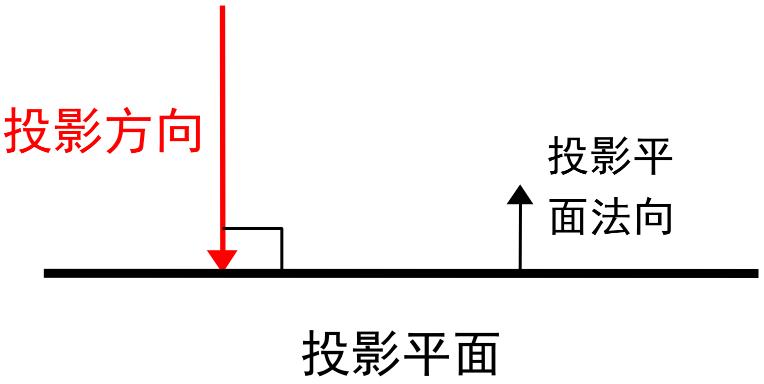
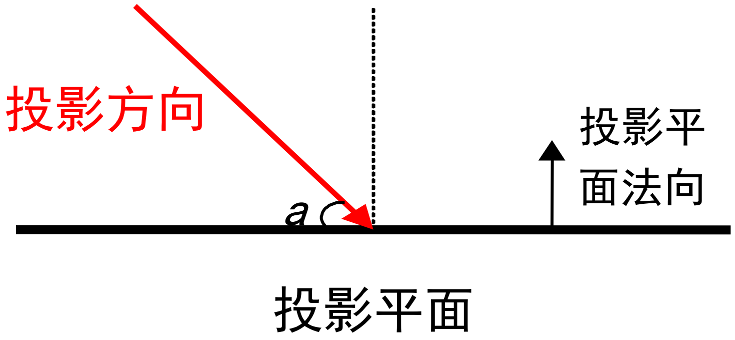
二、平行投影

