离散数学

Discrete Mathematics

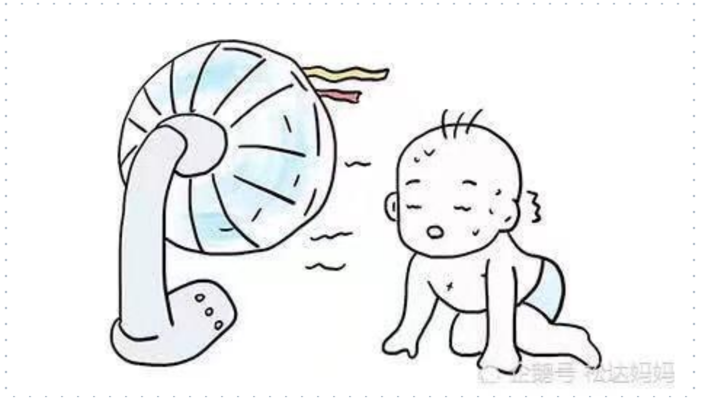
<G,*>：半群，含幺半群，子群，元素周期，循环群，对称群与置换群，有限群中拉格朗日定理，陪集，正规子群与商群。

<A,+,*>： Ring（环）与（域）Fields

整环，除环，域，素域与域的特称

理想与商环

<L,≼>格 与 布尔代数<B,⊕,*>



§6.1　定义及基本性质　　(1)

6.1.1 环

假设 <A,+,*> 是一个代数系统，其中，+ 和 * 都是集合 A 上的二元运算，如果满足：

（1）<A,+> 是交换群（Abel群）；

（2）<A,*> 是半群；

（3） * 对+ 是可分配的；

则称 <A,+,*> 是一个环(**Ring**)。

§6.1　定义及基本性质　　(1)

6.1.1 环

例 <Z,+,×> 是一个环。

<Z,+> 是Abel群。 <Z, × >是半群。 × 对+是可分配的； 整数环

例 <Q,+, × > 是一个环。

例 <R,+, × > 是一个环。

例$<Z_m,+_m,\times_m>$是一个环。　　模**m**剩余环。

§6.1　定义及基本性质

例 n阶整数矩阵所成集合 $(\mathbf{Z})_n$,关于矩阵的加法与乘法作成一个环.

n阶有理数矩阵集合$(\mathbf{Q})_n$， n阶实数矩阵集合 $(\mathbf{R})_n$, 在矩阵加法与乘法运算下也均构成环。

例 x的一切整（有理、实）系数多项式所成集合Z[x]（Q[x]，R[x]）在多项式加法与乘法运算下构成环.

§6.1 定义及基本性质

例 设i是虚数单位，即$i^2=-1$，令

$$Z(i)=\{a+bi \mid a, b\in Z\}$$

则$<Z(i),+,\cdot>$是一个环。

通常称作高斯环.

§6.1 定义及基本性质

6.1.2 环的性质

假设 <A,+,*> 是一个环。

（1）因为<A,+>是Abel群，所以+满足结合性、交换性、消去律，<A,+>中有单位元。

§6.1　定义及基本性质　　(3)

6.1.2 环的性质

约定：$a^n = a+a+\ldots+a = na$;

对$\forall a,b\in A$, $(a+b)^n = na+nb$;

$$a^{m+n} = a^m+a^n = (m+n)a;$$

$$a^{mn} = (a^m)^n = n(ma)。$$

§6.1　定义及基本性质　(4)

6.1.2 环的性质

（2）假设 e 是<A,+>的单位元，对∀a,b,c∈A有：

① $a * e = e * a = e$　($\theta * a = a * \theta = \theta$)

对∀a,b,c∈A有：$a*(b+c)=a*b+a*c$

∵ $e+e=e$ ∴ $a*(e+e)=a*e$　$a*e+a*e=a*e=a*e+e$

∴ $a * e = e$ 同理 $e * a = e$

所以 在环中加法单位元一定是乘法零元。 e (θ)

例如 <Z,+, × > , +单位元e=0，是 × 的零元θ=0

§6.1　定义及基本性质　(4)

6.1.2 环的性质

（2）假设 e 是<A,+>的单位元，对$\forall a,b,c\in A$有：

② $a * b^{-1} = a^{-1} * b = (a*b)^{-1}$

例：$<Z,+,\cdot>$，+单位元0，是 · 的零元

$2\cdot 3^{-1} = 2^{-1}\cdot 3 = (2\cdot 3)^{-1} = -6$

§6.1 定义及基本性质 (4)

6.1.2 环的性质

（2）假设 e 是<A,+>的单位元，对∀a,b,c∈A有：

③ $a^{-1} * b^{-1} = a * b$ $(a*b)^{-1}=a*b^{-1}=a^{-1}*b$

$(a*b)+(a^{-1}*b)=(a+a^{-1})*b=e*b=e$

$(a^{-1}*b)+(a*b)=(a^{-1}+a)*b=e*b=e$

$(a*b)^{-1}=a^{-1}*b$ 同理 $(a*b)^{-1}=a*b^{-1}$

$a^{-1}*b=a*b^{-1}$ （1） $a*b=(a^{-1})^{-1}*b=a^{-1}*b^{-1}$

例如：$<Z,+,\cdot>$，$2^{-1}\cdot 3^{-1}=2\cdot 3=6$

§6.1 定义及基本性质 (4)

6.1.2 环的性质

（2）假设 e 是 $<A,+>$ 的单位元，对 $\forall a,b,c \in A$ 有：

④ $a*(b+c^{-1}) = (a*b)+(a*c)^{-1}$

$a*(b+c^{-1}) = a*b+a*c^{-1} = (a*b)+(a*c)^{-1}$

⑤ $(b+c^{-1})*a = (b*a)+(c*a)^{-1}$

§6.1　定义及基本性质　　(4)

