SOLUÇÕES DA PRIMEIRA PROVA

1. Quantos números de 10 algarismos podem ser formados usando apens os algarismos $1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4$?

Proof. Como temos 3 copias de "1", 2 copias de "2", 2 copias de "3" e 3 copias de "4", pela formula das permutações de elementos nem todos distintos, temos

$$\begin{aligned}\frac{10!}{3!2!2!3!} &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2!2!3!} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 5 \times 4}{2!2!} \\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 5 \\ &= 25200\end{aligned}$$

quantidade de permutações distintas.

□

2. De quantos modos é possível formar uma roda de ciranda com 6 meninas e 10 meninos sem que haja duas meninas em posições adjacentes?

Proof. O segundo lema de Kaplansky dize que têm

$$\frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}$$

modos para escolher um subconjunto de p elementos do conjunto $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ sem dois elementos consecutivos, onde 1 e n são considerados vizinhos. Então aplicamos $n = 10 + 6 = 16$ e $p = 6$.

Para um subconjunto $A = \{i_1, i_2, \cdots, i_6\}$ de Ω como assima, podemos colocar as meninas nas posição de A e meninos nas posições de A^c, neste modos têm

$$6!10!$$

permutações distintas. Então em sentido de rodas, temos

$$\frac{16}{10}\binom{10}{6}\frac{6!10!}{16} = \frac{9!10!}{4!}$$

rodas distintas como pedidas.

□

3. Sejam $I_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ com $m \leq n$.

a) Quantas são as funções $f : I_m \mapsto I_n$ estritamente crescentes?

b) Quantas são as funções $f : I_m \mapsto I_n$ não decrescentes?

Proof. a) Como a função é estritamente crescentes, existe uma bijeção

$$(I_m, f) \mapsto \{f(1), f(2), \cdots, f(m)\}.$$

Então a cardinalidade de funções estritamente crescentes é equal à a quantidade dos subconjutos de m elementos do conjunto I_n, que é $\binom{n}{m}$.

b) Vamos construir uma bijeção entre uma função não descresante e uma configuração de m ballas em $m + n$ caixas ordenada na reta tal que cada caixa pode ter uma bola ao maximo, e primeira caixa fica vazia. Definimos

$$f(m) = \text{ a cardinalidade das caixas vazias antes da } m-\text{isma bola.}$$

Daí, temos $\binom{n+m-1}{m}$ funções assim.

□

4. Numa fila de cinema, m pessoas tem notas de R\$ 5,00 e n ($n < m$) pessoas tem notas de R\$ 10,00. A entrada custa R\$ 5,00.

a) Quantas são as filas possiveis?
b) Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar sem troco?
c) Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar com três notas de R$ 5,00 reais?

Proof. a) Como somente têm dois tipos de notas, pela a formuala de combinações simples, sabemos que têm $\binom{m+n}{m}$ filas possiveis.

b) Para uma fila que tem problema de trocos que e mesmo como um caminho comerçando de $(0,0)$ e chega $(m+n, m-n)$ e toca a linha de $y=-1$, pelo princípio de reflexão podemos contruir um caminho de $(0,-2)$ a $(m+n, m-n)$. Denotamos S por a quantidade das etapas de subidas e D por a quantidade das etapas de decidas, e temos

$$\begin{aligned} S+D =& m+n, \\ S-D =& m-n-(-2)\,. \end{aligned}$$

Portanto, temos $S=m+1$, $D=n-1$ e a cardinalidade do caminhos assim é $\binom{m+n}{m+1}$.

c) b) Para uma fila que tem problema de trocos que e mesmo como um caminho comerçando de $(0,3)$ e chega $(m+n, m-n+3)$ e toca a linha de $y=-1$, pelo princípio de reflexão podemos contruir um caminho de $(0,-5)$ a $(m+n, m-n)$. A razão é que o ponto $(0,-5)$ é simetrico a $(0,3)$ com respeito à linha $y=-1$. Denotamos S por a quantidade das etapas de subidas e D por a quantidade das etapas de decidas, e temos

$$\begin{aligned} S+D =& m+n, \\ -5+S-D =& m-n+3\,. \end{aligned}$$

Portanto, temos $S=m+4$, $D=n-4$ e a cardinalidade dos caminhos assim é $\binom{m+n}{m+4}$.

□

5. Calcule o valor da suma

$$S \;=\; 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\,.$$

Proof. Para $k \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$k^3 = A\binom{k+2}{3} + B\binom{k+1}{2} + C\binom{k}{1} + D$$

Comparando o exponentes de k^3, k^2, k e k^0, obtemos $A=6$, $B=-6$, $C=1$ e $D=0$. Portanto, temos

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \;=\; \sum_{k=1}^{n} 6\binom{k+2}{3} - 6\binom{k+1}{2} + \binom{k}{1}\,.$$

Aplicando o teorema das colunas

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} 6\binom{k+2}{3} - 6\binom{k+1}{2} + \binom{k}{1} &= 6\binom{n+2+1}{3+1} - 6\binom{n+1+1}{2+1} + \binom{n+1}{1+1} \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

□