IME/USP - CURSOS DE VERÃO 2025
ANÁLISE COMBINATÓRIA, PROBABILIDADES E APLICAÇÕES

Professor: Shangjie Yang – **Contato**: shjyang@ime.usp.br
Monitor: Eduardo Janotti Email: eduardojanotti@ime.usp.br
Horário: segunda à sexta, das 8:00 às 10:00 hs – sala: B10, IME/USP
A primeira prova vai ser baseado seguintes exercícios da primeira referência (anexado).
Cronograma

- 6/1 - Conjuntos P15, Exercicios: Teorema 1.
- 7/1 - Permutações Simples: P29 Exercicios: 2, 4, 9, 15
- 8/1 - Combinações Simples P35 Exercicios: 5, 7, 10, 38
- 9/1 - Outras Permutações P44 Exercicios: 3, 4 P47 Exercicios: 1, 5
- 10/1 - Aula de exercícios
- 13/1 - Combinações Completas P53 Exercicios: 4, 6, 13, 15
- 14/1 - Princípio da Inclusão-Exclusão P66 Exercicios: 3, 4, 12, 15
- 15/1 - Lemas de Kaplansky P76 Exercicios: 1, 3, 5, 6
- 16/1 - Princípio da reflexão
- 17/1 - Aula de exercícios
- 20/1 - Triângulo de Pascal
- 21/1 - Binômio de Newton
- 22/1 - Aula de exercícios
- 23/1 - Prova I
- 24/1 - Correção Prova I
- 27/1 - Introdução Probabilidade
- 28/1 - Probabilidade
- 29/1 - Probabilidade condicional
- 30/1 - Teorema de Bayes
- 31/1 - Aula de exercícios
- 3/2 - Independência
- 4/2 - Variáveis Aleatórias
- 5/2 - Esperança
- 6/2 - Aula de exercícios
- 7/2 - Distribuições discretas
- 10/2 - Distribuições discretas
- 11/2 - Aula de exercícios
- 12/2 - Prova II
- 13/2 - Correção Prova II
- 14/2 - Divulgação Notas

Critério de Avaliação: MF =0.3*Ex+ 0.3*P1 + 0.4*P2

Bibliografia:
1. Morgado, A. D. O., Carvalho, J. B. P. D., Carvalho, P. C. P., & Fernandez, P. J. Análise combinatória e probabilidade. Sexta edição.
2. ROSS, Sheldon. A First Course in Probability 8th Edition. Pearson, 2009
3. Franco, T. Princípios de Combinatória e Probabilidade

é chamado conjunto *diferença* de A e B, é representado geralmente por $A - B$. A parte sombreada da Figura 1.6 mostra a diferença de A e B.

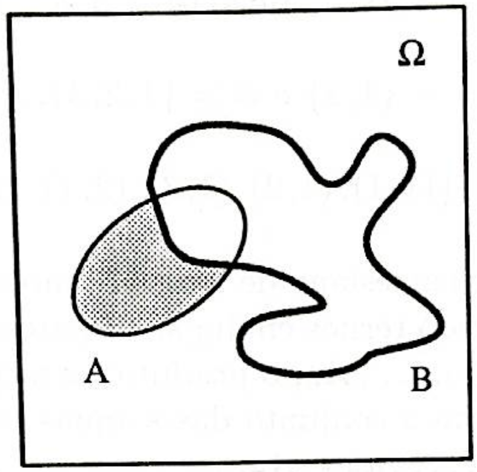

Fig. 1.6

Se $B \subset A$, a diferença $A - B$ é chamada *diferença própria*.

O Teroema 1, a seguir, lista as propriedades mais importantes que relacionam os conceitos definidos anteriormente.

Teorema 1.

1. *Para todo conjunto* $A \subset \Omega$, $A \cup \phi = A$, $A \cap \phi = \phi$.
2. $A \subset B$ *se e somente se* $A \cup B = B$.
3. $A \subset B$ *se e somente se* $A \cap B = A$.
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. $A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \phi$, $\phi^c = \Omega$, $\Omega^c = \phi$.
9. $(A^c)^c = A$; $A \subset B$ *se e somente se* $B^c \subset A^c$.
10. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
11. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

A demonstração deste teorema é deixada como exercício.

Introduzimos agora a noção de produto cartesiano de dois conjuntos. Dados dois conjuntos A e B, chamaremos de *produto*

Exemplo 2.11: De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada?

