离散数学

Discrete Mathematics

Chapter 4

代数结构

Algebra System

2020/3/20

多选题 2分

设置

自然数集N上的下列那几种运算不具有封闭性的特点。

A +

B -

C ×

D ÷

提交

多选题 2分

设置

以下哪些性质不属于代数运算（如+，-，×，÷）的运算定律。

A 封闭性

B 结合律

C 交换律

D 对称性

E 吸收律

F 传递性

G 分配律

H 削去律

提交

§4.1 代数系统的引入 (1)

一个代数系统需要满足下面三个条件：

（1）有一个非空集合S；

（2）有一些建立在S上的运算；

（3）这些运算在集合S上是封闭的。

§4.2 运算 (1)

4.2.1 运算的概念

定义

假设A是一个集合，A×A 到A的映射称为A上的二元运算。

一般地，A^n 到 A 的映射称为A上的n元运算。

§4.2 运算 (2)

4.2.2 运算的性质

假设 *, + 都是集合 A 上的运算

（1）封闭性

如果 $S \subseteq A$，对任意的 $a, b \in S$，有 $a * b \in S$，则称 S 对运算 * 是封闭的。

§4.2 运算 (3)

4.2.2 运算的性质

（2）交换律

如果对任意的 $a,b\in A$，都有 $a*b=b*a$，则称运算 $*$ 是可交换的。

（3）结合律

如果对任意的 $a,b,c\in A$，都有 $(a*b)*c=a*(b*c)$，则称运算 $*$ 是可结合的。

§4.2 运算

（4）分配律

如果对任意的 a,b,c∈A，都有a*(b+c)=(a*b)+(a*c)

则称 * 对 + 运算满足左分配；

如果对任意的a,b,c ∈A，都有(b+c)*a=(b*a)+(c*a)

则称 * 对 + 运算满足右分配。

如果运算 * 对 + 既满足左分配又满足右分配，

则称运算 * 对 + 满足分配律。

§4.2 运算

（5）消去律

如果对任意的 $a,b,c \in A$，当 $a*b=a*c$，必有 $b=c$，则称运算 $*$ 满足左消去律；

如果对任意的 $a,b,c \in A$，当 $b*a=c*a$，必有 $b=c$，则称运算 $*$ 满足右消去律；

如果运算 $*$ 既满足左消去律又满足右消去律，则称运算 $*$ 满足消去律。

§4.2 运算

（6）吸收律

如果对任意的 $a,b\in A$，都有$a*(a+b)=a$，则称运算 * 关于运算 + 满足吸收律。

（7）等幂律

如果对任意的 $a\in A$，都有 $a*a=a$，则称运算 * 满足等幂律。

§4.2 运算

(7)

Δ	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

（1）封闭性 √

（2）交换律 √

（3）结合律 √

（4）分配律 √

（5）消去律 ×

（6）吸收律 ×

（7）等幂律 ×

§4.3 代数系统 (1)

4.3.1 代数系统的概念

定义

假设 A 是一个非空集合，$f_1,f_2,\ldots,f_n$ 是 A 上的运算（运算的元素可以是不相同的），则称 A 在运算 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ 下构成一个代数系统，记为：$<A, f_1,f_2,\ldots,f_n>$

§4.3 代数系统 (2)

4.3.1 代数系统的概念

定义

假设 <A,*> 是一个代数系统，$S \subseteq A$，如果 S 对* 是封闭的，则称 <S,*> 为 <A,*>的子代数系统。

§4.3 代数系统 (3)

4.3.2 代数系统中的特殊元素

（1）单位元（幺元）

假设 $<A,*>$ 是一个代数系统，如果 $\exists e_L \in A$,对于任意元素 $x \in A$，都有 $e_L * x = x$,则称 e_L为 A 中关于运算 * 的左单位元;

如果 $\exists e_r \in A$,对于任意元素 $x \in A$，都有 $x * e_r = x$,则称 e_r 为 A 中关于运算 * 的右单位元;

如果 A 中一个元素 e 既是左单位元又是右单位元，则称 e 为 A 中关于运算 * 的单位元。

§4.3 代数系统 (4)

Δ	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

◊	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

•	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

e_L=a,b,c e_r=a,b,c e_L=a e_r=a

§4.3 代数系统 (5)