6.1.2 环的性质

（2）假设 e 是<A,+>的单位元，对∀a,b,c∈A有：

① $a * e = e * a = e$　　$0a = a0 = 0$

② $a * b^{-1} = a^{-1} * b = (a*b)^{-1}$　　$a(-b) = (-a)b = -(ab)$

③ $a^{-1} * b^{-1} = a * b$;　　$(-a)(-b) = ab$

④ $a*(b+c^{-1}) = (a*b)+(a*c)^{-1}$　　$a(b-c) = ab - ac$

⑤ $(b+c^{-1}) * a = (b*a)+(c*a)^{-11}$　　$(b-c)a = ba - ca$

例 1： 假 设 <G,*> 是 一 个 二 阶 群 ， 则 <G×G,*>是一个Klein群。

*	<e,e>	<e,a>	<a,e>	<a,a>
<e,e>	<e,e>	<e,a>	<a,e>	<a,a>
<e,a>	<e,a>	<e,e>	<a,a>	<a,e>
<a,e>	<a,e>	<a,a>	<e,e>	<e,a>
<a,a>	<a,a>	<a,e>	<e,a>	<e,e>

<e,e>记为e, <e,a>记为a, <a,e>记为b, <a,a>记为c,

<K,*>是Klein四元群。K={e,a,b,c};

“.” 运算定义如下，则<K,*，.>是环。

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

.	e	a	b	c
e	e	e	e	e
a	e	a	e	a
b	e	b	e	b
c	e	c	e	c

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

（1）<K,*>是Abel群

.	e	a	b	c
e	e	e	e	e
a	e	a	e	a
b	e	b	e	b
c	e	c	e	c

（2）<K，.>是半群（封闭、可结合）

∀x，y，z∈ K 有(x . y) . z=x .(y . z)

若z=e或z=b 则(x . y) . z=e=x .(y . z)

若z=a或z=c 则(x . y) . z=x . y=x .(y . z)

所以 <K，.>是半群

*对.可分配

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

.	e	a	b	c
e	e	e	e	e
a	e	a	e	a
b	e	b	e	b
c	e	c	e	c

.对* 是可分配

(y * z) . x=(y *x).(z*x) ;   x .(y * z) =(x* y).(x*z)

若x=e或x=b 则(y * z) .x=e=e.e=(y *x).(z*x)

若x=a或x=c 则(y * z) .x=y*z=(y *x).(z*x)

同理：x.(y * z) =(x* y).(x*z)

所以<K,*， .>是环

例2：s是非空集合，**P(s)**是幂集，在**P(s)**上定义二元运算+和*，则**< P(s),+，· >**是环。

$\forall A，B \in \mathbf{P(s)}$

$A+B = \{ x \mid x \in S \wedge (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \cap B \}$

$A \cdot B = A \cap B$

S={a，b，c}，

P(s)={∅，{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}},

∀A ，B∈**P(s)**

（**1**）封闭，**{a}+{a,b}={b} , …**

可结合， **({a}+{a,b})+{c}={a}+({a,b}+{c}) , …**

可交换, **{a}+{a,b}={a,b}+{a} , …**

单位元， ∅

逆元，**{a}+{a}=** ∅**,{a}**自身为逆元**, …**

< P(s), +>是**abel**群

（**2**）**< P(s),·>**是半群，

·可结合 **({a} · {a,b}) ·{a,b,c}={a} ·({a,b} ·{a,b,c})**

(3)·对**+**可分配

{a} ·({b}+{a,b})={a} ·{b}+{a} ·{a,b}

例3：证明 任一环的同态象也是一环。

证明：设 <A,+, · >是一环,且<f(A), ⊕, ⊗ > 是关于同态映射f的同态象。

由f(A)的定义， f(A)为 f 的值域，所以 f一定是满同态。

由 <A,+>是Abel群，易证 <f(A), ⊕>也是Abel群。

是<A,*>半群，易证 <f(A), ⊗ >也是半群。

现只需证： ⊗对 ⊕是可分配的。

$\forall b_1, b_2, b_3 \in f(A)$，则必有相应的$a_1, a_2, a_3$使得：$f(a_i) = b_i, i = 1,2,3$

$$
\begin{aligned}
b_1 \otimes (b_2 \oplus b_3) &= f(a_1) \otimes (f(a_2) \oplus f(a_3)) = f(a_1) \otimes (f(a_2 + a_3)) \\
&= f(a_1 \cdot (a_2 + a_3)) = f((a_1 \cdot a_2) + (a_1 \cdot a_3)) = f(a_1 \cdot a_2) \oplus f(a_1 \cdot a_3) \\
&= (f(a_1) \otimes f(a_2)) \oplus (f(a_1) \otimes f(a_3)) \\
&= (b_1 \otimes b_2) \oplus (b_1 \otimes b_3)
\end{aligned}
$$

同理可证 $(b_2 \oplus b_3) \otimes b_1 = (b_2 \otimes b_1) \oplus (b_3 \otimes b_1)$

因此$< f(A), \oplus, \otimes >$也是环。

§6.1　定义及基本性质

6.1.3 由 * 运算确定的几种环

（1）在环 <A,+,*> 中，如果 <A,*> 是含幺半群，并且 e′ 是单位元，则称 e′ 为环的单位元。这时称 A 为有**单位元的环**（**有/含幺环**）。如果元素 a 在 <A,*> 中有逆元，则在含有单位元的环中，该元素的逆也称为环中元素的逆。

§6.1　定义及基本性质　　(6)

6.1.3 由 * 运算确定的几种环

（2）如果环中只含有一个元素，此时该元素应该是 <A,+> 中的单位元，当然也是 <A,*> 中的零元，所以这种环称为零环。

环 $A = \{\theta(e)\}$ 称为零环.

