Cantor)
1845.3.3-1918.1.6

Computer Science & Technology

②

集合 sets

✧ 概念: 一组明确的、互不相同的事物组成的整体。表示 A, B, C, \dots
元素 (element), 成员(member)。

✧ 当事物 a 是集合 A 的元素时, 称 a 属于 A , 记为 $a \in A$

✧ 当事物 a 不是集合 A 的元素时, 称 a 不属于 A , 记为 $a \notin A$

Computer Science & Technology

③

集合 sets

例: (1) 偶素数集合 $\{2\}$ 。

(2) 二进制的基数集合 $\{0, 1\}$ 。

(3) 英文字母(大写和小写)的集合。

(4) C++语言的基本字符构成一个字符集。

(5) 计算机主存的全部存储单元集合。

(6) 全体实数的集合。

(7) 宇宙中的全部星球是一个集合。

“集合”、“元素”和“属于”是集合论的三个最基本概念

Computer Science & Technology

④

集合

✧ 空集, 记为 \emptyset ; 全集, 记为 U

✧ 集合中元素的个数称为基数(cardinality)或势(potential), 用 $|A|$ 或 $\#A$ 表示。基数是有限的集合称为有限集, 否则称为无限(infinite)集。

✧ 有限(穷)集, $|A|=n$

✧ 无限(穷)集(可数的), $|A| = N_0$

例 $|\emptyset|=0$; $|\{0\}|=1$; $|\{0, 1\}|=2$;

$|\{A, B, C, \dots, X, Y, Z\}|=26$

Computer Science & Technology

⑤

集合的表示

(1) 全部列举法

例: $A = \{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\}$
 $= \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$

(2) 部分列举法

例: $Z = \{+1, -1, +2, -2, \dots\}$,

(3) 概括法、属性法、谓词法 $A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$

例: $R^+ = \{\text{所有的正实数}\} = \{x \mid x \text{ 是任意正实数}\}$

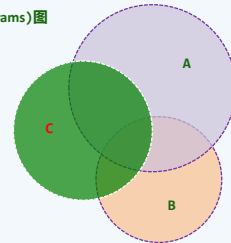
例: 正奇数集合 $\text{Odd} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ 。

Computer Science & Technology

6

集合的表示

(4)、文氏(Venn Diagrams)图



Computer Science & Technology

7

集合的表示

5. Backus Naur Form (BNF) 巴克斯范式:

$::=$ 常用于定义高级程序设计语言的语法集合。

例 $\langle \text{factor} \rangle ::= \langle \text{operand} \rangle \mid \langle \text{factor} \rangle * \langle \text{operand} \rangle$

6. 递归定义法: 给定基础元素, 通过计算规则定义集合的其它元素。

例 Fibonacci 数列:

$$F(0) = F(1) = 1$$

$$F(n+2) = F(n) + F(n+1) \quad n \geq 0$$

Computer Science & Technology

8

常用集合符号

- ✧ (1) \mathbb{N} : 所有自然数 (包括 0) 组成的集合 (自然数集), $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- ✧ (2) \mathbb{Z} : 所有整数所组成的集合 (整数集), $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- ✧ (3) \mathbb{N}^* 或 \mathbb{Z}^+ : 所有正整数所组成的集合 (正整数集), $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
- ✧ (4) \mathbb{Q} : 所有有理数所组成的集合 (有理数集)
- ✧ (5) \mathbb{Q}^+ : 所有正有理数组成的集合 (正有理数集)
- ✧ (6) \mathbb{R} : 所有实数组成的集合 (实数集)
- ✧ (7) \mathbb{R}^+ : 所有正实数组成的集合 (正实数集)

Computer Science & Technology

9

集合的表示-集合族

✧ 一个集合, 如果其每个元素均为集合, 则称之为集合族。

✧ 例: $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}\}$,

$\{\{1, 2\}, \{A\}, \{2x+y=6\}\}$

$\{\{a\}, \{\emptyset\}, \{1, 2\}, \{A\}\}$ 等等

例 求和为 8 的不同正整数的集合的集合族。

解 所求集合族为:

