第五章 习题一

1. S^S中有4个元素：

$f_1: a \to a,\ b \to b$

$f_2: a \to a,\ b \to a$

$f_3: a \to b,\ b \to b$

$f_4: a \to b,\ b \to a$

可验证

$f_2 \circ f_3 = f_3$

$f_3 \circ f_2 = f_2$

$f_2 \neq f_3$

∴ $\langle S^S, \circ \rangle$ 不是可交换半群.

3. 充分性.

已知 $(ab)^2 = a^2b^2$ 往证 $\langle S, \circ \rangle$ 是可交换半群

∵ $\forall a, b \in \langle S, \circ \rangle$.

有 $(ab)^2 = a^2b^2$

∴ $abab = a^2b^2$.

∵ $\langle S, \circ \rangle$ 中满足消去律

∴ $ba = ab$.

∴ $\langle S, \circ \rangle$ 中交换律成立.

必要性:

已知 $\langle S, \circ \rangle$ 可交换 往证 $a^2b^2 = (ab)^2$

∵ $ab = ba$

∴ $ab \cdot ab = (ab)^2 = aa \cdot bb = a^2b^2$

∴ $(ab)^2 = a^2b^2$

综上：二者为充分必要条件.

习题二：

2、∵ $\langle S,*\rangle$ 是一个群

∴ e $\langle S,*\rangle$ 中存在单位元

∵ $e^{-1}=e\in S$

∴ $e\in\langle S_L,*\rangle$

∵ $\forall a\in\langle S_L,*\rangle$，由 $\langle S_L,*\rangle$ 定义知

$a^{-1}\in S_L$.

∴ $\langle S_L,*\rangle$ 满足消去律

∵ $\forall a,b\in\langle S_L,*\rangle$

都有： $a^{-1}\in S$. $b^{-1}\in S$

$\Rightarrow$ $b^{-1}a^{-1}\in S$ 即 $ab\in S_L$

∴ 封闭性满足

又由结合律自然保持，得 $\langle S_L,*\rangle$ 为群.

5. $\forall a\in G$ 待证 $ab=ba$. $(a,b\in G)$

∵ $\forall a,b\in G$ 有 $a^{-1}=a$ $b^{-1}=b$

∴ $a*b=a^{-1}*b^{-1}=(b*a)^{-1}$

∵ $\forall c\in G$. $c^{-1}=c$

∴ $(b*a)^{-1}=b*a$

即 $a*b=b*a$

∴ 综上 $\langle G,*\rangle$ 为可交换群 得证

6. 若证 f 是 G 的自同构. 只需证明 1. $f(x\circ y)=f(x)*f(y)$.

2. f 为双射.

先证：$\forall x\in G$. $y\in G$

有 $f(x)=axa^{-1}$ $f(y)=aya^{-1}$

∴ $f(x)*f(y)=(axa^{-1})(aya^{-1})=a(xy)a^{-1}$

∴ $f(x*y)=f(x)*f(y)$

再证双射成立：

① $\forall x, y \in G$

有 $f(x) = axa^{-1}$ $f(y) = aya^{-1}$

若 $f(x) = f(y)$

则 $axa^{-1} = aya^{-1}$

消去律 $x=y$，与条件矛盾.

$\therefore f(x) = f(y)$ 即 f 是单射.

② $\forall y \in G$ 设为 $y = f(x)$

有 $f(x) = axa^{-1}$

$\Rightarrow x = a^{-1} f(x) a$

$= a^{-1} y a$ 与之对应.

即 f 是满射.

$\therefore f$ 是双射.

综上 $G \cong G$.