4.3.2 代数系统中的特殊元素

（1）单位元（幺元）

定理

假设 <A,*> 是代数系统，并且 A 关于运算 * 有左单位元 e_L 和右单位元 e_r，则 $e_L=e_r=e$ 并且单位元唯一。

§4.3 代数系统 (6)

4.3.2 代数系统中的特殊元素

(2) 零元

假设 $\langle A,*\rangle$ 是一个代数系统，如果 $\exists\theta_L\in A$,对于任意元素 $x\in A$，都有 $\theta_L*x=\theta_L$,则称 θ_L为 A 中关于运算 * 的左零元;

如果 $\exists\theta_r\in A$,对于任意元素 $x\in A$，都有 $x*\theta_r=\theta_r$,则称 θ_r为 A 中关于运算 * 的右零元;

如果 A 中一个元素 θ 既是左零元又是右零元，则称 θ 为 A 中关于运算 * 的零元。

§4.3 代数系统

(7)

Δ	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

$\lozenge$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\bullet$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	b

θ_r=a,b,c

θ_L=a,b,c

θ_r=b θ_L=b

§4.3 代数系统 (8)

4. 3. 2 代数系统中的特殊元素

（2）零元

定理

假设 <A,*> 是代数系统，并且 A 关于运算 * 有左零元 θ_L 和右零元 θ_r，则 $\theta_L=\theta_r=\theta$ 并且零元唯一。

§4.3 代数系统 (9)

4.3.2 代数系统中的特殊元素

（3）逆元

假设 <A,*> 是一个代数系统，e 是 <A,*>的单位元。对于元素 $a \in A$，如果存在 $b \in A$，使得 $b*a=e$，则称 a 为左可逆的，b 为 a 的左逆元；如果存在 $c \in A$，使得 $a*c=e$，则称元素 a 是右可逆的，c 为 a 的右逆元。如果存在 $a' \in A$，使得 $a'*a=a*a'=e$，则称 a 是可逆的，a' 为 a 的逆元。a 的逆元记为：a^{-1}。

§4.3 代数系统

(10)

$\bullet$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$a' * a = a * a' = e$

$e = a$

$a * a = e$

$a^{-1} = a$

$b * c = c * b = e$

$b^{-1} = c$ $c^{-1} = b$

§4.3 代数系统 **(11)**

4.3.2 代数系统中的特殊元素

（3）逆元

定理

设 <A,*> 是一个代数系统，且 A 中存在单位元 e，每个元素都存在左逆元。如果运算 * 是可结合的，那么，任何一个元素的左逆元也一定是该元素的右逆元，且每个元素的逆元唯一。

§ 4.3 代数系统 **(12)**

4. 3. 2 代数系统中的特殊元素

（4）幂等元

定义：

在代数系统<A,*>中，如果元素 a 满足 a*a=a，那么称 a 是 A 中的幂等元。

§4.3 代数系统 (12)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

运算 1

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

运算 2

*	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

运算 3

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

运算 4

§4.4 同态与同构 (1)

4.4.1 基本概念

定义

设 $\langle A,*\rangle$ 和 $\langle B,\circ\rangle$ 是代数系统，$f:A\to B$，如果 f 保持运算，即对 $\forall x,y\in A$，有 $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$。称 f 为代数系统 $\langle A,*\rangle$ 到 $\langle B,\circ\rangle$ 的同态映射，简称同态。也称之为两代数系统同态。

§4.4 同态与同构 (2)

4. 4. 1 基本概念

定义

设 $<A,*>$ 和 $<B,\circ>$ 是代数系统，f 是 A 到 B 的同态。如果 f 是单射的，称 f 为**单同态**；如果 f 是满射的，称 f 为**满同态**；如果 f 是双射的，称 f 为同构映射，简称为**同构**。

§4.4 同态与同构 (3)

4.4.1 基本概念

定义

设 <A,*> 是代数系统，若存在函数 $f:A\to A$,并且对 $\forall x,y\in A$,有 $f(x*y)=f(x)*f(y)$。称 f 为<A,*> 的自同态；如果 f 是双射的，则称 f 为 <A,*> 的自同构。

