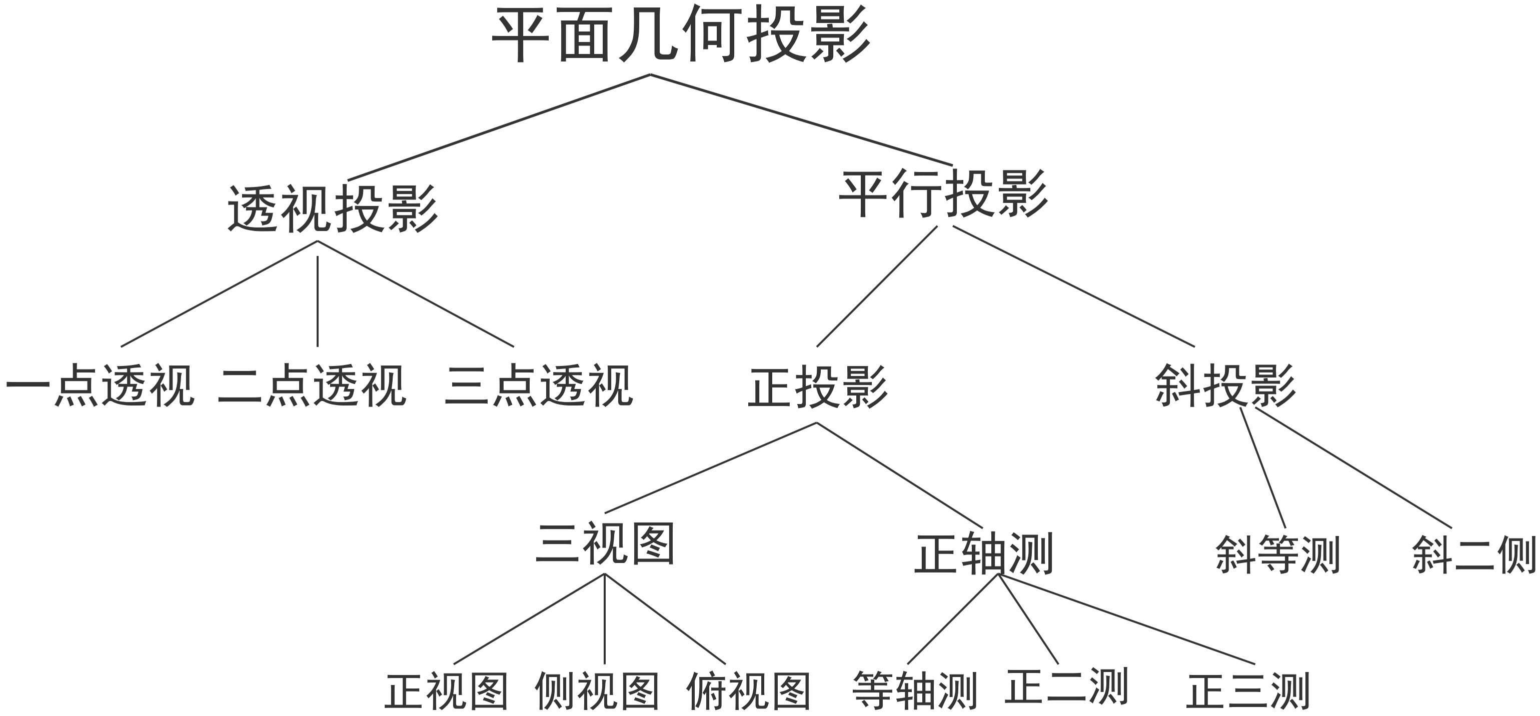
三、透视投影


平面几何投影
透视投影
平行投影
一点透视
二点透视
三点透视
正投影
斜投影
三视图
正轴测
斜等测
斜二侧
正视图
侧视图
俯视图
等轴测
正二测
正三测

有两种基本的投影—平行投影和透视投影。它们分别用于解决基本的、彼此独立的图形表示问题

平行投影表示真实大小和形状的物体

透视投影表示真实看到的物体

透视投影比轴测图更富有立体感和真实感

透视投影（Perspective Projection）是为了获得接近真实三维物体的视觉效果而在二维的纸或者画布平面上绘图或者渲染的一种方法，能逼真地反映形体的空间形象，也称为透视图

