四、B样条基函数的主要性质

1、局部支承性：

$$B_{i,k}(u)\begin{cases} \geq 0 & u \in [u_i, u_{i+k}] \\ = 0 & otherwise \end{cases}$$

而Bezier在整个区间非0

反过来，对每一个区间(u_i, u_{i+k})，至多只有k个基函数在其上非零

2、权性：

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,k}(u) \equiv 1 \qquad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

3、连续性

$B_{i,k}(u)$在r重节点处的连续阶不低于 k-1-r

4、分段参数多项式:

$B_{i,k}(u)$在每个长度非零的区间$[u_i, u_{i+1})$上都是次数不高于k-1的多项式，它在整个参数轴上是分段多项式

五、B样条函数的主要性质

1、局部性：

k阶B样条曲线上的一点至多与k个控制顶点有关，与其它控制顶点无关

移动曲线的第i个控制顶点P_i，至多影响到定义在区间上那部分曲线的形状，对曲线其余部分不发生影响

2、变差缩减性：

设平面内 n+1 个控制顶点 构成B样条曲线 P(t) 的特征多边形。在该平面内的任意一条直线与 P(t) 的交点个数不多于该直线和特征多边形的交点个数

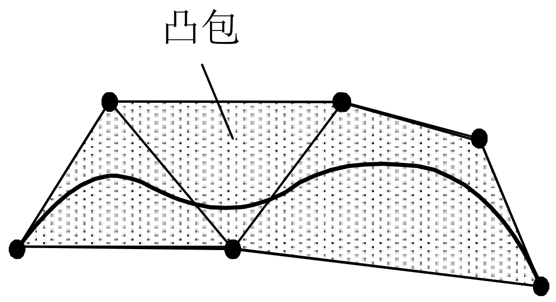
3、几何不变性：

B样条曲线的形状和位置与坐标系的选择无关

4、凸包性：

B样条曲线落在P_i构成的凸包之中。其凸包区域小于或等于同一组控制顶点定义的Bezier曲线凸包区域

凸包就是包含右边这6个顶点的最小凸多边形。凸多边形是把多边形的每条边延长，其它边都在它的同一侧



Bezier曲线的凸包性

该性质导致顺序k+1个顶点重合时，由这些顶点定义的k次B样条曲线段退化到这一个重合点；顺序k+1个顶点共线时，由这些顶点定义的k次B样条曲线形状？

六、B样条曲线类型的划分

1、均匀B样条曲线（uniform B-spline curve）

当节点沿参数轴均匀等距分布，即$u_{i+1}-u_i$ = 常数 > 0 时，表示均匀B样条函数

$$\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$\{0,0.2,0.4,0.6,0.6,0.8,1\}$$

均匀B样条的基函数呈周期性。即给定n和k，所有的基函数有相同形状。每个后续基函数仅仅是前面基函数在新位置上的重复：

$$B_{i,k}(u) = B_{i+1,k}(u+\Delta u) = B_{i+2,k}(u+2\Delta u)$$

其中，△u是相邻节点值的间距，等价地，也可写为：

$$B_{i,k}(u) = B_{0,k}(u - k\Delta u)$$

下面以均匀二次（三阶）B样条曲线为例来说明均匀周期性B样条基函数的计算：

假定有四个控制点，取参数值 n=3，k=3，则 n+m=6

$$u = (0,1,2,3,4,5,6)$$

根据de Boor-Cox递推公式：

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,k}(u)$$

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_i < x < u_{i+1} \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

$$B_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} B_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} B_{i+1,k-1}(u)$$

$$B_{0,1}(u) = \begin{cases} 1 & 0 \le \mathrm{u} < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$u = (0,1,2,3,4,5,6)$$

$$B_{0,2}(u) = uB_{0,1}(u) + (2-u)B_{1,1}(u) = uB_{0,1}(u) + (2-u)B_{1,1}(u)$$

$$= \begin{cases} u & 0 \le \mathrm{u} < 1 \\ 2-u & 1 \le \mathrm{u} < 2 \end{cases}$$

