谓词逻辑

Predicate Logic

Discrete　Mathematics

第十六章 谓词逻辑 (predicate)

- 在命题演算中, 把简单命题作为基本研究单位, 对它不再进行分解, 这使得命题逻辑有很大的局限性。有些很简单的推理形式, 如典型的逻辑三段论, 用命题演算的推理理论无法论证它

例 16.0.1 所有的人总是要死的。

Socrates是人。

所以Socrates是要死的。

- 从直观上看, 第三个命题是前两个命题的结论。但是, 它的前提和结论里都没有联结词, 它们都是简单命题, 用命题逻辑来表示, 它的形式是$P \wedge Q \rightarrow R$。显然, 这不是命题逻辑里的重言式。

- 造成上述缺陷的原因在于我们不能对简单命题自身的内部特征作进一步的分析, 无法揭示前提和结论在形式结构方面的联系, 因此就不可能认识到这种推理的形式和规律, 这就使得命题逻辑的适用面比较狭窄。

例 16.0.2 熊猫是动物。 p

长颈鹿是动物。q

- 它们是两个简单命题, 只能用两个不同的符号来表示, 但这样的符号不能揭示这两个命题的共性因此, 将命题演算扩展成谓词演算, 对简单命题的成分、结构和简单命题间的共同特性等作进一步的分析, 这正是一阶谓词逻辑所要研究的问题。

§ 16.1 谓词和量词

- 一个简单命题是一个能判定真假的陈述句, 在谓词演算中, 进一步将简单命题分解为个体词 (主语)与谓词(谓语)两部分。

一. 个体词、个体域和谓词

定义 16.1.1 可以独立存在的事物称为**个体(individual)**。

表示具体的、特指的个体词，称为**个体常元**，常用小写字母a，b，c…来表示。

表示抽象的、泛指的、或在一定范围内变化的个体词，称为**个体变元**, 常用小写字母x, y, z…来表示。

个体变元的取值范围称为**个体域(domain)**, 常用D表示。

- 个体域可以是有限的或无限的。最大的个体域是包含宇宙全体事物的个体域, 称为**全总个体域 D**。若无特别声明, 个体域均指全总个体域。

例 16.1.1 个体可以是计算机、熊猫、围棋、自然数、定理、爱国主义等都是个体。

定义 16.1.2 用来刻划个体性质或多个个体之间关系的词称为**谓词** (predicate)。谓词中包含个体的数目称为谓词的**元数**。谓词常用大写字母P, Q, R…来表示。

表示有具体确定意义的性质或关系的谓词，称为**谓词常元**，否则称为**谓词变元**。

- 一元谓词表达了个体的“性质”, 而多元谓词表达了个体之间的“关系”。
- 从数学角度看, 谓词是一个以D为定义域, 以{1, 0}为值域的函数。f: D → {1, 0}

例 16.1.2 将下列命题符号化:

(1) 熊猫是动物。

(2) 济南位于北京与南京之间。

(3) 2是偶数且是素数。

解 (1) A(x): x是动物, 这里x是个体变元, 它可在动物范围内任意取值。

b: 熊猫, b是个体常元, 则命题可符号化为**A(b)**或**A(熊猫)**。

对于谓词A, A(x)实际上是个体变元x的函数。

(2) B(x, y, z): x位于y与z之间。a:济南, b: 北京, c: 南京, 则命题可符号化为B(a, b, c)或符号化为B(济南,北京, 南京)。

(3) E(x): x是偶数, P(x): x是素数, a: 2, 则命题可符号化为 $E(a)\wedge P(a)$ 或 $E(2)\wedge P(2)$。

- 一般地, 一个由n个个体和n元谓词所组成的命题可表示为 $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 其中P表示n元谓词, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 分别表示n个个体。
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的排列次序通常是重要的。

例 16.1.3 B(a, b, c)不同于B(b, a, c)。

定义 16.1.3 由一个谓词和若干个体变元组成的表达式称为**简单命题函数**。

由n元谓词和n个个体变元$x_1, x_2,\ldots x_n$组成的命题函数, 表示为$P(x_1,x_2,\ldots x_n)$。

由有限个简单命题函数以及逻辑联结词组成的命题形式称为**复合命题函数**。简单命题函数和复合命题函数统称为**命题函数**。

例 16.1.4 $(P(x)\vee Q(y, z)) \leftrightarrow R(x, z)$是命题函数。

- 命题逻辑中的简单命题都可以用0元谓词表示，即可把命题看作是谓词的特殊情况。

二、量词

- 在命题中分析出个体和谓词后, 仍不足以表达逻辑三段论和日常生活中的各种问题, 问题在于“所有的”和“有一个”这种全称量词和特称量词还没有分析出来, 因此必须引入量词。

