B样条曲线与曲面

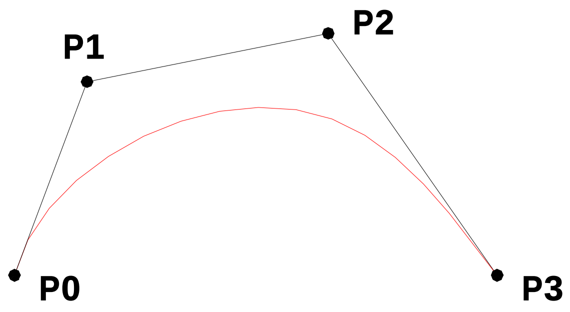
一、B样条产生的背景

Bezier曲线曲面有很多优点，可以用鼠标拖动控制顶点以改变曲线的形状，非常直观，给设计人员很大的自由度

Bezier曲线曲面是几何造型的主要方法和工具

但是Bezier曲线有几点不足：

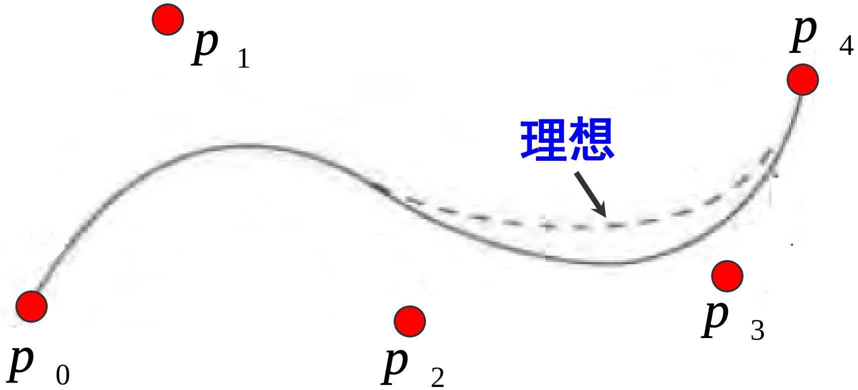
（1）一旦确定了特征多边形的顶点数(n+1个)，也就决定了曲线的阶次(n次)



