课程要求

第一章 （所有）
第二章 （所有）
第三章 不要求
第四章 （§1，§2，§3）
第五章 （§1，§2，§3，§4，§6）
第六章 （§1，§2）
第七章 （§1，§2，§3，§4，§5，§6）
第八章 （§1，§2，§3，§4，§5 ）
第九章 （§1，§2）
第十章 （§1，§2，§3）
第十一章 （§1，§2，§3，§4）
第十二章 不要求

课程要求

第十三章 （所有）
第十四章 不要求
第十五章 （所有）
第十六章 （所有）

集合论（30%）+代数系统（30%）+图论（20%）+数理逻辑（15%）+计数（5%）

Exercises 1

1、求下列集合的幂集：A={∅,a,{b}}

2、设A、B、C为三个集合，证明

$$A=(A-B)\cup(A-C)\Leftrightarrow A\cap B\cap C=\phi$$

3、设R是集合A上的关系,且是传递和反自反的。
证明：$r(R)=R\cup I_A$ 是偏序关系

4、R是任意非空集合A上的等价关系，
证明：$\forall x\in A$,都有 $\bigcup_{x\in A}[x]_R = A$

Exercises 1

5 、假设f为$f:A\to B$函数，

定义$g:B\to 2^A$, $\forall b\in B, g(b)=\{x|x\in A \wedge f(x)=b\}$

证明 若f是满射的，则g是单射的。

6、有函数$f:X\to Y$, $g:Y\to X$, 且$g\circ f$是集合X上的恒等函数,证明 f是单射的，则g是满射的。

7、给定集合A={1, 2, 4, 6, 8, 12}，“|”是集合A上的整除关系。

（1）画出偏序集<A, |>的哈斯图；

（2）求出子集B={2, 4, 6}的最大元，极大元，上界，最小上界；

（3）求出集合A上整除关系“|”的传递闭包t(|)。

Exercises 1

8、给出含有三个元素的所有不同的偏序集的哈斯图。

9、设$(S,\leq_1)$与$(T,\leq_2)$是两个偏序集。证明$(S\times T,\leq)$也是一个偏序集，其中，$(s,t)\leq(u,v)$当且仅当$s\leq_1 u$ 并且 $t\leq_2 v$

Exercises 2

1、设*是集合A上可结合的二元运算，且 $a, b \in A$, 若 $a*b=b*a$，则$a=b$。证明： $a, b \in A$, 则$a*b*a=a$

2、定义实数集合R上的两个二元运算$*, \Diamond$如下：$\forall a, b \in R$，$a*b=a^b$，$a\Diamond b=ab$。（其中等式右边是实数集合上的标准指数运算和乘法运算）。证明*对◊不满足分配律。

3、设**G**是一个群，对**G**中的任意元素***a, b***，证明：

(1). $|a|=|a^{-1}|$。

(2). $|a|=|b^{-1}ab|$。

Exercises 2

4、设<*G*,*>是一个交换群，证明：

对*G*中的元素*a*, *b*，若|*a*|=*m*，|*b*|=*n*，则|*ab*| | [*m*, *n*]。(即*ab*的周整除*m*, *n*最小公倍数)

5、设<Z，＋，·>是环，1是其乘法·幺元，在Z上定义运算 ⊕ 和 ⊙：a⊕b＝a＋b＋1，a⊙b＝a＋b＋a·b

（1）证明<Z，⊕，⊙>是环。

（2）<Z，⊕，⊙>是含幺环吗？请说明。

Exercises 3

1、(1)画出5阶4条边的所有非同构的无向简单图。

(2)画出4阶2条边的所有非同构的有向简单图。

2、设G=<V,E>是无向连通图， G中至少有3个顶点，证明G中存在2个顶点，将它们删除后图仍然是连通的。

3 、证明在任何有向完全图中，所有顶点入度的平方之和等于所有顶点出度的平方之和。

（说明，有向完全图是指以无向完全图为底图的有向图）

。

Exercises 3

4、若G为简单图，且 $m > C_{n-1}^{2}$ ，则G是连通的。其中m, n分别为该图的边数和顶点数。

5、假设 T 是非平凡的无向树，T 中度数最大的顶点有 2 个，并且它们的度数 k 都大于等于 2。
证明：T 中至少有 2k-2 片叶。

6、设G有11个或更多顶点，证明G或G的补图~G是非平面图 。

Exercises 4

1.证明 $\neg p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \neg q$

2.设论域D={1,2,3}，请确定下列公式的真值

$\exists x((P \wedge Q(x)) \rightarrow R(c))$.