定义 16.1.4 (1) 称表示数量的词为**量词(quantifier)**。

(2) 表示“所有”、“任意”、“一切”的词称为**全称(universal)量词**, 记为“∀”。∀x表示对个体域中的所有个体, x称为全称性变元,

∀x A(x)表示个体域中的所有个体都有性质A。

(3) 表示“存在着”、“有某些”、“至少存在一个”的词称为**存在(existence)量词**, 记为“$\exists$”表示。

$\exists x$表示存在个体域中的个体, x 称为存在性变元,

$\exists xA(x)$表示存在着个体域中的个体具有性质A。

- 量词也可看作是对个体词所附加约束的词。

例 16.1.5 设$F(x)$: x会飞, D为鸟集合。

$\forall x\, F(x)$表示所有的鸟都会飞。

例 16.1.6 设$Y(x)$: x是粉红的, D为菊花集合。$\exists x\, Y(x)$表示有些菊花是粉红的。

包含有量词的表达式的真值与个体域的指定有关。

$$\forall x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$$

$$\exists x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$$。

例 16.1.7 我为人人, 人人为我。

解 设 $S(x, y)$: x为y服务, 用i表示我。命题表示为:

$\forall x\, S(i, x) \wedge \forall x\, S(x, i)$或$\forall x\, (S(i, x) \wedge S(x, i))$

例 16.1.8 勇敢者未必都是成功者。

解 设 $B(x)$: x勇敢, $S(x)$: x是成功者。命题表示为:

$\neg\forall x\, (B(x) \rightarrow S(x))$ 或 $\exists x\, (B(x) \wedge \neg S(x))$

例 16.1.9 并非一切劳动都能用机器代替。

解 设 $L(x)$: x是一种劳动, $M(x)$: x是一种机器,

$R(x, y)$: x被y代替。命题表示为:

$\neg\forall x\, (L(x) \rightarrow \exists y\, (M(y) \wedge R(x,y)))$

§ 16.2 谓词合式公式

- 由n元谓词P和n个个体变元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 构成的命题函数 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 称为原子谓词公式。
- 一个命题或一个命题变元也称为原子谓词公式, 即原子谓词公式是不含联结词和量词的命题函数。$n = 0$时，$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$为简单命题P。

定义 16.2.1 谓词公式(合式WFF)的递归定义

(1) 任意原子谓词公式都是谓词公式。

(2) 若A是谓词公式, 则$\neg A$、$(A \vee B)$、$(A \wedge B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$、$(A \oplus B)$也是谓词公式。

(3) 若A是谓词公式, x是A中的个体变元,

则$\forall x\, A$和$\exists x\, A$也是谓词公式。

(4) 当且仅当有限次地使用规则1, 2, 3得到的公式才是谓词公式。

- 谓词公式是由原子谓词公式、命题联接词、量词以及圆括号按照上述规则组成的一个符号串。
- 本章讨论的是一阶谓词逻辑, 限定量词仅作用于个体变元, 不允许量词作用于命题变元、谓词变元。
- 个体变元有自由free变元和约束bound变元之分。

定义 16.2.2 在谓词公式中，形如$\forall x\, A(x)$或$\exists x\, A(x)$的那一部分称为是公式的x**约束(bound)部分**。而A(x)称为是量词$\forall x$或$\exists x$的**辖域(scope)**。

x在公式的x约束部分的任一出现都称为x的**约束出现**。

当x的出现不是约束出现时，称x的出现是**自由(free)出现**。因此，公式中约束出现的变元是**约束变元**, 自由出现的变元是**自由变元**。

例 16.2.2 $\forall y$ (如果y是辣椒, 则y是红的)。

个体变元y是约束变元。

这不是一个命题函数,而是一个命题。

- 对于其中的个体变元不需要再作代入, 它的含义是确定的, 它断定"一切辣椒都是红的", 这当然是一个假命题。

例 16.2.3 (1) $\forall x\, P(x) \wedge Q(y)$, 公式中的个体变元x是约束变元, y是自由变元 ,量词$\forall x$的辖域是$P(x)$。

