# 六、Bezier曲面

基于Bezier曲线的讨论，可以给出Bezier曲面的定义和性质，Bezier曲线的一些算法也可以很容易扩展到Bezier曲面的情况

## 1、Bezier曲面的定义

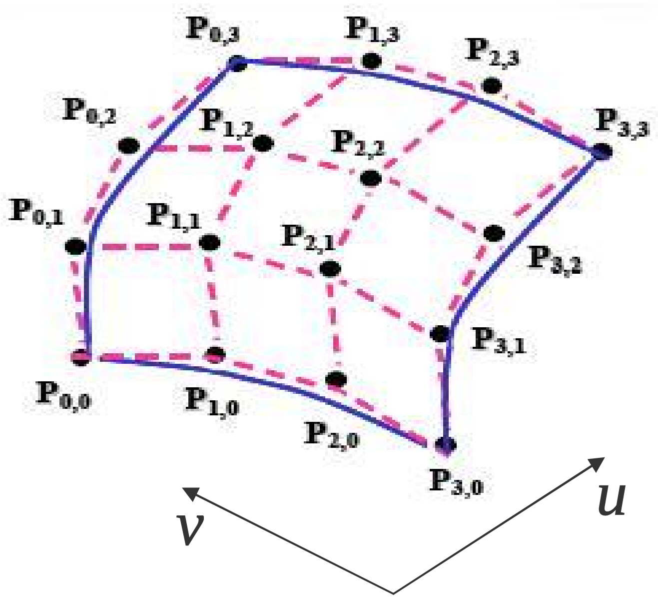
设 $p_{i,j}(0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,m)$ 为 $(n+1)\times(m+1)$ 个空间点，则 $m\times n$ Bezier曲面定义为：

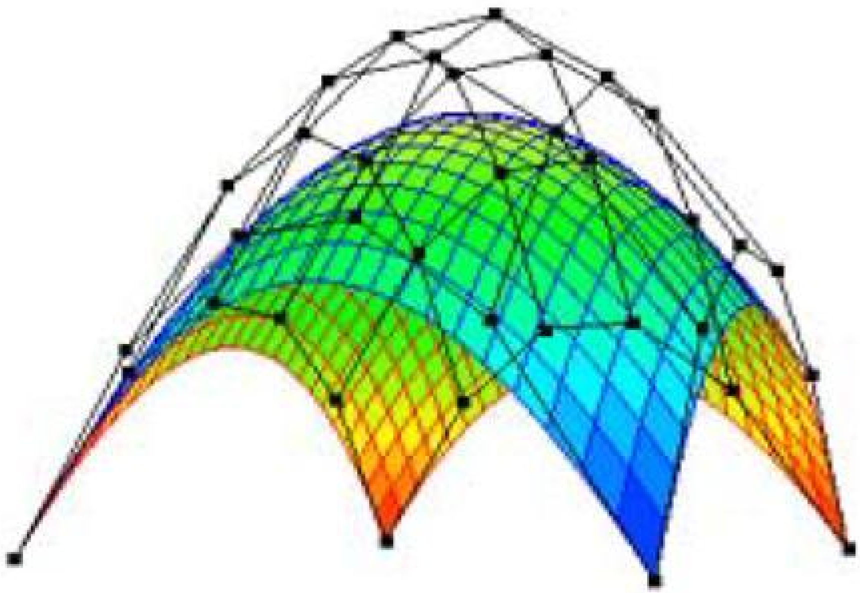
$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v) \qquad u,v\in[0,1]$$