$\{\{8\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}\}$

Computer Science & Technology

10

集合

✧ (1) 集合的概念及表示,

✧ (2) 子集, 幂集,

✧ (3) 集合的运算

✧ (4) 集合的运算 例题

Computer Science & Technology

11

2、子集

❖ 定义1 设 A, B 为两个集合, 如果 A 的元素均是 B 的元素, 则称 A 为 B 的子集或称 A 包含于 B (B 包含 A), 记为

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A.$$

❖ 即 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A, \text{ 必有 } x \in B$

❖ 真子集 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 称 A 为 B 的真子集; $A \subset B$

❖ $A \not\subseteq B$ 表示 A 不是 B 的子集

Computer Science & Technology

12

子集

❖ 集合的包含关系具有反身性、反对称性、传递性

(1) $A \subseteq A$ (反身性/自反性)

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A=B$ (反对称性)

(3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ (传递性)

❖ 对于任意集合 A , $\emptyset \subseteq A$.

❖ \emptyset 与 A 称为 A 的平凡子集

Computer Science & Technology

13

集合相等

❖ 定义2 设 A, B 是两个集合, 如果 $A \subseteq B, B \subseteq A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A=B$

❖ 即 $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A$ (即 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A, \text{ 必有 } x \in B$,

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B, \text{ 必有 } x \in A)$$

Computer Science & Technology

14

幂集 power set

❖ 定义3 幂集: 由集合 A 的所有子集组成的集合, 称为集合 A 的幂集 (power set), 记作 $P(A)$ 或 2^A .

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

A 的所有子集作为元素组成的集合成为 A 的幂集

❖ 如 $A = \{a, b\}$ 则

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Computer Science & Technology

15

幂集

例 求出集合 $S = \{a, b, c\}$ 的所有子集。 $|S|=3$

解: 0个元素的子集, 只有一个 C_3^0 个: \emptyset ;

1个元素的子集, 有 C_3^1 个: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$;

2个元素的子集, 有 C_3^2 个: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$;

3个元素的子集, 有 C_3^3 个: $\{a, b, c\}$ 。

$$\text{共有子集数: } C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = (1+1)^3 = 2^3 = 8$$

例 $A = \{\{a, b\}, c\}$,

$$P(A) = \{\emptyset, \{\{a, b\}\}, \{c\}, \{\{a, b\}, c\}\}$$

❖ 定理1 设 A 是有限集, 则 $|2^A| = 2^{|A|}$

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n = 2^{|A|}.$$

Computer Science & Technology

16

幂集

例 $A = \{\emptyset, a, \{a\}\}$ 的幂集,

$$\text{解: } P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\{a\}\},$$

$$\{\emptyset, a\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \{\emptyset, a, \{a\}\}\}.$$

例 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 的幂集:

$$\text{解: } P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Computer Science & Technology

17

集合

- ✧ (1) 集合的概念及表示,
- ✧ (2) 子集, 幂集,
- ✧ (3) 集合的运算
- ✧ (4) 集合的运算 例题

Computer Science & Technology

18

3、集合的运算

✧ 定义 1 A 与 B 的并集 union, 记为 $A \cup B$.

$$A \cup B = \{ x | x \in A \text{ 或 } x \in B \}$$

✧ 例如, 设

$$A = \{ 1, 2, 3 \},$$

$$B = \{ \{ 1 \}, 2, 3, 4 \}$$

$$\text{则 } A \cup \emptyset = A; \quad A \cup \{ \emptyset \} = \{ 1, 2, 3, \emptyset \}$$

Computer Science & Technology

19

集合的运算

✧ 定义 2 A 与 B 的交集 intersection, 记为 $A \cap B$,
即 $A \cap B = \{ x | x \in A, \text{ 并且 } x \in B \}$

✧ 例如, 设

$$A = \{ a, b, c \},$$

$$B = \{ \{ a \}, b, c, \emptyset \},$$

$$\text{则 } A \cap B = \{ b, c \}$$

Computer Science & Technology

20

集合的运算

✧ 定义 3 设 A, B 是两个集合, 如果 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 是分离的或不交的 disjoint;

设 A 是一个集合族, 如果 A 的元素是两两分离的, 则称 A 为分离族.