定理 1　设**A**为有单位元的环，且不只含一个元素，则 $1 \neq 0$。(0 加法单位元，1 乘法单位元)

证明　若 $1 = 0$，则 $\forall\, a \in A$，

$$a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$$

故**A**只含一个元素 0，矛盾。

以后提到有单位元的环时，总指非零环。

因此 $1 \neq 0$ 总成立。

（3）设 $<A,+,*>$ 是环，当 $<A,*>$ 是可交换半群时，称 $<A,+,*>$ 是可交换环。

例3:

全体整数按普通加法和普通乘法构成有单位元（1）可交换（*）的环。

摸m的全体剩余类构成什么环？

有单位元（ $\times_4$ 的单位元1），可交换环（ $\times_4$ ）

多选题 2分

设置

全体偶数按普通加法和普通乘法构成环，环的类型是：。

A 有单位元

B 无单位元

C 可交换

D 不可交换

提交

多选题 2分

设置

$<Z_4,+_4,\times_4>$是一个环，可以构成的环的类型为：

A 有单位元

B 可交换

C 无单位元

D 不可交换

提交

多选题 2分

设置

$<Z_5,+_5,\times_5>$是一个环，可以构成的环的类型为：

A 有单位元

B 可交换

C 无单位元

D 不可交换

提交

多选题 2分

设置

实系数多项式的全体按普通加法和普通乘法可以构成的环的类型为：

A 有单位元

B 可交换

C 无单位元

D 不可交换

提交

多选题 2分

设置

全体n阶方阵按矩阵的加法和乘法可以构成的环的类型为:

A 有单位元

B 可交换

C 无单位元

D 不可交换

提交

§ 6.2　整环、除环和域

6.2.1 零因子

设 $<A,\star,*>$ 是环，如果存在 $a,b\in A$，这里 $a\neq\theta$，$b\neq\theta$，但 $a*b=\theta$，则称 a 为 A 中的左零因子，b 为 A 中的右零因子，左、右零因子统称为零因子。

§6.2 整环、除环和域 (2)

6.2.1 零因子

例如：$<Z_4,+_4,\times_4>$是一个环。其中,$+_4,\times_4$ 的运算表如下：

$+_4$	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

$\times_4$	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

$\times_4$是否有零因子?

$[2]\times_4[2]=[0]$

在$<Z_6,+_6,\times_6>$中有零因子? $[2]\times_6[3]=[0]$

§6.2 整环、除环和域 (2)

6.2.1 零因子

例如 $<Z_5,+_5,\times_5>$是一个环。其中$\times_5$ 的运算表如下：

$\times_5$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[2]	[2]	[1]

无零因子。

§6.2 整环、除环和域 (2)

6.2.1 零因子

例如 $<Z_6,+_6,\times_6>$是一个环。其中$\times_6$ 的运算表如下：

×6	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[2]	[0]	[2]	[4]	[0]	[2]	[4]
[3]	[0]	[3]	[0]	[3]	[0]	[2]
[4]	[0]	[4]	[2]	[0]	[2]	[2]
[5]	[0]	[5]	[4]	[2]	[2]	[1]

$[2]\times_6[3]=[0]$

$[3]\times_6[4]=[0]$

两对零因子。

[2]与**[3]**

[3]与**[4]**

§6.2 整环、除环和域

例　用 **(R)2**表示 2 阶实数矩阵集合，+，· 表示矩阵的加法与乘法，则 〈**(R)2**，+，·〉是一个环。

存在一对零因子。$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

还有其它零因子吗？ 有！

例　对于剩余环$\langle \mathbf{Z}_m, +_m, \times_m \rangle$，证明 若**m**不是素数，则$\mathbf{Z}_m$中必存在零因子.

证明：$\mathbf{Z}_m$中的零元为[0]. 因为**m**不是素数，故存在整数n_1，n_2，使 $m=n_1n_2$，$1<n_1\le n_2<m$

因此 $[n_1]\neq[0]$，$[n_2]\neq[0]$，

但 $[n_1]\times_m[n_2]=[0]$.

即$[n_1]$，$[n_2]$是$\mathbf{Z}_m$的一对零因子.

§6.2　整环、除环和域

6.2.1 零因子

当一个环中不含有零因子时，称它为无零因子环。即在无零因子环中，对任意的 $a,b\in A$，若 $a * b = \theta$，则必有 $a = \theta$ 或 $b = \theta$。

定理1：

设 $<A,+,*>$ 是无零因子的环，则 $*$ 在 A 上消去律成立。**a***c=b*c 或c***a**=c*b 得 **a**=b ;反之亦然。

$<A,+,*>$ 是无零因子的环 $\Leftrightarrow$ $*$ 在 A 上消去律成立

§6.2　整环、除环和域

证明　无零因子的环中消去律成立

设R中无零因子，$\forall c\neq 0$，，　如果 $ac=bc$，

则 $ac-bc=0$，　　$(a-b)c=0$.

由于$c\neq 0$，R中无零因子，故　$a-b=0$，　即$a=b$.

同理$ca=cb \Rightarrow a=b$；

反之，设环R中乘法消去律成立，

反证法 若R中有零因子$a\neq 0$，$b\neq 0$　，使得 $ab=0$

又因为 $a0=0$ 所以，　$ab=a0$

由消去律得 $b=0$，矛盾.

故R中必无零因子.

§6.2　整环、除环和域

6.2.2 整环

设 <A,+,*> 是无零因子环， 并且是可交换的含幺环，则称它为整环。

即 <A,+,*> 是环，并且 <A,*> 有单位元，* 运算可交换，对 $\forall a,b \in A$，若 $a*b = \theta$，则必有 $a = \theta$ 或 $b = \theta$。

$e(\theta) * e' = e(\theta)$ 应该如何理解？ $x * e' = x$

§6.2 整环、除环和域

例**4**：全体有理数按普通加法和普通乘法构成无零因子的交换环，所以是整环。

全体实数、复数？（可以构成 整环）

§6.2　整环、除环和域

例：**整数环**〈**Z**，＋，·〉是一个**整环**，

　　高斯环〈**Z[i]**，＋，·〉是一个整环.

