TDF(target date fund)

- **개요** : 일반적인 펀드는 투자기간이 3~5년이나 TDF는 은퇴전까지 운용하는 펀드로 생애주기까지 반영하여 시점별 위험자산의 비중을 제시, 예를 들면 젊은 사람은 나이든 사람에 비해 위험자산을 상대적으로 많이 보유해야 미래 이익실현이 가능

- **목적** : 기존 포트폴리오의 자산배분과 달리 생애주기를 반영한 위험자산비율을 동적으로 제시하여 개인별 위험성향과 연령별 부의 효과가 동시에 적용된 포트폴리오 도출

- **중요변수**

- t : 측정시점, T: 은퇴시점
- $\pi(t)$: 시점 t에서의 contribution

  $\pi(t) = w(t)\,L(t)$, $L(t)$: 연수입, $w(t)$: 개별저축비율
- μ : 위험자산포트폴리오의 연 수익률
- r : 무위험 연 이자율,

  예) KOFR(Korea Overnight Financing Repo Rate)
- σ : 위험자산의 연 변동성(위험자산수익률의 연 표준편차)

- **사용된 효용함수** (CRRA:constant relative risk aversion)

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}\, x^{1-\theta}, & \text{if } \theta > 0,\ \theta \neq 1 \\ \ln x & \text{, if } \theta = 1 \end{cases}$$

$$u'(x) = x^{-\theta} > 0,\quad u''(x) = -\theta x^{-\theta-1} < 0$$

- 효용함수는 위로 볼록 형태

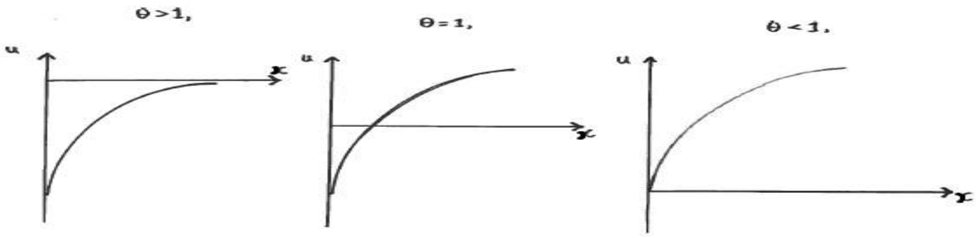


Figure 1

- 자료(How to Design Target-Date Funds)[1]에서 위험회피를 표시하는 변수 γ를 다음과 같이 치환[2]

$$\theta = 1 - \gamma$$

- $\theta = 4,\ \gamma = -3$: 위험회피가중간[3]
  $\theta = 7,\ \gamma = -6$: 위험회피가큼
- 효용함수에 대한 기준은 앞으로 고객 데이터를 통해 추정 필요 : **방법론은 추후논의**

- **위험자산비율 (wealth에 무관)**
- 계산식

$$\bar{\alpha} = \frac{\mu - r}{\theta\, \sigma^2} = SR\,\frac{1}{\theta\sigma}, \quad SR = \frac{\mu - r}{\sigma} \text{ : 사프비율}$$

- 해석: 위험회피가 작을수록, 변동성이 작을수록 SR이 클수록 위험자산의 비율은 크다.
- <u>제시모델의 문제점 극복</u> : 금리상승으로 무위험이자율이 포트폴리오수익률보다 역전되는 시점에서는 다음과 같은 수정된 SR인 MSR(Modified Sharpe Ratio)을 제시함

$$MSR = \begin{cases} \dfrac{\mu - r}{\sigma} & \text{if } \mu \geq r \\ (\mu - r)\sigma & \text{if } \mu < r \end{cases}$$

---

1) Bruder, Benjamin, Léo Culerier, and Thierry Roncalli. "How to design target-date funds?." Available at SSRN 2289099 (2012).
2) 위험회피정도가 양수로 커짐을 표현
3) 논문에서 정한 기준을 일단 사용, 현재 절대적 기준은 없음, 전문가의 의견필요