透视投影是3D渲染的基本概念，也是3D程序设计的基础

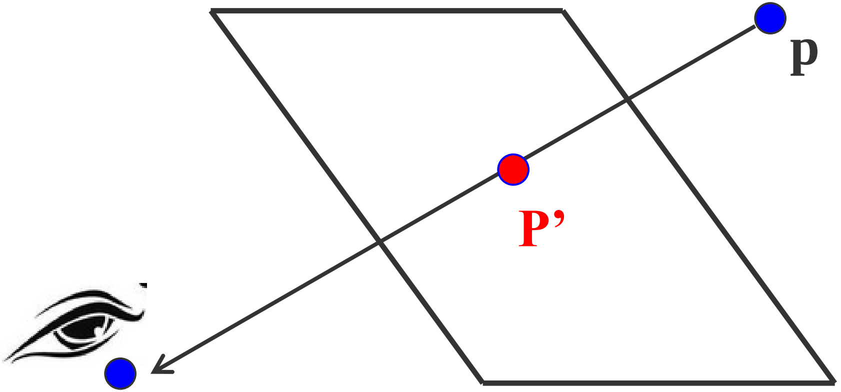
轴测投影图是用平行投影法形成的，视点在无穷远处；而透视投影图是用中心投影法形成的，视点在有限远处

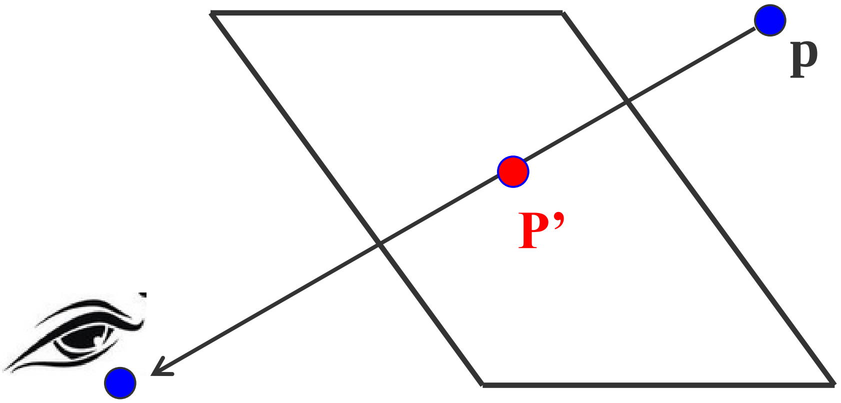
其中的[p, q, r]能产生透视变换的效果

$$T_{3D}=\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right]$$

1、透视基本原理

众所周知，位于空间的任何一个点，它之所以能被人们的眼睛所看见，是因为从该点出发射出来的一条光线能够到达人们的眼睛





该平面为透视投影面，穿点P’ 为P的透视投影

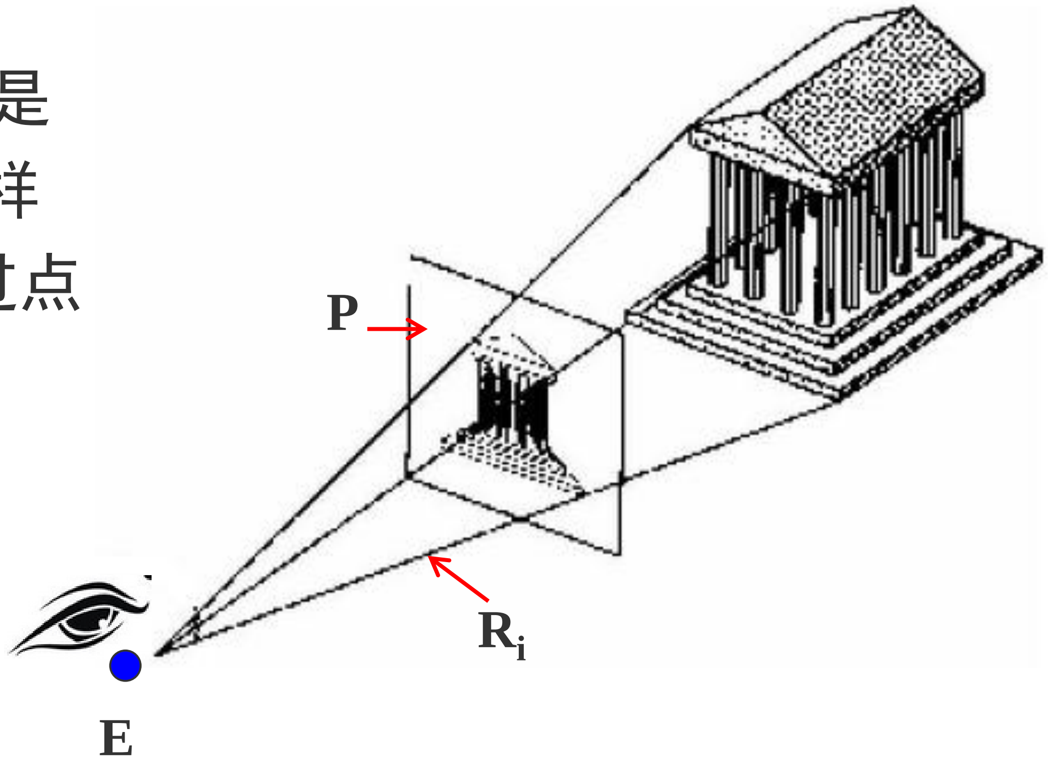
假如求空间点的透视投影问题得到了解决，那么空间任何线段、多边形或立体的透视投影也就可以方便地求得