习题三：

3. $\because |a| = 2$

$\therefore a^2 = e$

$\because$ 消去律成立

$\therefore a^{-1} \cdot a^2 = a^{-1} e$

$\Rightarrow a = a^{-1}$，得证

4. 设 $|a^{-1}| = x$ $|a| = y$

若证 $x=y$ 只需证 $x|y$. $y|x$ 即可

$\because a^x = (a^{-x})^{-1} = ((a^{-1})^x)^{-1} = e^{-1} = e$

$\therefore y|x$

又 $\because (a^{-1})^y = (a^y)^{-1} = e^{-1} = e$

$\therefore x|y$

$\therefore x = y \Rightarrow |a^{-1}| = |a|$. 得证

18

6. 不妨设 $|ab|=n$ $|ba|=m$

$\because (ab)^n=e$

$\therefore ab\cdot ab\cdot ab\cdots ab=e$

$\Rightarrow a(ba)^{n-1}b=e$

$\Rightarrow (ba)^{n-1}=a^{-1}b^{-1}=(ba)^{-1}$

$\Rightarrow (ba)^n=e$

$\therefore m|n$

同理 $\because (ba)^m=e$

$\therefore b(ab)^{m-1}a=e$

$\Rightarrow (ab)^m=e$

$\therefore n|m$

$\therefore$ 综上 $m=n$

即 $|ab|=|ba|$ 成立。

7. $\langle Z_6,+_6\rangle=\{0,1,2,3,4,5\}$

$\therefore [0]^1=e=[0]$ $\therefore |[0]|=1$

$[1]^6=[0]$ $|[1]|=6$

$[2]^3=[0]$ $|[2]|=3$

$[3]^2=[0]$ $|[3]|=2$

$[4]^3=[0]$ $|[4]|=3$

$[5]^6=[0]$ $|[5]|=6$.

习题四:

1. 设 $G=(a)$,且 $|G|=n$,往证 $\forall b,c\in G$ $bc=cb$.

$\because b,c$ 是循环群中元素

$\therefore b=a^i$, $c=a^j$

$\therefore bc=a^i\cdot a^j=a^{i+j}=a^{j+i}=c\cdot b$

$\therefore G$ 为可交换群.

证毕.

2.

生成元：[1]，[2]，[3]，[4].

子群：$([1]) = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$

$([2]) = \{[0], [1], [3], [2], [4]\}$

$([3]) = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$

$([4]) = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$.

4. 反证法.

假设 $G=(a)$ 为无限循环群 且存在一有限子群 (b).
且 $|b| = m$

则 $\because$ $G=(a)$ 为循环群

$\therefore$ $b = a^i$

$\because$ $|b| = m$

$\therefore$ $b^m = e$

$\therefore$ $a^{im} = e \Rightarrow |a| = im$.

即 $|(a)|$ 的阶有限.

与条件矛盾.

$\therefore$ 子群阶无限.

且显然 $|(e)| = 1$

习题五：

1. $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\varphi_1\varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\varphi_2\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$(\varphi_2)^{-1}\varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

令 $\varphi_3 x = \varphi_1$.

则 $x = \varphi_3^{-1}\varphi_1$.

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

3. 四阶群有2种，故与之同构的4次置换群也有2种.

①

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

故置换群可为 $G_1' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.（分别为 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$）.

∴ 置换群运算表如右：

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_2	φ_2	φ_1	φ_4	φ_3
φ_3	φ_3	φ_4	φ_1	φ_2
φ_4	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1

②

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

$\Rightarrow$ 置换群 $G_2' = \left\{ \underset{\varphi_1}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}}, \underset{\varphi_2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}}, \underset{\varphi_3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}}, \underset{\varphi_4}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}} \right\}$.

运算表：

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_2	φ_2	φ_1	φ_4	φ_3
φ_3	φ_3	φ_4	φ_2	φ_1
φ_4	φ_4	φ_3	φ_1	φ_2

习题六.

1. 定理3：

(1). $eH = [e] = \{eh \mid h \in H\} = \{h \mid h \in H\} = H$

∴ $eH = H$，得证

(2) 充分性：

∵ $b^{-1}a \in H$

∴ 令 $b^{-1}a = h_0 \quad h \in H$

故 $a = bh_0$

∴ $aH = \{ah \mid h \in H\} = \{bh_0h \mid h \in H\}$

∵ $h_0h \in H$

∴ $aH = \{bh_1 \mid h_1 \in H\} = bH$

必要性：∵ $aH = bH$

∴ $a \in aH \Rightarrow a \in bH$

∴ $a = bh$

$\Rightarrow h = b^{-1}a \in H$

∴ 必要性得证

(3) 必要性：

$\because aH=H \quad a\in aH$

$\therefore a\in H$. 必要性成立.

充分性：

$\because a\in H$

$\therefore \forall h\in H$

由封闭性知

$ah\in H$

$\therefore aH\subseteq H$.

又 $\because |aH|=|H|$ (拉格朗日定理)

$\therefore aH=H$

充分性成立

$\therefore$ 综上(1)(2)(3)

定理3成立

3. $S_3=\{\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix},\}$ (分别为 $\varphi_0, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_4, \varphi_5$).

$H=\{\varphi_0, \varphi_2\}=\{\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\}$.

