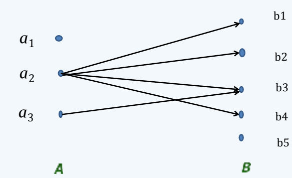
集合论

- ❖**基本概念**
  - ➢集合、子集、集合运算
  - ➢有序n元组与笛卡尔积、多重集
- ❖**关系**
  - ➢概念、性质、运算、闭包
  - ➢等价关系与集合划分
  - ➢偏序关系与偏序集
  - ➢**函数、函数运算**
- ❖**无限集**
  - ➢势、可数集

§7 函数

❖关系概念的回顾：当$R \subseteq A \times B$时，称R为**A到B的关系**，当$R \subseteq A \times A$时，称R为**A上的关系**。



§7 函数

❖定义1　设f是集合A到B的关系，如果对于任意$x \in A$，

都存在唯一的$y \in B$使$\langle x, y\rangle \in f$，

则称f为**A到B的函数**，记为$f : A \to B$，或 $f : x \mapsto y$ ，或 $f(x) = y$

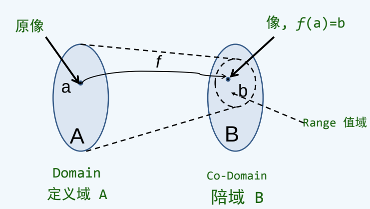
（f是A到B的函数 ）

y 称为 f 在 x 点的**值**，也称y为x在f下的**象**image．

称 x 为 y 在 f 下的**原象**Preimage．

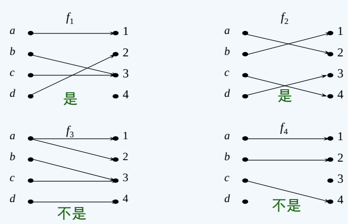
特殊情况：A到A的函数，也称为**A上的函数**．

函数



f: A → B

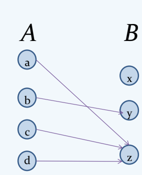
函数



函数

回答问题

f(a) = ?	z
d的像是?	z
f 定义域？	A
f 的陪域？	B
y 的原像？	b
$f(A)$ = ?	{y,z} ⊆B
z 的原像是?	{a,c,d}



函数

例1: A = {a, b, c}, B = {0, 1},
求解:
1. A × B=?
2. p(A × B)=?
3. 集合A到B有多少种不同的函数?

解: 1. A × B = {<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>, <a, 1>, <b, 1>, <c, 1>};

函数

A × B = {<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>, <a, 1>, <b, 1>, <c, 1>};

p(A × B)={∅, C(6,0)=1

{<a, 0)}, {<b, 0>}, {<c, 0>}, {<a, 1>}, {<b, 1>}, {<c, 1>}, c<6,1>=6

{<a, 0>, <b, 0>}, {<a, 0>, <c, 0>}, {<a, 0>, <a, 1>}, {<a, 0>, <b, 1>}, {<a, 0>, <c, 1>},… c<6,2>=15

{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>}, {<a, 0>, <b, 0>, <a, 1>}, {<a, 0>, <b, 0>, <b, 1>},… c<6,3>=20

{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0> ,<a, 1>}, {<a, 0>, <b, 0>, <c, 0> ,<b, 1>} … c<6,4>=15

{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0> ,<a, 1>, <b, 1> }, {<a, 0>, <b, 0>, <c, 0> ,<a, 1>, <c, 1> }, … c<6,5>=6

{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>, <a, 1>, <b, 1>, <c, 1>} ,… } c<6,6>=1

函数

f1 = {<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>};
f2 = {<a, 0>, <b, 0>, <c, 1>};
f3 = {<a, 0>, <b, 1>, <c, 0>};
f4 = {<a, 0>, <b, 1>, <c, 1>};
f5 = {<a, 1>, <b, 0>, <c, 0>};
f6 = {<a, 1>, <b, 0>, <c, 1>};
f7 = {<a, 1>, <b, 1>, <c, 0>};
f8 = {<a, 1>, <b, 1>, <c, 1>}

$|p(A\times B)|=2^6(64)$
函数有:$2^3=8$种
即 $B^A=\{f_1,f_2,f_3,f_4, f_5,f_6,f_7,f_8\} \subseteq p(A\times B)$
为什么表示为B^A? 不是A^B
$|B|*|B|*|B|\ldots|B|=|B|^{|A|}$