✧ 例如, $\{ 1, 2 \}$ 与 $\{ 3, 4 \}$ 是分离的; $\{ \{ a, b \}, \{ d, c \}, \{ f \} \}$ 是一个分离族.

Computer Science & Technology

21

集合的运算

✧ 定义 4 设 A, B 是两个集合, 由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的差集 difference set, 或称为 B 在 A 中的相对补集 relative complement, 记为 $A - B$.

✧ 即 $A - B = \{ x | x \in A, x \notin B \}$

$$A = \{ a, b, c \},$$

$$B = \{ \{ a \}, b, c, \emptyset \},$$

$$\text{则 } A - B = \{ a \}$$

Computer Science & Technology

22

集合的运算

✧ 定义 5 集合 A 在全集 U 中的相对补集 $U - A$ 称为 A 的绝对补集, 简称补集 absolute. 记为 $\sim A$, 或 A' .

即 $\sim A = U - A$, 或 $A' = U - A$

$$A = \{ a, b, c \}, \quad U = \{ a, b, c, \dots, z \}$$

$$B = \{ \{ a \}, b, c, \emptyset \},$$

$$\text{则 } \sim A = \{ d, e, \dots, z \}; \quad \sim B = \{ a, d, e, \dots, z \}$$

✧ 对任意集合 A, B , 有 $A - B = A \cap \sim B$

Computer Science & Technology

23

集合并、交、差、补运算性质

定理 1 设 A, B, C 为全集 U 的子集, 则

- (1) $A \cup A = A$ $A \cap A = A$ (幂等律)
 (2) $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$ (交换律)
 (3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ (结合律)
 (4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (分配律)

Computer Science & Technology

24

集合并、交、差、补运算性质

- (5) $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
 $\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$ (De Morgan律)
 (6) $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$ (吸收律)
 (7) $A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ (零律)
 (8) $A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$ (单位律)
 (9) $A \cup \sim A = U$, $A \cap \sim A = \emptyset$ (补律)
 (10) $\sim (\sim A) = A$ (反身律)

Computer Science & Technology

25

集合恒等证明

例: $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

解: $A - (B \cap C)$
 $= A \cap \sim (B \cap C)$
 $= A \cap (\sim B \cup \sim C)$
 $= (A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)$
 $= (A - B) \cup (A - C)$

Computer Science & Technology

26

集合恒等证明

例: 证明 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

解: $A \cap (B - C)$ 又 $(A \cap B) - (A \cap C)$
 $= A \cap (B \cap \sim C)$ $= (A \cap B) \cap (A \cap C)^c$
 $= A \cap B \cap \sim C$ $= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c)$
 $= (A \cap B \cap \sim C) \cup (A \cap B \cap C^c)$
 $= A \cap B \cap \sim C$

$\therefore A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

证明集合相等的方法之一: 公式推导。

Computer Science & Technology

27

集合恒等证明

例: 证明幂集的性质

- (1) $A \subseteq B$ 当且仅当 $P(A) \subseteq P(B)$
 (2) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
 (3) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$
 (4) $P(A^c) \neq (P(A))^c$

Computer Science & Technology

28

集合恒等证明

解: (1) $A \subseteq B$ 当且仅当 $P(A) \subseteq P(B)$

证明: (1) $A \subseteq B$ 当且仅当 $P(A) \subseteq P(B)$

必要性: 对任意 $x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \Leftrightarrow x \in P(B)$

所以 $P(A) \subseteq P(B)$;

充分性: 对任意 $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B) \Leftrightarrow x \in B$

所以 $A \subseteq B$ 。

Computer Science & Technology

29

集合恒等证明

解: (2) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ 解: 对任意 $x \in P(A \cap B)$ 解: 对任意 $x \in P(A) \cap P(B)$

(1) $\Rightarrow x \subseteq A \cap B$ 交集的定义

(1) $\Rightarrow x \in P(A) \cap P(B)$

(2) $\Rightarrow x \subseteq A \wedge x \subseteq B$ \cap 的定义

(2) $\Rightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B)$

(3) $\Rightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B)$ 交集的定义

(3) $\Rightarrow x \subseteq A \wedge x \subseteq B$

(4) $\Rightarrow x \in P(A) \cap P(B)$ \cap 的定义

(4) $\Rightarrow x \subseteq A \cap B$

所以 $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$ 。 所以 $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$ 。