平行投影可根据投影方向与投影面的夹角分成两类：**正投影**和**斜投影**。



(a) 正投影

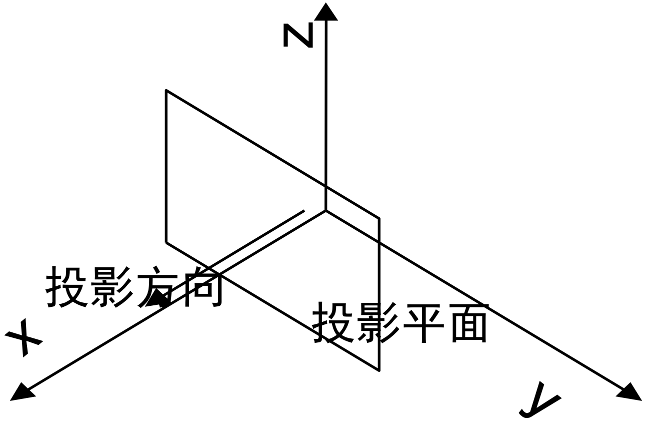


(b) 斜投影

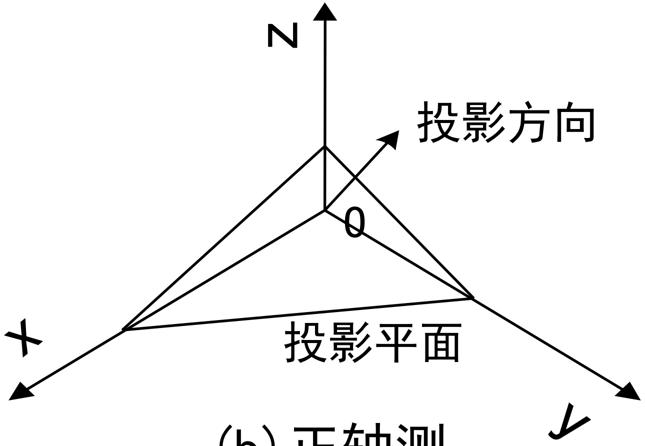
1、正投影

正投影根据投影面与坐标轴的夹角又可分为两类：三视图和正轴侧图

当投影面与某一坐标轴垂直时，得到的投影为三视图，这时投影方向与这个坐标轴的方向一致；否则，得到的投影为正轴侧图



(a)三视图

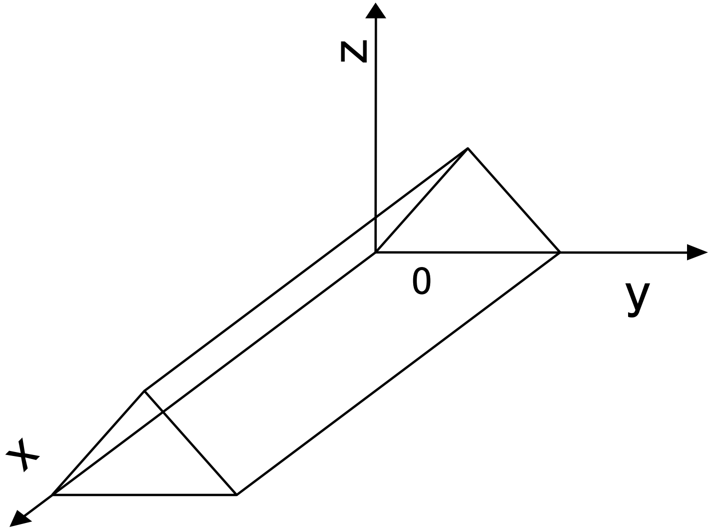


(b)正轴测

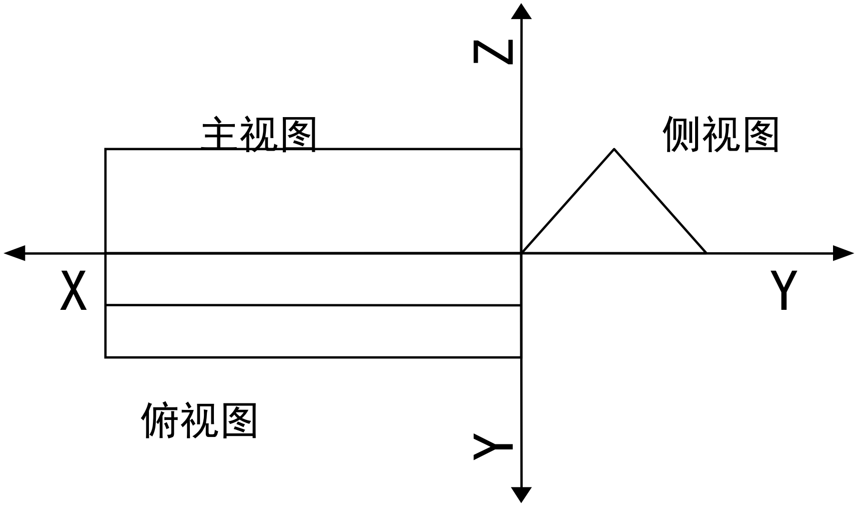
正投影

2、三视图

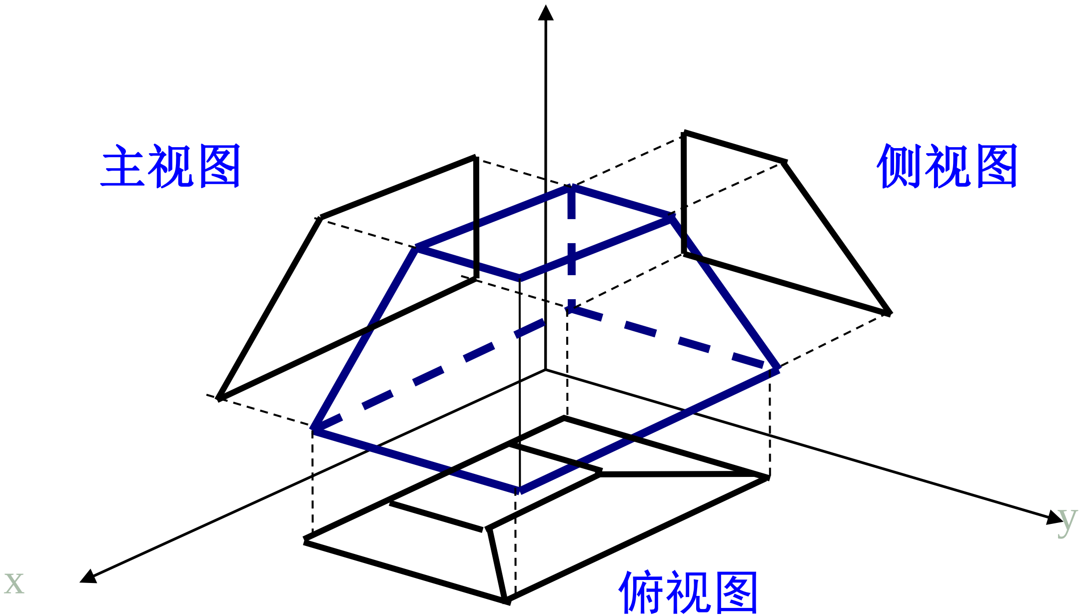
通常所说的三视图包括主视图、侧视图和俯视图三种，投影面分别与x轴、y轴和z轴垂直