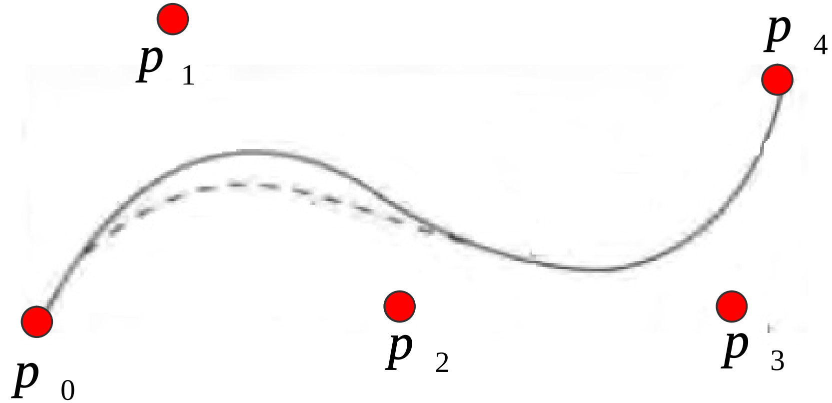
（2）Bezier曲线或曲面的拼接比较复杂

（3）Bezier曲线或曲面不能作局部修改

为了纠正偏离，需要向上移动p_2和p_3，以使Bezier曲线更接近所期望的曲线

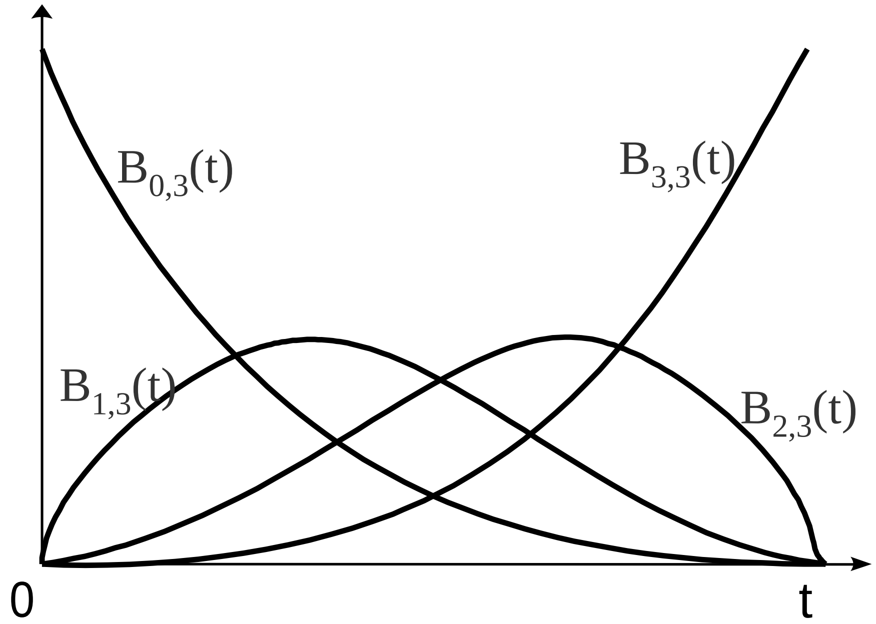


但是，这也影响了曲线的前半部分，迫使它偏离所期望的曲线



函数值不为0的区间通常叫做它的[支撑区间]

因为每个Bernstein多项式在整个区间[0，1]上都有支撑，且曲线是这些函数的混合，所以每个控制顶点对0到1之间的t值处的曲线都有影响

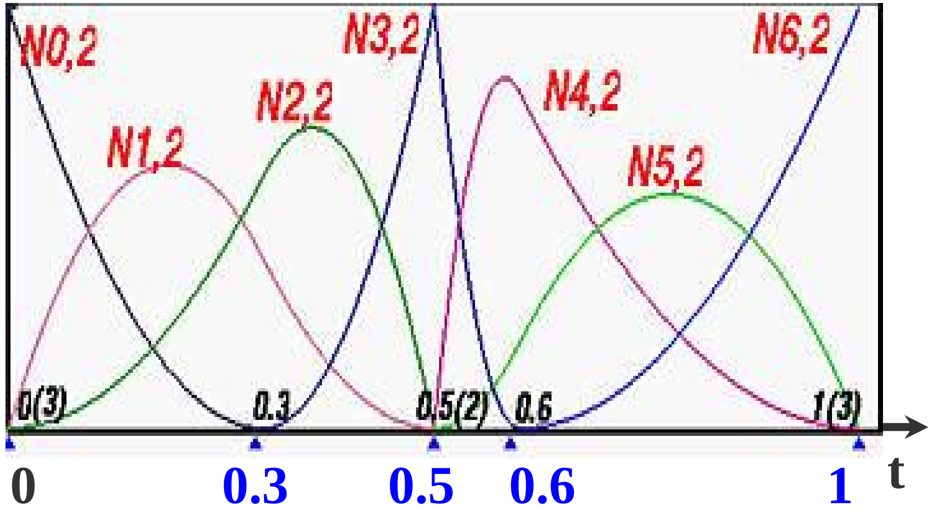


三次Bezier曲线四个Bezier基函数

图中显示了7个混合函数

$N_{0,2}$ $N_{1,2}$ $N_{2,2}$ $N_{3,2}$

$N_{4,2}$ $N_{5,2}$ $N_{6,2}$



每个函数只在区间[0,1]上的一部分有支撑，如：

$N_{1,2}$的支撑是[0,0.5] $N_{4,2}$的支撑是[0.5,1]