$\forall f_i \subseteq p(A \times B)$ ×

$\forall f_i \in p(A \times B)$ √

函数

例2 设R是实数集合，R^+是非负实数集合．令

$f_1 = \{ \langle x, x^2\rangle \mid x\in R \}$

$f_2 = \{ \langle x^2, x\rangle \mid x\in R \}$

则f_1是R到R^+的函数，f_2不是R^+到R的函数．

函数

定义 设A为一集合，令 $I_A : A\to A$

$I_A : a \mapsto a \quad ,\forall a\in A$

I_A称为A上的**恒等函数**，它就是A上的恒等关系

函数

定义 ：设A，B是两个集合．令

P_1： $\langle a, b\rangle \mapsto a$, $\forall \langle a, b\rangle\in A\times B$

P_2： $\langle a, b\rangle \mapsto b$, $\forall \langle a, b\rangle\in A\times B$

P_1，P_2分别称为从$A\times B$到A，B的**投影**函数

函数

定义：设R是集合A上的等价关系，令

$$\varphi : a \mapsto [a]_R,\ a \in A$$

则φ是A到A/R的函数，称为A到A/R的**自然映射**

函数

- 如果$A_1 \subseteq A$，A_1中所有点的象构成的集合称为**A_1在f下的象**，记为$f(A_1)$，

  即$f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$
- 如果$B_1 \subseteq B$，B_1中元素的所有原象构成的集合称为**B_1的完全原象**，简称原象 Preimage ，

  记为$f^{-1}(B_1)$，即$f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A, f(x) \in B_1\}$

  $f^{-1}(\{b\})$可简记为$f^{-1}(b)$。
- 若$f: A \to B$，则$f(A)$即为f的**值域**Range。

函数

例3 设R是实数集，令$f: R \to R$

$$f(x) = x^2,\ x \in R$$

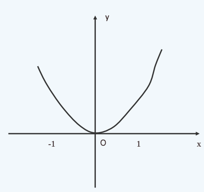
则$f([0,2]) = [0,4]$

$f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$

$f^{-1}([-1,4]) = [-2,2]$

$f^{-1}([-2,-1]) = \varnothing$

$f^{-1}(1) = \{-1,1\}$



函数

例4 设f是Z到Z_m的自然映射，其中Z是整数集， Z_m是模m剩余类

即$f(i) = [i] = \{km+i \mid k \in Z\}$ 如$[i]_5 = \{1, 6, 11\ldots\}$

则 $f(\{0, 1\}) = \{[0], [1]\}$

$f(\{0, n, n+1\}) = \{[0], [1]\}$

$f^{-1}([0]) = \{km \mid k \in Z\}$

$f^{-1}(\{[0], [1]\}) = \{km+i \mid k \in Z, i \in \{0, 1\}\}$

函数

- 定义2 设A，B为两个集合，

  $A_1 \subseteq A$，$f: A \to B$，$g: A_1 \to B$，

  且 $g(x) = f(x)$，$x \in A_1$，即

  $$g = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A_1, y = f(x)\}$$

  称g为f在A_1上的**限制**，并将g记为$f|_{A_1}$，也称f为g在A上的**扩张**。
- f在A_1上的限制常常仍用f表示

函数

- 定义3 设$f: A \to B$，如果$\forall x, y \in A$，当$x \neq y$时，必有$f(x) \neq f(y)$，

  则称f为A到B的**单射（入射 Injections，一对一的 one-to-one）**
- 显然，$f: A \to B$是单射的充要条件为:

  $$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

f：A→B是单射的充要条件为：

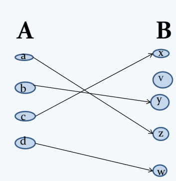
不同的原像 preimage有不同的像 image 。

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

或者

相同的像有相同的原像。

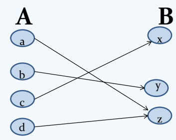
$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$



函数

❖ 定义4　设$f:A\to B$，若$\mathrm{ran}f=B$，

则称f为A到B的**满射**Surjections、**或 映上的**onto．



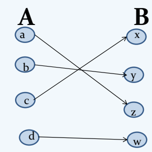
❖ $f:A\to B$是满射的充要条件是

$\forall y\in B$，$\exists x\in A$，使$f(x)=y$

函数

❖ 定义5　设$f:A\to B$，若f 既为单射，又为满射，则称f为A到B的**双射**

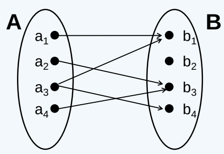
（bijection）（**一一对应** one-to-one correspondence）



函数

回答问题？

是函数吗？为什么？



不是, 因为 a_3 有两个像

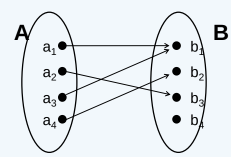
函数

回答问题？

是函数吗？

是 One-to-one (injective)? 为什么?