因为一条直线段是由两点确定，多边形平面由围成该多边形的各顶点和边框线段确定，而任何立体也可以看成是由它的顶点和各棱边所构成的一个框体

这就是说，可以通过求出这些顶点的透视投影而获得空间任意立体的透视投影

三维世界的物体可以看作是由点集合$\{X_i\}$构成的，这样依次构造起点为E，并经过点X_i的射线R_i

这些射线与投影面P的交点集合便是三维世界在当前视点的透视图



2、一点透视

先假设q≠0 ， p=r=0。然后对点（x, y, z）进行变换：

$$T_{3D}=\begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y & z & qy+1 \end{bmatrix}$$

对其结果进行齐次化处理得：

$$\begin{bmatrix} x & y & z & qy+1 \end{bmatrix}$$

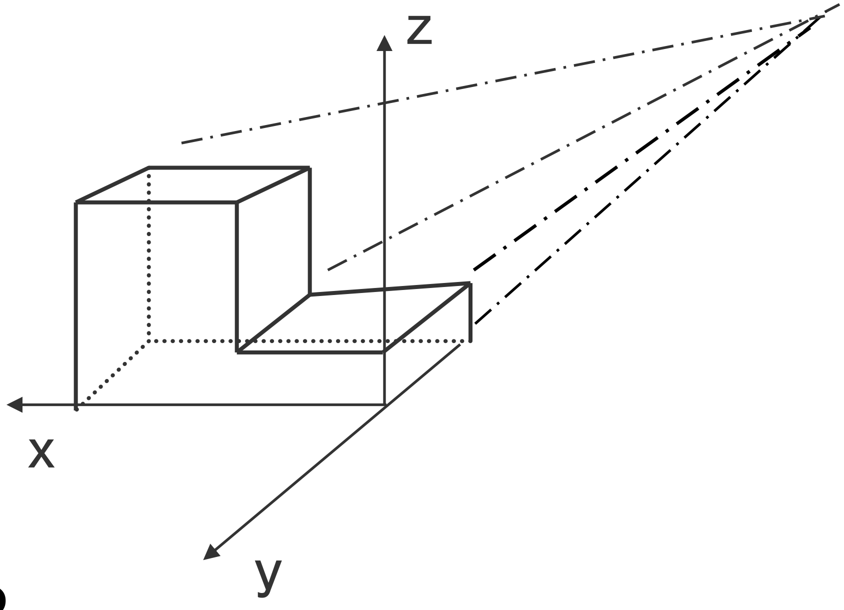
$$\begin{bmatrix} \dfrac{x}{qy+1} & \dfrac{y}{qy+1} & \dfrac{z}{qy+1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{qy+1} & \frac{y}{qy+1} & \frac{z}{qy+1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix}$$

A、当y=0时，得：

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 0 \\ z' = z \end{cases}$$

说明处于y=0平面内的点，经过变换以后没有发生变化

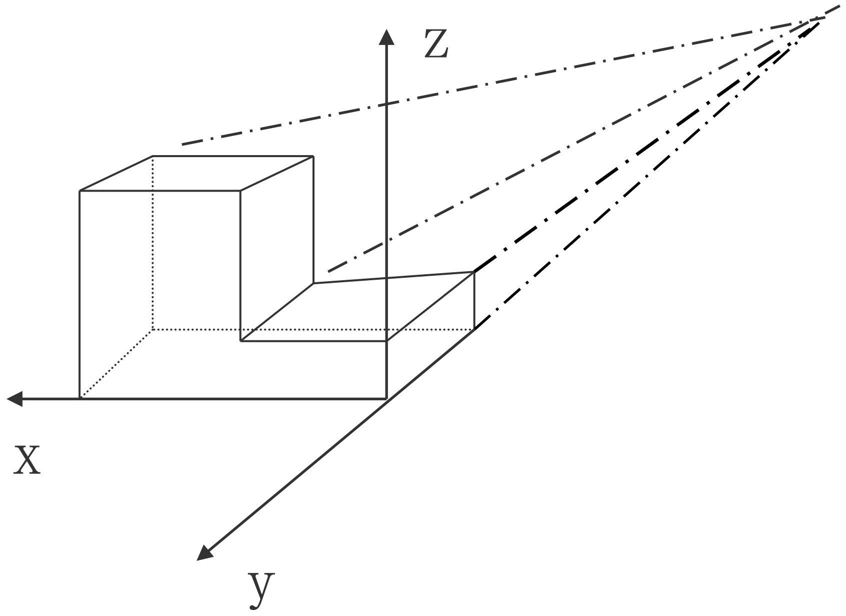


B、当y→∞时，得：

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = \frac{1}{q} \\ z' = 0 \end{cases}$$