$$B_{i,m}(u) = C_m^i u^i (1-u)^{m-i}$$

$$B_{i,n}(v) = C_n^j v^j (1-v)^{n-j}$$

依次用线段连接点列中相邻两点所形成的空间网格，称之为特征网格

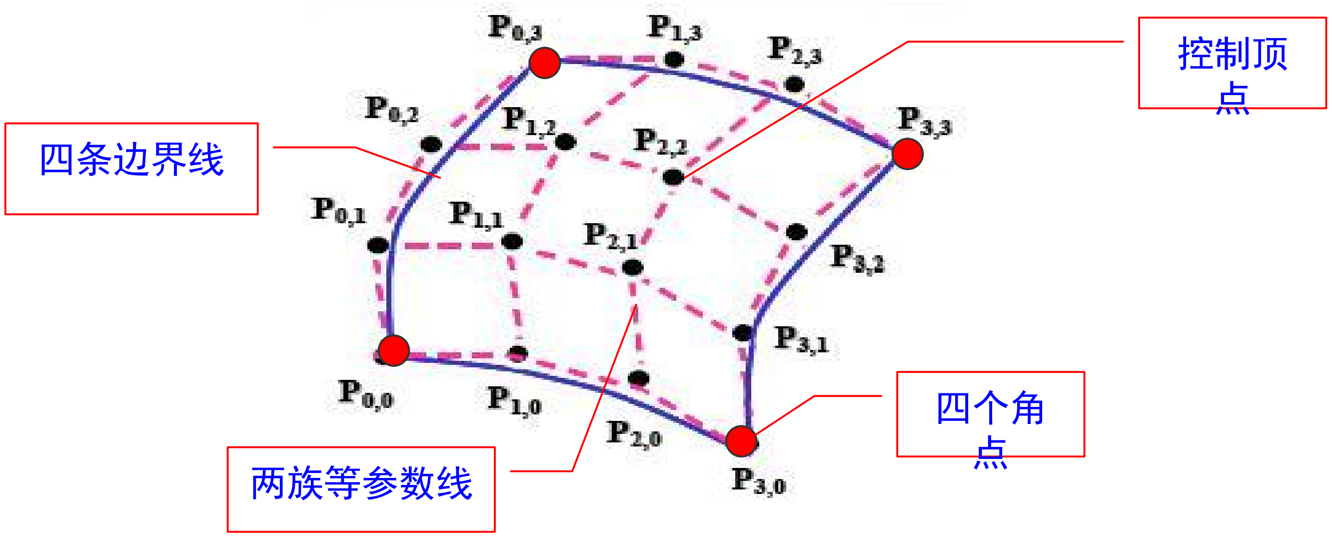


Bezier曲面的矩阵表示式是:

$$P(u,v)=\left[B_{0,n}(u),B_{1,n}(u),\cdots,B_{m,n}(u)\right]\begin{bmatrix}P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0m}\\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{n0} & P_{n1} & \cdots & P_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{0,m}(v)\\ B_{1,m}(v)\\ \vdots\\ B_{n,m}(v)\end{bmatrix}$$