三维形体



三视图



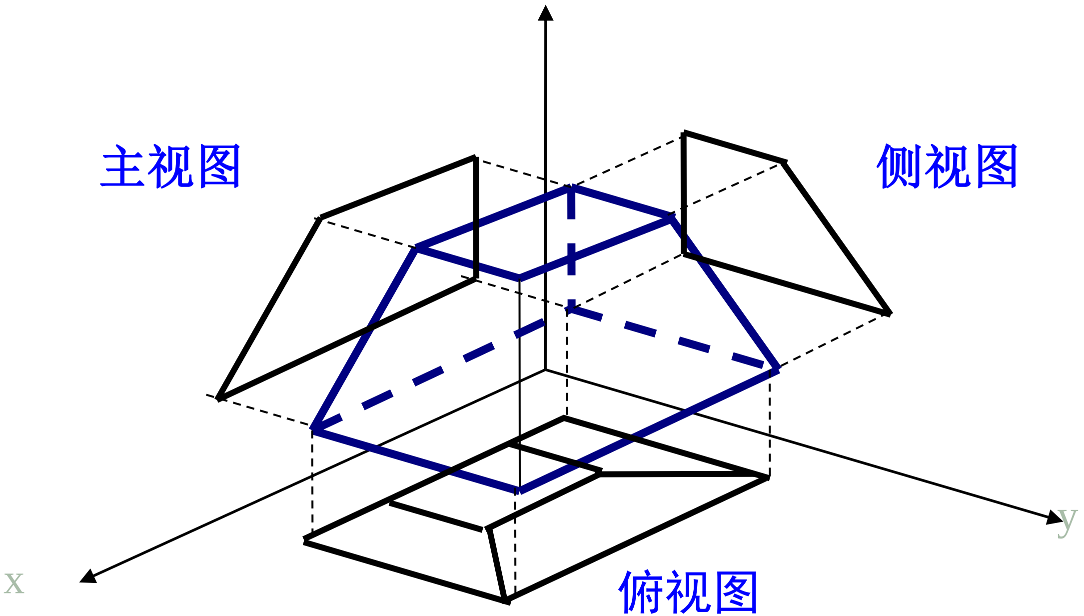
一个直角棱台的三视图

三视图的特点是物体的一个坐标面平行于投影面，其投影能反映形体的实际尺寸。工程制图中常用三视图来测量形体间的距离、角度以及相互位置关系

不足之处是一种三视图上只有物体一个面的投影，所以三视图难以形象地表示出形体的三维性质，只有将主、侧、俯三个视图放在一起，才能综合出物体的空间形状

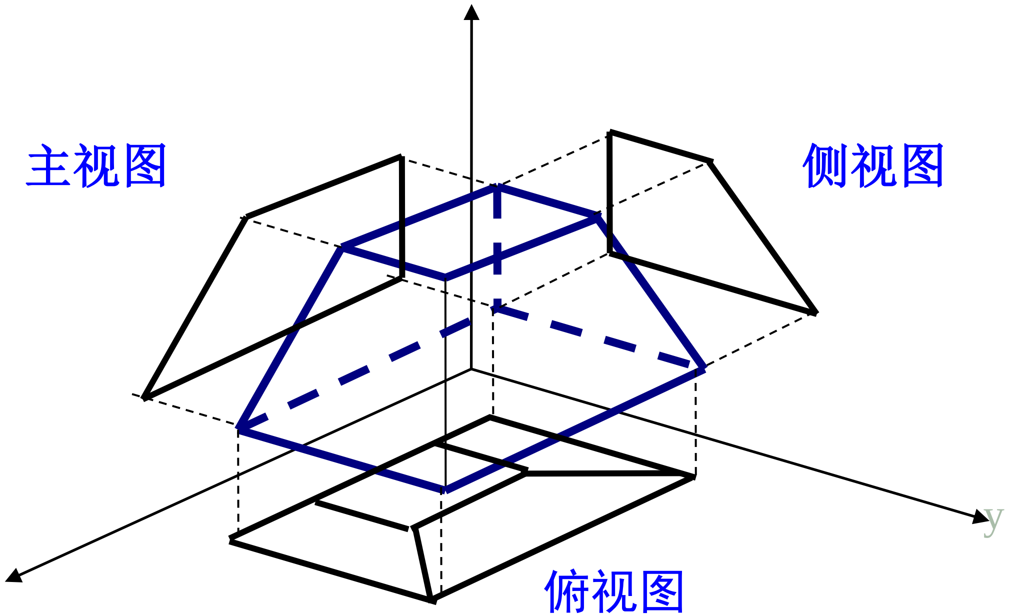
（1）三视图的计算

主视图、俯视图和侧视图是分别将三维物体对正面、水平面和侧面作正平行投影而得到的三个基本视图



一个直角棱台的三视图

显然，只要求得这种正平行投影的变换矩阵，就可以得到三维物体上任意点经变换后的相应点，有这些变换后的点即可绘出三维物体投影后的三视图



一个直角棱台的三视图

具体计算步骤如下：

a、确定三维物体上各点的位置坐标；

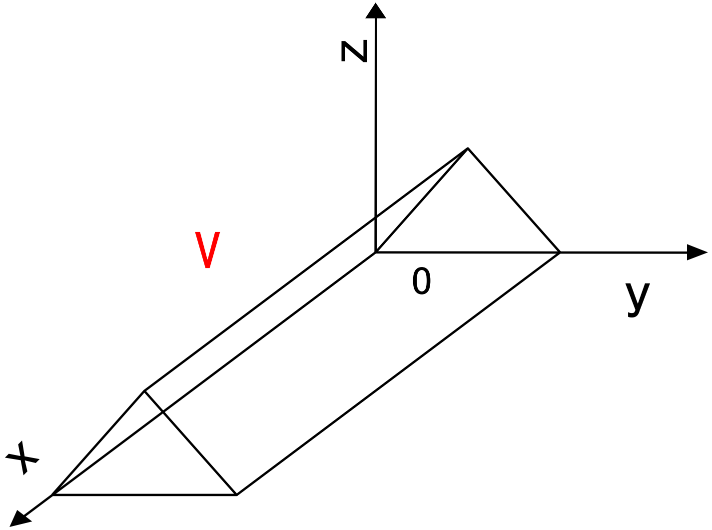
b、引入齐次坐标，求出所作变换相应的变换矩阵；