§4.4 同态与同构 (1)

例：验证下列两个代数系统是同构的。

<A,*> <B,° >

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	a	c
c	c	d	d	c
d	d	b	c	d

°	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	α	γ
γ	γ	δ	δ	γ
δ	δ	β	γ	δ

§ 4.4 同态与同构 (1)

设 <A,*> 和 <B,°> 是代数系统，

（1） $f:A\to B$, 如果 f 保持运算，即对 $\forall x,y\in A$,有

$f(x*y)=f(x)\circ f(y)$。

（**2**） **f**是双射函数（单射，满射）

（1） $f(a)=\alpha;f(b)=\beta;f(c)=\gamma;f(d)=\delta$

满足 $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$;

$f(a*b)=f(b)=f(a)\circ f(b)=\alpha\circ\beta=\beta$;$f(a*c)=f(c)=f(a)\circ f(c)=\alpha\circ\gamma=\gamma$

$f(a*d)=f(d)=f(a)\circ f(d)=\alpha\circ\delta=\delta$ ....

（**2**） **f**是双射函数（单射，满射）

函数是用序偶表示的， **f**是双射函数。

§4.4 同态与同构 (1)

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	a	c
c	c	d	d	c
d	d	b	c	d

∘	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	α	δ	γ
δ	δ	β	γ	δ

还同构吗？

$f(b*c)=f(a)=\alpha$? $f(b)\circ f(c)=\beta\circ\gamma=\delta$

运算保持不满足

§ 4.4 同态与同构 (1)

例：验证下列两个代数系统是同态的。<A,*> <B,° >; e是B的单位元。f:a→e , ∀a∈A 同构吗？

解：f:a→e；该函数不是满射的，所以不是同构函数

又

f(x*y)=f(z)=e

f(x) ° f(y)=e ° e=e 所以f(x*y)= f(x) ° f(y)

所以f是同态

§4.4 同态与同构 (1)

例：验证下列两个代数系统是同态的。

$<Z,+>$ $<Z,+>$; $f:a\to 8a, \forall a\in Z$

$<Z,\times>$ $<Z,\times>$如何？

例：下列两个代数系统是同态的吗？同构吗？

$<R,+>$ $<R,\times>$;

§4.4 同态与同构 (4)

4.4.2 同态、同构的性质

（1）如果两函数是同态、同构的，则复合函数也是同态、同构的。

定理

假设 f 是<A,*> 到 <B,•>的同态，g是<B, • >到<C,Δ> 的同态，则gof是<A,*> 到<C,Δ>的同态；如果 f 和 g 是单同态、满同态、同构时，则gof也是单同态、满同态和同构。

§4.4 同态与同构 (5)

4.4.2 同态、同构的性质

（2）满同态保持结合律

定理

假设 f 是<A,*> 到 <B,°>的满同态。如果 * 运算满足结合律，则 ° 运算也满足结合律，即满同态保持结合律。

（2）满同态保持结合律

定理

假设 f 是 $\langle A,*\rangle$ 到 $\langle B,\circ\rangle$ 的满同态。如果 * 运算满足结合律，则 ∘ 运算也满足结合律，即满同态保持结合律。

*满足结合律 $\forall x,y,z\in A$;有 $x*(y*z)=(x*y)*z$

∘也满足结合律， $\forall a,b,c\in B$; $\mathbf{a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c}$

$f(x*y)=f(x)\circ f(y)$

$a\circ(b\circ c)=f(x)\circ(f(y)\circ f(z))=$

$f(x)\circ f(y*z)=f(x*(y*z))=f((x*y)*z)$

$=(f(x)\circ f(y))\circ f(z)=(a\circ b)\circ c$

§4.4 同态与同构 (6)

4.4.2 同态、同构的性质

（3）满同态保持交换律

（4）满同态保持单位元

定理

假设 f 是$<A,*>$ 到 $<B,\circ>$的满同态。e 是$<A,*>$ 的单位元，则 f(e) 是$<B,\circ>$的单位元。

§ 4.4 同态与同构 (7)