这说明，当y→∞时，所有点的变换结果都集中到了y轴上的1/q处

即所有平行于y轴的直线将延伸相交于此点（0, 1/q, 0）。该点称为灭点，而像这样形成一个灭点的透视变换称为一点透视



根据同样的道理，当$p\neq 0$，$q=r=0$时，则将在x轴上的1/p处产生一个灭点，其坐标值为（1/p,0,0）。在这种情况下，所有平行于x轴的直线将延伸交于该点

$$[x \quad y \quad z \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & p\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[x \quad y \quad z \quad px+1]$$

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1]=\begin{bmatrix}\dfrac{x}{px+1} & \dfrac{y}{px+1} & \dfrac{z}{px+1} & 1\end{bmatrix}$$

当r≠0 ， q=p=0时，则将在z轴上的1/r处产生一个灭点，其坐标值为（0,0,1/r）。在这种情况下，所有平行于z轴的直线将延伸交于该点。

3、多点透视

根据一点透视的原理予以推广，如果p, q, r三个元素中有两个为非零元素时，将会生成两个灭点，因此得到两点透视。如当p≠0，r≠0时，结果为：

$$[x \quad y \quad z \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & p\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & r\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[x \quad y \quad z \quad px+rz+1]$$

经过齐次化处理后结果为：

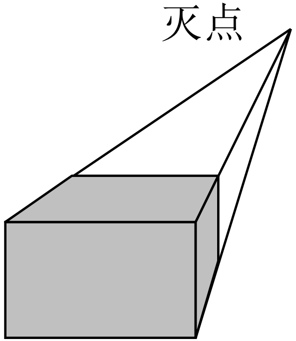
$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{(px + rz + 1)} \\ y' = \dfrac{y}{(px + rz + 1)} \\ z' = \dfrac{z}{(px + rz + 1)} \end{cases}$$

从以上结果可以看到：

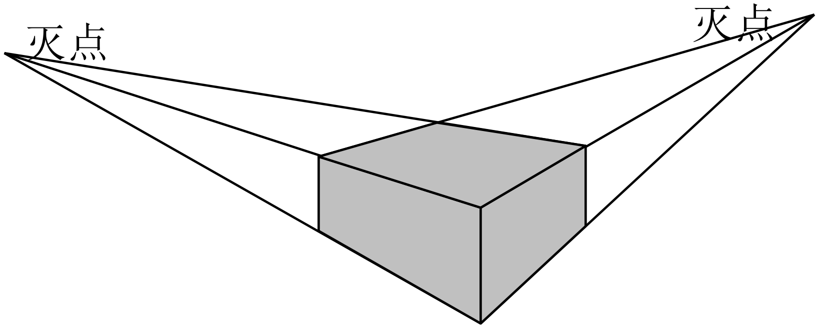
当x➞∞时，一个灭点在x轴上的1/p处

当z➞∞时，一个灭点在z轴上的1/r处

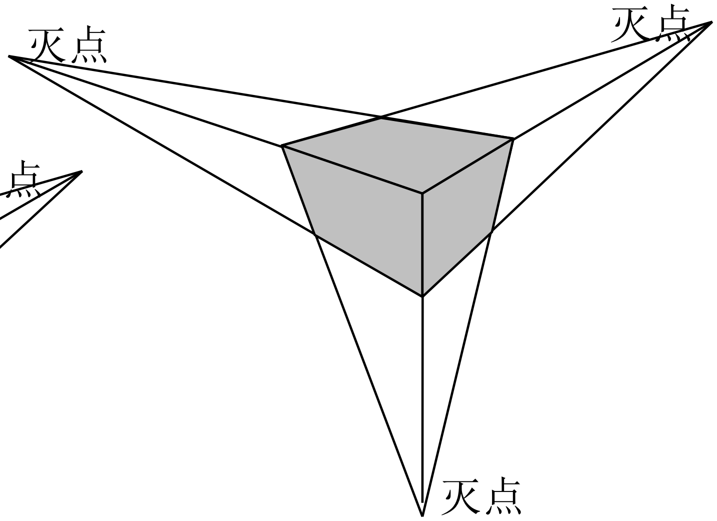
同理，当p, q, r三个元素全为非零时，结果将会产生三个灭点，从而形成三点透视。产生的三个灭点分别在x轴上的1/p处、y轴上的1/q处和z轴上的1/r处