Solução: A divisão pode ser feita colocando as 8 pessoas em fila e dividindo-as de modo que um dos grupos seja formado pelas 4 primeiras pessoas e o outro pelas 4 últimas. Como há 8! modos de colocar as pessoas em fila, a resposta parece ser 8!

Entretanto consideremos a divisão $abcd/efgh$. Ela é idêntica à divisão $efgh/abcd$ (os grupos formados são os mesmos: um grupo é $\{a, b, c, d\}$ e o outro é $\{e, f, g, h\}$). Não obstante, na nossa contagem de 8!, essas divisões foram contadas como se fossem distintas. Além disso, divisões como $abcd/efgh$ e $cadb/efgh$, que diferem pela ordem dos elementos em cada grupo, apesar de idênticas foram contadas como se fossem distintas. Cada divisão foi contada $2 \times 4! \times 4!$ vezes (2 por causa da ordem dos grupos; 4! por causa da ordem dos elementos no 1º grupo e 4! por causa da ordem dos elementos no 2º grupo).

Se contamos 8! divisões e cada divisão foi contada $2 \cdot 4! \cdot 4!$ vezes, o número de divisões é $\frac{8!}{2 \times 4! \times 4!} = 35$. □

Exercícios

1. Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO:

a) que começam por consoante e terminam por vogal?
b) que têm as letras C, A, P juntas nessa ordem?
c) que têm as letras C, A, P juntas em qualquer ordem?
d) que têm as vogais e as consoantes intercaladas?
e) que têm a letra C no 1º lugar e a letra A no 2º lugar?
f) que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º lugar?
g) que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º lugar ou a letra P no 3º lugar?

2. Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.

a) que lugar ocupa o número 62417?
b) qual o número que ocupa o 66º lugar?
c) qual o 200º algarismo escrito?
d) qual a soma dos números assim formados?

3. De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

4. Se A é um conjunto com n elementos, quantas são as funções $f: A \to A$ bijetoras?

5. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

6. Quantas são as permutações dos números $(1, 2, \ldots, 10)$ nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

7. De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

a) em dois grupos de 6?
b) em três grupos de 4?
c) em um grupo de 5 e um grupo de 7?
d) em seis grupos de 2?
e) em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

8. De quantos modos r rapazes e m moças podem se colocar em fila de modo que as moças fiquem juntas?

9. Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e o do Iraque e o dos Estados Unidos não podem sentar juntos?

10. Um cubo de madeira tem uma face de cada cor. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre essas faces?

11. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces indistinguíveis de um cubo de madeira?

12. Resolva o problema anterior para:

a) números de 1 a 4, tetraedro regular;
b) números de 1 a 8, octaedro regular;
c) números de 1 a 12, dodecaedro regular;
d) números de 1 a 20, icosaedro regular;
e) números de 1 a 8, prisma hexagonal regular;
f) números de 1 a 5, pirâmide quadrangular regular.

13. Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos de primeira rodada?

14. Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \ldots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k- ésima posição é inferior a $k+4$, para todo k?

15. Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \ldots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k- ésima posição é maior que $k-3$, para todo k?

2.3 Combinações Simples

De quantos modos podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados? Ou, o que é o mesmo, quantos são os subconjuntos com p elementos do conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$?

Cada subconjunto com p elementos é chamado de uma *combinação simples* de classe p dos n objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 são

$$\{a_1, a_2, a_3\} \quad \{a_1, a_2, a_4\} \quad \{a_1, a_2, a_5\} \quad \{a_1, a_3, a_4\} \quad \{a_1, a_3, a_5\}$$
$$\{a_1, a_4, a_5\} \quad \{a_2, a_3, a_4\} \quad \{a_2, a_3, a_5\} \quad \{a_2, a_4, a_5\} \quad \{a_3, a_4, a_5\}.$$

b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse determinada mulher?

2. Para a seleção brasileira foram convocados dois goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

3. Quantas diagonais possui um polígono de n lados?

4. Quantas diagonais possui:

a) um octaedro regular?
b) um icosaedro regular?
c) um dodecaedro regular?
d) um cubo?
e) um prisma hexagonal regular?

5. Tem-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R' paralela a R. Quantos quadriláteros convexos com vértices em 4 desses 13 pontos existem?

6. Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais uma única vez, são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

7. Sejam $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as funções $f \colon I_m \to I_n$ estritamente crescentes?