是Onto (surjective)? 为什么?



No, b_1 has 2 preimages

No, b_4 has no preimage

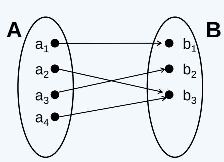
函数

回答问题？

是函数吗？

是One-to-one (injective)? Why?

是Onto (surjective)? Why?



No, b_3 has 2 preimages

Yes, every b_i has a preimage

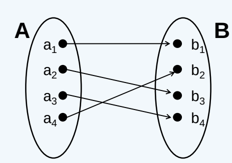
函数

回答问题？

是函数吗？

是One-to-one (injective)?

是Onto (surjective)?



是双射函数，一一映射，一一对应

函数

回答问题？

如 $f:Z\to Z$，定义为：$f(x)=2x-3$

函数f的domain, codomain, range?

是one-to-one (injective)?

是onto (surjective)?

定义域dom(f)=Z. 而函数的值域是？

b∈ rng(f)　b=2a-3, 其中 a∈ Z
b=2(a-2)+1
b 是奇数

函数

f的值域是奇整数，所以函数不是满射函数。

但函数是单射函数

因为　$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1-3=2x_2-3\Rightarrow x_1=x_2$

或　$x_1\neq x_2\Rightarrow 2x_1-3\neq 2x_2-3\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

函数例题

例题1 假设N是自然数集，F是N到N×N的函数：f(n)=(n, n+1)。证明该函数是单射的,但不是满射的。

例题2 假设R为实数集，f:R×R→R,f(x,y)=x+y,又 g:R×R→R, g(x,y)=x × y。

证明 f和g都是满射的，而不是单射的。

函数

例题3 假设R为实数集，
f:R×R→R×R,f(x,y)=((x+y)/2,(x-y)/2)
证明 f——对应（双射的）。

例题4 设A，B，C，D集合， f是A到B的双射， g是C到D的双射,令 h:A×C→B×D且∀<a,c>∈A×C
h(<a,c>)=<f(a),g(c)>
证明 h是双射。

函数例题

例题5 设 f:X→Y, 集合A,B∈P(X)(幂集 power set),
则（1）f(A∪B) = f(A)∪f(B)；（2）f(A∩B)⊆f(A)∩f(B)。

证明 (1) 设y∈f(A∪B), 则存在x∈A∪B, 使f(x)=y
　即 x∈A∨x∈B 时有 y=f(x)。
　故 f(x)∈f(A)∨f(x)∈f(B),
　因此 y∈f(A)∪f(B), 于是 f(A∪B)⊆f(A)∪f(B)

反之, 设y∈f(A)∪f(B), 则有y∈f(A)或y∈f(B) 于是, 在A与B两集合中, 至少有一个集合里有一个x使f(x)=y, 即 x∈A∪B 。

从而 y=f(x)∈f(A∪B), 于是 f(A)∪f(B)⊆f(A∪B)

所以f(A∪B)=f(A)∪f(B)。

同样可证明 (2)

§8 复合函数与逆函数

❖定义1　设$f:A\to B$，$g:B\to C$，集合

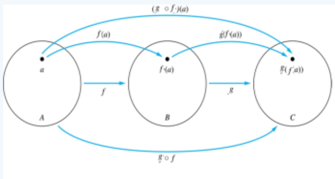
$\{<a,c>\mid a\in A, c\in C, \exists b\in B, b=f(a), c=g(b)\}$

称为函数g对f的(左)**复合函数**，记为$g\circ f$.

$g\circ f(a)=g(f(a))=g(b)=c$

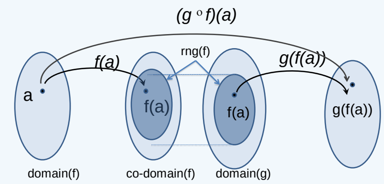
复合函数与逆函数

❖f: $A \to B$, g: $B \to C$　　$g\circ f(x)=g(f(x))$



$\forall a\exists b\exists c(g(b) = c, f(a) = b \to g \circ f(a) = c)$

§8　复合函数与逆函数



复合函数与逆函数

❖定理1　设f : $A\to B$，g : $B\to C$，则

$g\circ f$: $A\to C$，且$(g\circ f)(a) = g(f(a))$.

