Lista n°4: Probabilidade condicional, Teorema de Bayes e Independência

Entregue os exercícios marcados com $ até o dia 08/02 no seguinte e-mail: eduardojanotti@ime.usp.br

Exercício 1 :

Escolhe-se ao acaso um número entre 1 e 50, Se o número é primo, qual é a probabilidade de que seja impar?

Exercício 2 :

$ Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo que no primeiro lançamento deu coroa, calcule a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas.

Exercício 3 :

Jogue um dado duas vezes. Calcule a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados foi 7.

Exercício 4 :

$ Duas máquinas A e B produzem 3000 peças em um dia. A máquina A produz 1000 peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A?

Exercício 5 :

Três urnas I,II e III contêm respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a II?

Exercício 6 :

$ Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece, dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele sabia a resposta?

Exercício 7 :

Se A e B são eventos independentes tais que

$$P(A) = 1/3 \text{ e } P(B) = 1/2.$$

Calcule

$$P(A \cup B),\ P(A^c \cup B^c) \text{ e } P(A^c \cap B).$$

Exercício 8 :

Se A e B são eventos independentes tais que

$$P(A) = 1/4 \text{ e } P(A \cup B) = 1/3.$$

Calcule $P(B)$.

Exercício 9 :

$ Prove que, se A, B e C são eventos independentes, então

(a) A, B^c são independentes;

(b) A^c, B e C^c são independentes

Exercício 10 :

$ A lança uma moeda não-viciada $n+1$ vezes e B lança a mesma moeda n vezes. Qual é a probabilidade de A obter mais caras que B?

Exercício 11 :

$ Uma urna contém a bolas azuis e b bolas brancas. Sacam-se sucessivamente bolas dessa urna e, cada vez que uma bola é sacada, ela é devolvida a urna e são acrescentadas à urna mais p bolas de mesma cor que a bola sacada. Seja A_i o evento "a i-ésima bola sacada é azul". Calcule

(a) $P(A_1)$

(b) $P(A_2)$

(c) $P(A_3)$

(d) $P(A_2|A_1)$

(e) $P(A_1|A_2)$

Exercício 12 :

Um júri de 3 pessoas tem dois jurados que decidem corretamente (cada um) com probabilidade p e um terceiro jurado que decide por cara ou coroa. As decisões são tomadas por maioria. Outro júri tem probabilidade p de tomar uma decisão correta. Qual dos júris tem maior probabilidade de acerto?

Exercício 13 :

Deseja-se estimar a probabilidade p de um habitante de determinada cidade ser um consumidor de drogas. Para isso, realizam-se entrevistas com alguns habitantes da cidade. Não se deseja perguntar diretamente ao entrevistado se ele usa drogas, pois ele poderia se recusar a responder ou, o que seria pior, mentir. Adota-se então o seguinte procedimento: propõe-se ao entrevistado duas perguntas do tipo SIM-NÃO:

1. Você usa drogas?
2. Seu aniversário é anterior ao dia 2 de julho?

Pede-se ao entrevistado que jogue uma moeda, longe das vistas do entrevistador, e que, se o resultado for cara, responda à primeira pergunta e, se for coroa, responda à segunda pergunta.

(a) Sendo p_1 a probabilidade de um habitante da cidade responder sim, qual é a relação entre p e p_1?

(b) Se foram realizadas 1000 entrevistas e obtidos 600 sim, é razoável imaginar que $p_1 \approx 0,6$. Qual seria, então, sua estimativa de p

Exercício 14 :

$ Uma firma fabrica "chips"de computador. Em um lote de 1000 "chips", uma amostra de 10 "chips"revelou 1 "chip"defeituoso. Supondo que no lote houvesse k "chips"defeituosos:

(a) Calcule a probabilidade de, em uma amostra de 20 "chips", haver exatamente um "chip"defeituoso.

(b) Determine o valor de k que maximiza a probabilidade calculada no item (a).