(2) $\forall x(A(x) \vee \exists y\, B(x, y))$,

$\forall x(A(x) \vee \exists y\, B(x, y))$是x的约束部分,

$\exists y B(x, y)$是y的约束部分。

- 量词$\forall x$的辖域是$A(x) \vee \exists y\, B(x, y)$,
- $\exists y$的辖域是$B(x, y)$;
- x和y两者的所有出现都是约束出现。

(3) $\exists x\, (A(x) \rightarrow B(x))$, $\exists x$的辖域是$A(x) \rightarrow B(x)$,

x的所有出现都是约束出现。

(4) $\exists x\, A(x) \rightarrow B(x)$, $\exists x$的辖域是$A(x)$,

x在$B(x)$中是自由出现。

§ 16.3 谓词演算等价与范式

- 命题函数不是命题, 只有当把其中的谓词P赋予确定的含义, 所有的个体变元都分别代之以确定的个体后, 该谓词才能成为命题, 有了确定的真值。

一、 公式指派assignment

定义 16.3.1 谓词公式A的每一个**指派**由如下四部分组成:

(1) 非空的个体域D;

(2) 自由个体变元用D中确定的个体代入;

(3) 对每个谓词变元, 分别指定为D上的一个确定的命题函数;

(4) 对每个命题函数, 分别指定为D上的一个确定的函数。

- 由定义可知, 只有不包含自由变元的公式才可能求出其真值, 此时的谓词公式就称为一个有确切意思的命题。

定义 16.3.2 如果对于公式A的任一组指派, 公式A的值总是为真, 则称A为**永真公式**。

如果对于公式A的任一组指派, 公式A的值总是为假, 则称A为**永假**(或**不可满足的**)**公式**。

如果至少存在着一组指派, 使公式A的值为真, 则称A是**可满足的公式**。

例 16.3.1 G(x, y)是二元谓词, 如指定D为实数域, G(x, y)表示“x大于y”, 则G有了确定的含义, 但还不是命题。

如再指定a为3.14, b为2.72, 则G(a, b)就是命题“3.14大于2.72”, 其真值为1。

例 16.3.2 若个体域是{a, b, c}, 消去

$\forall x \neg P(x) \vee \forall x P(x)$中的量词:

解 $\forall x \neg P(x) \vee \forall x P(x)$

$\Leftrightarrow (\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c)) \vee (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$

例 16.3.3 设个体域为{0, 1}, 将$\exists x\,(\forall y\,F(x,y)\vee G(x)$转换成不含量词的形式:

解 $\exists x\,(\forall y\,F(x,y)\vee G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\,((F(x,0)\wedge F(x,1))\vee G(x))$

$\Leftrightarrow ((F(0,0)\wedge F(0,1))\vee G(0))\vee((F(1,0)\wedge F(1,1))\vee G(1))$

例 16.3.4 $\forall x\,(P(x)\vee Q(x))$, 其中$P(x)$: $x = 1$, $Q(x)$: $x = 2$且个体域是{1, 2}, 求公式的真值。

解 $\forall x\,(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow (P(1)\vee Q(1))\wedge(P(2)\vee Q(2))$

但 $P(1)$为1, $Q(1)$为0, $P(2)$为0, $Q(2)$为1。

所以 $\forall x\,(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow (1\vee 0)\wedge(0\vee 1)$

$\Leftrightarrow 1$

二、谓词等价公式和蕴涵公式

定义 16.3.3 设A, B是个体域D上的两个公式, 若对于A和B的任意一组指派, 两公式都具有相同的真值, 则称公式A和B在D上等值, 记作**A ⇔ B**。

定义 16.3.4 对于公式A和B, 若A→B ⇔ 1, 则称公式A**蕴含**公式B, 记作**A ⇒ B**。

- 当个体域是有限集合的时候, 原则上来说, 可以用真值表的方法来验证一个公式是否为永真公式, 或者验证两个公式是否等值。

- 因此对命题演算中的所有重言式, 若将其中每一个命题变元分别用这些公式去作代入, 便可得到谓词演算中的永真公式。

例 16.3.6 在 $\mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}$ 和 $\mathbf{(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)}$ 中, 若用 $\forall x\, P(x)$ 代替 P, 用 $\exists x\, Q(x)$ 代替 Q, 得到永真公式:

$\forall x P(x) \vee \neg \forall x P(x)$,

$(\forall x P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow (\neg \forall x\, P(x) \vee \exists x Q(x))$。

- 量词转换律: 反映量词的特性以及量词与联结词之间的关系。

$\neg(\forall x\, A(x)) \Leftrightarrow \exists x\, (\neg A(x))$

$\neg(\exists x\, A(x)) \Leftrightarrow \forall x\, (\neg A(x))$

当个体域为有限集D={$a_1, a_2, \ldots, a_n$}, 证明如下:

$\neg(\forall x\, A(x))$

$\Leftrightarrow \neg(A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n))$

$\Leftrightarrow (\neg A(a_1)) \vee (\neg A(a_2)) \vee \ldots \vee (\neg A(a_n)))$

$\Leftrightarrow \exists x\, (\neg A(x))$

$\neg(\exists x\, A(x))$

$\Leftrightarrow \neg(A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n))$

$\Leftrightarrow (\neg A(a_1)) \wedge (\neg A(a_2)) \wedge \ldots \wedge (\neg A(a_n)))$

$\Leftrightarrow \forall x\, (\neg A(x))$

对于无穷个体域, 可作语义解释如下:

如果$\forall xA(x)$为真, 则可以把$\neg(\forall xA(x))$理解成 “命题$\forall xA(x)$是假的” , 而它与 “存在某些 x, A(x)不是真的” 意思等价。

即 $\neg(\forall x\, A(x)) \Leftrightarrow \exists x\, (\neg A(x))$

- 类似地, 如果$\exists$ $xA(x)$为真, 则$\neg(\exists\, xA(x))$表示“至少存在一个x, 能使A(x)为真”这个命题为假。它等价于“不存在任何一个x能使A(x)为真”，或者“对于所有的x, A(x)是假的”。即
$\neg(\exists x\ A(x)) \Leftrightarrow \forall x\ (\neg A(x))$

表16.3.1

量词转换律

E_{13} $\neg(\forall x\, A(x)) \Leftrightarrow \exists x\, (\neg A(x))$

E_{14} $\neg(\exists x\, A(x)) \Leftrightarrow \forall x\, (\neg A(x))$

量词辖域的扩张与收缩律

E_{15} $\forall x\, (A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge B$

E_{16} $\forall x\, (A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \vee B$

E_{17} $\exists x\, (A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \wedge B$

E_{18} $\exists x\, (A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee B$

量词分配律

E_{19} $\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$

E_{20} $\exists x\, (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$

量词分配蕴涵律

I_{16} $\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\,A(x) \wedge \exists x\,B(x)$

I_{17} $\forall x\,A(x) \vee \forall x\,B(x) \Rightarrow \forall x\,((A(x) \vee B(x))$

注意: $\forall x\,(A(x) \vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall x\,A(x) \vee \forall x\,B(x)$

$\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists x\,A(x) \wedge \exists x\,B(x)$

$\forall x$不能对$\vee$分配, $\exists x$不能对$\wedge$分配。

看例子。

例 16.3.7 设个体域为整数集合, $O(x)$表示“x是奇数”, $E(x)$表示 “x是偶数”。

(1) $\forall x\,(O(x)\vee E(x))$的含义是“对于任意的整数x, x或者是奇数或者是偶数”, 这是一个真命题。

(2) 而$\forall x\, O(x)\vee\forall x\, E(x)$的含义是“或者所有的整数都是奇数,或者所有的整数都是偶数”, 这显然是假命题。

(1)和(2)两者没有等值关系。

(3) $\exists x\, O(x)\wedge\exists x\, E(x)$ 的含义是“存在有奇数的整数, 也存在有偶数的整数”, 这是一个真命题。

(4) 而$\exists x\,(O(x)\wedge E(x))$的含义是“要求存在一个整数, 它既是奇数, 同时又是偶数”, 这显然是假命题。

(3)和(4)两者没有等值关系。

例 16.3.8 证明$\exists x\,(A(x) \to B(x))$

$$\Leftrightarrow \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$$

证明 $\exists x\,(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \exists x\,(\neg A(x) \vee B(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\,(\neg A(x)) \vee \exists x\, B(x)$