其中命题、谓词、常量分别如下：

P:6>1,Q(x):x≤2,R(x):x>5,c=5.

3. 验证公式

$(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

是永真式.

Exercises 4

4. 使用推理规则推证结论有效：

前提：$P \rightarrow Q$, $(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$, $\neg(\neg P \wedge S)$

结论：$\neg S$

5. 完成下列推理的有效性证明：有些不守信用的人是可以信赖的，这种情况不存在；有些可以信赖的人是受过高等教育的。因此，有些受过高等教育的人是守信用的。

提示：设P(x):x是守信用的人;Q(x):x是可以信赖的人;S(x):x是受过高等教育的人,论域：所有人。

6. （1） $x_1+x_2+x_3=11$ (n) 其中$x1\geqslant 1, x2\geqslant 1, x3\geqslant 1$ 正整数解的个数？

(2) 多项式$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ 展开后共有多少不同的项？

7. 将一批排球装入4个箱子，如果至少有一个箱子中装入5个排球，问这批排球的数目至少为多少？

样例

1、假设集合 A={{∅}}、B={∅}。求：(1) $P(A\bigcup B)$，(2) $(P(A\bigcup B)\bigcap A)\times B$，

(3) $(P(A\bigcup B)\bigcap A)-A$，(4) 证明，$P(A)\bigcup P(B)\subseteq P(A\bigcup B)$

2、假设 N 是自然数集，F 是 N 到 N×N 的函数：F(n)=(n, n+1)。证明 该函数是单射的但不是满射的。

3、设集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$R=\{(a,b),(a,c),(d,e)\}$ 为 A 上的关系。请往 R 中添加最少数目的有序对，使其成为 A 集合上的一个等价关系，并给出该等价关系的等价类。

4 证明：$(P\to Q)\wedge(R\to Q)\equiv(P\vee R)\to Q$

5、假设有如下一个解释：$D=\{3,2\},f(3)=2,f(2)=3$，$P(x,y)$：x 大于等于 y。试求出在上述解释下公式 $\forall x\exists yP(f(x),f(y))$ 的真值。

6、设 $A=\{a,b,c\}$，$\rho(A)$ 是集合 A 幂集。证明：$<\rho(A),\subseteq>$ 是布尔代数。

样例

二、 设 G 是一个群,e 是 G 的单位元,H 是 G 的子群. 如下定义关系 R: $\forall a_1, a_2 \in G, < a_1, a_2 > \in R \Leftrightarrow a_1 e a_2^{-1} \in H$. 证明 R 是 G 上的等价关系。

三、 证明 素数阶循环群的每个非单位元都是生成元。

四、 给定下列前提和结论，请用提示中的符号进行符号化并演绎推证。前提：（1）不存在能表示成分数的无理数；（2）有理数都能表示成分数；结论：有理数都不是无理数。
（提示：F(x):x 为无理数,G(x):x 为有理数,H(x):x 能表示成分数）

五、 证明 在有界分配格中，具有补元的所有元素组成一个子格。

样例

六、　　　本周计算机房要安排 6 个人值班。从星期一到星期六每人值一天。但甲不安排星期一，乙不安排星期二，丙不安排星期三，共有多少种安排值班的方式。要求，请用容斥原理解决。

七、　　　证明 当且仅当 G 的一条边 e 不包含在 G 的回路中时 e 才是 G 的割边。

八、　　　证明 对于连通无向简单平面图，当边数 e<30，每一个面至少由 3 条边包围时，必存在度数小于等于 4 的顶点。