c、将所作变换用矩阵表示，通过运算求得三维物体上各点经变换后的点坐标值；

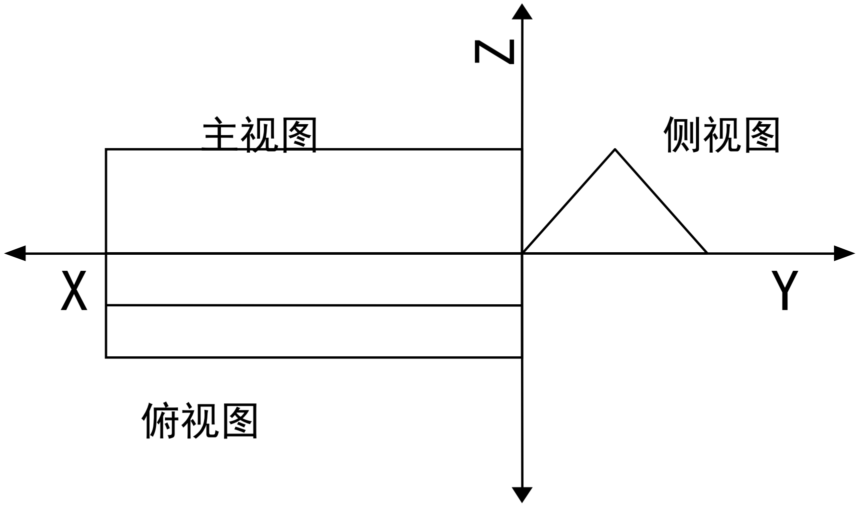
d、由变换后得到的二维点绘出三维物体投影后的三视图

（2）主视图

将三维物体x0z面（又称V面）作垂直投影，得到主视图



三维形体



三视图

由投影变换前后三维物体上点到主视图上点的关系，此投影变换的变换矩阵应为：

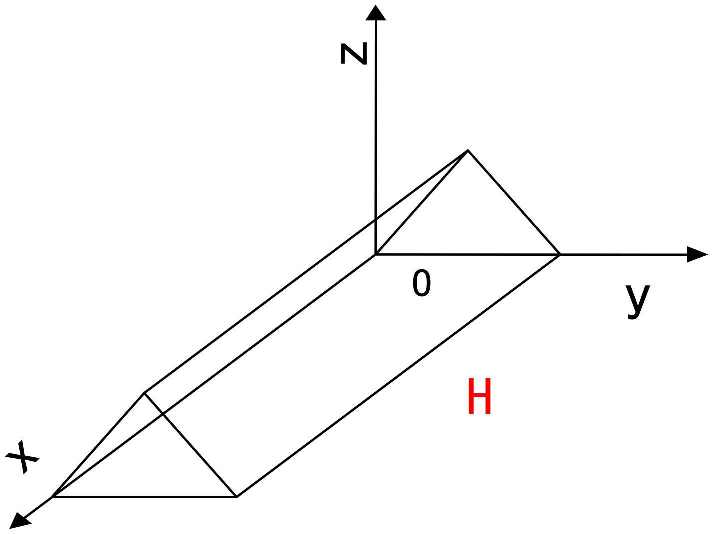
$$T_v = T_{xOz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通常称T_V为主视图的投影变换矩阵。于是，由三维物体到主视图的投影变换矩阵表示为：

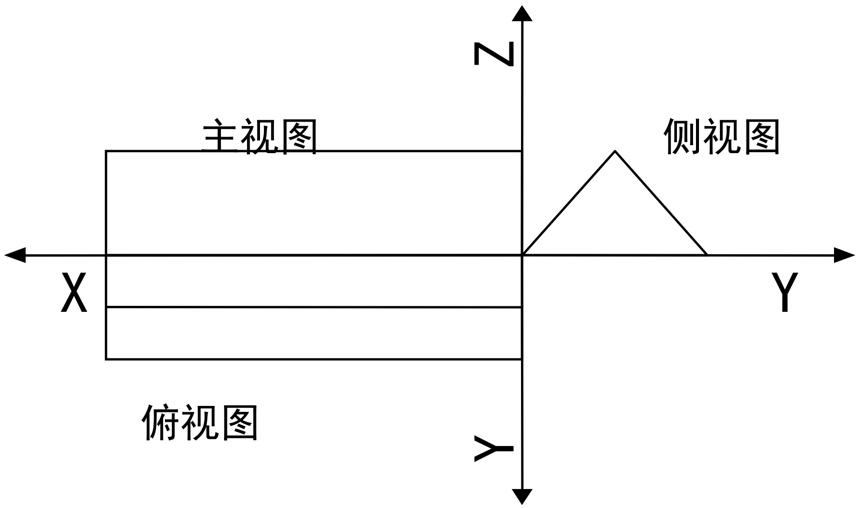
$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot T_V = \begin{bmatrix} x & 0 & z & 1 \end{bmatrix}$$