上式的曲面称为$m\times n$次的，在一般应用中，n、m不大于4

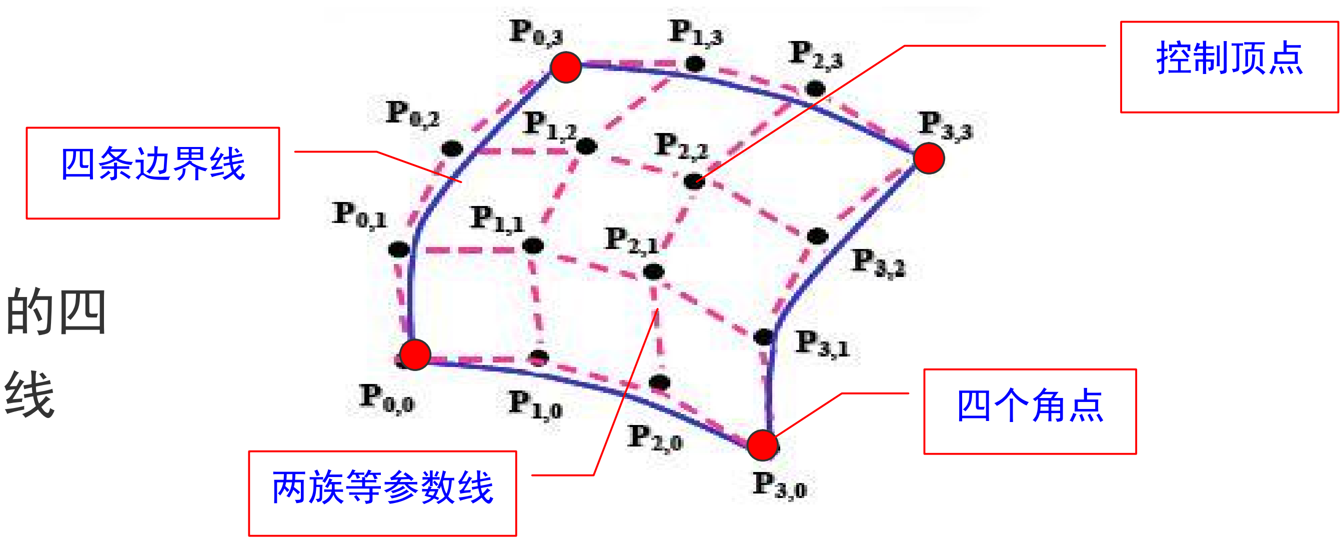



**角点位置**：四个角点分别是其控制网格的四个点

$$P(0,0) = P_{0,0} \quad P(0,1) = P_{0,n}$$

$$P(1,0) = P_{m,0} \quad P(1,1) = P_{m,n}$$

**边界线**：Bezier曲面的四条边界线是Bezier曲线




$$P(u,0)=\sum_{j=0}^{m}P_{j,0}BEZ_{j,m}(u) \qquad P(v,0)=\sum_{k=0}^{n}P_{k,0}BEZ_{k,n}(v)$$

$$P(u,1)=\sum_{j=0}^{m}P_{j,0}BEZ_{j,m}(u) \qquad P(v,1)=\sum_{k=0}^{n}P_{k,0}BEZ_{k,n}(v)$$

$$0\le u\le 1 \qquad 0\le v\le 1$$

## 2、Bezier曲面性质

Bezier曲线的很多性质可推广到Bezier曲面

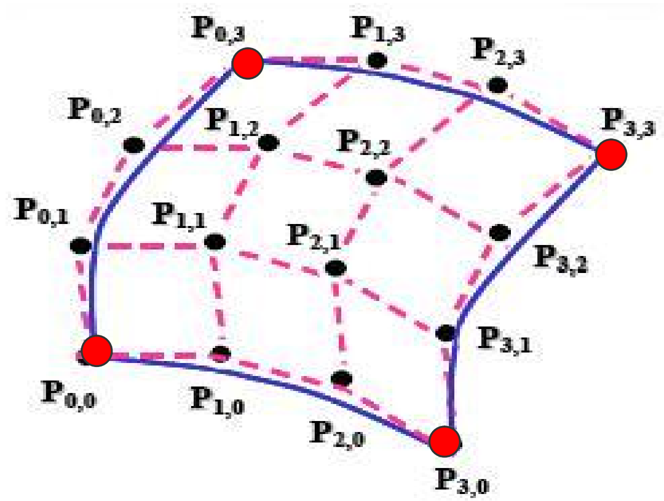
（1）Bezier曲面特征网格的四个角点正好是Bezier曲面的四个角点，即：

$$P(0,0)=P_{00}$$

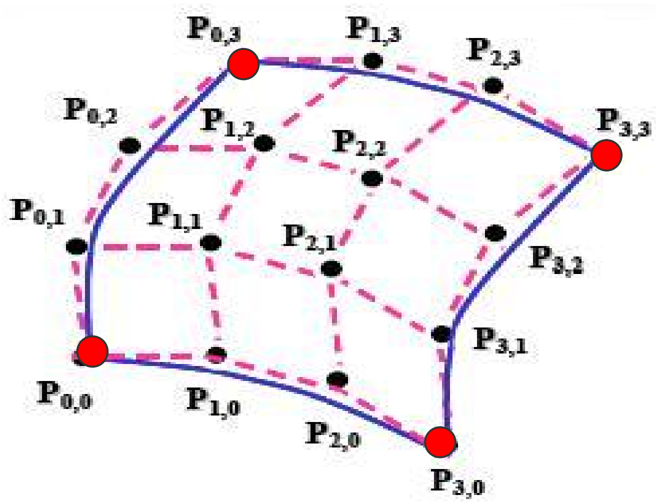
$$P(1,0)=P_{m0}$$

$$P(0,1)=P_{0n}$$

$$P(1,1)=P_{mn}$$



（2）Bezier曲面特征网格最外一圈顶点定义Bezier曲面的四条边界;




（3）几何不变性

（4）对称性

（5）凸包性

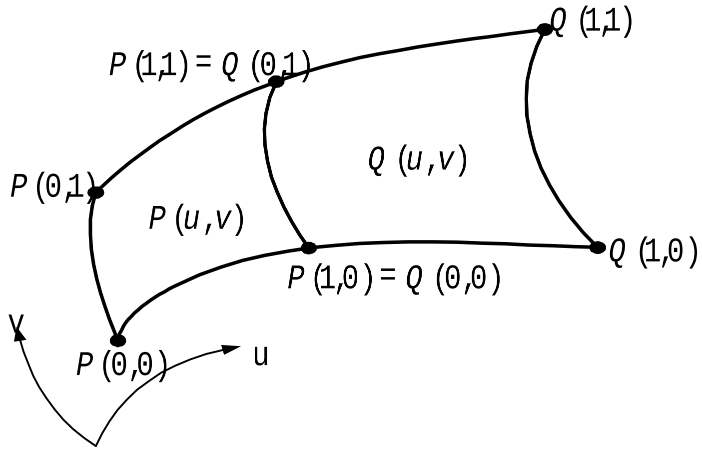
## 3、Bezier曲面片的拼接

设两张m×n次Bezier曲面片：

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$$

$$Q(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}Q_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$$