1972年，Gordon、Riesenfeld等人提出了B样条方法，在保留Bezier方法全部优点的同时，克服了Bezier方法的弱点

样条（spline）—— 分段连续多项式！

整条曲线用一个完整的表达形式，但内在的量是一段一段的，比如一堆的3次曲线拼过去，两条之间满足2次连续

这样既克服了波动现象，曲线又是低次的。既有统一的表达时，又有统一的算法

如何进行分段呢？

现在有n+1个点，每两点之间构造一条多项式，n+1个点有n个小区间

每个小区间构造一条三次多项式，变成了n段的三次多项式拼接在一起，段与段之间要两次连续，这就是三次样条

如有5个点，构造一个多项式，应该是个四次多项式。现在采用样条方式构造四段曲线，每一段都是三次的，且段与段之间要C^2连续。

二、B样条的递推定义和性质

B样条曲线的数学表达式为:

$$P(u)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,k}(u) \qquad u\in[u_{k-1},u_{n+1}]$$

$P_i(i=0,1,\mathbf{L},n)$ 是控制多边形的顶点

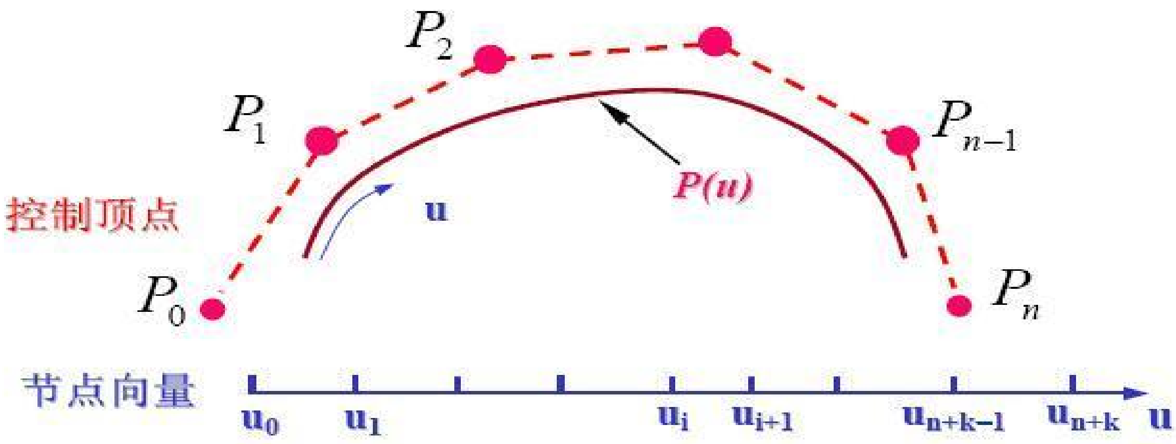
Bezier曲线 $$p(u)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(u) \qquad u\in[0,1]$$

$B_{i,k}(u)$ 称为k阶（k-1次）B样条基函数，k是刻画次数的。其中k可以是2到控制点个数n+1之间的任意整数

对Bezier曲线来说，阶数和次数是一样的；但对B样条，阶数是次数加1

$$P(u)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,k}(u) \qquad u\in[u_{k-1},u_{n+1}]$$

B样条基函数是一个称为节点矢量的非递减的参数u的序列所决定的k阶分段多项式，这个序列称为节点向量



$$u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}, u_k, \cdots, u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+k-1}, u_{n+k}$$

B样条基函数实际上就是一个多项式，一个比较复杂的、有特点的多项式而已。如何得到这个B样条基函数？

de Boor-Cox递推定义

B样条基函数可以有各种各样的定义方式，但是公认的最容易理解的是de Boor-Cox递推定义

它的原理是，只要是k阶（k-1次）的B样条基函数，构造一种递推的公式，由0次构造1次，1次构造2次，2次构造3次...依次类推

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_i < u < u_{i+1} \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

并约定：$\frac{0}{0} = 0$

$$B_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} B_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} B_{i+1,k-1}(u)$$

该递推公式表明：若确定第i个k阶B样条$B_{i,k}(u)$，需要用到$u_i, u_{i+1}, ..., u_{i+k}$共k+1个节点，称区间$[u_i, u_{i+k}]$为$B_{i,k}(u)$的支承区间

$$B_{i,1}(u)=\begin{cases}1 & u_i<u<u_{i+1}\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