Computer Science & Technology

16

集合恒等证明

(2) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

解: 对任意 $x \in P(A \cap B)$

(1) $\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B$

交集的定义

(2) $\Leftrightarrow x \subseteq A \wedge x \subseteq B$

 \cap 的定义

(3) $\Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B)$

交集的定义

(4) $\Leftrightarrow x \in P(A) \cap P(B)$

 \cap 的定义所以 $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ 。

Computer Science & Technology

17

集合恒等证明

解: (4) $P(A') \neq (P(A))'$

$$P(A') = P(\sim A), (P(A))' = \sim P(A)$$

$$\emptyset \in P(A'), \text{ 但 } \emptyset \notin (P(A))'$$

所以 $P(A') \neq (P(A))'$ 。

证明集合相等的方法之二; 利用集合的基本定义。

Computer Science & Technology

18

集合恒等证明

证明集合相等的方法之一; 公式推导。

证明集合相等的方法之二; 利用集合的基本定义。

证明集合相等的方法之三; 利用集合成员表。

Computer Science & Technology

19

集合恒等证明

证明集合相等的方法之三; 利用集合成员表。

例 用集合成员表证明

德·摩根律 $(A \cap B)' = A' \cup B'$

A	B	A' B'	A ∩ B	(A ∩ B)'	A' ∪ B'
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0

Computer Science & Technology

20

集合的运算

◇定义8 设A, B为两个集合, A与B的对称差 $A \oplus B$ 定义如下

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

◇例如, 设

$$A = \{ \{a\}, b, \{b\}, c \},$$

$$B = \{ a, b, c \}$$

则 $A \oplus B = \{ \{a\}, \{b\}, a \}$

Computer Science & Technology

21

集合的运算

❖ 定理3 设 A, B 为两个集合, 则

$$A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)$$

$$= ((A \cap \sim B) \cup \sim A) \cap ((A \cap \sim B) \cup B)$$

$$= ((A \cup \sim A) \cap (\sim A \cup \sim B)) \cap ((A \cup B) \cap (\sim B \cup B))$$

$$= (\sim A \cup \sim B) \cap ((A \cup B) \cap \sim B)$$

$$= (\sim A \cup \sim B) \cap (\sim B)$$

$$= (\sim A \cup \sim B) \cap \sim (A \cap B)$$

$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$

Computer Science & Technology

36

集合的运算

❖ 定理4 设 A, B, C 是三个集合, 则

$$(1) A \oplus A = \emptyset$$

$$(2) A \oplus B = B \oplus A$$

$$(3) (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

证明: (1) $A \oplus A = (A \cap \sim A) \cup (\sim A \cap A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

$$(3) (A \oplus B) \oplus C = ((A \oplus B) \cap \sim C) \cup (C \cap \sim (A \oplus B))$$

$$= ((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) \cap \sim C \cup (C \cap \sim ((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)))$$

=...

$$A \oplus (B \oplus C) = \dots$$

Computer Science & Technology

37

集合

❖ (1) 集合的概念及表示,

❖ (2) 子集, 幂集,

❖ (3) 集合的运算

❖ (4) 集合的运算 例题

Computer Science & Technology

38

4. 集合的运算 例题

例题1. 对任意集合 A, B, C , 判别下列命题的正确性? 为什么?

$$(1) \emptyset \in \emptyset;$$

$$(2) \emptyset \subseteq \emptyset;$$

$$(3) \emptyset \subseteq \{\emptyset\};$$

$$(4) \{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\};$$

$$(5) \{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\};$$

$$(6) \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\};$$

解: (1) N (2) Y (3) Y (4) N (5) Y (6) Y

Computer Science & Technology

39

集合的运算 例题

(7) 若 $A \in B, B \subseteq C$, 则 $A \in C$;

(8) 若 $A \in B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$;

(9) 若 $A \subseteq B, B \in C$, 则 $A \in C$;