$$u,v\in[0,1]$$




Bezier曲面片的拼接

分别由控制顶点$P_{ij}$和$Q_{ij}$定义。

如果要求两曲面片达到$G^0$连续，则它们有公共的边界，即：

$$P(1,v)=Q(0,v)$$

于是有： $P_{ni}=Q_{0i}$， $(i=0,1,\mathbf{L},m)$

如果又要求沿该公共边界达到$G^1$连续，则两曲面片在该边界上有公共的切平面，因此曲面的法向应当是跨界连续的，即：

$$Q_u(0,v)\times Q_v(0,v)=a(v)P_u(1,v)\times P_v(1,v)$$

## 4、递推(de Casteljau)算法（曲面的求值）

Bezier曲线的递推(de Casteljau)算法，可以推广到Bezier曲面的情形

$$P_{ij}(i=0,1,\mathbf{L},m;\ j=0,1,\mathbf{L},n)$$

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{m-k}\sum_{j=0}^{n-l}P_{i,j}^{k,l}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)=\mathbf{L}=P_{00}^{m.n}\qquad u,v\in[0,1]$$

一条曲线可以表示成两条低一次曲线的组合，一张曲面可以表示成低一次的四张曲面的线性组合

其中：

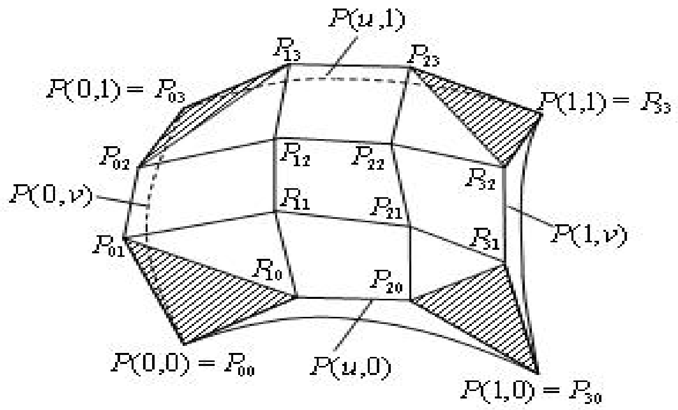
$$P_{i,j}^{k,l}=\begin{cases} P_{ij} & (k=l=0) \\ (1-u)P_{ij}^{k-1,0}+uP_{i+1,j}^{k-1,0} & (k=1,2,\ldots,m;l=0) \\ (1-v)P_{0,j}^{m,l-1}+vP_{0,j+1}^{m,l-1} & (k=m,l=1,2,\ldots,n) \end{cases} \qquad (1)$$

或

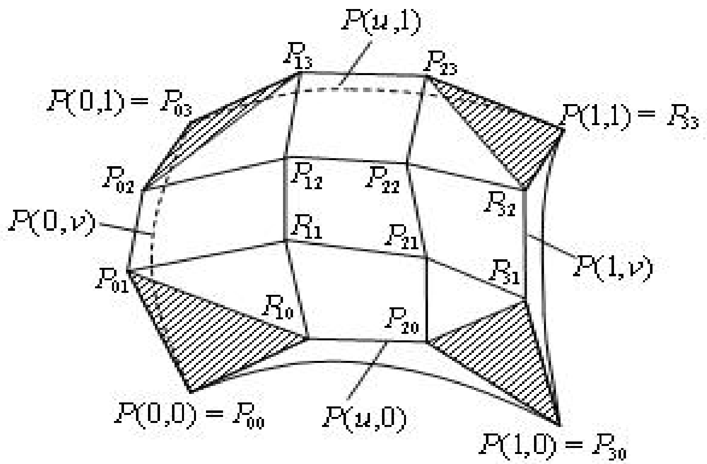
$$P_{ij}^{k,l}=\begin{cases} P_{ij} & (k=l=0) \\ (1-v)P_{ij}^{0,l-1}+vP_{i,j+1}^{0,l-1} & (k=0;l=1,2,\ldots,n) \\ (1-u)P_{i0}^{k-1,n}+uP_{i+1,0}^{k-1,n} & (k=1,2,\ldots,m;l=n) \end{cases} \qquad (2)$$

