

SEGUNDA PROVA: ANÁLISE COMBINATÓRIA, PROBABILIDADES E APLICAÇÕES

8:00–10:00 de 12 de fevereiro de 2025, Sala B16, IME–USP

Nome Completo:

Cada exercício vale dois pontos. Escreva suas respostas e dê argumentos sobre suas respostas.

Exercício	1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o	5 ^o	Total
Pontos						

1. Sejam A e B eventos tais que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Calcule:

- $\mathbb{P}(A \cup B)$.
 - $\mathbb{P}(A \cup B^c)$.
 - $\mathbb{P}(A^c \cup B^c)$.
 - A e B são independentes?
2. Uma moeda não viciada é jogada 5 vezes. Sabendo-se que o primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos cinco lançamentos supere o número de coroas.
3. Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 30% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece, dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa (não viciada). Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele sabia a resposta?
4. A lança uma moeda não-viciada $n + 1$ vezes e B lança a mesma moeda n vezes. Qual é a probabilidade de A obter mais caras que B?
5. Cada membro de uma população de tamanho $n + 1$, independentemente, do sexo feminino com probabilidade p ou do sexo masculino com probabilidade $1 - p$. Seja X o número dos outros n membros da população que são do mesmo sexo que a pessoa 1. (Assim, $X = n$ se todas as $n + 1$ pessoas forem do mesmo sexo.)
- Determine $\mathbb{P}(X = i)$, para $i = 0, \dots, n$.
 - Agora, suponha que duas pessoas do mesmo sexo serão amigas, independentemente de outros pares, com probabilidade α ; enquanto duas pessoas de sexos opostos serão amigas com probabilidade β . Determine a função de massa de probabilidade do número de amigos da pessoa 1.