(a)一点透视



(b)二点透视



(c)三点透视

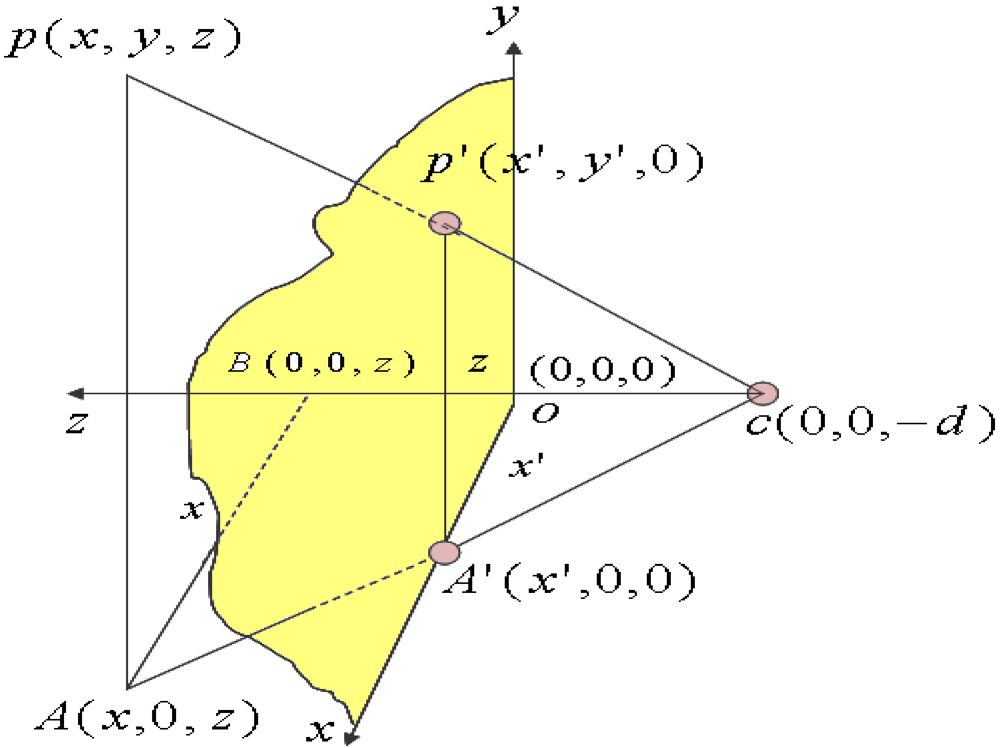
一点透视有一个主灭点，即投影面与一个坐标轴正交，与另外两个坐标轴平行

两点透视有两个主灭点，即投影面与两个坐标轴相交，与另一个坐标轴平行

三点透视有三个主灭点，即投影面与三个坐标轴都相交

4、生成透视投影图的方法

如右图所示，假定投影中心在z轴上（z = -d处），投影面在面x0y上，与z轴垂直，现在求空间一点p（x, y, z）的透视投影p’（x’，y’，z’）点的坐标。



