第四章：习题一

1. "+"：结合律、交换律、消去律，封闭性，单位元，逆元

"*"：结合律、交换律、单位元、封闭性

3.

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

*	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

习题二

2、<Q, +, ·> 有：

1、存在单位元（"+"对应 0，"·"对应"1"）
2、每个元素有逆元（对于运算"+"）
3、除 0 外，在运算"·"每个元素有逆元
4. 交换律
5. 结合律
6. 封闭性
7. 消去律

<Z, +, ·> 中 在运算"·"下，除单位元外，其余元素无逆元。（其余性质均满足）

<N, +, ·> 中，两种运算下无逆元。（其余性质均满足）
在"+"运算下，无单位元。

3. ① $\langle E(A), \circ \rangle$ 中 有存在单位元. 恒即 $e = I_A$.

② 子代数可为:

$$E(A), \ \text{恒等代数} I_A$$

再构造第三个子代数:

设 f 为恒等函数. g 满足. $\exists a_1, a_2$, $g(a_1) = a_2$. $g(a_2) = a_1$.

$\forall x \neq a_1, a_2 \quad g(x) = x$.

则 $\langle \{f, g\}, \circ \rangle$ 为 $E(A)$ 子代数.

习题四三.

1. $\forall x_1, x_2 \in A$. 都有

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \boxplus f(x_2)$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \odot f(x_2).$$

4. f_1: $[0] \longrightarrow [0]$, $[1] \longrightarrow [1]$, $[2] \longrightarrow [2]$

f_2: $[0] \longrightarrow [0]$, $[1] \longrightarrow [2]$, $[2] \longrightarrow [1]$

f_3: $[0] \longrightarrow [1]$, $[1] \longrightarrow [0]$, $[2] \longrightarrow [2]$

f_4: $[0] \longrightarrow [1]$, $[1] \longrightarrow [2]$, $[2] \longrightarrow [0]$

f_5: $[0] \longrightarrow [2]$, $[1] \longrightarrow [1]$, $[2] \longrightarrow [0]$

f_6: $[0] \longrightarrow [2]$, $[1] \longrightarrow [0]$, $[2] \longrightarrow [1]$

共 $3! = 6$ 种. 每一种双射都是一种自同构