例：若**m**是一个素数，则〈$\mathbf{Z}_m$，$+_m$，$\times_m$〉是一个整环.

（若 $[i]\times_m[j]=[0]$，则

$[ij]=[0]$，因而 **m｜ij** 故**m｜i** 或 **m｜j**，**[i]**

$=[0]$ 或 **[j]** $=[0]$）

〈$\mathbf{Z}_m$，$+_m$，$\times_m$〉是整环 $\Leftrightarrow$ m为素数

野人与传教士

图论

环、整环、除环和域

（**1**）环〈**A**，＋，·〉环，加法单位元是乘法零元。

（**2**）零环，可交换环，含幺环。

（**3**）零因子，无零因子的环 $\Leftrightarrow$ 乘法消去律成立。

（**4**）整环:无零因子，可交换，含幺元。

〈Z_m，$+_m$，$\times_m$〉是整环 $\Leftrightarrow$ m为素数

多选题 4分

设置

s是集合，P(s)是幂集，在P(s)上定义二元运算+和·，则< P(s),+，· >构成的环的类型是:

$\forall A，B \in P(s)\ A \cdot B = A \cap B$

$A+B = \{ x \mid x \in S \wedge (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \cap B\}$

A 有单位元

B 无单位元

C 可交换

D 不可交换

E 有零因子

F 无零因子

提交

例4：s是集合，P(s)是幂集，在P(s)上定义二元运算+和*，则< P(s),+，· >不是整环。

$\forall A$，$B \in P(s)$

$A+B = \{ x \mid x \in S \wedge (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \cap B \}$

$A \cdot B = A \cap B$

$<P(S), +>$ 中的单位元是$\varnothing$，同时也是$<P(S), \cdot>$ 中的零元

$<P(S), \cdot>$ 中的单位元是S，并且$S \neq \varnothing$，

若 S1是S的任意真子集（$S1 \subseteq S$ ），并且$S_1 \neq \varnothing$，

取$S_2 = S - S1 \neq \varnothing$

但是$S_1 \cdot S_2 = S1 \cap S2 = \varnothing$

所以$<P(S), +, \cdot>$中含有一对零因子S1,S2。

故 $<P(S), +, \cdot>$不是整环。（可交换，有单位元）

例5：证明 <{0,1},⊕,⊗>是一个整环，其中运算 ⊕和 ⊗定义如下图。

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

二进制1位数加

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

二进制1位数乘

整环：有单位元，无零因子的交换环为整环.

一、 $<\{0,1\},\oplus>$是交换群

$<\{0,1\},\oplus>$是交换群：首先运算是封闭的，是一个代数系统，

(1)结合律：

$(0\oplus0)\oplus0=0\oplus(0\oplus0)=0$

$(0\oplus0)\oplus1= 0\oplus(0\oplus1)=1$

$(0\oplus1)\oplus0 = 0\oplus(1\oplus0)=1$

$(0\oplus1)\oplus1= 0\oplus(1\oplus1)=0$

$(1\oplus0)\oplus0= 1\oplus(0\oplus0)=1$

$(1\oplus0)\oplus1= 1\oplus(0\oplus1)=0$

$(1\oplus1)\oplus0= 1\oplus(1\oplus0)=0$

$(1\oplus1)\oplus1= 1\oplus(1\oplus1)=1$

(2)单位元：0 $0\oplus0=0$ $0\oplus1=1$

(3)逆元：$0\oplus0=0$，$1\oplus1=0$，0的逆元是0，1的逆元是1

(4)交换律：$0\oplus0=0\oplus0=0;0\oplus1=1\oplus0=1;1\oplus1=1\oplus1=1$

所以 $<\{0,1\},\oplus>$是交换群

二、$<\{0,1\},\otimes>$可交换的半群：首先运算是封闭的，是一个代数系统，

结合律： $(0\otimes0)\otimes0=0\otimes(0\otimes0)=0$

$(0\otimes0)\otimes1=0\otimes(0\otimes1)=0$

$(0\otimes1)\otimes0=0\otimes(1\otimes0)=0$

$(0\otimes1)\otimes1=0\otimes(1\otimes1)=0$

$(1\otimes0)\otimes0=1\otimes(0\otimes0)=0$

$(1\otimes0)\otimes1=1\otimes(0\otimes1)=0$

$(1\otimes1)\otimes0=1\otimes(1\otimes0)=0$

$(1\otimes1)\otimes1=1\otimes(1\otimes1)=1$

交换　　　　　交换律：$0\otimes0=0\otimes0=0$；$0\otimes1=1\otimes0=0$；$1\otimes1=1\otimes1=1$

单位元　　　　　单位元：$1\otimes0=0$，$1\otimes1=1$，单位元1

三、⊗对⊕满足分配律：　$0\otimes(0\oplus0) = (0\otimes0)\oplus(0\otimes0)=0$

$0\otimes(0\oplus1) = (0\otimes0)\oplus(0\otimes1)=0$

$0\otimes(1\oplus0) = (0\otimes1)\oplus(0\otimes0)=0$

$0\otimes(1\oplus1) = (0\otimes1)\oplus(0\otimes1)=0$

$1\otimes(0\oplus0) = (1\otimes0)\oplus(1\otimes0)=0$

$1\otimes(0\oplus1) = (1\otimes0)\oplus(1\otimes1)=1$

$1\otimes(1\oplus0) = (1\otimes1)\oplus(1\otimes0)=1$

$1\otimes(1\oplus1) = (1\otimes1)\oplus(1\otimes1)=0$

$(0\oplus0)\otimes0= (0\otimes0)\oplus(0\otimes0)=0$

$(0\oplus1)\otimes0= (0\otimes0)\oplus(1\otimes0)=0$

$(1\oplus0)\otimes0 = (1\otimes0)\oplus(0\otimes0)=0$

$(1\oplus1)\otimes0= (1\otimes0)\oplus(1\otimes0)=0$

$(0\oplus0)\otimes1= (0\otimes1)\oplus(0\otimes1)=0$

$(0\oplus1)\otimes1= (0\otimes1)\oplus(1\otimes1)=1$

$(1\oplus0)\otimes1= (1\otimes1)\oplus(0\otimes1)=1$

$(1\oplus1)\otimes1= (1\otimes1)\oplus(1\otimes1)=0$

无零因子：**<{0,1},⊕,⊗>**中，不等于**0**的元素只有**1**，因为**1*1=1,**所以，不存在非零元素**b**，使得**1*b=0,** 或**b*1=0**