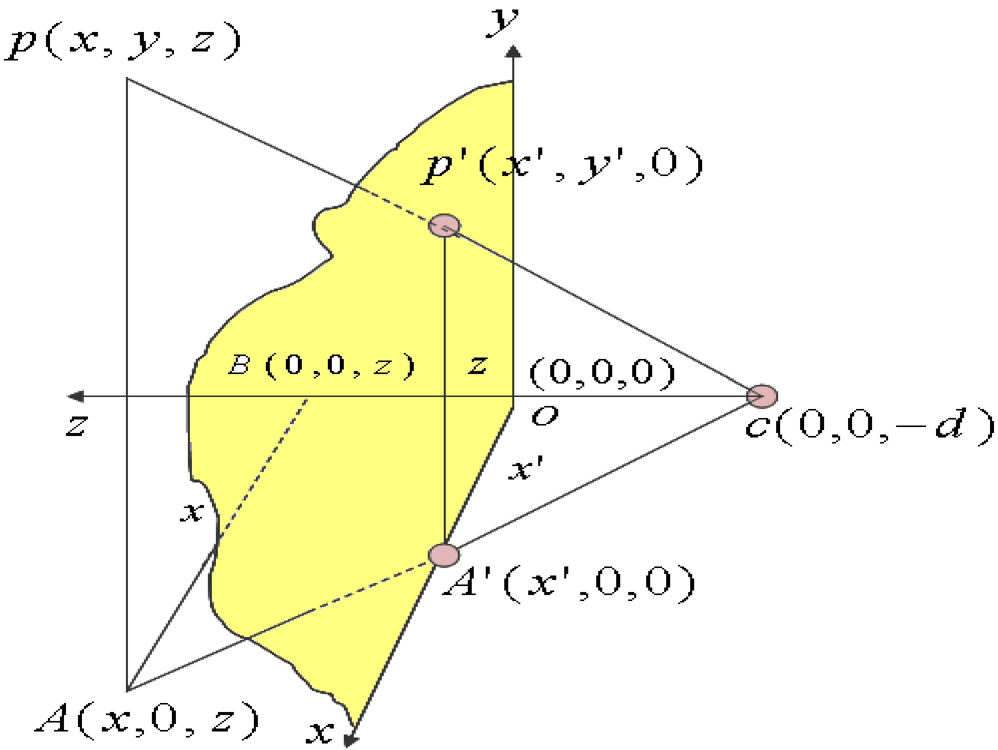
z轴负方向的点C(0,0,-d)
是投影中心。

三角形ABC和A’ OC是相似
三角形，因此：

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{d}{d+z}$$

$$x' = \frac{x}{1 + z/d} \qquad y' = \frac{y}{1 + z/d}$$

$$z' = 0$$



$$x' = \frac{x}{1 + {z}/{d}} \qquad y' = \frac{y}{1 + {z}/{d}} \qquad z' = 0$$

（1）透视坐标与z值成反比。即z值越大，透视坐标值越小

（2）d的取值不同，可以对形成的透视图有放大和缩小的功能。当值较大时，形成的透视图变大；反之缩小。

该过程写为变换矩阵形式为：

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y & z & \frac{z}{d}+1 \end{bmatrix}$$

然后再乘以向投影面投影的变换矩阵，就得到了点在画面上的投影。

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若投影中心在无穷远处，则 1/d→0，上式变为平行投影

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由该矩阵还可以看出透视投影的特性：透视缩小效应：

三维物体透视投影的大小与物体到投影中心的距离成反比，即透视缩小效应。这种效应所产生的视觉效果十分类似于照相系统和人的视觉系统

四、透视投影实例

1、一点透视

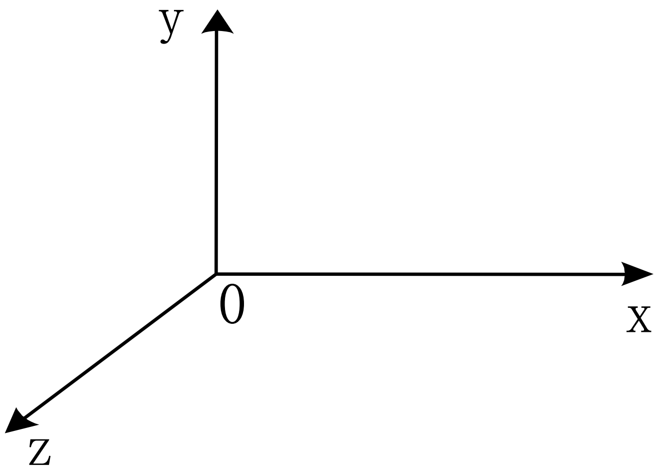
一点透视只有一个灭点。进行透视投影，要很好地考虑图面布局，以避免三维物体的平面或直线积聚成直线或点而影响直观性。具体地说，就是要考虑下列几点：

（1）三维形体与画面（投影面）的相对位置；

（2）视距，即视点（投影中心）与画面的距离

（3）视点的高度

假定视点（投影中心）在z轴上（z = -d处），投影面在x0y面上，则一点透视的步骤如下：



（1）将三维物体平移到适当位置l、m、n

（2）进行透视变换

（3）最后，为了绘制的方便，向xoy平面作正投影变换，将结果变换到xoy平面上。

$$T_{p1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\l&m&n&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{d}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

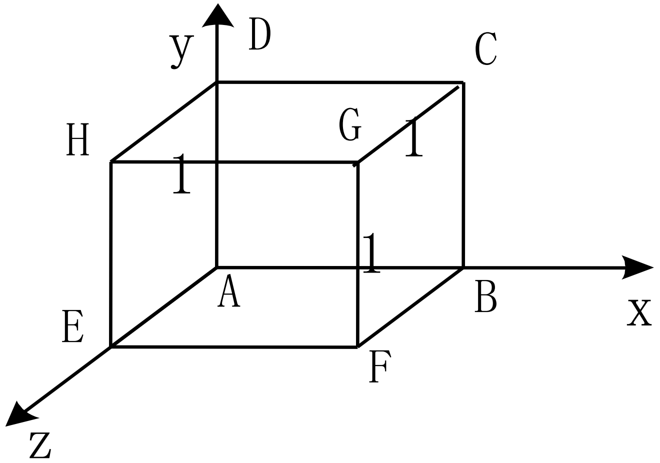
给出三维物体中任一点（x, y, z）一点透视变换矩阵形式：

$$T_{p1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{d}\\ l & m & 0 & \dfrac{n}{d}+1\end{bmatrix}$$

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1]=[x \quad y \quad z \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{d}\\ l & m & 0 & \dfrac{n}{d}+1\end{bmatrix}$$

$$=\left[\frac{x+l}{\dfrac{(n+z)}{d}+1} \quad \frac{y+m}{\dfrac{(n+z)}{d}+1} \quad 0 \quad 1\right]$$