并约定： $\dfrac{0}{0}=0$

$$B_{i,k}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i}B_{i,k-1}(u)+\frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}}B_{i+1,k-1}(u)$$

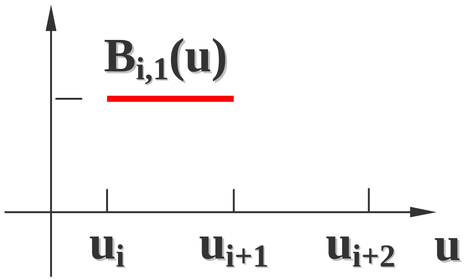
曲线方程中，n+1个控制顶点P_i(i=0,1,...,n)，要用到n+1个k阶B样条$B_{i,k}(u)$。它们支撑区间的并集定义了这一组B样条基的节点矢量 $U=[u_0,u_1,...,u_{n+k}]$

$$u_0,u_1,\mathbf{L},u_{k-1},u_k,\mathbf{L},u_n,u_{n+1},\mathbf{L},u_{n+k-1},u_{n+k}$$

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_i < u < u_{i+1} \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

$$B_{i,k}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i} B_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}} B_{i+1,k-1}(u)$$

$B_{i,1}(u)$是0次多项式



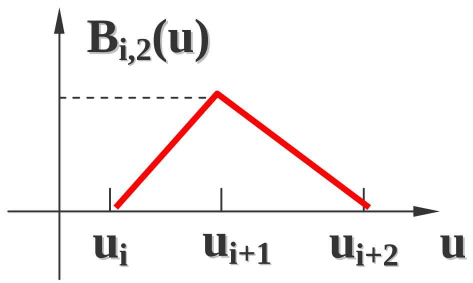
（1阶B样条）

2阶（一次）B样条$B_{i,2}(u)$?

$$B_{i,2}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}B_{i,1}(u)+\frac{u_{i+2}-u}{u_{i+2}-u_{i+1}}B_{i+1,1}(u) \qquad B_{i,1}(u)=\begin{cases}1 & u_i < u < u_{i+1}\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

$$B_{i+1,1}(u)=\begin{cases}1 & u_{i+1} < u < u_{i+2}\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

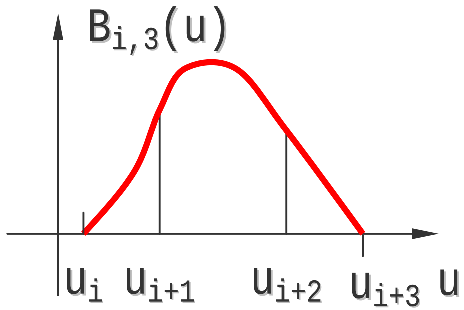
$$B_{i,2}(u)=\begin{cases}\dfrac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} & u_i \le u \le u_{i+1}\\ \dfrac{u_{i+2}-u}{u_{i+2}-u_{i+1}} & u_{i+1} \le u \le u_{i+2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



（2阶B样条）

一次B样条$B_{i,2}(u)$可有两个0次B样条$B_{i,1}(u)$和$B_{i+1,1}(u)$递推得到，是它们的凸线性组合

再有两个一次B样条$B_{i,2}(u)$ 和$B_{i+1,2}(u)$递推得到二次B样条$B_{i,3}(u)$



$B_{i,3}(u)$的图像

每个p_i都有一个$B_{i,k}(u)$与之匹配，有n+1个$B_{i,k}(u)$，曲线的次数是k-1次，问题是这条曲线的定义区间是什么？

Bezier曲线的定义区间是[0，1]？

第二个问题是对n+1个顶点，k阶的B样条曲线需要多少个节点向量（u_i）与之匹配？

三、B样条基函数定义区间及节点向量

1、B样条曲线定义区间是什么？

Bezier曲线的定义区间是[0, 1]