$\Leftrightarrow \neg\forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$

若A不含有个体变元, 则

$\forall x\, A \Leftrightarrow A$;　　　　$\exists x\, A \Leftrightarrow A$。

- 表16.3.2 列出了包含联结词“$\to$”和“$\leftrightarrow$”的一些基本的等值关系式和蕴涵关系式。

表 16.3.2辖域的扩张与收缩律

等价

E_{21} $\exists x\,(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \rightarrow B$

E_{22} $\forall x\,(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \rightarrow B$

E_{23} $\exists x\,(A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \rightarrow \exists x\,B(x)$

E_{24} $\forall x\,(A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \rightarrow \forall x\,B(x)$

E_{25} $\exists x\,(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \rightarrow \exists x\,B(x)$

蕴含

I_{18} $\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\,A(x) \rightarrow \forall x\,B(x)$

I_{19} $\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x\,A(x) \rightarrow \exists x\,B(x)$

I_{20} $\exists x\,A(x) \rightarrow \forall x\,B(x) \Rightarrow \forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$

I_{21} $\forall x\,(A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\,A(x) \leftrightarrow \forall x\,B(x)$

- 在谓词公式中, 若有多个量词, 那么量词的次序直接关系到命题的意义。
- 但有两个例外, 即

  相同量词间的次序是可以任意交换的:

  E_{26} $\forall x\ \forall y\ A(x, y) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ A(x,y)$

  E_{27} $\exists x\ \exists y\ A(x,y) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ A(x,y)$
- "对于所有的x和所有的y, A(x, y)均成立" 与 "对于所有的y和所有的x, A(x, y)均成立"

  其含义是完全相同的, 故E_{26}正确。

  类似地, E_{27}正确。

§16.4 前束范式

一.前束范式

定义 16.4.1 一个谓词公式, 如果它的所有量词均非否定地出现在公式的最前面, 且它们的辖域一直延伸到公式的末尾, 则称这种形式的公式为**前束范式**(prenex form)。记作下述形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$$

其中, 每个$Q_i(1\le i\le k)$为量词$\forall$或$\exists$, B为不含量词的谓词公式。

例 16.4.1 (1) $\forall x\exists y\forall z\,(P(x)\rightarrow Q(y)\wedge R(x,z))$

(2) $\exists x\forall y\forall z\,((P(x,y)\wedge(\neg Q(x)))\rightarrow(R(y,z)\vee(\neg Q(x))))$

都是前束范式。

定理 16.4.1 任一谓词公式都可以化成为与之等值的前束范式。

证明 构造性算法步骤如下:

1. 消去联结词$\rightarrow$, $\leftrightarrow$。
2. 将联结词$\neg$向内深入, 使之只作用于原子公式。
3. 利用换名或代入规则使所有约束变元的符号均不同, 并且自由变元与约束变元的符号也不同。
4. 利用量词辖域的扩张和收缩律, 将所有量词以在公式中出现的顺序移到公式最前面, 扩大量词的辖域至整个公式。

例 16.4.2 求公式A：$(\forall x\, P(x) \vee \exists y\, Q(y)) \to \forall x\, R(x)$的前束范式。

解 $A \Leftrightarrow \neg(\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \vee \forall x R(x)$ 消去联结词→

$\Leftrightarrow (\neg\forall x P(x) \wedge \neg\exists y Q(y)) \vee \forall x R(x)$ 德.摩根律

$\Leftrightarrow (\exists x \neg P(x) \wedge \forall y \neg Q(y)) \vee \forall z R(z)$ 量词转换

$\Leftrightarrow \exists x \forall y\, \forall z\, ((\neg P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee R(z))$ 量词辖域扩张

定义 16.4.2 设谓词公式A是一前束范式，

若A的尾部具有形式：

$(A_{11} \vee A_{12} \vee \ldots \vee A_{1n_1}) \wedge \ldots \wedge (A_{m1} \vee A_{m2} \vee \ldots \vee A_{mn_m})$　　(*)