例：试绘制如下图所示的单位立方体的一点透视图。



设：$l = -0.8$，$m = -1.6$，$n = -2$， 视距 $d = -2.5$，

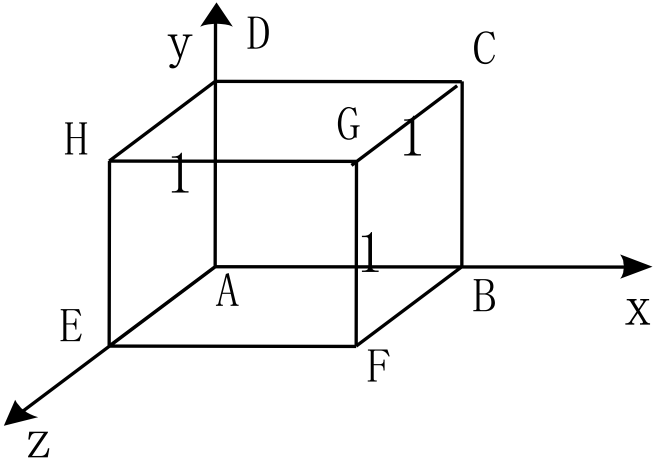
将上述值代入一点透视变换矩阵，得到：

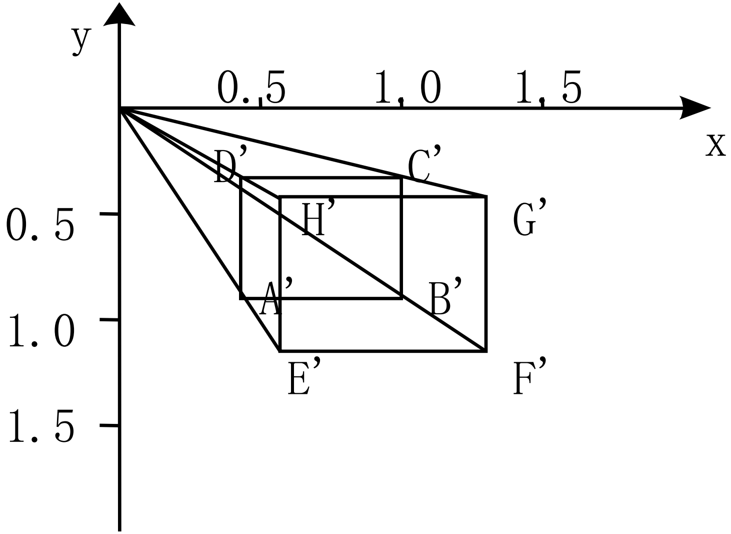
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \\ l & m & 0 & \frac{n}{d}+1 \end{bmatrix}$$

l = −0.8, m = −1.6,
n = −2, d = −2.5

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \\ -0.8 & -1.6 & 0 & 1.8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & -1.6 & 0 & 1.8 \\ 1.8 & -1.6 & 0 & 1.8 \\ 1.8 & -0.6 & 0 & 1.8 \\ 0.8 & -0.6 & 0 & 1.8 \\ 0.8 & -1.6 & 0 & 1.4 \\ 1.8 & -1.6 & 0 & 1.4 \\ 1.8 & -0.6 & 0 & 1.4 \\ 0.8 & -0.6 & 0 & 1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 & -0.89 & 0 & 1 \\ 1 & -0.89 & 0 & 1 \\ 1 & -0.33 & 0 & 1 \\ 0.44 & -0.33 & 0 & 1 \\ 0.57 & -1.14 & 0 & 1 \\ 1.29 & -1.14 & 0 & 1 \\ 1.29 & -0.43 & 0 & 1 \\ 0.57 & -0.43 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{c} A' \\ B' \\ C' \\ D' \\ E' \\ F' \\ G' \\ H' \end{array}$$