2、第二个问题是对n+1个顶点，k阶的B样条曲线需要多少个节点向量（u_i）与之匹配？

1、K阶B样条对应节点向量数

$$B_{i,1}(u)=\begin{cases}1 & u_i < u < u_{i+1} \\ 0 & Otherwise\end{cases} \qquad B_{i,k}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i}B_{i,k-1}(u)+\frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}}B_{i+1,k-1}(u)$$

对于$B_{i,1}$（1阶0次基函数）来说，涉及u_i到u_{i+1}一个区间，即一阶的多项式涉及一个区间两个节点

$B_{i,2}$是由$B_{i,1}$和$B_{i+1,1}$组成，因此$B_{i,2}$涉及2个区间3个节点；$B_{i,3}$涉及3个区间4个节点...，$B_{i,k}$涉及k个区间k+1个节点

$$u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}, u_{n+k}$$

2、B样条函数定义区间

$$P(u)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,k}(u) \qquad B_{i,1}(u)=\begin{cases}1 & u_i < x < u_{i+1}\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

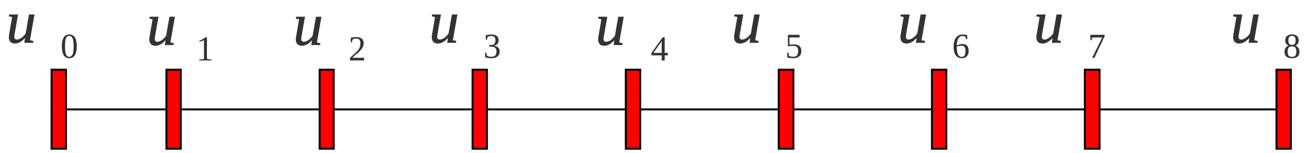
$$u \in [u_{k-1}, u_{n+1}] \qquad B_{i,k}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i}B_{i,k-1}(u)+\frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}}B_{i+1,k-1}(u)$$

$$u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}, u_k, \cdots, u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+k-1}, u_{n+k}$$

以k=4，n=4为例　　节点矢量为：

$$U=\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$$

$$U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$$



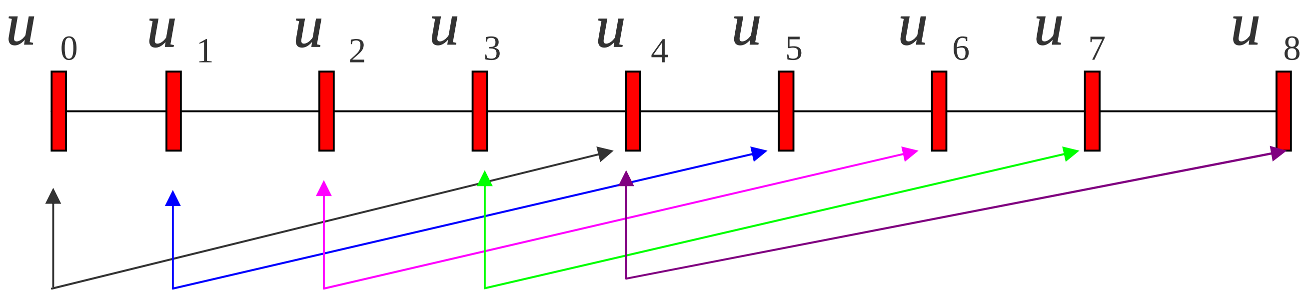
$n=4 \quad k=4$

$$B_{i,k}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i}B_{i,k-1}(u)+\frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}}B_{i+1,k-1}(u)$$

