

集合论

- ❖ 基本概念
 - 集合、子集、集合运算
 - 有序 n 元组与笛卡尔积、多重集
- ❖ 关系
 - 概念、性质、运算、闭包
 - 等价关系与集合划分
 - 偏序关系与偏序集
 - 函数、函数运算
- ❖ 无限集
 - 势、可数集

Computer Science & Technology

①

偏序关系与偏序集

- ❖ 数的大小关系。
- ❖ “次序”关系。
- ❖ “整除 $|$ ”关系。
- ❖ 共同特点：自反的，反对称的，传递的。

Computer Science & Technology

①

§6 偏序关系与偏序集

- ❖ 定义1 设 R 是 A 上的关系，如果 R 是自反的、反对称的、传递的，则称 R 是 A 上的偏序关系，简称偏序。
- ❖ 偏序关系习惯上用“ \leq ”或“ \preceq ”表示，偏序关系“ \leq ”的逆“ \leq^{-1} ”则用“ \geq ”表示。
- ❖ 例：实数的大于等于 \geq ，集合包含 \subseteq ，整除关系 $|$ ，...

Computer Science & Technology

②

§6 偏序关系与偏序集

- ❖ 设 P 为一集合，如果在 P 上定义了一个偏序关系 \leq ，则称 P 在偏序关系 \leq 下构成一偏序集 poset，记为 $\langle P, \leq \rangle$ ，也简记为 P

$$\langle \mathbb{Z}^+, | \rangle, \langle \mathbb{R}, \geq \rangle, \langle P(S), \subseteq \rangle$$
等
- ❖ 对偏序集 $\langle P, \leq \rangle$ ，如果 $a, b \in P$ 满足 $a \leq b$ ，则说在偏序集 P 中（或在偏序关系 \leq 下） a “小于等于” b ，这时也说， b “大于等于” a 。

Computer Science & Technology

③

偏序关系与偏序集

- ❖ 在偏序集 $\langle P, \leq \rangle$ 中，若 $a \leq b$ ，且 $a \neq b$ ，则记为 $a < b$ ，并说 a “小于” b 。
- ❖ 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是一个偏序集，若 $a, b \in P$ 满足 $a < b$ ，且不存在 c 使 $a < c < b$ ，则称 b 盖住 a ，或称 b 是 a 的直接前辈， a 是 b 的直接后辈。

Computer Science & Technology

④

偏序关系与偏序集

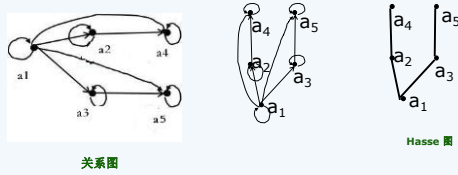
- ❖ 偏序集 $\langle P, \leq \rangle$ 的Hasse图（哈斯图）
- ❖ 根据偏序关系 \leq 的特点，可以对其关系图进行简化
 - (1) 省略自环
 - (2) 省略长弧，当且仅当 c 盖住 a 时，画一条从 a 到 c 的弧。
 - (3) 省略箭头。

Computer Science & Technology

⑤

偏序集的Hasse图

❖ 例如



关系图

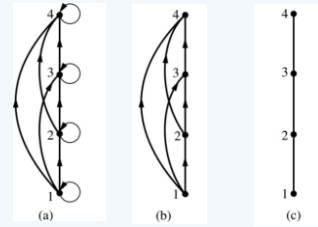
Hasse 图

Computer Science & Technology

6

Hasse 图

例如:

 $\langle \mathbb{Z}^+, \geq \rangle$
 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4\}$


(a)

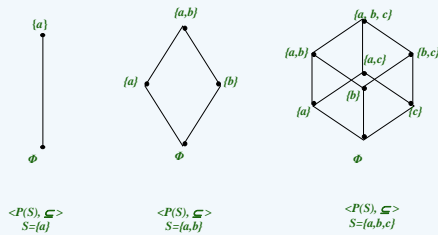
(b)

(c)

Computer Science & Technology

7

Hasse 图


 $\langle P(S), \subseteq \rangle$
 $S = \{a\}$
 $\langle P(S), \subseteq \rangle$
 $S = \{a, b\}$
 $\langle P(S), \subseteq \rangle$
 $S = \{a, b, c\}$

Computer Science & Technology

8

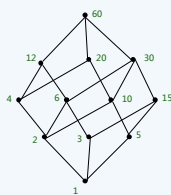
Hasse 图

例如: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ $\langle S, | \rangle$ 解: $| = R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \dots, \langle 20, 60 \rangle, \langle 30, 60 \rangle \}$ 该关系的关系图十分庞大。关系矩阵 12×12 的方阵。

Computer Science & Technology

9

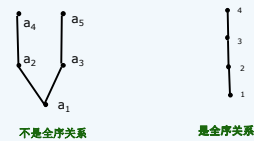
Hasse 图

 $\langle S, | \rangle$ 的 “|” 关系的Hasse图

Computer Science & Technology

10

偏序关系与偏序集

❖ 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是一个偏序集, $\forall x, y \in P$, 若 $x \leq y$ 或 $y \leq x$, 称 x, y 是可比较的, 否则称 x, y 不可比较。❖ 定义 3 设 \leq 是 P 上的偏序, 如果对任意 $x, y \in P$, 总有 $x \leq y$ 或者 $y \leq x$, 称 \leq 为全序关系 (线序关系), 简称全序。当 \leq 是全序关系时, 集合 $\langle P, \leq \rangle$ 称为全序集。

不是全序关系

是全序关系

Computer Science & Technology

11

偏序关系与偏序集

❖定义4 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集. 若 $B \subseteq A$ 且 $\langle B, \leq \rangle$ 是**全序集**, 则称 $\langle B, \leq \rangle$ 为**链**.