一、**<{0,1},⊕>**是交换群**;**

二、**<{0,1},⊗>**可交换的半群**;**

三、 ⊗对⊕满足分配律，无零因子，有单位元，可交换

所以，**<{0,1},⊕,⊗>**是整环。

例6：设 $<A_1,★,*>$,$<A_2,★,*>$都是环，$A_1 \times A_2$ 是环的直积定义为：$A_1 \times A_2 =\{<a,b>|a \in A_1,b \in A_2\}$。

在 $A_1 \times A_2$ 上定义运算 $\oplus$ 和 $\otimes$ 如下：

对任意的$<a_1,b_1>,<a_2,b_2> \in A_1 \times A_2$，则

$$< a_1,b_1 > \oplus < a_2,b_2 > = <a_1 ★ a_2, b_1 ★ b_2>$$

$$< a_1,b_1 > \otimes < a_2,b_2 > = <a_1 * a_2, b_1 * b_2>$$

证明：

（1）$< A_1 \times A_2,\oplus,\otimes>$构成环；

（2）若 A_1,A_2 都是有单位元的环，则 $A_1 \times A_2$也是吗？

（3）若 A_1,A_2 都是无零因子的环，则 $A_1 \times A_2$也是吗？

$\langle A1\times A2,\oplus\rangle$交换群

首先运算是封闭的，是一个代数系统：

对任意的$\langle a1,b1\rangle,\langle a2,b2\rangle\in A1\times A2$，　$\langle a1,b1\rangle\oplus\langle a2,b2\rangle=\langle a1\bigstar a2,b1\bigstar b2\rangle$

因为$\langle A1,\bigstar,*\rangle$，$\langle A2,\bigstar,*\rangle$都是环，所以$\bigstar$运算在A1，A2上封闭，

$a1\in A1$，$a2\in A1$，所以，$a1\bigstar a2\in A1$，

$b1\in A2$，$b2\in A2$，所以，$b1\bigstar b2\in A2$，

所以$\langle a1\bigstar a2,b1\bigstar b2\rangle\in A1\times A2$

所以封闭

结合律：

对任意的$\langle a1,b1\rangle,\langle a2,b2\rangle\langle a3,b3\rangle\in A1\times A2$，

$(\langle a1,b1\rangle\oplus\langle a2,b2\rangle)\oplus\langle a3,b3\rangle=\langle (a1\bigstar a2)\bigstar a3,(b1\bigstar b2)\bigstar b3\rangle$

$\langle a1,b1\rangle\oplus(\langle a2,b2\rangle\oplus\langle a3,b3\rangle)=\langle a1\bigstar(a2\bigstar a3),b1\bigstar(b2\bigstar b3)\rangle$

因为$\langle A1,\bigstar,*\rangle$，$\langle A2,\bigstar,*\rangle$都是环，所以$\langle A1,\bigstar\rangle$，$\langle A2,\bigstar\rangle$满足结合律

所以$(a1\bigstar a2)\bigstar a3=a1\bigstar(a2\bigstar a3)$，$(b1\bigstar b2)\bigstar b3=b1\bigstar(b2\bigstar b3)$

所以$\langle (a1\bigstar a2)\bigstar a3,(b1\bigstar b2)\bigstar b3\rangle=\langle a1\bigstar(a2\bigstar a3),b1\bigstar(b2\bigstar b3)\rangle$

所以$(\langle a1,b1\rangle\oplus\langle a2,b2\rangle)\oplus\langle a3,b3\rangle=\langle a1,b1\rangle\oplus(\langle a2,b2\rangle\oplus\langle a3,b3\rangle)$

所以满足结合律

单位元：
设<A1, ★> ,<A2, ★>上单位元分别是e1,e2
则，任取<a1,b1>∈ A1×A2， <a1,b1>⊕<e1,e2>=<a1★e1,b1★e2>=<a1,b1>
<e1,e2>⊕<a1,b1>=<e1★a1,e2★b1>=<a1,b1>
所以存在单位元<e1,e2>
逆元：
任取<a1,b1>∈ A1×A2，因为<A1,★,*> ,<A2,★,*>都是环，所以在<A1,★>上存在a1的逆元

单位元：
设<A1, ★> ,<A2, ★>上单位元分别是e1,e2
则，任取<a1,b1>∈ A1×A2， <a1,b1>⊕<e1,e2>=<a1★e1,b1★e2>=<a1,b1>
<e1,e2>⊕<a1,b1>=<e1★a1,e2★b1>=<a1,b1>
所以存在单位元<e1,e2>

逆元：

任取<a1,b1>∈ A1×A2，因为<A1, ★,*> ,<A2, ★,*>都是环，所以在<A1, ★>上存在 a1 的逆元 $a1^{-1}$，在<A2, ★>上存在 b1 的逆元 $b1^{-1}$，

<a1,b1>⊕< $a1^{-1}$, $b1^{-1}$ >=<a1★ $a1^{-1}$, b1★ $b1^{-1}$ >=<e1,e2>, 所以< $a1^{-1}$, $b1^{-1}$ >是<a1,b1>的逆元，所以，存在逆元

交换律：

对任意的<a1,b1>,<a2,b2>∈ A1×A2，<a1,b1>⊕<a2,b2>=<a1★a2,b1★b2>
<a2,b2>⊕<a1,b1>=<a2★a1, b2★b1>