8. Um homem tem 5 amigas e 7 amigos. Sua esposa tem 7 amigas e 5 amigos. De quantos modos eles podem convidar 6 amigas e 6 amigos, se cada um deve convidar 6 pessoas?

9. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e o dígito 8 exatamente 2 vezes?

10. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura pelo menos 3 vezes e o dígito 8 pelo menos 2 vezes?

11. Quantos são os p-subconjuntos (isto é, subconjuntos com p elementos) de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ nos quais:

a) Calcule x;
b) Determine quantos professores há em cada banca.

33. A partir de um conjunto de a atletas formam-se t times de k atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número de vezes. Determine:

a) de quantos times cada atleta participa;
b) em quantos times cada par de atletas fica junto.

34. Mostre que existe um tabuleiro 6×4, cujas casas são todas pretas ou brancas, no qual nenhum retângulo tem as 4 casas dos vértices da mesma cor. Mostre que, em todo tabuleiro 7×4 cujas casas são todas pretas ou brancas, sempre existe um retângulo cujas 4 casas extremas têm a mesma cor. (Observação: no tabuleiro casas adjacentes não têm necessariamente cores diferentes).

35. Prove que um produto de p inteiros consecutivos é sempre divisível por $p!$.

36. Prove, usando um argumento combinatório, que os números abaixo são inteiros para qualquer n natural.

a) $\frac{(2n)!}{2^n}$;

b) $\frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$;

c) $\frac{(3n)!}{n! 2^n 3^n}$;

d) $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$;

e) $\frac{(n!)!}{(n!)^{(n-1)!}}$.

37. No início de uma festa há 6 rapazes desacompanhados e 10 moças desacompanhadas. Quantos são os estados possíveis no fim da festa?

38. Prove, usando um argumento combinatório, que

$$C_m^n C_n^r = C_m^r C_{m-r}^{n-r}.$$

Exercícios

1. De quantos modos 5 meninos e 5 meninas podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

2. De quantos modos n crianças podem formar uma roda de ciranda de modo que duas dessas crianças permaneçam juntas? E de modo que $p(p < n)$ dessas crianças permaneçam juntas?

3. De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher?

4. De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher e que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

5. São dados n pontos em círculo. Quantos n-ágonos (não necessariamente convexos) existem com vértices nesses pontos?

6. Uma pulseira deve ser cravejada com um rubi, uma esmeralda, um topázio, uma água-marinha, uma turmalina e uma ametista. De quantos modos isso pode ser feito supondo:

a) que a pulseira tem fecho e um relógio engastado no fecho;
b) que a pulseira tem fecho;
c) que a pulseira não tem fecho e o braço só pode entrar na pulseira em um sentido;
d) que a pulseira não tem fecho e o braço pode entrar na pulseira nos dois sentidos.

7. De quantos modos 5 mulheres e 6 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas?

8. Quantos dados diferentes existem se a soma das faces opostas deve ser 7?

Exercícios

1. A figura 2.9 representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.

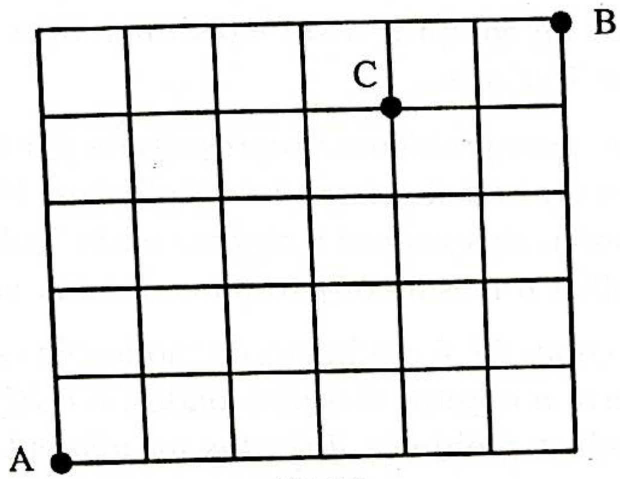

Fig. 2.9

a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?

b) Quantos desses trajetos passam por C?

2. Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6 000 000, podem ser formados usando apenas os algarismos 1,3,6,6,6,8,8?

3. Uma partícula, estando no ponto (x, y), pode mover-se para o ponto $(x + 1, y)$ ou para o ponto $(x, y + 1)$. Quantos são os caminhos que a partícula pode tomar para, partindo do ponto (0,0), chegar ao ponto (a, b), onde $a > 0$ e $b > 0$?

