Гибридные алгоритмы фильтрации на основе фильтра Калмана и H_∞-фильтра

Paul A. Beltyukov <beltyukov.p.a@gmail.com>

Аннотация

Разрабтано семейство гибридных алгоритмов фильтрации, в которых для поддержания сходимости фильтра Калмана используется H_∞-фильтрация. Проведен вычислительный эксперимент на «игрушечной» задаче. Выбраны алгоритмы к реализации во встраиваемых системах.

Введение

Фильтр Калмана известен с 60-х годов XX века [1] за более чем 50лет он нашел применения во многих областях деятельности от навигации до управления портфелями. Для нелинейных задач применяют Обобщенный Фильтр Калмана (ОФК) [2], разработанный инженерами НАСА во время миссии Аполон [3].

При попытках применения ОФК в промышленности выяснилось, что в некоторых условиях может наблюдаться расходимость ОФК [4], обусловленная неточными математическими моделями наблюдаемых процессов. Данную проблему пытались решить различными модификациями ОФК, например, такими, как в [6].

Стало понятно, что нужен алгоритм фильтрации с гарантированной сходимостью при неточной модели наблюдаемого процесса. Таким алгоритмом стал H_∞ - фильтр, в [5] был использован теоретико-игровой подход к построению H_∞ - фильтра.

Мы сравним между собой алгоритмы ОФК и H_∞ - фильтра, рассмотрим, возможность применения последнего для обеспечения сходимости первого, построим гибридные алгоритмы фильтрации и сравним работу полученных алгоритмов с работой ОФК.

Задача фильтрации

Пусть нам дана система, со следующей моделью пространства состояний:

$$x_k = F(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \quad ;$$

$$z_k = H(x_k) + v_k \quad ;$$

где x_k - вектор состояния системы, u_{k-1} - вектор возмущения системы, z_k - вектор наблюдений, w_{k-1} - Гауссов шум системы с матрицей ковариации Q_k и нулевым математическим ожиданием, v_k - Гауссов шум наблюдения системы с матрицей ковариации R_k и нулевым математическим ожиданием.

Задача фильтрации состоит в том, чтобы оценить значение вектора состояния системы по доступным значениям наблюдений, минимизируя некоторую функцию стоимости.

Фильтр Калмана

В [1] описан фильтр Калмана, в процессе работы фильтр Калмана минимизирует:

$$J=E\left(\|z_k-\hat{z}_k\|_2^2\right) \quad ,$$

где $\hat{z}_k$ - оценка наблюдений, выдаваемая фильтром.

Алгоритм работы фильтра Калмана:

Прогноз:

$$x_{k|k-1}=F\left(x_{k-1|k-1},u_{k-1},0\right) \quad ;$$

$$F_k=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ; \quad B_k=\left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ; \quad H_k=\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x_{k|k-1}}$$

$$P_{k|k-1}=F_k P_{k-1|k-1} F_k^T+B_k Q_k B_k^T \quad ;$$

$$v_k=z_k-H\left(x_{k|k-1}\right) \quad ;$$

Коррекция:

$$P_{k|k}=\left(P_{k|k-1}^{-1}+H_k^T R_k^{-1} H_k\right)^{-1} \quad ;$$

$$x_{k|k}=x_{k|k-1}+K_k\, v_k \quad ;$$

$$K_k=P_{k|k} H_k R_k^{-1} \quad ;$$

более привычная форма представления алгоритма:

Прогноз:

$$x_{k|k-1}=F\left(x_{k-1|k-1},u_{k-1},0\right) \quad ;$$

$$P_{k|k-1}=F_k P_{k-1|k-1} F_k^T+B_k Q_k B_k^T \quad ;$$

$$F_k=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ; \quad B_k=\left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ; \quad H_k=\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x_{k|k-1}} \quad ;$$

предполагается, что H_k имеет полный ранг;

$v_k = z_k - H(x_{k|k-1})$;

Коррекция:

$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T)^{-1}$;

$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k$;

$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$;

В условиях, когда невозможно обеспечить сходимость фильтра Калмана применяют H_∞ - фильтры а так же гибридные фильтры .

H∞ — фильтр, дискретное время

В отличии от фильтра Калмана H_∞ - фильтр [5] оценивает не сам вектор состояния системы, а его линейную комбинацию:

$y_k = L_k x_k$, где L_k - матрица, задаваемая пользователем и имеющая полный ранг.

При этом стремясь ограничить функцию стоимости:

$$J = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \|y_k - \hat{y}_k\|_{S_k}^2}{\|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R_k^{-1}}^2\right)} < \frac{1}{\theta} \quad ;$$

где $\hat{y}_k$ - математическое ожидание y_k , θ - порог, задаваемый пользователем.

