

计算机图形学

第三章： 三维图形几何变换

主要解决以下几个问题：

如何对三维图形进行方向、尺寸和形状方面的变换？

三维物体如何在二维输出设备上输出？

通过三维图形变换，可由简单图形得到复杂图形，三维图形变换则分为三维几何变换和投影变换

一、三维物体基本几何变换

三维物体的几何变换是在二维方法基础上增加了对 z 坐标的考虑而得到的

有关二维图形几何变换的讨论，基本上都适合于三维空间。从应用角度看，三维空间几何变换直接与显示、造型有关，因此更为重要

同二维变换一样，三维基本几何变换都是相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换：有平移、比例、旋转、对称和错切等

与二维变换类似，引入齐次坐标表示，即：三维空间中某点的变换可以表示成点的齐次坐标与四阶的三维变换矩阵相乘

$$p' = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = p \cdot T_{3D}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

根据 T_{3D} 在变换中所起的具体作用，进一步可将 T_{3D} 分成四个矩阵。即：

$$T_{3D} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ \hline l & m & n & s \end{array} \right]$$

$$T_1 = \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right] \quad \text{对点进行比例、对称、旋转、错切变换}$$

$$T_2 = [l \quad m \quad n] \quad \text{对点进行平移变换}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

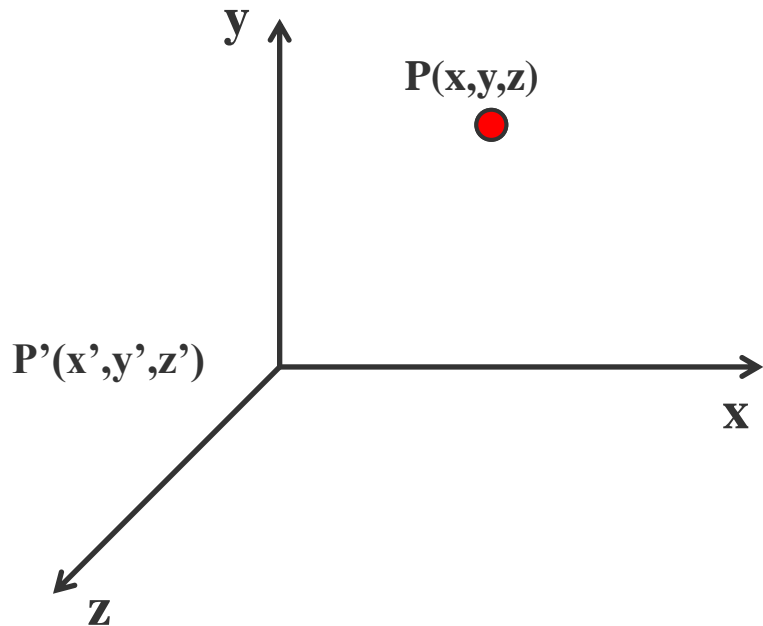
作用是进行透视投影变换

$$T_4 = [s]$$

作用是产生整体比例变换

1、平移变换

若三维物体沿 x , y , z 方向上移动一个位置，而物体的大小与形状均不变，则称为平移变换



点P的平移变换矩阵表示如下：

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot T_t$$

$$= [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [x + T_x \quad y + T_y \quad z + T_z \quad 1]$$

2、比例变换

比例变换分局部比例变换和整体比例变换

(1) 局部比例变换

局部比例变换由 T_{2D} 中主对角线元素决定，其它元素均为零。
当对 x, y, z 方向分别进行比例变换时，其变换的矩阵表示为：

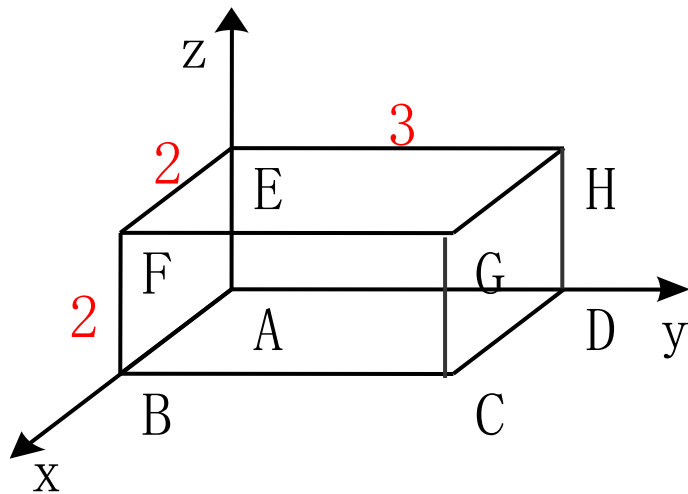
$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot T_s$$

$$= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax & ey & iz & 1 \end{bmatrix}$$