因为<A1, ★,*> ,<A2, ★,*>都是环，所以<A1, ★>满足交换律，<A2, ★>满足交换律，所以，a1★a2＝a2★a1，b1★b2＝b2★b1，所以<a1★a2,b1★b2>＝<a2★a1, b2★b1>

所以，<a1,b1>⊕<a2,b2>＝<a2,b2>⊕<a1,b1>

所以，满足交换律

$<A1\times A2, \otimes>$半群

首先运算是封闭的，是一个代数系统

对任意的$<a1,b1>,<a2,b2>\in A1\times A2$， $<a1,b1>\otimes<a2,b2>=<a1*a2,b1*b2>$

因为$<A1,★,*>$，$<A2,★,*>$都是环，所以*运算在 A1，A2 上封闭，

$a1\in A1$，$a2\in A1$，所以，$a1*a2\in A1$，

$b1\in A2$，$b2\in A2$，所以，$b1*b2\in A2$，

所以$<a1*a2,b1*b2>\in A1\times A2$ 所以封闭

结合律：

对任意的$<a1,b1>,<a2,b2><a3,b3>\in A1\times A2$，

$(<a1,b1>\otimes<a2,b2>)\otimes<a3,b3>=<(a1*a2)*a3, (b1*b2)*b3>$

$<a1,b1>\otimes(<a2,b2>\otimes<a3,b3>)=<a1*(a2*a3), b1*(b2*b3)>$

因为$<A1,★,*>$，$<A2,★,*>$都是环，所以$<A1,*>$，$<A2,*>$是半群，满足结合律

所以$(a1*a2)*a3=a1*(a2*a3)$，$(b1*b2)*b3=b1*(b2*b3)$

所以$<(a1*a2)*a3, (b1*b2)*b3>=<a1*(a2*a3), b1*(b2*b3)>$

所以$(<a1,b1>\otimes<a2,b2>)\otimes<a3,b3>=<a1,b1>\otimes(<a2,b2>\otimes<a3,b3>)$

所以满足结合律

$\otimes$ 对 $\oplus$ 满足分配律

对任意的$<a1,b1>,<a2,b2><a3,b3>\in A1\times A2$，

$<a1,b1>\otimes(<a2,b2>\oplus<a3,b3>)=<a1*(a2\bigstar a3),\ b1*(b2\bigstar b3)>$

$(<a1,b1>\otimes<a2,b2>)\oplus(<a1,b1>\otimes<a3,b3>)=<(a1*a2)\bigstar(a1*a3),(b1*b2)\bigstar(b1*b3)>$

因为$<A1,\bigstar,*>,<A2,\bigstar,*>$都是环,

所以，$a1*(a2\bigstar a3)=(a1*a2)\bigstar(a1*a3)$，$b1*(b2\bigstar b3)=(b1*b2)\bigstar(b1*b3)$

所以，$<a1*(a2\bigstar a3),\ b1*(b2\bigstar b3)>=<(a1*a2)\bigstar(a1*a3),(b1*b2)\bigstar(b1*b3)>$

所以，$<a1,b1>\otimes(<a2,b2>\oplus<a3,b3>)=(<a1,b1>\otimes<a2,b2>)\oplus(<a1,b1>\otimes<a3,b3>)$

（$<a1,b1>\oplus<a2,b2>$）$\otimes<a3,b3>=<$（$a1\bigstar a2$）$*a3,(b1\bigstar b2)*b3>$

$(<a1,b1>\otimes<a3,b3>)\oplus(<a2,b2>\otimes<a3,b3>)=<(a1*a3)\bigstar(a2*a3),(b1*b3)\bigstar(b2*b3)>$

因为$<A1,\bigstar,*>,<A2,\bigstar,*>$都是环,

所以，$(a1\bigstar a2)*a3=(a1*a3)\bigstar(a2*a3)$，（$b1\bigstar b2)*b3=,(b1*b3)\bigstar(b2*b3)$

所以，$<(a1 \bigstar a2) * a3, (b1 \bigstar b2) * b3> = <(a1 * a3) \bigstar (a2 * a3), (b1 * b3) \bigstar (b2 * b3)>$

所以，$(<a1,b1> \oplus <a2,b2>) \otimes <a3,b3> = (<a1,b1> \otimes <a3,b3>) \oplus (<a2,b2> \otimes <a3,b3>)$

所以满足分配律

（2）

A1,A2 都是有单位元的环，设其单位元分别为 E1，E2

任取$<a1,b1> \in A1 \times A2$，$<a1,b1> \otimes <E1,E2> = <a1*E1, b1*E2> = <a1,b1>$

$<E1,E2> \otimes <a1,b1> = <E1*a1, E2*b1> = <a1,b1>$

所以存在单位元$<E1,E2>$

(3)$<A1\times A2,\oplus,\otimes>$的零元是$<e1,e2>$

设$<A1,\bigstar>$,$<A2,\bigstar>$上单位元分别是 $e1,e2$

则，任取$<a1,b1>\in A1\times A2$， $<a1,b1>\oplus<e1,e2>=<a1\bigstar e1,b1\bigstar e2>=<a1,b1>$