（3）俯视图

将三维物体x0y面（又称H面）作垂直投影得到俯视图



三维形体

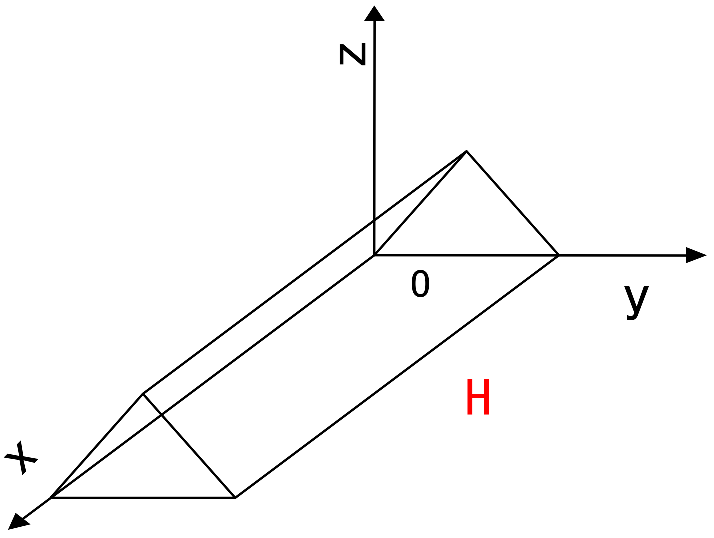


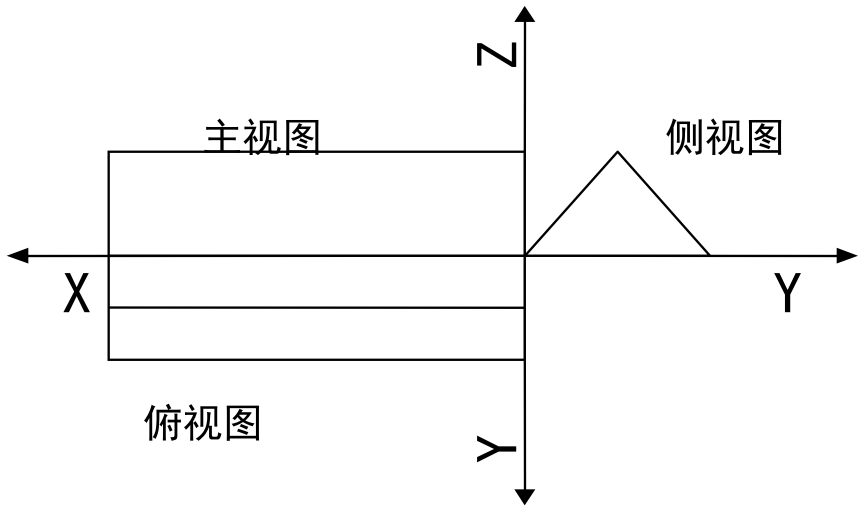
三视图

其投影变换矩阵应为：

$$T_H = T_{xOy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot T_H = \begin{bmatrix} x & y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





为了使俯视图与主视图都画在一个平面内，就要使H面绕x轴顺时针转90^0，即应有一个旋转变换，其变换矩阵为：

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(-90^0) & \sin(-90^0) & 0\\ 0 & -\sin(-90^0) & \cos(-90^0) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

为了使主视图和俯视图有一定的间距，还要使H面沿z方向平移一段距离 $-z_0$，其变换矩阵为：

$$T_{tz}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -z_0 & 1\end{bmatrix}$$

于是，俯视图的投影变换矩阵：

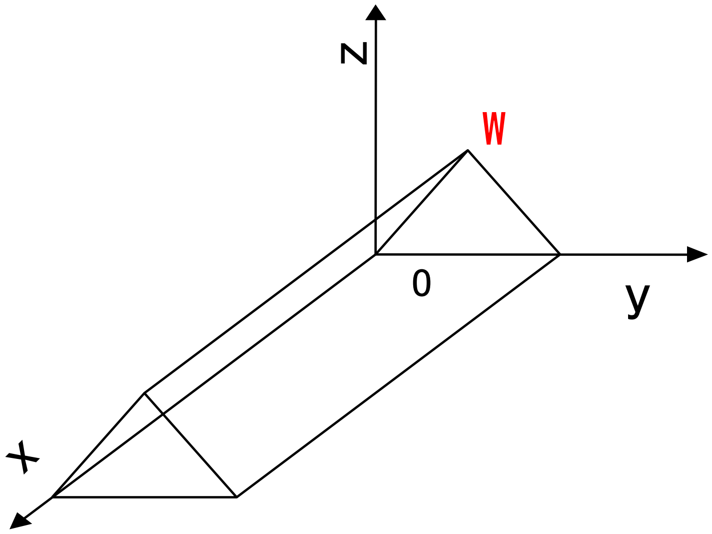
$$T_H = T_{xOy} \cdot T_{Rx} \cdot T_{tz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix}$$

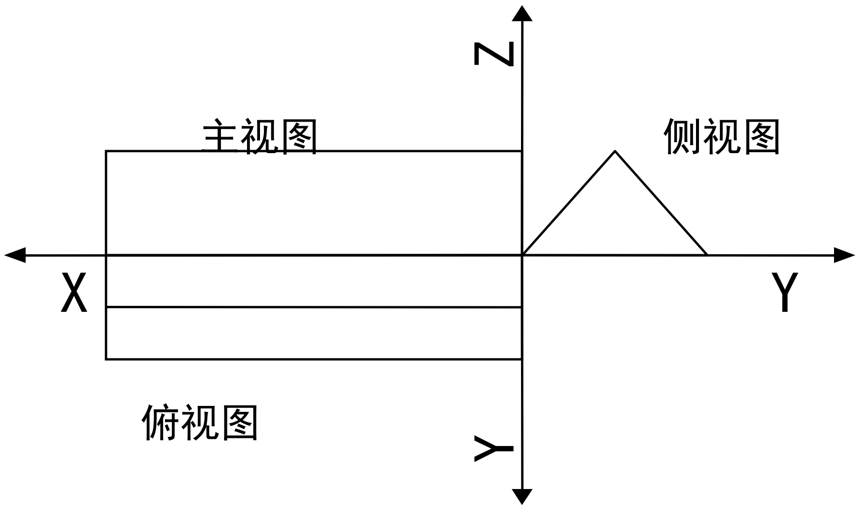
$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot T_H = \begin{bmatrix} x & 0 & -(y+z_0) & 1 \end{bmatrix}$$