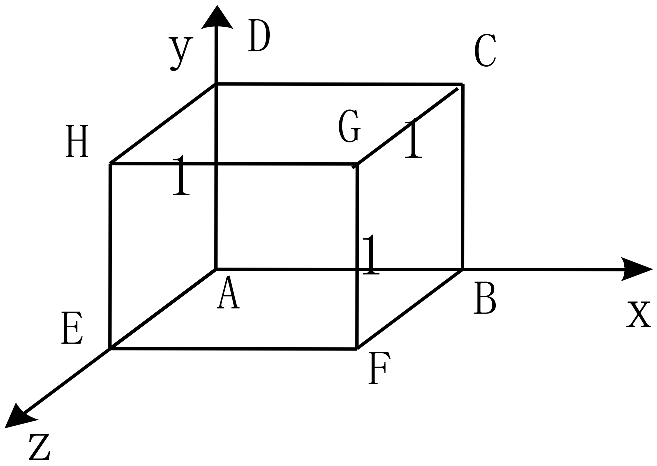




单位立方体的一点透视

2、二点透视投影图的生成

做两点透视时，通常要将物体绕y轴旋转θ角，以使物体的主要平面不平行于投影面



经透视变换后使物体产生变形，然后再向投影面做正投影

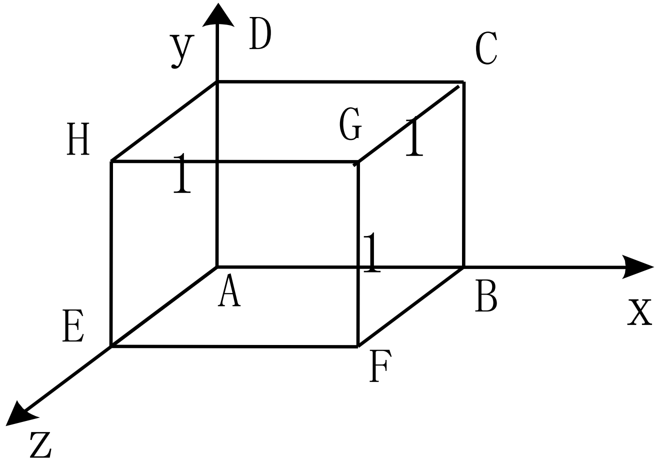
构造二点透视的一般步骤如下：

（1）将物体平移到适当位置l、m、n

（2）将物体绕y轴旋转θ角

（3）进行透视变换

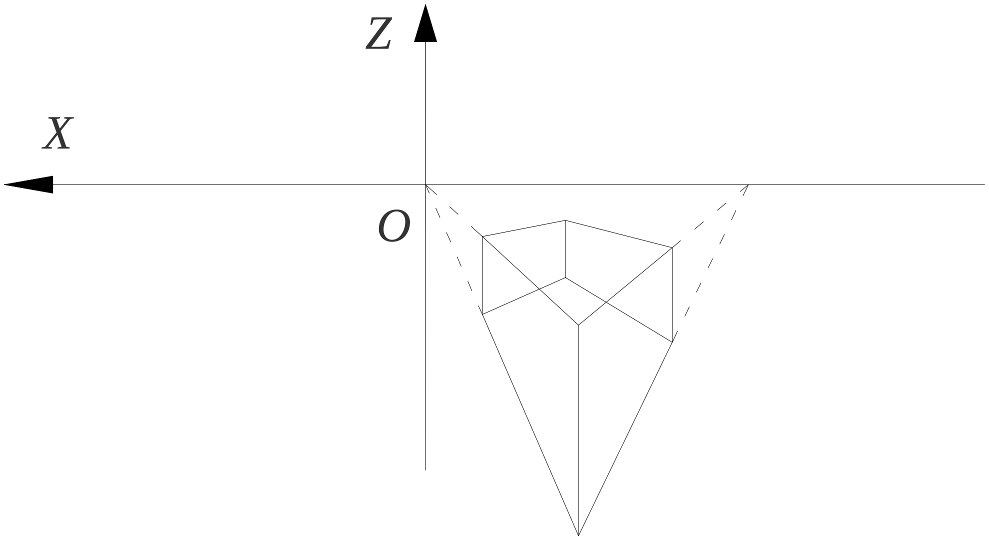
（4）最后向xoy面做正投影，即得二点透视图



$$T_{p2}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\l&m&n&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\cos\theta&0&-\sin\theta&0\\0&1&0&0\\\sin\theta&0&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&0&p\\0&1&0&0\\0&0&1&r\\0&0&0&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta&0&0&p\cdot\cos\theta-r\sin\theta\\0&1&0&0\\\sin\theta&0&0&p\cdot\sin\theta+r\cdot\cos\theta\\l\cdot\cos\theta+n\cdot\sin\theta&m&0&p(l\cdot\cos\theta+n\cdot\sin\theta)+r(n\cdot\cos\theta-l\cdot\sin\theta)+1\end{bmatrix}$$

变换结果如下图所示：



3、三点透视投影图的生成

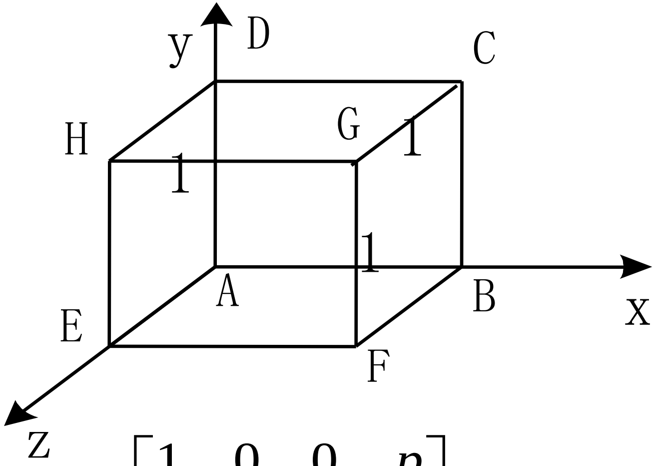
构造三点透视的一般步骤如下：

（1）将物体平移到适当位置

（2）将物体绕y轴旋转θ角

（3）再绕x轴旋转α角

（4）进行透视变换



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（5）最后向xoy面做正投影，即得三点透视图