(10) 若 $A \subseteq B, B \in C$, 则 $A \subseteq C$;

解: (7) 真。

(8) 假。反例: $A=\{a\}, B=\{b, \{a\}\}, C=\{d, b, \{a\}\}$

则 $A \in B, B \subseteq C$, 但 $A \not\subseteq C$ 。

(9) 假。反例: $A=\{a\}, B=\{a, b\}, C=\{a, \{a, b\}\}$

则 $A \subseteq B, B \in C$, 但 $A \notin C$ 。

(10) 假。反例: $A=\{a\}, B=\{a, b\}, C=\{a, \{a, b\}\}$

则 $A \subseteq B, B \in C$, 但 $A \not\subseteq C$ 。

Computer Science & Technology

40

集合的运算 例题

例题2. 给出下列集合的幂集:

$$(1) \{\emptyset, \{1, a\}\}; (2) \{\emptyset, 1, \{a\}\};$$

$$(3) P(\emptyset);$$

$$(4) P(P(P(\emptyset)))$$

解: (1) $A = \{\emptyset, \{1, a\}\}$,

$$\text{则 } P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset, \{1, a\}\}\}.$$

(2) 设 $B = \{\emptyset, 1, \{a\}\}$:

$$\text{则 } P(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, 1\},$$

$$\{\emptyset, \{a\}\}, \{1, \{a\}\}, \{\emptyset, 1, \{a\}\}\}.$$

(3) 因为 $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, 所以

$$P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$(4) P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Computer Science & Technology

41

集合的运算 例题

例题3. 试证明 $P(A-B)$ 是否等于 $P(A)-P(B)$

解: 不一定。

$$\emptyset \in P(A-B) \text{ 但 } \emptyset \notin (P(A)-P(B))$$

$$\text{一般地, } P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$$

$$\text{当 } X=\emptyset, \text{ 则 } X \in P(A-B) \text{ 且 } X \in (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$$

$$\text{当 } X \neq \emptyset, \text{ 对任意 } X \in P(A-B)$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A-B$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \not\subseteq B$$

$$\Leftrightarrow X \in P(A) \wedge X \notin P(B)$$

$$\Leftrightarrow X \in (P(A)-P(B))$$

$$\text{当 } X \neq \emptyset, P(A-B) = P(A)-P(B)$$

Computer Science & Technology

12

集合的运算 例题

例题4. 设 $|A| = 88$, 问:

- (1) 可构成多少个子集?
- (2) 其中子集元素为偶数的有多少个?
- (3) 有几个子集元素为89个.

解: (1) 可构成 2^{88} 个子集.

$$(2) \text{ 子集元素为偶数的有 } \frac{2^{88}}{2} = 2^{87}$$

(3) 0个, 不可能有89个元素的子集.

Computer Science & Technology

13

集合的运算 例题

例题5. 计算以下各式:

- (1) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$; (2) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \emptyset$;
- (3) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\emptyset\}$; (4) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\{\emptyset\}\}$.

解: (1) \emptyset ; (2) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
(3) $\{\{\emptyset\}\}$; (4) $\{\emptyset\}$

Computer Science & Technology

14

集合的运算 例题

例题6. 判别下列命题是否正确? 为什么?

- (1) 若 $A \cap B = A \cap C$, 则 $B = C$;

解: 不一定。

$$\text{如 } A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{a, c\},$$

$$\text{则有 } A \cap B = A \cap C, \text{ 但 } B \neq C.$$

- (2) 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$;

解: 不一定。

$$\text{如 } A = \{a\}, B = \{a, c\}, C = \{c\},$$

$$\text{则有 } A \cup B = A \cup C, \text{ 但 } B \neq C.$$

Computer Science & Technology

15

集合的运算 例题

- (3) 若 $A \oplus B = A \oplus C$, 则 $B = C$.

