SOLUÇÕES DA SEGUNDA PROVA: ANÁLISE COMBINATÓRIA, PROBABILIDADES E APLICAÇÕES

1. Sejam A e B eventos tais que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Calcula: a) $\mathbb{P}(A \cup B)$. b)$\mathbb{P}(A \cup B^c)$.
c) $\mathbb{P}(A^c \cup B^c)$. d) A e B são independentes?

Proof. Temos

a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B^c) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(A \cap B^c) \\ &= \mathbb{P}(A) + [1 - \mathbb{P}(B)] - [\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)] \\ &= \frac{1}{3} + \left[1 - \frac{1}{4}\right] - \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right] \\ &= \frac{11}{12}.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cup B^c) &= \mathbb{P}((A \cap B)^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

d) Como $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, sabemos que A e B não são independentes.

□

2. Uma modeda é jogada 5 vezes. Sabendo-se que o primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos cinco lançamentos supere o número de coroas.

Proof. Temos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[\text{durantes 5 lançamentos têm mais caras que coroas}|\text{primeiro lançamento dá uma cara}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\text{no restos 4 lançamentos têm pelo menos 2 caras}\right] \\ &= 1 - \mathbb{P}\left[\text{no restos 4 lançamentos têm ao maximo 1 caras}\right] \\ &= 1 - \mathbb{P}\left[\text{no restos 4 lançamentos têm 0 caras}\right] - \mathbb{P}\left[\text{no restos 4 lançamentos têm exatamente 1 cara}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{2^4} - \binom{4}{1}\frac{1}{2^4} \\ &= \frac{11}{16},\end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usamos independencia.

□

3. Um estudante resolve um teste com quesões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 30% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece, dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele sabia a resposta?

Proof. Pelo o teorema de Bayes, temos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\,[\text{ sabia} \mid \text{resposta correta }]\\
&= \frac{\mathbb{P}\,[\text{ sabia e resposta correta }]}{\mathbb{P}\,[\text{ resposta correta }]}\\
&= \frac{\mathbb{P}\,[\text{ sabia e resposta correta }]}{\mathbb{P}\,[\text{ não sabia }]\,\mathbb{P}\,[\text{ resposta correta} \mid \text{não sabia }] + \mathbb{P}\,[\text{ sabia }]\,\mathbb{P}\,[\text{ resposta correta} \mid \text{sabia }]}\\
&= \frac{30\%}{30\% + (1-30\%)\frac{1}{2}}\\
&= \frac{6}{13}\,.
\end{aligned}$$

□

4. A lança uma moeda não-viciada $n+1$ vezes e B lança a mesma moeda n vezes. Qual é a probabilidade de A obter mais caras que B?

Proof. Para A, denotamos $(X_i)_{1\le i\le n+1}$ em i-esmo lançamento uma cara aparece, i.e.

$$X_i \;=\; \mathbf{1}_{\{i\text{-ismo lançamento uma cara aparece}\}}\,,$$

e para B, similarmente denotamos $(Y_i)_{1\le i\le n}$ em i-esmo lançamento uma cara aparece. Note que $(X_i)_{1\le i\le n+1}$ e $(Y_i)_{1\le i\le n}$ são i.i.d.. Além disso, definimo

$$S \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_i\,,\quad T \;=\; \sum_{i=1}^{n} Y_i\,.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,[\{\text{ A obter mais caras que B}\}] \;&=\; \mathbb{P}\,[S + X_{n+1} > T]\\
&=\; \mathbb{P}\,[S \ge T, X_{n+1} = 1] + \mathbb{P}\,[S > T, X_{n+1} = 0]\\
&=\; \mathbb{P}\,[S \ge T]\,\mathbb{P}\,[X_{n+1} = 1] + \mathbb{P}\,[S > T]\,\mathbb{P}\,[X_{n+1} = 0]\\
&=\; \frac{1}{2}\,(\mathbb{P}\,[S \ge T] + \mathbb{P}\,[S > T])\\
&=\; \frac{1}{2}\,(\mathbb{P}\,[S \ge T] + \mathbb{P}\,[S < T])\\
&=\; \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

onde na terçeira igualdade usamos independencia, e peniultima igualdade usamos simmetria, i.e. $\mathbb{P}\,[S > T] = \mathbb{P}\,[S < T]$. Portanto a probabilidade de A obter mais caras que B é 1/2.

□

5. Cada membro de uma população de tamanho $n+1$, independentemente, do sexo feminino com probabilidade p ou do sexo masculino com probabilidade $1-p$. Seja X o número dos outros n membros da população que são do mesmo sexo que a pessoa 1. (Assim, $X = n$ se todas as $n+1$ pessoas forem do mesmo sexo.)

a) Determine $\mathbb{P}(X = i)$, para $i = 0, \cdots, n$.

b) Agora, suponha que duas pessoas do mesmo sexo serão amigas, independentemente de outros pares, com probabilidade α; enquanto duas pessoas de sexos opostos serão amigas com probabilidade β. Determine a função de massa de probabilidade do nmero de amigos da pessoa 1.

Proof. a) Denotamos

$$A = \{\text{pessoa 1 é feminina}\}$$

como o evento que pessoa 1 é masculina. Para todo $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X = k] &= \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[X = k \mid A] + \mathbb{P}[A^c]\mathbb{P}[X = k \mid A^c] \\
&= p\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + (1-p)\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}\left[p^{k+1}(1-p)^{n-k} + (1-p)^{k+1}p^{n-k}\right].
\end{aligned}$$

b) Para todo $i \in \{2, 3, \cdots, n+1\}$, denotamos

$$\begin{aligned}
A_i &= \{\text{Pessoa i é feminina}\}, \\
B_i &= \{\text{Pessoa i e Pessoa 1 são amigos}\}.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B_i] &= \mathbb{P}[B_i \cap A \cap A_i] + \mathbb{P}[B_i \cap A \cap A_i^c] + \mathbb{P}[B_i \cap A^c \cap A_i] + \mathbb{P}[B_i \cap A^c \cap A_i^c] \\
&= p^2\alpha + 2p(1-p)\beta + (1-p)^2\alpha.
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de cada pessoa $i \in \{2, \cdots, n\}$ é amigoa/amiga com pessoa 1 é $q := p^2\alpha + 2p(1-p)\beta + (1-p)^2\alpha$. Escrevemos S a quantidade de amigos de pessoa 1, e temos

$$\mathbb{P}[S = k] = \binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k} \qquad \text{para todo } k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$$

e $\mathbb{P}[S = k] = 0$ se $k \notin \{0, 1, 2, \cdots, n\}$.

□