（4）侧视图

将三维物体yOz面（又称W面）作垂直投影得到侧视图



三维形体



三视图

其投影变换矩阵应为：

$$T_W = T_{yOz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为了使侧视图与主视图也在一个平面内，就要使W面绕z轴正转90^0，其旋转变换换矩阵为：

$$T_{Rz}=\begin{bmatrix}\cos 90^0 & \sin 90^0 & 0 & 0\\ -\sin 90^0 & \cos 90^0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

为使主视图和侧视图有一定的间距，还要使W面沿负x方向平移一段距离$-x_0$，该平移变换矩阵为：

$$T_{tx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -x_0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

于是，侧视图的投影变换矩阵为：

$$T_W = T_{yOz} \cdot T_{Rz} \cdot T_{tx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot T_W = \begin{bmatrix} -(y + x_0) & 0 & z & 1 \end{bmatrix}$$

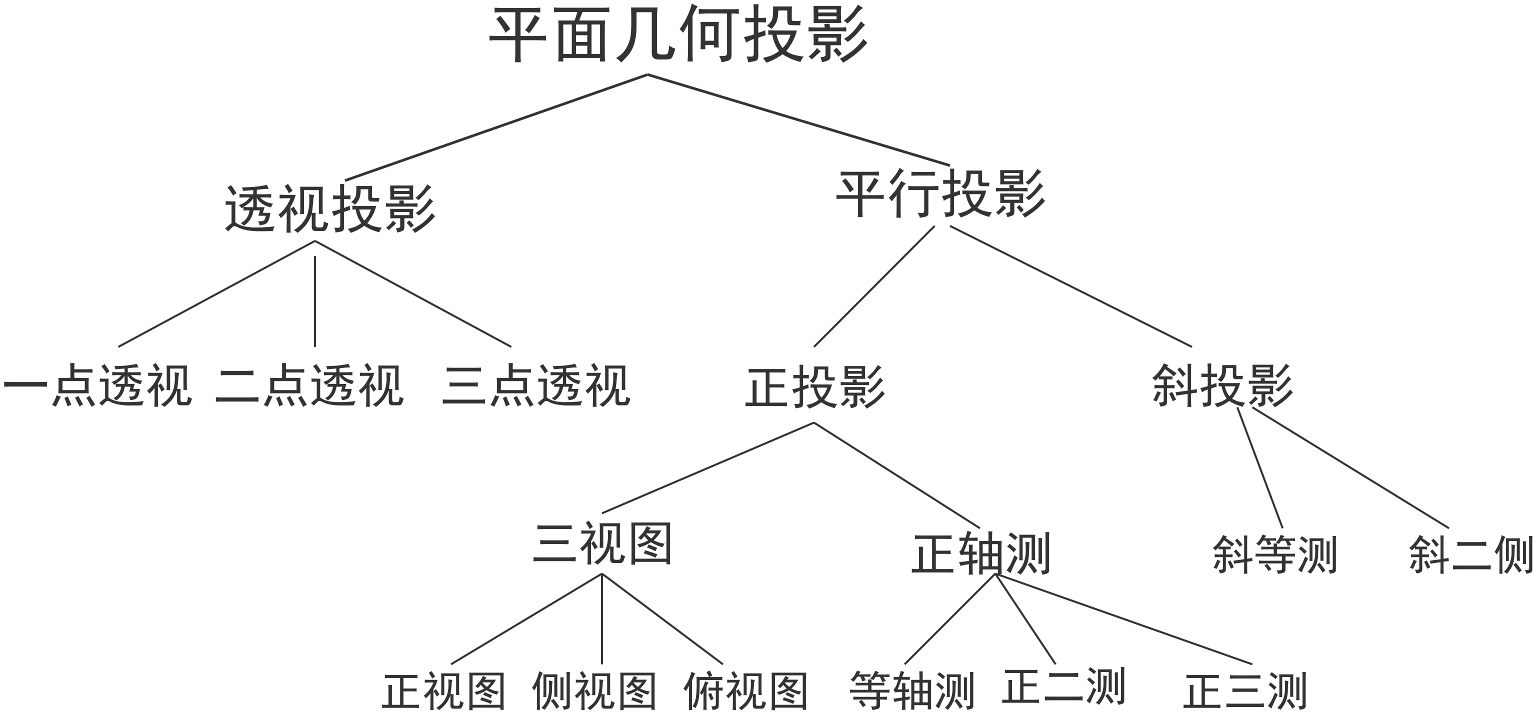
主视图：$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & z & 1 \end{bmatrix}$$