解: 正确。

若 $A \oplus B = A \oplus C$, 对任意 $x \in B$,

$$1. \text{ 如 } x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \notin A \oplus B \Leftrightarrow x \notin A \oplus C \quad \text{同理 } C \subseteq B$$

$$\text{由 } x \in A \wedge x \notin A \oplus C \Rightarrow x \in A \cap C, x \in C, \quad \text{所以 } B = C.$$

$$\text{所以 } B \subseteq C.$$

$$2. \text{ 如 } x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B$$

$$\text{因为 } x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\text{由 } x \notin A \cap B \wedge x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \oplus B \Rightarrow x \in A \oplus C$$

$$\text{但 } x \notin A \wedge x \in A \oplus C \Rightarrow x \in C$$

$$\text{所以 } B \subseteq C.$$

Computer Science & Technology

16

集合的运算 课堂练习题

1: 设有集合 A, B, C, D , 下述论断是否正确? 说明理由。

- (1) 若 $A \subseteq B, C \subseteq D$, 则 $(A \subseteq C) \cap (B \subseteq D)$

- (2) 若 $A \subseteq B, C \subseteq D$, 则 $(A \subseteq C) \cap (B \subseteq D)$

2: 假设 A, B, C 为任意集合, 证明或否定下列命题。

- (1) 如果 $A \cup B = A$, 那么 $B = \emptyset$.

- (2) 如果 $A - B = B$, 那么 $A = B = \emptyset$.

- (3) 如果 $A \in B$, 且 $B \in C$, 则 $A \in C$.

- (4) 若 $A \neq \emptyset$ 并且 $A \times B = A \times C$, 则 $B = C$.

- (5) $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} 3: \text{ 如果 } A = \{\{\emptyset\}\}, B = \{\emptyset\} \\ \text{求: } P(A \cup B), (P(A \cup B) \cap A) \times B, \\ (P(A \cup B) \cap A) - A \end{aligned}$$

Computer Science & Technology

17

小结

- ❖ 集合、元素和属于是集合论的三个未加形式定义的原始概念，集合论中的其它概念均源自这三个基本概念。
- ❖ 集合常用表示法：列举法、描述法、文氏图、归纳定义和BNF。
- ❖ 集合间的两个基本关系是：包含和相等。
- ❖ 元素、集合和集合族体现了集合的不同层次关系，必须加以严格区分。

Computer Science & Technology

18

小结

- ❖ 两个特殊的集合：空集 \emptyset 和全集 U 。 \emptyset 是“最小”的集合，全集是相对的，不存在“最大”的集合
- ❖ 集合的交、并、相对补(差)、绝对补和对称差这五种运算在其幂集中是封闭的。
- ❖ 集合运算性质体现在常见的基本定律(10个)中。
- ❖ 集合恒等式证明的常用方法有：
基本定义法、公式法和集合成员表法。
- ❖ 集合中元素的个数称为基数。

Computer Science & Technology

19

作业

- ❖ 作业：
- ❖ 习题一 1、2
- ❖ 习题二 1、3、4、5
- ❖ 习题三 1、6、7

Computer Science & Technology

20

$\forall \exists \emptyset \cap \cup \subseteq \subset \neq \in \forall \in \leq \dots \mathbb{N} \Sigma \{ \} \equiv \pm \circ \infty$
 $\alpha \beta \sigma \rho \upsilon \omega \zeta \psi \eta \delta \epsilon \phi \lambda \mu \pi \Delta \emptyset \pm \prod \wedge \vee \forall \} \therefore \sqrt{} \supset$
 $\cong \approx \sim \infty \supseteq \cap \cup \circ \text{\textcircled{C}} \% \text{\textcircled{a}} \geq \leq \therefore \prod \in \sum \neq \times \div \frac{1}{2} \frac{1}{4} \S \pounds \{\} ? \pm$
 $\leftrightarrow \vee \wedge \neg \rightarrow \leftarrow \Rightarrow \Leftrightarrow \Downarrow \Uparrow \oplus \neq \ominus - \langle \rangle$
 $\star \blackstar \nabla \spadesuit \heartsuit \circ \therefore \because \cup \cap \neq \text{---} "$
 $// \therefore \because \because \perp \searrow \nearrow \swarrow \nwarrow \checkmark$
 $\{ \text{「} - \text{」} \div \times \cdot ^\circ \cdot \langle 2, b \rangle \neg \neg \Phi$