$<e1,e2>\oplus<a1,b1>=<e1\bigstar a1,e2\bigstar b1>=<a1,b1>$

所以存在单位元$<e1,e2>$

假设存在零因子$<c1,c2><d1,d2>$, $<c1,c2>\otimes<d1,d2>=<c1*d1,c2*d2>=<e1,e2>$

即，$c1*d1=e1$，$c2*d2=e2$,

A1,A2 都是无零因子的环

因为 A1 无零因子，所以 c1，d1 中有至少一个等于 e1，

因为 A2 无零因子，所以 c2，d2 中有至少一个等于 e2，

（1）若 $d1=e1$, $c2=e2$

即取$<c1,e2><e1,d2>$,且 c1 不等于 e1, d2 不等于 e2

$<c1,e2>\otimes<e1,d2>=<c1*e1,e2*d2>$

因为 $c1*e1=e1$,且 $e2*d2=e2$

则存在零因子$<c1,e2><e1,d2>$

（2）同理取 $c1=e1$，$d2=e2$，则存在零因子$<e1,c2><d1,e2>$

（3）若取 $c1=d1=e1$，c2,d2 中有一个为 e2,则$<c1,c2><d1,d2>$,中有一个等于$<e1,e2>$，矛盾，无零因子

（4）若取 $c1=d1=e1$，$c2=d2=e2$,则$<c1,c2><d1,d2>$,两个都等于$<e1,e2>$，矛盾，无零因子

所以，虽然 A1,A2 中都无零因子，$A1\times A2$ 中不一定无零因子

§6.2 整环、除环和域

6.2.3 除环、域

除环

假设 <A,+,*> 是一个代数系统，其中，+ 和 * 都是集合 A 上的二元运算，如果满足：

（1）<A,+> 是交换群（Abel群）；

（2）<A-{e}, * >是群;

（3） * 对+ 是可分配的;

则称 <A,+,*> 是一个除环。

§6.2 整环、除环和域

域

假设 <A,+,*> 是一个代数系统，其中，+ 和 * 都是集合 A 上的二元运算，如果满足：

（1）<A,+> 是交换群（Abel群）；

（2）<A-{e}, *>也是交换群（Abel群）；

（3） * 对+ 是可分配的；

则称 <A,+,*> 是一个域。

除环, 域的另一表示

设R是一个有 1 的环，$\hat{R}=R-\{0\}$ ，
如果〈$\hat{R}$，·〉是一个群，则称R为除环，
如果〈$\hat{R}$，·〉是一个可交换群，则称R为域.

（1）有单位元的环R是除环 $\Leftrightarrow$ R中非零元的逆元都存在

$\Leftrightarrow$ $\hat{R}$ 构成乘法群 $\hat{R}=R-\{0\}$.

（2）有单位元的环R是域 $\Leftrightarrow$ R是交换环,且R中非零元素均可逆.

§6.2 整环、除环和域

例 〈**Q**，＋，·〉，〈**R**，＋，·〉均是域，分别称为有理数域和实数域.

分析：〈**Q**，＋〉是交换群；〈**Q-{0}**，·〉是交换群·对＋可分配，所以是域.

分析：〈 **R** ，＋〉是交换群；〈 **R -{0}**，·〉是交换群·对＋可分配，所以是域.

例 令 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ ；＋，·为通常数的加法和乘法，则 〈 $\mathrm{Q}[\sqrt{2}]$ ，＋，·〉是域.

§6.2 整环、除环和域

定理2：

设**R**是一个无零因子的有限环，且｜**R**｜≥ 2，则**R**必为除环。

证明　需要证明〈**R-{0}**，·〉为群.

由于｜**R**｜≥ 2，故**R-{0}**非空，

又，**R**中不含零因子，故**R-{0}**对·封闭，

从而〈 **R-{0}** ，·〉必构成半群，

且由定理 1 知，在该半群中消去律成立，从而〈 **R-{0}** ，·〉是一个满足消去律的有限半群，故必为群.

§ 6.2 整环、除环和域

定理2的推论。

推论： 有限整环必为域. （可交换，含幺，无零因子）

为什么？

（**1**）无零因子的有限环为除环（**2**）可交换的除环为域

无零因子⇔乘法削去律必成立

有限集，削去律成立⇔群

例如由于$\mathbf{Z}_p$是一个有限整环，知$\mathbf{Z}_p$为域（这个域称为素域）.

推论　若p为素数，则$\langle \mathbf{Z}_p, +_p, \times_p \rangle$为域.

$\langle \mathbf{Z}_p, +_p, \times_p \rangle$为有限整环。

$|\mathbf{Z}_p|=p$,无零因子，含幺，可交换

设P为素数，则代数系统 $<Z_p,+_p,\times_p>$为域

证明:因为对任意的 $[a],[b],[c]\in Z_p$

有 $[a]+_p([b]+_p[c])=[a]+_p[b+c]=[a+(b+c)]=[(a+b)+c]$

$=[a+b]+_p[c]=([a]+_p[b])+_p[c]$

$[a]\times_p([b]\times_p[c])=[a]\times_p[b\times c]=[a\times(b\times c)]=[(a\times b)\times c]$

$=[a\times b]\times_p[c]=([a]\times_p[b])\times_p[c]$

所以 $+_p,\times_p$ 满足结合律。

又有 $[a]+_p[b]=[a+b]=[b+a]=[b]+_p[a]$ $[a]\times_p[b]=[a\times b]=[b\times a]=[b]\times_p[a]$

所以 $+_p,\times_p$ 满足交换律。

又有 $[a]\times_p([b]+_p[c])=[a]\times_p[b+c]=[a\times(b+c)]=[a\times b+a\times c]$

$=[a\times b]+_p[a\times c]=([a]\times_p[b])+_p([a]\times_p[c])$

$\times_p$对$+_p$满足分配率

又因为对**[0]**是关于$+_p$的幺元；对任意的$[a]\in Z_p$，$[p-a]\in Z_p$是其逆元。

所以$<Z_p,+_p>$是**abel**群，$<Z_p,+_p,\times_p>$是交换环。

由$\times_p$运算的定义可知**[1]**是关于$\times_p$的幺元。

而且对于$[a],[b]\in Z_p$

若$[a]\times_p[a]=[ab]=0$则**p|ab,**因为**P**是素数，所以必有**p|a**或**p|b**

即**[a]=0**或**[b]=0,**那么$<Z_p,+_p,\times_p>$中没有零因子，

所以，$<Z_p,+_p,\times_p>$是整环（无零因子，含幺，可交换）。而且为有限整环。

所以，$<Z_p,+_p,\times_p>$是域。

§6.2 整环、除环和域

设**F**是一个域，若**b**≠0 (e)，可将**b**$^{-1}$写成 $\frac{1}{b}$ ，**b**$^{-1}$**a**（或**ab**$^{-1}$）写成 $\frac{a}{b}$，在这种记号下，有以下性质成立.