$\therefore \varphi_0H=\{\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\}=H. \quad H\varphi_0=H$

$\varphi_1H=\{\varphi_1, \varphi_5\}$. $\qquad H\varphi_1=\{\varphi_1, \varphi_4\}$

$\varphi_2H=\{\varphi_2, \varphi_0\}$ $\qquad H\varphi_2=\{\varphi_2, \varphi_0\}$.

$\varphi_3H=\{\varphi_3, \varphi_4\}$ $\qquad H\varphi_3=\{\varphi_3, \varphi_5\}$

$\varphi_4H=\{\varphi_4, \varphi_3\}$ $\qquad H\varphi_4=\{\varphi_4, \varphi_1\}$

$\varphi_5H=\{\varphi_5, \varphi_1\}$ $\qquad H\varphi_5=\{\varphi_5, \varphi_3\}$

$\therefore$ 左陪集为：$\{\varphi_1, \varphi_5\}, \{\varphi_2, \varphi_0\}, \{\varphi_3, \varphi_4\}$.

右陪集：$\{\varphi_1, \varphi_4\}, \{\varphi_2, \varphi_0\}, \{\varphi_3, \varphi_5\}$.

左商集：$\{\{\varphi_1, \varphi_5\}, \{\varphi_2, \varphi_0\}, \{\varphi_3, \varphi_4\}\}$.

右商集：$\{\{\varphi_1, \varphi_4\}, \{\varphi_2, \varphi_0\}, \{\varphi_3, \varphi_5\}\}$.

6. 设 $|(ab)|=k$. 下证 (ab) 为 G 的生成元 $(k\neq 0)$

$\because (ab)^{pq}=(a^p)^q(b^q)^p=e$

$\therefore k\mid pq$

又 $\because (ab)^k=e \quad \therefore \quad a^k=b^{-k}\in(b) \quad \therefore |a^k|\mid p$.

又 ∵ $|a^k| \mid q$ 且 $p.q$ 互质

∴ $a^k=1$

∴ $p|k$

同理 $q|k$

∴ $pq|k$

又 ∵ $k \mid pq$

∴ $k=pq$

故 ab 周期为 pq.

∴ $G=(ab)$ 为循环群.

7. ∵ $(m,n)=1$ ∴ $m.n$ 两数互质.

不妨设

$|H|=m$, $|K|=n$.

反证法

假设 $H\cap K \neq \{e\}$ 即至少有一个元素 $c \in H$. $c \in K$.

∴ $(c)^m = e = (c)^n$

设 $(c)^T=e$. 即 c 的周期为 T.

则 $T|m$, $T|n$, 与 $m.n$ 互质矛盾.

∴ $H\cap K=\{e\}$.

习题七:

1. 设 H_1. H_2 为群 G 的正规子群.

则由定义知: $\forall a \in G$ 有 $aH_1=H_1a$ $aH_2=H_2a$.

设 $H=H_1\cap H_2$.

$\forall b \in H$

有 $b\in H_1\cap H_2 \Rightarrow b\in H_1, b\in H_2$.

∵ H_1, H_2 均为正规子群

∴ $\forall a \in G$ $a^{-1}ba\in H_1$, $a^{-1}ba\in H_2$

$\Rightarrow a^{-1}ba \in H_1\cap H_2$.

$\Rightarrow a^{-1}ba\in H$

即 $\forall b\in H$, $a\in G$ 有 $a^{-1}ba \in H$

由定理1知 $Ha=aH$ 故 H 也为正规子群

3. ∵ A、B均为G的子群.

设 $a, b \in A$，则有

$aB \in AB$. $bB \in AB$

∵ $eB = B \in AB$

∴ e为单位元

又∵ $\forall a \in A$ $\exists a^{-1} \in A$

使得：$a^{-1}B \in AB$

∴ AB满足消去律

∴ 综上 AB为群

5. ①设H为群G中心C的子群.

则 $\forall b \in H$. 有 $\forall x \in G$. $bx = xb$.

∴ bH $\forall x \in G$ $xH = Hx$.

∴ H为正规子群

②若G/H是循环群. 往证G为Abel群.

设 $G/H = (aH)$ 且 $|G/H| = |(a)| = m$

∵ G/H为循环群

则由商集的定义知：

∴ $\forall b \in G$ $c \in G$

$bH \in G/H$ $cH \in G/H$

都有 $bH = (aH)^i = a^iH$

又∵ G为群. 群中满足消去律

故 $b = a^i$

同理可证 $c = a^j$

∴ $b \cdot c = a^{i+j} = a^{j+i} = cb$

故 G为Abel群