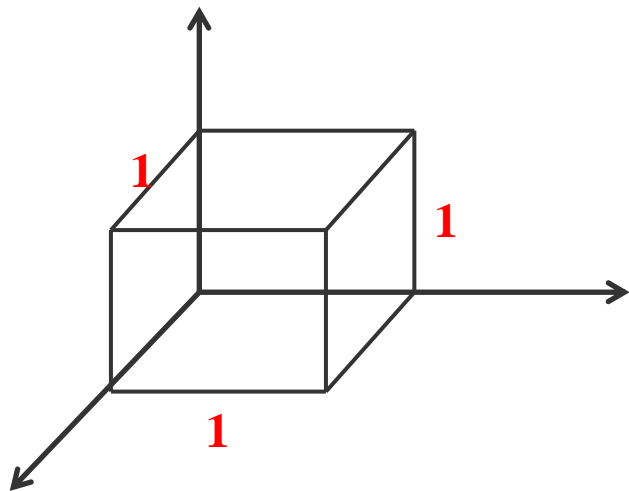
对下图所示的长方形体进行比例变换，其中：

$a=1/2$ ， $e=1/3$ ， $i=1/2$ ，求变换后的长方形体各点坐标



将其写为矩阵计算形式如下：

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



(2) 整体比例变换

整体比例变换，可用以下矩阵表示：

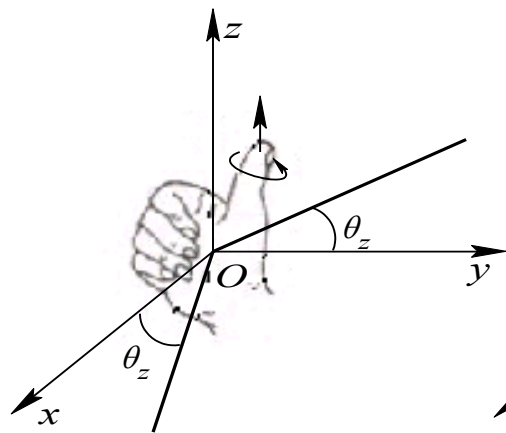
$$\begin{aligned}[x' \quad y' \quad z' \quad 1] &= [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot T_s \\ &= [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \\ &= [x \quad y \quad z \quad s] = \begin{bmatrix} \frac{x}{s} & \frac{y}{s} & \frac{z}{s} & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3、旋转变换

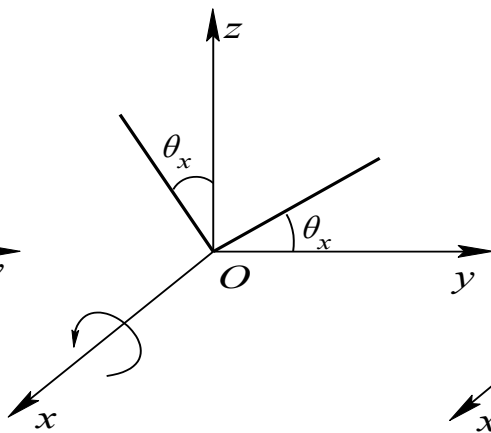
三维立体的旋转变换是指给定的三维立体绕三维空间某个指定的坐标轴旋转 θ 角度

旋转后，立体的空间位置将发生变化，但形状不变

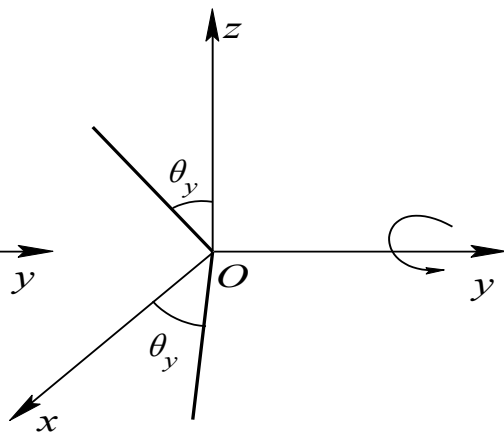
θ 角的正负按右手规则确定，右手大姆指指向旋转轴的正向，其余四个手指指向旋转角的正向



(a)



(b)



(c)

(a) 绕 z 轴正向旋转； (b) 绕 x 轴正旋转； (c) 绕 y 轴正向旋转

(1) 绕z轴旋转 θ

三维空间立体绕z轴正向旋转时，立体上各顶点的x, y坐标改变，而z坐标不变。而x, y坐标可由二维点绕原点旋转公式得到，因此可得：

$$x^* = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y^* = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot T_{Rz}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta & x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta & z & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 绕x轴旋转

同理，三维点p绕x轴正向旋转 θ 角的矩阵计算形式为：

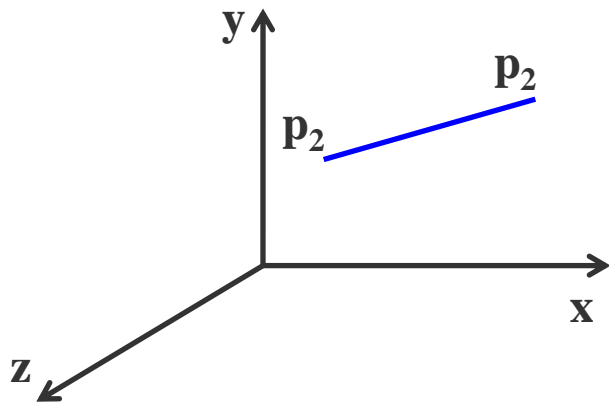
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot T_{Rx} \\ &= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \cdot \cos \theta - z \cdot \sin \theta & y \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) 绕y轴旋转

三维点p绕y轴正向旋转 θ 角的矩阵计算形式为：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot T_{Ry} \\ &= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \cdot \sin \theta + x \cdot \cos \theta & y & z \cdot \cos \theta - x \cdot \sin \theta & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) 绕任意轴旋转



求绕任意直线旋转矩阵的原则：

- ① 任意变换的问题——基本几何变换的问题
- ② 绕任意直线旋转的问题——绕坐标轴旋转的问题

4、对称变换

对称变换有关于坐标平面、坐标轴等的对称变换。

(1) 关于坐标平面的对称

关于xoy平面进行对称变换

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & -z & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Fxy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y & -z & 1 \end{bmatrix}$$

关于yoz平面进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fyz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot T_{Fyz} = \begin{bmatrix} -x & y & z & 1 \end{bmatrix}$$

关于zox平面进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fzx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot T_{Fzx} = \begin{bmatrix} x & -y & z & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 关于坐标轴对称

关于x轴进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y & -z & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Fx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于y轴进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & y & -z & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Fy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于z轴进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -y & z & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Fz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$