4. 4. 2 同态、同构的性质

（5）满同态保持逆元

定理

假设 f 是<A,*>到<B,°>的满同态。e_A和 e_B 分别是<A,*>和<B,°>的单位元，如果 A 中元素 x 和 x′ 互逆，则 B 中元素 f(x) 和 f(x′)也互逆。

§4.4 同态与同构

4. 4. 2 同态、同构的性质

（6）满同态保持零元

定理

假设 f 是<A,*> 到 <B,°>的满同态。θ 是<A,*> 的零元，则 f(θ) 是<B,°>的零元。

§4.4 同态与同构

4.4.2 同态、同构的性质

（7）满同态保持幂等元

定理

假设 f 是<A,*>到<B,°>的满同态。并且 x∈A是<A,*>的幂等元，则 f(x)∈B 是<B,°>的幂等元。

§4.4 同态与同构 (10)

4. 4. 2 同态、同构的性质

（8）同构映射运算性质双向保持

定理

假设 f 是<A,*> 到 <B,°>的同构映射。

则 f^{-1}是<B,°> 到 <A,*> 的同构映射。

§ 4.5 同余关系与商代数

4.5.1 同余关系

定义

假设 <A,*> 是一个代数系统，E 是 A 上的等价关系。如果对 $\forall x_1,x_2,y_1,y_2 \in A$，当 $x_1 E x_2, y_1 E y_2$ 时，必有 $(x_1 * y_1) E (x_2 * y_2)$，则称 E 是 A 上的同余关系。

§4.6 直积 (1)

定义：

设 $<A,*>$ 和 $<B,\circ>$ 为两个代数系统，$<A\times B,\Delta>$ 称为两代数系统的直积。其中 $A\times B$ 是 A 和 B 的笛卡尔乘积，Δ 定义如下：对任意的$<x,y>,<u,v>\in A\times B$，

$<x,y>\Delta<u,v>=<x*u,y\circ v>$。

§4.6 直积 (2)

定理：

假设 $<A,*>$ 和 $<B,\circ>$ 为两个代数系统，且分别有单位元 e_A,e_B，在两代数系统的直积$<A\times B,\Delta>$中存在子代数系统 S,T，使得

$<A,*> \cong <S,\Delta>$，$<B,\circ> \cong <T,\Delta>$。

单选题 1分

设置

课堂练习1

设 $<A,*>$ 和 $<B,\circ>$ 是代数系统，$f:A\to B$ 是函数；f 是满同态的必要条件之一是：$|A| < |B|$

A 上述说法是正确的

B 上述说法是错误的

提交

填空题 2分

设置

课堂练习2

以下 *运算的单位元是 [填空1]。没有单位元填写0

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	a	c	b

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

单选题 2分

设置

以下哪种判断正确。

A 运算1满足等幂律

B 运算2满足等幂律

C 运算3满足等幂律

D 运算4满足等幂律

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

运算 1

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

运算 2

*	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

运算 3

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

运算 4

提交

单选题 2分

设置

任意给定两个代数系统<A,*>和<B,°>，要么二者是单同态的，要么是满同态的，要么是同构的。

A 上述论述正确

B 上述论述错误

提交

单选题 2分

设置

给定代数系统<A,*>，单位元e一定就是幂等元，任何幂等元也一定就是单位元。

A 上述论述正确

B 上述论述错误

提交

单选题 2分

设置

设 f 是<A,*> 到 <B,°>的同构映射。e_A 是<A,*> 的单位元，e_B是<B,°>的单位元,则 $f^{-1}(e_B)= e_A$ 。

A 上述论述正确

B 上述论述错误

提交

第四章 作业

习题一 1, 3

习题二 2, 3

习题三 1, 4

∀∃∅∩∪⊆⊂⊄∉∀∈≤≥…ℵ∑{ }≡±°∞

αβσρυωζψηδεφλμπΔ θ ±∏∧∨∀ }.∴√⊃

≌≈∽∞⊇∩∪℃‰≥≤∵∏∈∑⇔½¼ § ¥{}? ±

↔∨∧¬→←⇒⇔↓↑Λ⊕≠⊙— 〈〉

☆★▽⇔⌒∵∴∪∩≠—— 〃

// ∴ ∵ ∷ ⊥ ↘ ↗ ↙ ↖ √

〔「–」÷×·º·‹2, b›︶︸Φ