4. Uma patícula, estando no ponto (x, y, z), pode mover-se para o ponto $(x + 1, y, z)$ ou para o ponto $(x, y + 1, z)$ ou para o ponto $(x, y, z + 1)$. Quantos são os caminhos que a partícula pode tomar par, partindo do ponto (0,0,0), chegar ao ponto (a, b, c), onde $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$?

5. Quantos números de 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos 1,1,1,1,2 e 3?

Exercícios

1. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de

$$x + y + z + w = 3?$$

2. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de

$$x + y + z + w < 6?$$

3. Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z = 10$?

4. Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z < 10$?

5. Quantas são as peças de um dominó comum?

6. $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Quantas são as funções $f\colon I_m \to I_n$ não descrescentes?

7. De quantos modos podemos colocar em fila 7 letras A, 6 letras B e 5 letras C de modo que não haja duas letras B juntas?

8. Qual é o número máximo de termos de um polinômio homogêneo do grau p com n variáveis?

9. Qual é o número máximo de termos de um polinômio do grau p com n variáveis?

10. A fábrica X produz 8 tipos de bombons que são vendidos em caixas de 30 bombons (de um mesmo tipo ou sortidos). Quantas caixas diferentes podem ser formadas?

11. De quantos modos podem ser pintados 6 objetos iguais usando 3 cores diferentes?

12. Quantos números inteiros entre 1 e 100 000 têm soma dos algarismos igual a 6?

13. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$$

nas quais exatamente 3 incógnitas são nulas? Em quantas pelo menos três são nulas?

14. Os números inteiros compreendidos entre 100 000 e 999 999 são divididos em classes de modo que dois números diferentes estão na mesma classe se e só se eles têm os mesmos algarismos, diferindo apenas na ordem. Assim, por exemplo, 552 221 e 125 252 estão na mesma classe. Quantas classes são assim formadas?

15. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de $x+y+z+w=20$ nas quais $x>y$?

16. Quantos inteiros entre 1 e 100 000, inclusive, têm a propriedade: "cada dígito é menor ou igual ao seu sucessor"?

17. Quantas permutações de 7 letras A e 7 letras B, nas quais não há 3 letras A adjacentes, existem?

18. Uma urna contém n bolas, das quais devem ser escolhidas p bolas. Determine:

a) O número A_n^p de seleções ordenadas, se repetições não são permitidas (essas seleções são denominadas arranjos simples de classe p das n bolas);
b) O número de seleções desordenadas (isto é, seleções que só diferem pela ordem são consideradas iguais), se repetições não são permitidas;
c) O número AR_n^p de seleções ordenadas, se repetições são permitidas (essas seleções são chamadas de arranjos completos de classe p das n bolas. Também são usados os nomes arranjos com reposição ou arranjos com repetição);
d) O número de seleções desordenadas, se repetições são permitidas.

19. Sejam A e B conjuntos de números naturais com $\#A=p$ e $\#B=n$.

a) Quantas são as funções $f\colon A\to B$?
b) Quantas são as funções injetoras $f\colon A\to B$?
c) Quantas são as funções $f\colon A\to B$ estritamente crescentes?

$$+(-1)^r\frac{n}{p_1p_2\cdots p_r}$$

$$= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right). \quad \square$$

Exercícios

1. Quantos inteiros entre 1 e 1000 inclusive:

a) são divisíveis por pelo menos três dos números 2, 3, 7 e 10
b) não são divisíveis por nenhum dos números 2, 3, 7 e 10?
c) são divisíveis por exatamente um dos números 2, 3, 7 e 10
d) são divisíveis por pelo menos um dos números 2, 3, 7 e 10

2. Quantos inteiros entre 1000 e 10000 inclusive não são di-visíveis nem por 2, nem por 3 e nem por 5?

3. Lançam-se 3 dados. Em quantos dos 6^3 resultados possíveis a soma dos pontos é 12?

4. Quantas são as soluções inteiros não-negativas de $x+y+z=$ 12 nas quais pelo menos uma incógnita é maior que 7?

5. Se $\#A = n$ e $\#B = p$ $(n \geq p)$, quantas são as $f: A \to B$ sobrejetoras?

6. Determine o número de permutações de (1,2,3,4,5,6) nas quais nem o 4 ocupa o 4º lugar nem o 6 ocupa o 6º lugar.

7. Quantos são os inteiros de n dígitos, que têm todos os dígitos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3\}$? Em quantos deles os inteiros 1, 2 e 3 figuram todos?

