格与布尔代数:

习题一:

1. 格: 2、4.

1、3 不是格. 图一中无最大上界. 图四中无最小下界.

3. 先证充分条件.

设 a.b 不可比较. 今往证 $a*b<b$. $a*b<a$.

∵ $a*b$ 表示 a.b 下界. 且 a.b 不可比较.

∴ $a*b<a$ $a*b<b$ 得证

再证必要性:

∵ 假设 a.b 可比较. 不妨设 $a>b$.

则 $a*b=b<b$. 显然矛盾. 同理 $a<b$ 也不成立.

∴ a.b 不可比较成立.

习题二.

3. (1) ∵ $a\oplus b=\max\{a,b\}$. $a*b=\min\{a,b\}$.

∴ 可在 $\langle A,\oplus,*\rangle$ 代数系统上定义关系偏序 $\leq$

且 $a\leq b \Leftrightarrow a\oplus b=b \Leftrightarrow a*b=a$.

(2) 当 $a\oplus b=\min\{a,b\}$. $a*b=\max\{a,b\}$

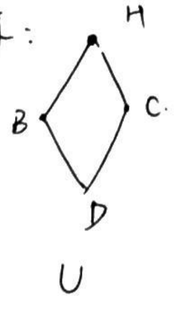
则此时可定义偏序 $\geq$. 且

$a\geq b \Leftrightarrow a*b=a \Leftrightarrow a\oplus b=b$.

习题三.

1. 不一定.

反例如下:



显然 U 为格.

令 $A=\{x \mid x\in U, D<x<H\}$

$=\{B,C\}$.

∵ $B*C=$

$B\oplus C=H \notin A$

即不满足封闭性.

∴ A 不为子格

①

习题四:

1. 例：设≤是实数域上的小于等于关系

则可定义格 $L_1 = \{x \mid x \in [0,1) \cup (1,2]\}$.

显然 0和2为L_1的全下上界. ⇒ L_1为有界格.

但对于其子集 $L_2 = \{x \mid x \in (0,1)\}$ 无上确界.

∴ L_1不是完全格.

即有界格即可是(无限)完全格 也可是(无限)非完全格.

2. (1) a与f的补元均不存在

(2) 该格不为补格(a与f的补元不存在)

3. 假设元素大于等于2个的格中存在一元素a. 满足:

$a * a' = 0$

$a \oplus a' = 1$

∵ $a = a'$

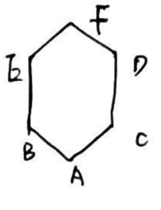
∴ $a * a = 0$. $a \oplus a = 1$

∴ $a = 1 = 0$ ⇒ 格中只存在一个元素. ⇒ 与条件元素个数大于2矛盾

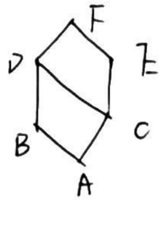
∴ 不存在这样的元素

习题5.

1. 非分配格:



分配格.



2、分配格：(b)

3. 分析：若证 $\langle Z, \oplus, * \rangle$ 为分配格，则只需证：

$\forall a, b, c$ 　$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$ 成立即可. ……①

①先证：$a \oplus (b * c) \leq (a \oplus b) * (a \oplus c)$

$\because$ $b * c \leq b$ 　$b * c \leq c$

$\therefore$ $a \oplus (b * c) \leq a \oplus b$ 　$a \oplus (b * c) \leq c \oplus a$

$\therefore$ $a \oplus (b * c) \leq (a \oplus b) * (a \oplus c)$ 成立.

②再证 $a \oplus (b * c) \geq (a \oplus b) * (a \oplus c)$

$\because$ $\langle Z, \oplus, * \rangle$ 为全序关系.

$\therefore$ $\forall b, c$ 不妨设 $b \geq c$

则 $a \oplus (b * c) = a \oplus c$

当 $a \leq c$ 时 　$a \oplus (b * c) = c$ 　$(a \oplus b) * (a \oplus c) = b * c = c$. ①式成立

当 $c \leq a \leq b$ 时 　$a \oplus (b * c) = a$ 　$(a \oplus b) * (a \oplus c) = (a \oplus b) * a = a$ 　①成立.

当 $a \geq b$ 时 　$a \oplus (b * c) = a$. 　$(a \oplus b) * (a \oplus c) = a * a = a$. 　①成立.

同理. 当 $b \leq c$ 时. ①式成立. $\therefore$ $\langle Z, \oplus, * \rangle$ 为分配格

本习题六.

(1) $(a \oplus b \oplus c) \oplus (a' * b' * c')$

$= ((a \oplus b \oplus c) \oplus a') * [(a \oplus b \oplus c) \oplus b'] * [(a \oplus b \oplus c) \oplus c']$

$= 1 * 1 * 1 = 1$

$(a \oplus b \oplus c) * (a' * b' * c') = (a * a' * b' * c') \oplus (b * a' * b' * c') \oplus (c' * a' * b * c)$

$= 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$.

②

i) $(a \oplus b \oplus c)' = a' * b' * c'$

(2) $\because (a * b * c) * (a' \oplus b' \oplus c')$

$= (a * b * c * a') \oplus (a * b * c * b') \oplus (a * b * c * c')$

$= 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$

且 $(a * b * c) \oplus (a' \oplus b' \oplus c')$

$= (a \oplus a' \oplus b' \oplus c) * (b \oplus a' \oplus b' \oplus c') * (c \oplus a' \oplus b' \oplus c')$

$= 1 * 1 * 1 = 1$