❖证明：1）$g\circ f$是一个函数

2）$g\circ f$的计算。

复合函数与逆函数

❖例3　设I_A是集合A上的恒等映射，f是A上的任意函数，则

$$(I_A\circ f)(x) = I_A(f(x)) = f(x)$$

$$(f\circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$$

即　$I_A\circ f = f\circ I_A = f$

复合函数与逆函数

❖定理2　设f : $A\to B$，g : $B\to C$，h : $C\to D$, 则 $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

❖证明　由关系的复合满足结合律知：

$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

另证 $\forall a\in A$, 根据合成函数的定义, 有

$(h\circ g)\circ f(a) = (h\circ g)(f(a)) = h\circ g(f(a)) = h\circ(g(f(a)))$

$= h\circ(g\circ f)(a)$

由a得任意性可得 $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

复合函数与逆函数

❖定理3　设f : $A\to B$，g : $B\to C$则

(1) 若f，g是满射，则$g\circ f$是满射.

(2) 若f，g是单射，则$g\circ f$是单射.

(3) 若f，g是双射，则$g\circ f$是双射.

复合函数与逆函数

❖定理3　设$f: A\to B$，$g: B\to C$则

(1) 若f，g是满射，则$g\circ f$是满射.

证明：(1)任取$c\in C$，因为g是满射，必存在某一$b\in B$，

使得$g(b) = c$ 又因为f也是满射，

必存在某一$a\in A$，使得$f(a) = b$。

因此任取$c\in C$，存在某一$a\in A$，

使 $(g\circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$，所以$g\circ f$是满射。

复合函数与逆函数

❖定理3　设$f: A\to B$，$g: B\to C$则

(2) 若f，g是单射，则$g\circ f$是单射.

证明 (2) 因为f是单射，任意的a_i，$a_j\in A$，

当$a_i \neq a_j$，有$f(a_i) \neq f(a_j)$。

又因为g也是单射，当$f(a_i) \neq f(a_j)$时，$g(f(a_i)) \neq g(f(a_j))$。

即当$a_i \neq a_j$，$g\circ f(a_i) \neq g\circ f(a_j)$，所以$g\circ f$是单射。

复合函数与逆函数

❖定理3　设$f: A\to B$，$g: B\to C$则

(3) 若f，g是双射，则$g\circ f$是双射.

综合（1）（2）是双射。

例题 设$f: A\to B$，$g: B\to C$则

(1) 如果 $g\circ f$ 是单射，则f是单射；

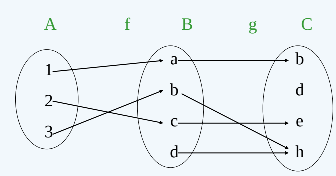
(2) 如果 $g\circ f$ 是满射，则g是满射；

(3) 如果 $g\circ f$ 是双射，则f是单射而g是满射。

复合函数与逆函数

例题 设$f: A\to B$，$g: B\to C$则

(1) 如果 $g\circ f$ 是单射，则f是单射；



复合函数与逆函数

例题 设$f: A\to B$，$g: B\to C$则

(1) 如果 $g\circ f$ 是单射，则 f 是单射；

证明 (1) 因为 $g\circ f$ 是单射, 当 $a_i \neq a_j$, 有$g\circ f(a_i)\neq g\circ f(a_j)$

即 $g(f(a_i)) \neq g(f(a_j))$。

反证 假设f 不是单射,

有 $f(a_i) = f(a_j) = b$,

则对同一变量b，g却有两个不同值$g(f(a_i))$和 $g(f(a_j))$。

这与g为函数矛盾。

从而必有 $f(a_i) \neq f(a_j)$, f 是单射的。

复合函数与逆函数

例题 设$f: A\to B$，$g: B\to C$则

(2) 如果 $g\circ f$ 是满射，则 g 是满射；

证明 由于$g\circ f$ 是满射, 任取$c\in C$, 必存在某一$a\in A$,

使$g\circ f(a) = g(f(a)) = c$。

即任取$c\in C$, 有$b\in B$, 使$g(b) = c$且$b = f(a)$。

于是Rng G = C, 即g是满射的。

综合（1）（2）可证明（3）。

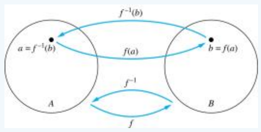
复合函数与逆函数

❖ 函数的**逆**（逆函数）

❖ 设$f: A \to B$，f作为一种特殊的关系，f^{-1}是B到A的关系，满足：

$$\langle y, x\rangle \in f^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in f$$

f^{-1}是否是B到A的函数？



复合函数与逆函数

❖定义2 设$f: A \to B$，如果f^{-1}为B到A的函数，则称f**为可逆**的，且称f^{-1}为f的**逆函数**(反函数).