其中A_{ij}是原子谓词公式或其否定，则称A是**前束合取范式**；

若A的尾部具有形式：

$(A_{11} \wedge A_{12} \wedge \ldots \wedge A_{1n_1}) \vee \ldots \vee (A_{m1} \wedge A_{m2} \wedge \ldots \wedge A_{mn_m})$　　(**)

则称A是**前束析取范式**。

例 16.4.4

$\forall x \exists y \forall z((P(x, y) \vee \neg R(x, z)) \wedge (\neg Q(y, z) \vee \neg P(x, y)))$是前束合取范式；

$\exists x \forall z \forall y (S(x, z) \vee (\neg P(x, y) \wedge Q(y, z)))$是前束析取范式。

定理 16.4.2 每个谓词公式A均可以变换为与它等值的前束合取范式和前束析取范式。

证明 将一个公式化为前束合取范式或前束析取范式时，只需在前面求前束范式的 (1)~(4) 三个步骤基础上再增加下面步骤:

(5) 利用分配律将公式化为前束合取范式或前束析取范式。

例 16.4.5 将A: $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x,y)) \rightarrow (\neg\exists xR(x) \wedge \exists zS(z))$化为前束合取范式和前束析取范式。

解 (1) 消去联结词$\rightarrow$, $\leftrightarrow$:

$A \Leftrightarrow \forall x((P(x)\rightarrow Q(x,y))\wedge(Q(x,y)\rightarrow P(x)))$

$\rightarrow (\neg\exists xR(x)\wedge\exists zS(z))$

$\Leftrightarrow\neg\forall x((\neg P(x)\vee Q(x,y))\wedge(\neg Q(x,y)\vee P(x)))$

$\vee(\neg\exists xR(x)\wedge\exists zS(z))$

(2) 将联结词$\neg$深入至原子谓词公式:

$A \Leftrightarrow \exists x(\neg(\neg P(x)\vee Q(x,y))\vee\neg(\neg Q(x,y)\vee P(x)))$

$\vee(\forall x\neg R(x)\wedge\exists zS(z))$

$\Leftrightarrow\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x,y))\vee(Q(x,y)\wedge\neg P(x)))$

$\vee(\forall x\neg R(x)\wedge\exists zS(z))$

(3) 换名:

$$A \Leftrightarrow \exists x((P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee (Q(x,y) \wedge \neg P(x)))$$

$$\vee (\forall t \neg R(t) \wedge \exists z S(z))$$

(4) 将量词提到公式前:

$$A \Leftrightarrow \exists x((P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee$$

$$(Q(x,y) \wedge \neg P(x))) \vee \forall t \exists z((\neg R(t)) \wedge S(z))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall t \exists z((P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee$$

$$(Q(x,y) \wedge \neg P(x)) \vee (\neg R(t)) \wedge S(z)))$$

至此, 已得A的前束析取范式。

(5) 利用分配律化其为前束合取范式：

$$A \Leftrightarrow \exists x \forall t \exists z(\mathbf{((P(x) \vee Q(x,y)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee \neg P(x))}$$

$$\vee (\neg R(t)) \wedge S(z)))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall t \exists z(((P(x) \vee (Q(x,y) \vee \neg R(t))$$

$$\wedge (\neg Q(x,y) \vee \neg P(x) \vee S(z)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee \neg P(x)) \vee \neg R(t)) \wedge$$

$$(\neg Q(x,y) \vee \neg P(x)) \vee S(z)))$$

例 16.4.6 求等价于$\forall x(P(x)\rightarrow\forall y(\forall zQ(x,y)\rightarrow\neg\forall zR(y,x)))$的前束合取范式和前束析取范式.

解 $\forall x\,(P(x)\rightarrow\forall y\,(\forall z\,Q(x,y)\rightarrow\neg\forall z\,R(y,x))$

$\Leftrightarrow\forall x\,(\neg P(x)\vee\forall y\,(Q(x,y)\rightarrow\neg R(y,x))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\,(\neg P(x)\vee\neg Q(x,y)\vee\neg R(y,x))\qquad(M_{111})$

至此, 已得前束合取范式,

由主范式性质可得前束析取范式 $\Leftrightarrow$

$\forall x\forall y\,(m_{000}\vee m_{110}\vee m_{101}\vee m_{100}\vee m_{011}\vee m_{010}\vee m_{001})$