如: $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ 是**全序集**, $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ 是**链**.

Computer Science & Technology

12

偏序关系与偏序集

❖偏序集的重要的特点是次序, 因而元素在比较次序时会有“大小”之分, 所以偏序集中可能存在8类特殊元素.

❖定义5 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是一个偏序集, $a \in P$.

如果对任意 $x \in P$, 均有 $a \leq x$, 则称 a 是 $\langle P, \leq \rangle$ 的**最小元**;

如果对任意 $x \in P$ 均有 $x \leq a$, 则称 a 是 $\langle P, \leq \rangle$ 的**最大元**.

Computer Science & Technology

13

偏序关系与偏序集

❖定义6 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是一个偏序集, $a \in P$.

如果 “不存在元素 $x \in P$, 使 $a < x$ ”,

则称 a 是 $\langle P, \leq \rangle$ 的**极大元**;

如果 “不存在元素 $x \in P$, 使 $x < a$ ”,

则称 a 为 $\langle P, \leq \rangle$ 的**极小元**.

Computer Science & Technology

14

偏序关系与偏序集

❖定理1 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是一个偏序集, 若 P 中**最大 (小) 元存在**, 则**必唯一**.

❖证明: 设偏序集 $\langle P, \leq \rangle$ 中有两个**最大元**, a_1, a_2 ,

则根据最大元的定义 $a_1 \leq a_2$ 且 $a_2 \leq a_1$, 因为偏序是反对称的,

所以有 $a_2 = a_1$

Computer Science & Technology

15

偏序关系与偏序集

❖定理2 偏序集 $\langle P, \leq \rangle$ 中的**最大 (小) 元, 必是唯一极大 (小) 元**.

证明: 设 a 是偏序集 $\langle P, \leq \rangle$ 中的**最大元**, 往证 a 也是极大元.

极大元是 “不存在元素 $x \in P$, 使 $a < x$ ” 的元素.

反证 假设 “存在元素 $x \in P$, 使 $a < x$ ”, 则有 $a \leq x$ 且 $a \neq x$

因为 a 为最大元, $x \leq a$, 由偏序是反对称的, 所以有 $a = x$ (矛盾)

所以 a 是极大元.

❖定理3 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是有限偏序集, 若 P 中存在**唯一极大 (小) 元**, 则 a **必为最大 (小) 元**.

Computer Science & Technology

16

偏序关系与偏序集

最大 (小) 元, 极大 (小) 元, 都是对集合 P 来讲的.

❖定义7 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是偏序集, $A \subseteq P$, $a \in P$,

❖如果 $\forall x \in A$, 都有 $x \leq a$, 称 a 为 A 的**上界**.

❖如果 $\forall x \in A$, 都有 $a \leq x$, 称 a 为 A 的**下界**.

Computer Science & Technology

17

偏序关系与偏序集

- ❖ 定义 8 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是偏序集, $A \subseteq P$,
- ❖ 若 a 是 A 的上界, 且对 A 的任意上界 b , 有 $a \leq b$, 则称 a 为 A 的**最小上界 (上确界)**,
- ❖ 若 a 是 A 的下界, 且对 A 的任意下界 b , 有 $b \leq a$, 则称 a 为 A 的**最大下界 (下确界)**.
- ❖ A 的最小上界和 A 的最大下界分别用 $\sup A$ 和 $\inf A$ 表示.

Computer Science & Technology

18

偏序关系与偏序集

极大元/极小元



极小元, 极大元, 最小元, 最大元?

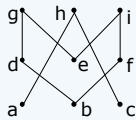
- 极小元: $\{a, b\}$
- 极大元: $\{c, d\}$
- 最小元, 最大元不存在

Computer Science & Technology

19

偏序关系与偏序集

给出下列集合的上界, 下界, 上确界, 下确界 $\{d, e, f\}$, $\{a, c\}$ 及 $\{b, d\}$

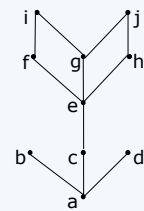


- $\{d, e, f\}$
- 上界: \emptyset , 上确界: \emptyset
 - 下界: \emptyset , 下确界: \emptyset
- $\{a, c\}$
- 上界: $\{h\}$, 上确界: h
 - 下界: \emptyset , 下确界: \emptyset
- $\{b, d\}$
- 上界: $\{d, g\}$, 上确界: d
 - 下界: $\{b\}$, 下确界: b

Computer Science & Technology

20

偏序关系与偏序集



❖ 最大、最小, 极大, 极小元?

- 极小, 最小元: a
- 极大元: i, j, b, d ; 最大元: 无
- $\{c, e\}$ 的上界、下界, 上确界、下确界
 - 上界: $\{e, f, g, h, i, j\}$, 上确界: $\sup\{c, e\}$ 是 e
 - 下界: $\{a, c\}$, 下确界: $\inf\{c, e\}$ 是 c
- $\{b, i\}$ 的上界、下界, 上确界、下确界
 - 上界: \emptyset , 上确界: 无
 - 下界: $\{a\}$, 下确界: $\inf\{b, i\}$ 是 a

Computer Science & Technology

21

偏序关系与偏序集

- ❖ 定理 4 设 A 是偏序集 $\langle P, \leq \rangle$ 的子集, 若 A 的**最小上界 (最大下界) 存在**, 则必唯一.

Computer Science & Technology

22

作业

- ❖ 作业:
- ❖ 习题六 2、4、7、9

Computer Science & Technology

23