俯视图：$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & -(y+z_0) & 1 \end{bmatrix}$$

侧视图：$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(y+x_0) & 0 & z & 1 \end{bmatrix}$$

三个视图中的y’ 均为0，表明三个视图均落在x0z面上

3、正轴侧图投影变换矩阵

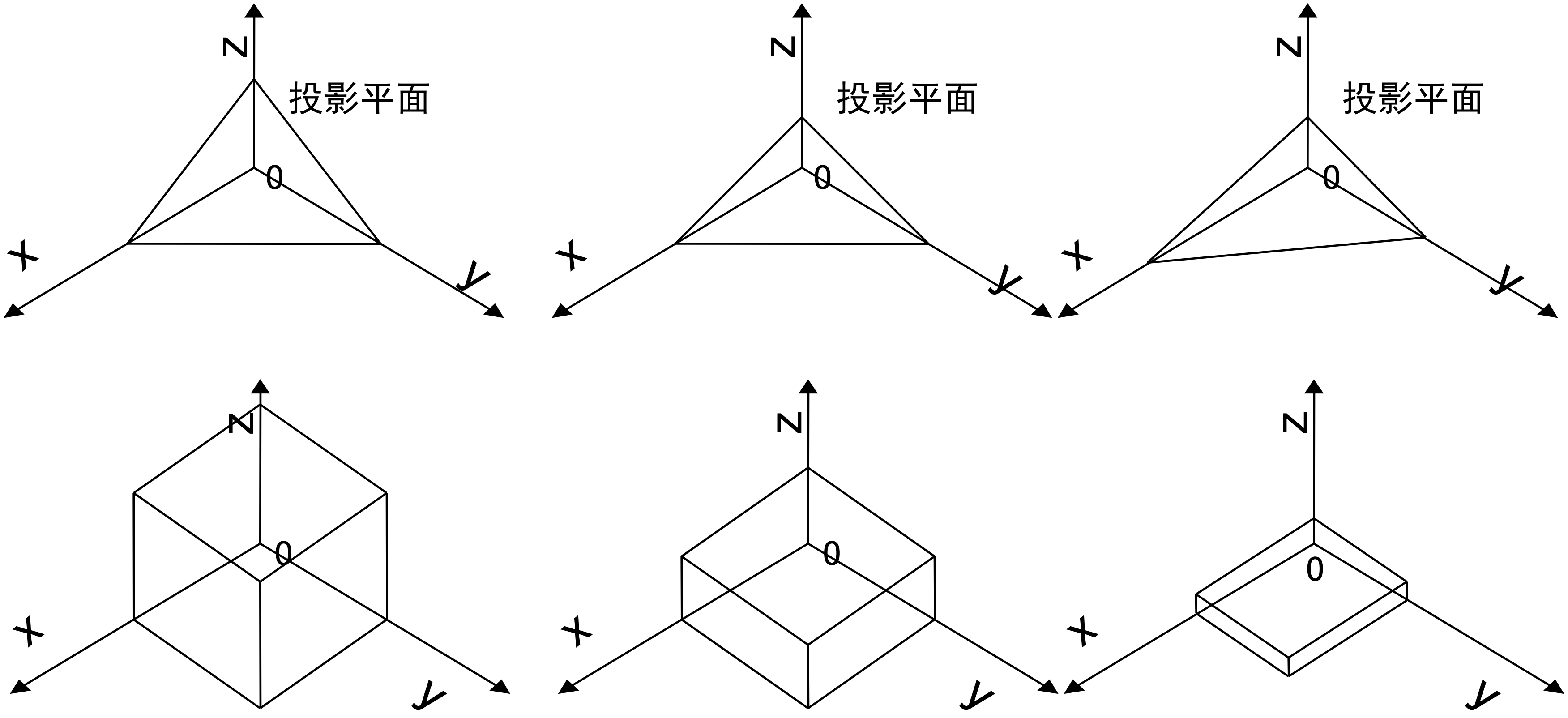


正轴测有等轴测、正二测和正三测三种：

当投影面与三个坐标轴之间的夹角都相等时为**等轴测**

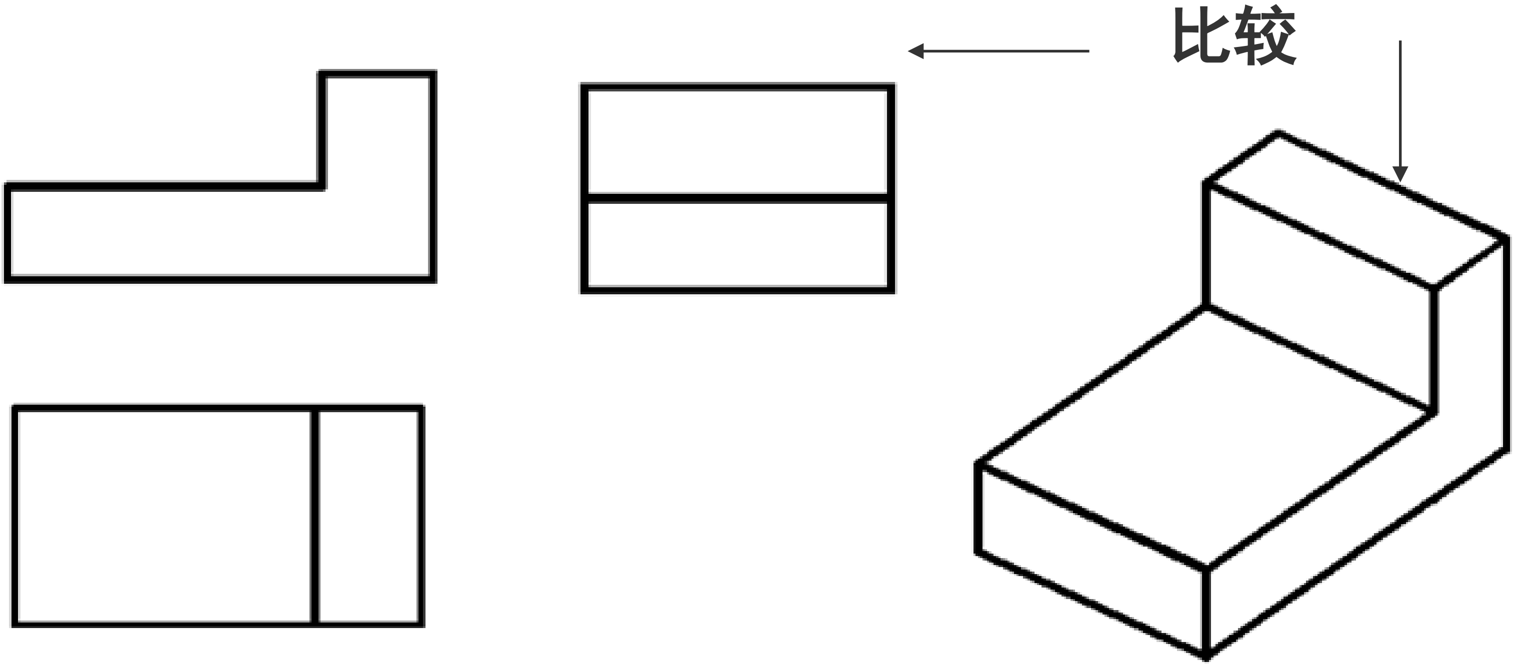
当投影面与两个坐标轴之间的夹角相等时为**正二测**

当投影面与三个坐标轴之间的夹角都不相等时为**正三测**



(a)等轴测　(b)正二测　(c)正三测

正轴测投影面及一个立方体的正轴测投影图



正投影图

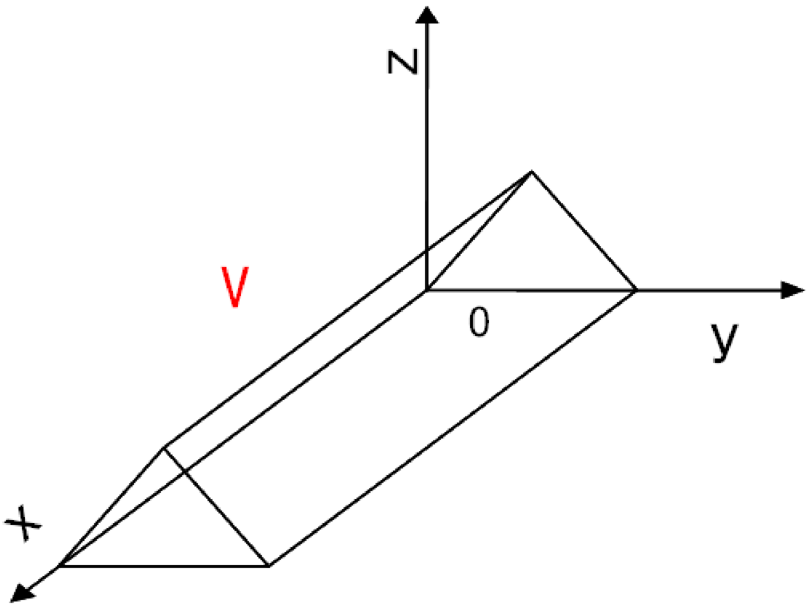
轴测图

表现力和度量性好，但直观性差

直观性好，但度量性差，辅助图样

空间物体的正轴测图是以V面为轴测投影面，先将物体绕Z轴转γ角，接着绕X轴转-α角，最后向V面投影。其变换矩阵为：

$$T_{正} = T_Z \cdot T_X \cdot T_V$$



三维形体

$$T_{正} = T_Z \cdot T_X \cdot T_V$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma\ \sin\alpha & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & -\cos\gamma\ \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{cases} x^* = x\cos\gamma - y\sin\gamma \\ y^* = 0 \\ z^* = -x\sin\gamma\sin\alpha - y\cos\gamma\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$

（1）正等轴测图的变换矩阵

根据画法几何学，作正等轴测投影时，γ=45°，α=−35.26°，将γ、α代入上式，其变换矩阵为：

$$T_{正等轴侧} = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & -0.4082 & 0 \\ -0.7071 & 0 & -0.4082 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8165 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（2）正二测图的变换矩阵

做正二测图时，γ= 20.7°，α=19.47°，其变换矩阵为：

$$T_{正二等}=\begin{bmatrix} 0.9354 & 0 & -0.1178 & 0 \\ -0.7071 & 0 & -0.3118 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9428 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$