第一项是$p_0B_{0,4}(u)$，涉及哪些节点？ u_0到u_4

第二项是$p_1B_{1,4}(u)$，涉及哪些节点？ u_1到u_5

第五项是$p_4B_{4,4}(u)$，涉及哪些节点？ u_4到u_8

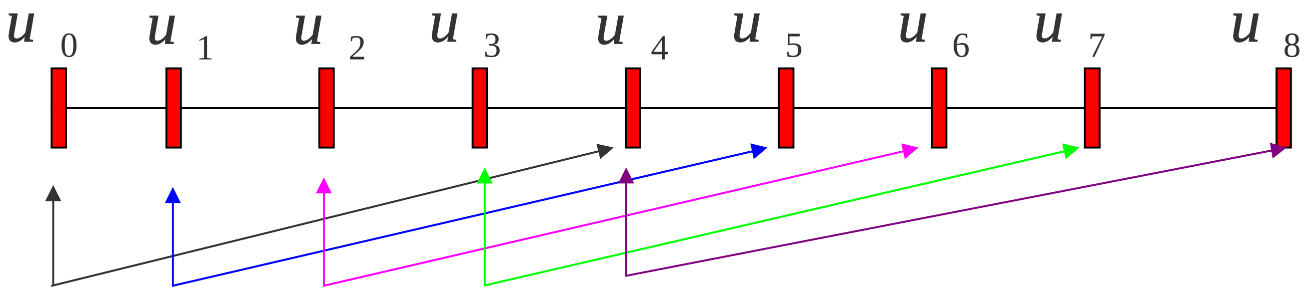


$P_0B_{0,4}(u)$，涉及u_0到u_4个节点　$P_3B_{3,4}(u)$，涉及u_3到u_7个节点

$P_1B_{1,4}(u)$，涉及u_1到u_5个节点　$P_4B_{4,4}(u)$，涉及u_4到u_8个节点

$P_2B_{2,4}(u)$，涉及u_2到u_6个节点

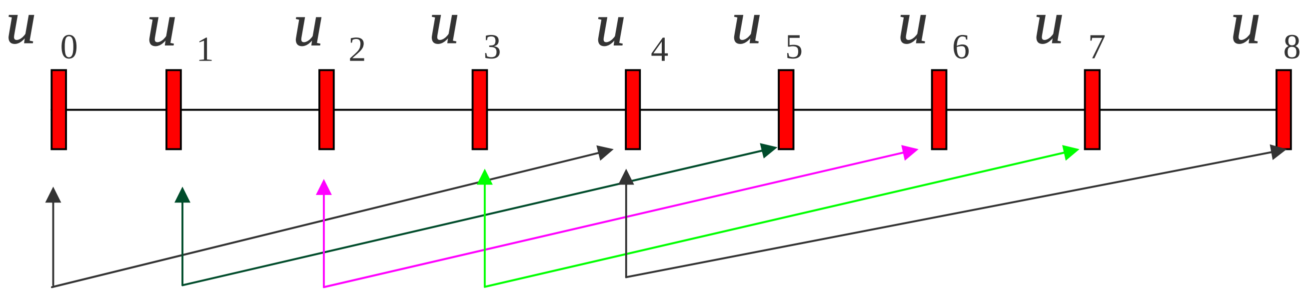
“阶数+顶点”等于节点向量的个数。问函数的定义区间？



区间要合法，区间里必须要有足够的基函数与顶点配对

哪个区间是第一个开始有意义的区间呢？

上图区间是u_3到u_5（从u_{k-1}到u_{n+1}），B样条基函数严重依赖于节点向量的分布



上面的曲线被分成两段：u_3u_4，u_4u_5。如有5个顶点P_0、P_1、P_2、P_3、P_4，B样条是一段段过渡过去

哪些基函数是在u_3u_4区间里有定义？　　正好是$P_0P_1P_2P_3$

$P_1P_2P_3P_4$在u_4u_5区间里有定义，两端之间有三个顶点是一样的，这样就保证了两段拼接的效果非常好

B样条曲线定义：

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,k}(u) \qquad B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_i < x < u_{i+1} \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

$$u \in [u_{k-1}, u_{n+1}] \qquad B_{i,k}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i} B_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}} B_{i+1,k-1}(u)$$

u_i是节点值，U=（u_0,u_1,…u_{n+k}）构成了k阶（k-1次）B样条函数的节点矢量

B样条曲线所对应的节点向量区间：$u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$