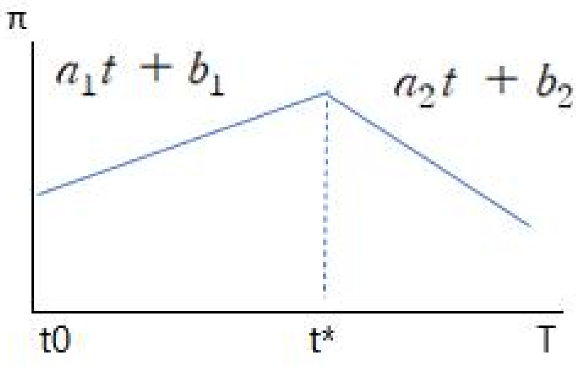
- **동적위험자산비율(glide path)**

- 계산식 4)

$$g(t) = \bar{\alpha} + \frac{\mu \int_t^T \pi(u)\, du}{\theta \sigma^2 m(t)} \quad \text{.............................(1)}$$

여기서 $m(t) = E(X(t))$, $X(t)$: 시점 t에서의 *wealth*

- 해석 : 위험회피도가 낮고, 변동성이 작고, wealth의 평균이 작고, 위험자산의 수익률이 높고, 미래 고정 수익원이 많으면 위험자산의 비율은 크다.
- <u>제시모델의 문제점 극복</u> : 제시논문에서 contribution π를 감소하는 선형함수로 가정하면 생애주기의 젊은연령에서 수익이 최대가 되는 오류발생, 따라서 다음과 같은 형태의 두 개의 선형함수 결합을 제시



[그림 1]

t^* : 생애주기에서 수익원이 최대인 시점

예) $t_0 = 25$, $t^* = 50$, $T = 65$ => 나이로 표시

4) 유도과정은 논문 How to Design Target-Date Funds의 p8 참조

- Glide path의 계산

- 식(1)의 적분 부분을 [그림1]의 방식에 따라 측정시점 t가 속하는 구간을 나눠 다음처럼 계산

a) 측정시점이 생애최대시점 전인 경우: $t \leq t^*$

$$g(t) = \bar{\alpha} + \frac{\mu\left(\frac{1}{2}a_1\,(t^{*2}-t^2)+b_1(t^*-t) + \frac{1}{2}a_2(T^2-t^{*2})+b_2(T-t^*)\right)}{\theta\,\sigma^2\,m(t)}$$

$$\begin{aligned} m(t) = {} & X(0)\,e^{\bar{\alpha}\mu t} + \bar{\alpha}\,\mu\left[\frac{1}{2}a_2\,T^2+b_2\,T+\frac{1}{2}(a_1 - a_2)t^{*2}+(b_1-b_2)t^*\right]t \\ & -\bar{\alpha}\,\mu\left(\frac{1}{6}a_1 t^2+\frac{1}{2}b_1 t\right)t + \left(\frac{1}{2}a_1 t+b_1\right)t \end{aligned}$$

b) 측정시점이 생애최대시점 후인 경우 : $t > t^*$

$$g(t) = \bar{\alpha} + \frac{\mu\left(\frac{1}{2}a_2(T^2-t^2)+b_2(T-t)\right)}{\theta\,\sigma^2\,m(t)}$$

$$\begin{aligned} m(t) = {} & X(0)\,e^{\bar{\alpha}\mu t} + \bar{\alpha}\,\mu\left[\frac{1}{2}a_2\,T^2+b_2\,T\right]t \\ & -\bar{\alpha}\,\mu\left(\frac{1}{6}a_2 t^2+\frac{1}{2}b_2 t\right)t + \left(\frac{1}{2}a_2 t+b_2\right)t \end{aligned}$$

- 결론

- 간단한 가정으로 위험자산비율의 glide path 공식 개선
- 사용된 파라메터인 a_1, a_2, b_1, b_2, t^*는 실제데이터에서 calibration해야 함