❖定理4 设$f: A \to B$，则f可逆$\Leftrightarrow f$为双射

证明 $\forall a \in A$, 必存在$b \in B$，使得$f(a) = b$。

由逆函数f^{-1}的定义, $f^{-1}(b) = a$, 即$a \in f^{-1}(B)$。

由a的任意性, 可知f^{-1}是一个满射。

设$b_1, b_2 \in B$，且$b_1 \neq b_2$，由双射函数f 的定义，在A中必有两个元素$a_1 \neq a_2$，

使得$f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$。

于是$f^{-1}(b_1) = a_1$, $f^{-1}(b_2) = a_2$,

并且$f^{-1}(b_1) \neq f^{-1}(b_2)$, f^{-1}是一个单射。

所以f^{-1}是一个双射。

复合函数与逆函数

❖定理 5 设$f: A \to B$可逆，则$f^{-1}: B \to A$必可逆.

❖推论 若$f: A \to B$为双射，则$f^{-1}: B \to A$也必为双射.

复合函数与逆函数

❖定理 6 设$f: A \to B$可逆（双射），则

$$f^{-1} \circ f = I_A, \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

证明：由合成函数的定义，$f^{-1} \circ f$是一个从A到A的函数。

$\forall a \in A$，设$f(a) = b$，则$f^{-1}(b) = a$，

于是 $f^{-1} \circ f(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$，

由a的任意性，因此得 $f^{-1} \circ f = I_A$。

同样 对$\forall b \in B$，$f \circ f^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$，

由b的任意性，因此得 $f \circ f^{-1} = I_B$。

复合函数与逆函数

❖定理 7 设$f: A \to B$，$g: B \to C$均可逆（双射），则$(g \circ f)$可逆，

且$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

证明 因为f和g都可逆，所以有$f^{-1}: B \to A$，$g^{-1}: C \to B$，因而有合成函数$f^{-1} \circ g^{-1}: C \to A$。

又因为f和g都是双射，由定理$g \circ f$也是双射$(A \to C)$，存在逆函数$(g \circ f)^{-1}: C \to A$。

1、$\forall c \in C$，设$g^{-1}(c) = b$，$f^{-1}(b) = a$，

则$f^{-1} \circ g^{-1}(c) = f^{-1}(b) = a$ ----（1）

2、$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$，即$(g \circ f)^{-1}(c) = a$，----（2）

所以由（1）（2）式可得$f^{-1} \circ g^{-1}(c) = (g \circ f)^{-1}(c)$。

由c的任意性，$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。

❖ 定理表明：合成函数的逆函数能够用相反次序的逆函数的合成来表示。

复合函数与逆函数

例题 设$f: X \to Y$, A, $B \in P(Y)$(Power Set), 则

(1) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

(2) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$。

证明 (1) 设$x \in f^{-1}(A \cap B)$, 则$f(x) \in A \cap B$,

即$f(x) \in A$且$f(x) \in B$, 因此$x \in f^{-1}(A)$且$x \in f^{-1}(B)$,

所以$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, 。

反之,设$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

则$x \in f^{-1}(A)$且$x \in f^{-1}(B)$，

即$f(x) \in A$且$f(x) \in B$, 因此$f(x) \in A \cap B$,

所以$x \in f^{-1}(A \cap B)$。

故得证$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$。

类似，可以证明(2)。

作业

❖ 作业：

❖ 习题七　2、

❖ 习题八　2、4

∀∃∅∩∪⊆⊂⊄∉∀∈≤≥…ℵ∑⎨⎬≡±°∞
αβσρυωζψηδεφλμπΔθ±∏∧∨∀ }∴√⊃
≌≈∽∞⊇∩∪℃‰≥≤∵∏∈∑≮≯½¼§¥{}?±
↔∨∧¬→←⇒⇔↓↑Λ⊕≠⊙— 〈〉
☆★▿≮≯⌒∵∴∪∩≠–— 〃
// ∴∵∷⊥↘↗↙↖√
〔⌈–⌋ ÷×√·º·‹2, b›⏟⏞Φ