定理 3.9　单调上升(下降)有上(下)界的数列必有极限存在.

证明　设数列$\{x_n\}$单调上升有上界. 令 B 是$\{x_n\}$全体上界组成的集合，即

$$B=\{b\mid x_n\leqslant b,\forall n\},$$

而
$$A=\mathbf{R}\setminus B,$$

则 $A|B$ 是实数的一个分划. 事实上，由$\{x_n\}$有上界，知 B 不空. 又$\{x_n\}$单调上升，故 $x_1-1\in A$，即 A 不空. 由 $A=\mathbf{R}\setminus B$ 知，A，B 不漏. 又对任给 $a\in A$，$b\in B$，则存在 n_0，使 $a<x_{n_0}\leqslant b$，即 A，B 不乱. 故 $A|B$ 是实数的一个分划. 根据实数基本定理，存在 $\alpha\in\mathbf{R}$ 使得对任意 $a\in A$，任意 $b\in B$，有 $a\leqslant\alpha\leqslant b$.

下证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$. 事实上，对任给 $\varepsilon>0$，由于 $\alpha-\varepsilon\in A$，知存在 N，使 $\alpha-\varepsilon<x_N$，又$\{x_n\}$单调上升，故当 $n>N$ 时，有 $\alpha-\varepsilon<x_N\leqslant x_n$. 注意到 $\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}\in B$，便有 $x_n\leqslant\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}$，故当 $n>N$ 时有

$$\alpha-\varepsilon<x_n\leqslant\alpha+\frac{\varepsilon}{2},$$

于是
$$|x_n-\alpha|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$.

显然，单调下降的情形同样可以用上述证明方法给出，但也可以用上述结论证明. 事实上，若$\{x_n\}$单调下降有下界，令 $y_n=-x_n$，则$\{y_n\}$就单调上升有上界，从而有极限. 设极限为 α，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(-y_n)=-\lim_{n\to\infty}y_n=-\alpha.$$

定理 3.9 证完.

定理 3.9 是只断言极限存在. 而没有给出如何计算极限的第一个定理. 但即使只给出极限存在，有时已能提供计算的方法.

例 14　设

$$x_1=\sqrt{2},\quad x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\quad n=2,3,\cdots,$$

求$\{x_n\}$的极限.

解　显然$\{x_n\}$是单调上升的，下面用数学归纳法证明$\{x_n\}$有上界. 显然 $x_1=\sqrt{2}<2$. 若 $x_n\leqslant 2$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\leqslant\sqrt{2+2}=2.$$

故$\{x_n\}$单调上升有上界，从而必有极限. 设极限为 a，由

$$x_{n+1}^2=2+x_n,$$

令 $n\to\infty$，即得 $a^2=2+a$．解得 $a=-1$ 或 $a=2$．由于 $x_n\geqslant\sqrt{2}$，故必有 $a\geqslant\sqrt{2}$．舍去 $a=-1$，得 $a=2$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$．

通常我们称定理 3.9 为单调有界原理，它的意义在于给出了数列极限存在的一个判别方法．与极限定义相比，它并不需要预先估计极限值，相反，如上例表明的，有时在用它证明了极限存在的情况下，通过极限的运算可以方便地求出极限值．但务必注意，在这里极限存在性的前提是非常重要的．考察数列 $x_n=(-1)^n$，显然 $\{x_n\}$ 的极限不存在(本节习题 10)，但它满足 $x_{n+1}=-x_n$．令 $n\to\infty$ 两边取极限，便得 $a=-a$，即 $a=0$．这显然是荒谬的结果．

最后，我们用单调有界原理证明一个重要数列极限的存在性．

例 15 证明数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限存在．

证明 先证 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调上升的，即证

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

或

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\leqslant 1+\frac{1}{n+1}.$$

由平均值不等式即得

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\leqslant\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}.$$

再证 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 有上界．我们试图证明 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$，即要证

$$\sqrt[n]{\frac{1}{4}}<\frac{n}{n+1}.$$

此式当 $n=1$ 时显然成立，当 $n>1$ 时，由平均值不等式即得

$$\sqrt[n]{\frac{1}{4}}=\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}\leqslant\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(n-2)}{n}$$

$$=1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

故由单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在．

通常我们记这个极限为 e，它是一个无理数，用前几位小数表示即为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=2.718\,281\,8\cdots.$$

称以 e 为底的对数为自然对数，记为 $\log_{\mathrm{e}}x=\ln x$．为什么称这是“自然对数”，读者学到后面便会明白．