

1.假定 A 和 B 都是正规集，请用正规集与有限自动机的等价性，说明 $A \cup B$ 也是正规的。
(国防科技大学 1997 年硕士生入学考试试题)

解答

正规集与有限自动机的等价性包括两点：

1. 对任何 FA M ，都存在一个正规集 A ，使得 $A=L(M)$ ；
2. 对任何正规集 A ，都存在一个 FA M ，使得 $L(M)=A$ 。

要说明 $A \cup B$ 是正规的，根据上述第 1 点可以知道，只需要找到一个有限自动机 M ，使得 $L(M) = A \cup B$ 就可以了。

同样，根据第 2 点可以知道，因为 A 和 B 都是正规集，所以必然存在两个确定的有限自动机 M_1 和 M_2 ，使得 $A=L(M_1)$ ， $B=L(M_2)$ 。

我们按图 2.6 所示构造一个有限自动机 M_0 ：

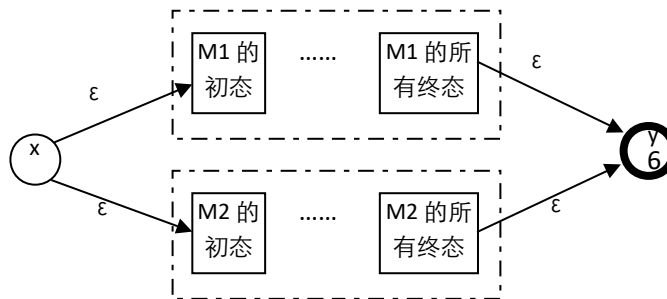


图 2.6 由 M_1 和 M_2 构造的 NFA

其中， x 为 M_0 的初态，它通过 ϵ 指向 M_1 和 M_2 的初态， y 是 M_0 的终态， M_1 和 M_2 的所有终态都通过 ϵ 指向 y ，显然有 $L(M_0) = L(M_1) \cup L(M_2) = A \cup B$ 。

之后对 M_0 确定化后得到 M' ，则有 $L(M') = L(M_0) = A \cup B$ ， M' 是一个确定的有限自动机，因此就可以说明 $A \cup B$ 也是正规的。

$$L = \{w \mid w \in \{0,1\}^+,$$

2.有语言并且 w 中至少有两个 1，又在任何两个 1 之间有偶数个 0}，试构造接受该语言的确有限状态自动机 (DFA)。

(北邮 2000 年硕士生入学考试试题)

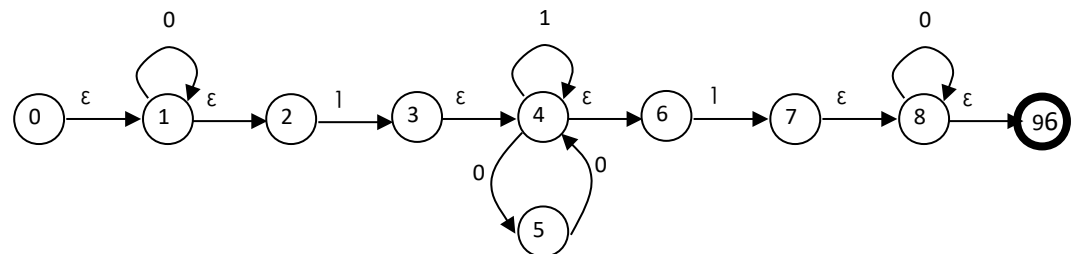
分析

首先分析语言 L ， w 中至少有两个 1，而且对任意两个 1 之间的 0 的个数有要求（偶数个），也就是说对于不在两个 1 之间的 0 的个数没有要求，0 不在两个 1 之间，则必然要么在第一个 1 之前，要么在最后一个 1 之后。那么我们知道， w 是这样一个串，它的第一个 1 的前面可以有任意个 0，最后一个 1 的后面也可以有任意个 0，而且这两个 1 不是同一个 1（ w 中至少有两个 1），在这两个 1 之间还可以有多个 1 和多个 0，但不管怎样，任意两个 1 之间的 0 的个数必须是偶数个。对于偶数个 0，我们可以用 $(00)^*$ 来表示。根据以上分析我们就可以求出 L 的正规式了。

解答

第一步：写出相应的正规式，任意个 0 加上一个 1（第一个 1），加上任意个 1 和 00 的任意排列，加上一个 1（最后一个 1），再加上任意个 0，即 $0^*1(00|1)^*10^*$