8. Determine o número de permutações das letas $AABBCCD$ nas quais não há letras iguais adjacentes.

9. Quantos inteiros entre 1 e 1 000 000 não são nem quadrados perfeitos nem cubos perfeitos?

10. Determine o número de permutações de $(1, 2, \ldots, n)$ nas quais não figuram (em posições consecutivas e na ordem dada) nem o par 12, nem o par 23,...,nem o par $(n-1)n$.

11. Oito crianças estão sentadas em torno de um carrossel. De quantos modos elas podem trocar de lugar de modo que cada criança passe a ter uma criança diferente a sua direita?

✓**12.** Calcule $\varphi(360)$.

13. Quantas espécies de polígonos regulares de 100 lados existem?

14. Se p é um primo, quanto vale $\varphi(p)$?

✓**15.** Quantos são os elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 500\}$ que são divisíveis por 3 ou 5 mas não são divisíveis por 7?

16. a) De quantos modos podemos distribuir μ partículas distintas por n níveis distintos? (em Física essa distribuição de partículas por níveis de energia é chamada de estatística de Boltzmann).

b) Em quantas dessas distribuições todos os níveis ficam ocupados?

17. a) De quantos modos podemos distribuir μ partículas iguais por n níveis distintos? (em Física essa distribuição é chamada de estatística de Bose-Einstein).

b) Em quantas dessas distribuições todos os níveis ficam ocupados?

18. De quantos modos podemos distribuir μ partículas iguais por n níveis distintos se nenhum nível pode conter mais de uma partícula? (em Física essa distribuição é chamada de estatística de Fermi-Dirac).

Segundo Lema de Kaplansky: *O número de p- subconj de $\{1, 2, \ldots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é, siderando 1 e n como consecutivos, igual a*

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^{p}.$$

Os Lemas de Kaplansky foram construídos em 1943 p matemático canadense-americano Irving Kaplansky para a reso ção do chamado Problema de Lucas que se encontra no Apênd 2.

Exemplo 3.8: Hugo deve ter aula de tênis três vezes por mana, durante um semestre. Quantos são os modos de escol os dias de aula, se Hugo não deseja ter aulas em dias consecutiv

Solução: Hugo deve escolher 3 dos elementos do conjunto *dom go, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado*, não poden escolher dois dias consecutivos e sendo o domingo e o sábado d consecutivos. O número de modos de fazer isso é

$$g(7,3) = \frac{7}{7-3} C_{7-3}^{3} = \frac{7}{4} \cdot 4 = 7. \quad \square$$

Exercícios

✓ **1.** 5 pessoas devem se sentar em 15 cadeiras colocadas em tor de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacente

2. Dado um decágono, quantos são os triângulos cujos vértic são vértices não-consecutivos do decágono?

✓ **3.** De quantos modos podemos formar uma seqüência de p e mentos iguais a 1 e q elementos iguais a 0 se dois elementos igu a zero não podem ser adjacentes?

4. De quantos modos podemos formar uma seqüência de p elementos iguais a 2, q elementos iguais a 1 e r elementos iguais a 0 se dois elementos iguais a zero não podem ser adjacentes?

√**5.** De quantos modos é possível formar uma roda de ciranda com 7 meninas e 12 meninos sem que haja duas meninas em posições adjacentes?

√**6.** Quantos são os anagramas de *araraquara* que não possuem duas letras *a* consecutivas?

7. (Generalização do 1º Lema de Kaplansky).

De quantos modos é possível formar um p-subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de modo que entre cada dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos para o subconjunto?

8. (Generalização do 2º Lema de Kaplansky). Refaça o problema anterior no caso circular. Nesse caso, por exemplo, tomando $n = 6$, o conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$ é tal que entre 1 e 4 há dois elementos, entre 5 e 1 há um elemento, entre 6 e 4 há três elementos. (Sugestão: divida os subconjuntos em dois grupos: aqueles que contêm algum dos elementos $1, 2, \ldots, r$ e os que não contêm nenhum dos elementos $\{1, 2, \ldots, r\}$).

3.4 O Princípio da Reflexão

Uma partícula, estando no ponto (x, y), pode se movimentar para o ponto $(x + 1, y + 1)$ ou para o ponto $(x + 1, y - 1)$.

a) Quantos são os trajetos possíveis da partícula de (0,0) a (8,6)?