（1） 设**b**≠0，**d**≠0，则

ad ＝ **bc** $\Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

（2） 设**b**≠0，**d**≠0，则 .

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

§6.2 整环、除环和域

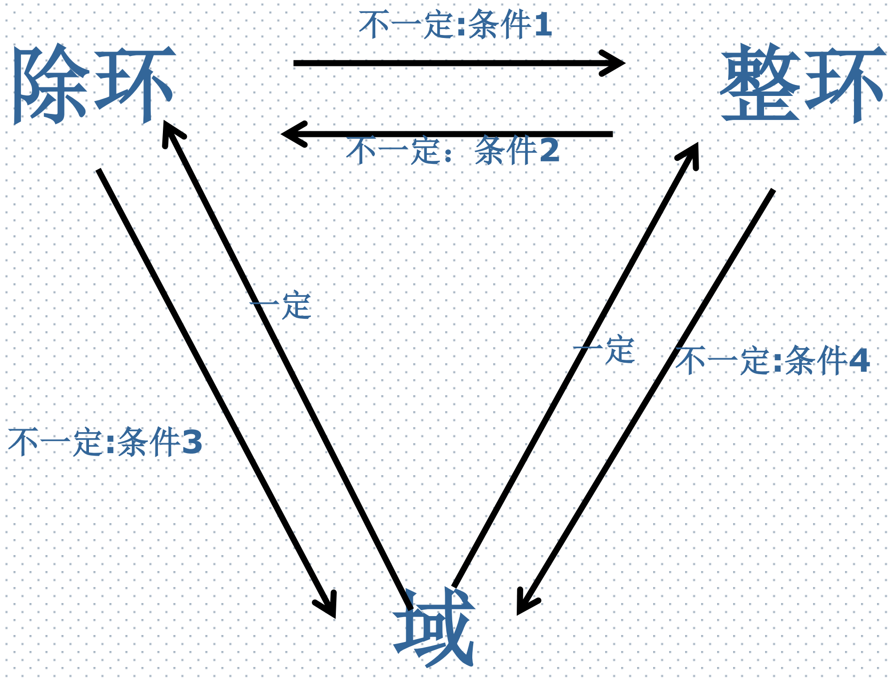
（3） 设$b\neq 0$，$d\neq 0$，则.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

（4） 设$b\neq 0$，$c\neq 0$，$d\neq 0$，则.

$$\frac{a}{b}/\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

整环、除环和域



条件1：除环如可交换则是整环。

<A,+,*>是除环，则<A-{e},*>是群

所以 *有单位元，*削去律成立，则无零因子

又可交换，是整环

条件2：如A-{e}每个元素都有逆元，则是除环。

条件3：可交换的除环是域。

条件4：A-{e}每个元素都有逆元的整环，是域。或有限整环也是域。

§6.2 整环、除环和域

6.2.3整环、域

例 证明：域一定是整环，并且域一定也是除环。

<A,+,*>是域。
则(1)<A,+>是Abel群；(2)<A-{e},*>也是Abel群；(3)*对+可分配

是否满足构成整环的条件：
(1)<A,+>是Abel群；
(2)<A,*>是半群（封闭、可结合），且含幺元、无零因子、可交换。
<A-{e},*>是Abel群，所以<A,*> 封闭、可结合，含幺元；且*可交换
<A,*>无零因子。
若存在零因子即a≠e,b≠e 但a*b=e,
则有a*b=e=a*e 由消去率得 b=e(矛盾)

证明：域一定是整环，但整环不一定是域。

整环不一定是域。因为<A-{e},*>中不一定保证任意元素的逆元存在也就是说<A-{e},*>不一定构成Abel群。

满足什么条件的整环是域?

（1）A-{e}中任意元素的逆元都存在的**整环是域**

或者**(条件4 ?)** （2）可交换的除环**是域(条件3)** **条件4 ?** **有限整环必是域。**

单选题 2分

设置

零环就是没有零因子的环。

A 正确

B 错误

提交

单选题 2分

设置

有幺元、可交换、无零因子的环一定是整环。

A 正确

B 错误

提交

单选题 2分

设置

可交换的除环一定是整环。

A 正确

B 错误

提交

单选题 2分

设置

可交换的除环一定是域。

A 正确

B 错误

提交

单选题 2分

设置

有限整环（有限集上的加、乘运算构成的环）一定是域。

A 正确

B 错误

提交

单选题 2分

设置

整环既然没有零因子，可交换，并且乘法单位元存在，因此整环中乘法削去律一定成立。

A 正确

B 错误

提交

单选题 2分

设 $|A|\geq 2$，A是一个无零因子的有限环，则R必为除环。

A 正确

B 错误

提交

单选题 2分

设置

设 $<A,+,\cdot>$是环,$<f(A),\oplus,\otimes>$ 是环的同态象,则f是$A\rightarrow f(A)$的满同态。

A 正确

B 错误

提交

作业

习题一 2，7

习题二 1，2，4，5

∀∃∅∩∪⊆⊂⊄∉∀∈≤≥…ℵ∑{ }≡±°∞

αβσρυωζψηδεφλμπΔ θ ±∏∧∨∀ }∴
√⊃

≌≈∽∞⊇∩∪℃‰≥≤∵∴∏∈∑≮≯½¼ §

¥{}?± ↔∨∧¬→←⇒⇔

↓↑Λ⊕≠⊙— 〈〉

☆★▽≮≯⌒∵∴∪∩≠—— 〃

// ∴ ∵ ∷ ⊥ ↘ ↗ ↙ ↖ × √

〔「–」÷·º·‹2, b›︶︸Φ