第二步：求出相应的 NFA 如图 2.7



第三步：对上述 NFA 进行确定化，即为有限自动机 NFA 构造相应的状态转换表（表 2.3）。

表 2.3

I	I_0	I_1
{0,1,2}	{1,2}	{3,4,6}
{1,2}	{1,2}	{3,4,6}
{3,4,6}	{5}	{4,6,7,8,9}
{5}	{4,6}	
{4,6,7,8,9}	{5,8,9}	{4,6,7,8,9}
{4,6}	{5}	{4,6,7,8,9}
{5,8,9}	{4,6,8,9}	
{4,6,8,9}	{5,8,9}	{4,6,7,8,9}

原状态集在转换表中被分为 8 个状态子集 {0、1、2}、{1、2}、{3、4、6}、{5}、{4、6、7、8、9}、{4、6}、{5、8、9} 和 {4、6、8、9}，我们分别用状态 0、1、2、3、4、5、6、7 来表示它们，则新得的状态转换表为表 2.4：

表 2.4

I	I_0	I_1
0	1	2
1	1	2
2	3	4
3	5	
4	6	4
5	3	4
6	7	
7	6	4

检查表 2.4 中的状态，发现包含原初始状态的 0 的新状态只有 0（代表状态子集 {0、1、2}），包含原终止状态 9 的新状态有 4（代表状态子集 {4、6、7、8、9}）、6（代表状态子

集{5、8、9})、7(代表状态子集{4、6、8、9})，所以确定化后的 DFA 的初始状态为 0，终止状态为 4、6、7，见图 2.8。

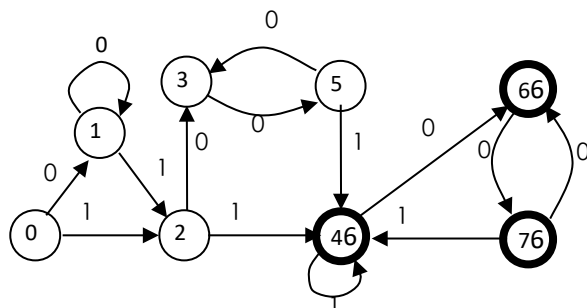


图 2.8 确定化后的 DFA

所求得 DFA 即为本题的解，如果需要的化，还可以对它进行进一步的化简。

第四步：化简 DFA，首先将状态按终止状态和非终止状态分为两个集合{0、1、2、3、5}和{4、6、7}，检查子集{0、1、2、3、5}， $I_1^{\{0,1\}}=\{2\} \subseteq \{0,1,2,3,5\}$ ， $I_1^{\{2,5\}}=\{4\} \subseteq \{4,6,7\}$ ， $I_1^{\{3\}}=\varnothing$ ，所以应将子集{0、1、2、3、5}进一步划分为{0、1}、{3}、和{2、5}，检查子集{4、6、7}， $I_1^{\{6\}}=\varnothing$ ， $I_1^{\{4,7\}}=\{4\} \subseteq \{4,6,7\}$ ，所以应将子集{4、6、7}进一步划分为{4、7}和{6}。

再看子集{0、1}， $I_1^{\{0,1\}}=\{2\} \subseteq \{2,5\}$ ， $I_0^{\{0,1\}}=\{1\} \subseteq \{0,1\}$ ，不用再划分了，检查子集{2、5}， $I_1^{\{2,5\}}=\{4\} \subseteq \{4,7\}$ ， $I_0^{\{2,5\}}=\{3\} \subseteq \{3\}$ ，因此子集{2、5}也不用再划分了，检查子集{4、7}， $I_0^{\{4,7\}}=\{6\} \subseteq \{6\}$ ， $I_1^{\{4,7\}}=\{4\} \subseteq \{4,7\}$ ，所以子集{4、7}也不用再划分了。用状态 0、1、2、3、4 分别代替子集{0、1}、{2、5}、{3}、{4、7}和{6}，则得到化简后的 DFA 如图 2.9。

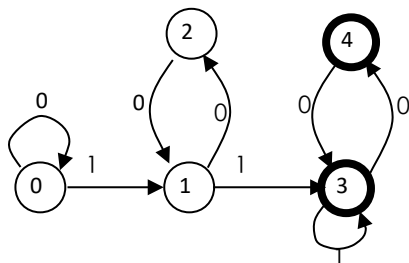


图 2.9 化简后的 DFA