$$B_{0,3}(u) = \frac{u}{2} B_{0,2}(u) + \frac{3-u}{2} B_{1,2}(u-1)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} u^{2} & 0 \le u < 1 \\ \frac{1}{2} u(2-u) + \frac{1}{2}(u-1)(3-u) & 1 \le u < 2 \\ \frac{1}{2}(3-u)^{2} & 2 \le u < 3 \end{cases}$$

$$B_{1,3}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(u-1)^{2} & 1 \le u < 2 \\ \frac{1}{2}(u-1)(3-u) + \frac{1}{2}(u-2)(4-u) & 2 \le u < 3 \\ \frac{1}{2}(4-u)^{2} & 3 \le u < 4 \end{cases}$$

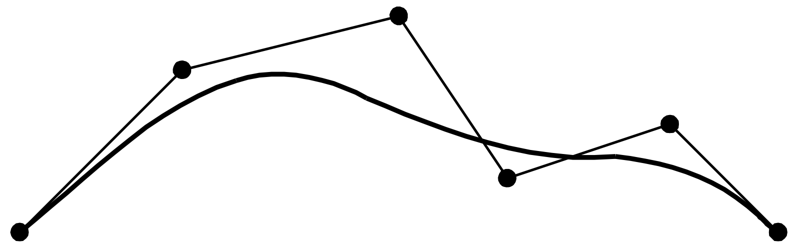
$$B_{3,3}(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(u-3)^2 & 3\le u<4\\ \frac{1}{2}(u-3)(5-u)+\frac{1}{2}(u-4)(6-u) & 4\le u<5\\ \frac{1}{2}(6-u)^2 & 5\le u<6\end{cases}$$

2、准均匀B样条曲线（Quasi-uniform B-spline curve）

与均匀B样条曲线的差别在于两端节点具有重复度k，这样的节点矢量定义了准均匀的B样条基

均匀：$u=(0,1,2,3,4,5,6)$

准均匀：$u=(0,0,0,1,2,3,4,5,5,5)$

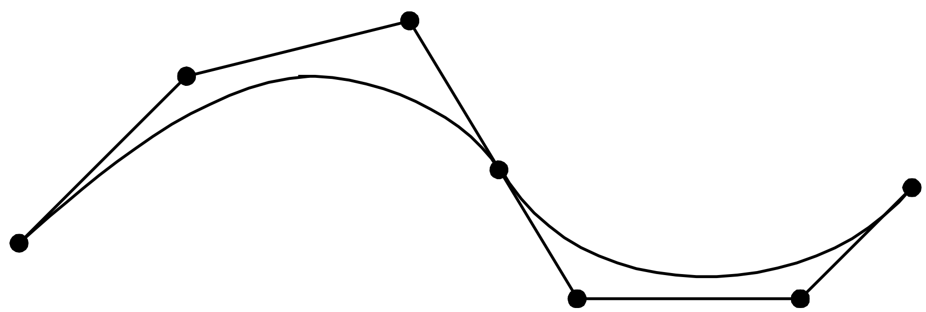


准均匀三次B样条曲线

均匀B样条曲线没有保留Bezier曲线端点的几何性质，采用准均匀的B样条曲线解决了这个问题

3、分段Bezier曲线（Piecewise Bezier Curve）

节点矢量中两端节点具有重复度k，所有内节点重复度为k-1，这样的节点矢量定义了分段的Bernstein基



三次分段Bezier曲线

B样条曲线用分段Bezier曲线表示后，各曲线段就具有了相对的独立性

另外，Bezier曲线一整套简单有效的算法都可以原封不动地采用

缺点是增加了定义曲线的数据，控制顶点数及节点数

4、非均匀B样条曲线（non-uniform B-spline curve）

当节点沿参数轴的分布不等距，即$u_{i+1}-u_i \neq$常数时，表示非均匀B样条函数