$\forall x\forall y\,((\neg P(x)\wedge\neg Q(x,y)\wedge\neg R(y,x))\vee(P(x)\wedge Q(x,y)\wedge\neg R(y,x))$

$\vee(P(x)\wedge\neg Q(x,y)\wedge R(y,x))\vee(P(x)\wedge\neg Q(x,y)\wedge\neg R(y,x))$

$\vee(\neg P(x)\wedge Q(x,y)\wedge R(y,x))\vee(\neg P(x)\wedge Q(x,y)\wedge\neg R(y,x))$

$\vee(\neg P(x)\wedge\neg Q(x,y)\wedge R(y,x)))$

二. 斯柯林范式-一类特出的前束范式

- 前束合(析)取范式的优点在于它的量词全部集中在公式的首部，公式的其余部分实际上是一个命题演算公式，这就为谓词公式提供了一种规范的形式，从而将公式形式的范围缩小，给研究工作提供了一定的方便。
- 但前束范式的不足之处是首标中比较杂乱无章，全称量词与存在量词无一定的排列规则。
- 下面我们再引入前束词都是某种特定类型量词的斯柯林(Skolem)范式。

定义 16.4.3 首标中不含存在量词的**前束合取范式**称为**斯柯林范式**。

定理 16.4.3 每个谓词公式A均可以变换为与它等值的斯柯林范式。

证明 由定理16.4.1知, 任一谓词公式A均可以变换为与它等值的前束范式, 因此可假定公式A已是前束范式: $A \Leftrightarrow Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n G(x_1, x_2, \ldots x_n)$

其中首标Q_ix_i为$\forall x_i$或$\exists x_i$ $(1 \le i \le n)$, 公式G中不含量词。

我们现可进行如下的斯柯林变换消去首标中的存在量词:

1. 若$\exists x_k$ $(1 \le k \le n)$左边没有全称量词, 则取不在G中出现过的个体常元c替换G中所有的x_k, 并删除首标中的$\exists x_k$。

2. 若$\exists x_k$ $(1 \le k \le n)$左边有全称量词

$\forall x_{s1}, \forall x_{s2}, \ldots, \forall x_{sr}$ $(1 \le r,\ 1 \le s1 < s2 < \ldots < sr < k)$,

则取不在G中出现过的r元函数$f_r(x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sr})$

替换G中所有的x_k, 并删除首标中的$\exists x_k$。

反复执行1.和2.的变换, 直至删除首标中的所有存在量词,

即得到不含存在量词的斯柯林范式。

其中用来替换x_k的个体常元和函数符号称为关于公式A的

斯柯林函数。

例 16.4.7 求$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, G(x,y,z,u,v,w)$的斯柯林范式:

解 用a替换x, 删除$\exists x$得

$\forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, G(a, y, z, u, v, w)$,

用$f(y, z)$替换u, 删除$\exists u$得

$\forall y \forall z \forall v \exists w\, G(a, y, z, f(y,z), v, w)$,

- 用$h(y, z, v)$替换w, 删除$\exists w$得

$\forall y \forall z \forall v\, G(a, y, z, f(y,z), v, h(y, z, v))$。

§ 16.5 谓词演算的推理理论

- 利用谓词公式间的各种等值关系和蕴含关系, 通过一些推理规则, 从一些谓词公式推出另一些谓词公式, 这就是谓词演算中的推理。
- 要进行正确的推理, 必须构造一个结构严谨的形式证明, 给出一些相应的推理规则。
- 由于谓词逻辑中引进了个体、谓词和量词, 所以要增加一些与量词有关的推理规则。

1. 全称特定化 (US) 规则 $\forall x\, A(x) \Rightarrow A(y)$

US规则成立的条件是:

(1) x是A(x)中自由出现的个体变元;

(2) y为任意的不在A(x)中约束出现的个体变元;

(3) 自由变元y也可替换成任意个体常元c。

- US规则的意思: 如果个体域的所有个体都具有性质A, 则个体域中的任一个个体具有性质A。

2. 存在特定化 (ES) 规则 $\exists x\, A(x) \Rightarrow A(c)$

- ES规则成立的条件是：

(1) c是使A为真的特定的个体常元；

(2) c不曾在A(x)中出现过；

(3) A(x)中除x外还由其它自由出现的个体变元时，不能用此规则。

- ES规则是说，如果个体域存在有性质A的个体，则个体域中必有某一个个体c具有性质A。
- 注意，这里的个体c不是任意的。

3. 全称一般化 (UG) 规则 $A(x) \Rightarrow \forall y A(y)$

UG规则成立的条件是:

(1) y在A(y)中自由出现, 且y取任何值时A均为真;

(2)取代x的y不能在A(x)中约束出现, 否则会出错

- UG规则是说, 若个体域中任意一个个体都具有性质A, 则个体域中的全体个体都具有性质A。

4. 存在一般化 (EG) 规则 $A(c) \Rightarrow \exists y\, A(y)$

- EG规则成立的条件是：

(1) c是特定的个体常元；

(2) 取代c的x不能已在A(c)中出现过。

- EG规则是说, 如果个体域中有某一个体c具有性质A, 则个体域中存在着具有性质A的个体。

- 在使用以上4个规则时, 要严格按照限制条件去使用, 并从整体上考虑个体变元和常元符号的选择, 否则会犯错误。
- 这4个规则可形象地称为: “脱帽”、“戴帽”规则,
- 对全称量词“脱帽容易戴帽难”,
- 而对存在量词“戴帽容易脱帽难”。

例 16.5.1 证明$\forall x\,(P(x)\to Q(x))\land P(c)\Rightarrow Q(c)$。

证明 (1) $\forall x\,(P(x)\to Q(x))$ 前提

(2) $P(c)\to Q(c)$ (1); US

(3) $P(c)$ 前提

(4) $Q(c)$ (2), (3); I

- 这就是例10.0.1逻辑中的“三段论方法”：

“所有的人都是要死的，

Socrates是人，

所以Socrates是要死的”。

例 16.5.2 证明 $\exists xA(x)\to\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\to B(x))$

证明

编号	公式	依据
(1)	$\neg\forall x\,(A(x)\to B(x))$	假设
(2)	$\exists x\,\neg(A(x)\to B(x))$	(1), E
(3)	$\neg(A(a)\to B(a))$	(2), ES
(4)	$A(a)\wedge\neg B(a)$	(3), I
(5)	$A(a)$	(4), I
(6)	$\neg B(a)$	(4), I
(7)	$\exists x\,A(x)$	EG
(8)	$\exists x\,A(x)\to\forall x\,B(x)$	前提
(9)	$\forall x\,B(x)$	I
(10)	$B(a)$	US
(11)	$B(a)\wedge\neg B(a)$	(5)(10)矛盾

- **例 16.5.3**符号化下列命题，并推证其结论。

任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车；每个人或者喜欢乘汽车，或者喜欢骑自行车。有些人不爱骑自行车，因而有些人不爱步行。

提示:给定谓词P(x):x喜欢步行；Q(x):x喜欢乘汽车；R(x):x喜欢骑自行车。

前提：$\forall x（P(x) \rightarrow \neg Q(x)）, \forall x（Q(x) \vee R(x)）$，

$\exists x \neg R(x)$

结论：$\exists x \neg P(x)$

证明 编号	公式	依据
(1)	$\exists x \neg R(x)$	前提
(2)	$\neg R(a)$	(1)，ES
(3)	$\forall x(Q(x) \vee R(x))$	前提
(4)	$Q(a) \vee R(a)$	(3)，US
(5)	$Q(a)$	(2)(4)，I
(6)	$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	前提
(7)	$P(a) \rightarrow \neg Q(a)$	(6)，US
(8)	$\neg P(a)$	(5)(7)，I
(9)	$\exists x \neg P(x)$	(8)，EG

- 作业

- 习题 一 1,2
- 习题 二 1，3
- 习题 三 1, 2
- 习题 四 1,2

∀∃∅∩∪⊆⊂
⊄∉∈≤≥…ℵ∑{ }≡±°∞αβσρυωζψηδεφλμπΔ θ ±
∏∧∨∀ }∴√⊃

- ≌≈∽∞⊇∩∪℃‰≥≤∵∏∈∑≮≯½¼ § ¥{ }? ±
↔∨∧¬→←⇒⇔ ↓↑Λ⊕≠⊙— 〈〉
☆★▽≮≯⌒∵∴⇔∩≠—— 〃
// ∴ ∵ ∷ ⊥ ↘ ↗ ↙ ↖ √
- 〔「–」÷×·º·‹2, b›︶︸