$$P_{i,j}^{k,l}=\begin{cases}P_{ij} & (k=l=0)\\(1-u)P_{ij}^{k-1,0}+uP_{i+1,j}^{k-1,0} & (k=1,2,\cdots,m;l=0)\\(1-v)P_{0,j}^{m,l-1}+vP_{0,j+1}^{m,l-1} & (k=m,l=1,2,\cdots,n)\end{cases}\qquad(1)$$

当按(1)式方案执行时，先以u参数值对控制网格u向的n+1个多边形执行曲线de Casteljau算法，m级递推后，得到沿v向由n+1个顶点 $P_{0j}^{m0}$ 构成的多边形

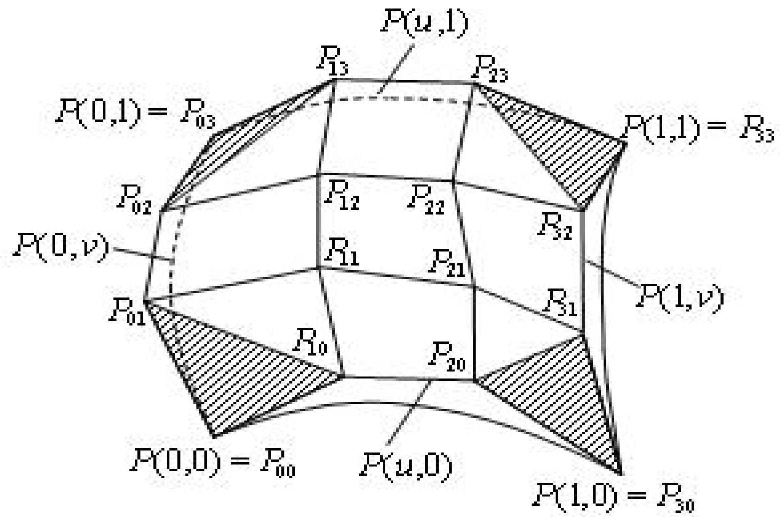


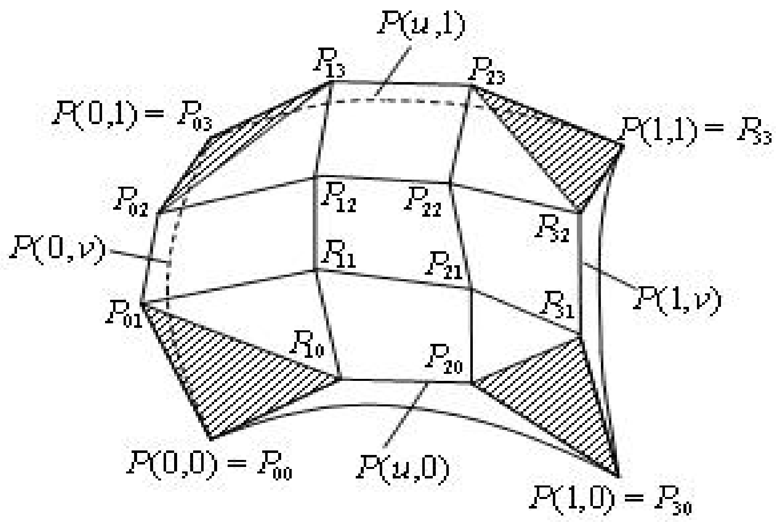
再以v参数值对它执行曲线的de Casteljau算法，n级递推以后，得到一个 $P_{00}^{mn}$，即所求曲面上的点。



一条曲线可以表示成2条低一次的曲线的线性组合，曲面可以表示成低一次的4张曲面的线性组合。

这张曲面有16个顶点，现在要算曲面上一点 P（1/2，1/2）的值，如何计算？






首先拿u＝1/2来计算，得到4个点。再拿这四个点做为新的Bezier曲线的控制顶点，按v＝1/2来计算，算出的这个点就是所要求的值

之所以有这样的算法，是因为：

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{j,n}(v)\right)B_{i,m}(u)$$