Запишем алгоритм работы H_∞ - фильтра в виде:

Прогноз:

$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0)$;

$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T$;

$F_k = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_{k-1|k-1}}$; $B_k = \left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{x_{k-1|k-1}}$; $H_k = \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x_{k|k-1}}$;

$v_k = z_k - H(x_{k|k-1})$;

Коррекция:

$P_{k|k} = P_{k|k-1}^{-1} (I - \theta \tilde{S}_k P_{k|k-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k P_{k|k-1})^{-1} = (P_{k|k-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_k + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1}$;

$\tilde{S}_k = L_k^T \bar{S}_k L_k$, где $\bar{S}_k > 0$ - матрица, задаваемая пользователем;

$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k$;

$K_k = P_{k|k} H_k R_k^{-1}$;

Критерий работоспособности фильтра:

$P_{k|k} = (P_{k|k-1}^{-1} - \theta \widetilde{S}_k + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} > 0$;

Матрицу $P_{k|k}$ можно представить в виде двух последовательных операций вида:

$P_b = (P_{b-1}^{-1} - \theta \widetilde{S}_b)^{-1} = P_{b-1} + \Delta Q_b$ (1);

$P_d = (P_{d-1}^{-1} + H_d^T R_d^{-1} H_d)^{-1}$ (2);

Операция (2) — обновление обновление матрицы ковариации оценок, применяемое в фильтре Калмана, оно обычно сохраняет положительную определенность P .

Для того, чтобы операция (1) сохраняла положительную определенность P необходимо и достаточно, чтобы выполнялся критерий:

$\Delta Q_b > 0$ (3);

Порядок следования операций определяется особенностями реализации алгоритма фильтра.

Гибридные фильтры

В [7] дано описание алгоритма гибридного фильтра, фактически представляющего собой H_∞ -фильтр с особым выбором параметров L_k, S_k, θ .

Так же есть варианты гибридных алгоритмов фильтрации, в которых по умолчанию используется фильтр Калмана, а в случае обнаружения его расходимости используется коррекция с использованием H_∞-технологии [8]. Однако, функция стоимости, которую минимизируют данные варианты алгоритмов фильтрации отличается от той, которую минимизирует H_∞ -фильтр [5].

Далее мы рассмотрим два класса гибридных алгоритмов фильтрации, в которых по умолчанию используется фильтр Калмана, а в случае обнаружения признаков его расходимости происходит переход к H_∞ -фильтрации [5] для восстановления целостности работы фильтра Калмана.

Так же мы опишем алгоритмы с последовательной обработкой измерений в UD-форме, относящихся к этим классам.

Поддержание целостности работы фильтров: подход без ограничений на параметры H∞ — фильтра

Для поддержания целостности работы фильтров будет использована операция (1).

При анализе целостности работы оценивающих фильтров применяют χ^2 -тест [9], к квадратичной форме вида:

$$\beta_b = \delta_b^T \hat{S}_b^{-1} \delta_b \ ;$$

где $\hat{S}_b = R_b + H_b P_b H_b^T$ - матрица ковариации невязок фильтра после выполнения операции, R_b - матрица ковариации шума процесса на момент вычисления β_b , $H_b = \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x_b}$, P_b - матрица ковариации оценок фильтра на момент вычисления β_b , $\delta_b = z_b - H(x_b) \neq 0$ невязка на момент вычисления β_b .

Критерий сходимости фильтра:

$\beta_b \leqslant \beta_n = \chi^2_{\alpha,n}$ (4), где n — количество степеней свободы (размерность δ_b), α — уровень значимости.

Для обеспечения целостности работы фильтра нужно выполнение критерия:

$$\delta_b^T (R_b + H_b P_b H_b^T)^{-1} \delta_b = \beta_n \ ;$$

$$\delta_b^T (R_b + H_b (P_{b-1} + \Delta Q_b) H_b^T) \delta_b = \beta_n \ ;$$

$$\delta_b^T (R_b + H_b P_{b-1} H_b^T + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} \delta_b = \beta_n \ ;$$

$$\delta_b^T (R_b + H_b P_{k-1} H_b^T + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} \delta_b = \beta_n \ ;$$

$\delta_b^T (S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} \delta_b = \beta_n$, где $S_b = R_b + H_b P_{b-1} H_b^T$ (5) - матрица ковариации невязок фильтра до выполнения операции;

$$\delta_b \delta_b^T (S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} \delta_b \delta_b^T = \beta_n \delta_b \delta_b^T \ ;$$

Сравнивая правую и левую части получим:

$$\delta_b \delta_b^T (S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} = \beta_n I \ ;$$

$$\delta_b \delta_b^T = \beta_n (S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T) \ ;$$

$$\frac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} = S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T \ ;$$

$$A_b = H_b \Delta Q_b H_b^T = \frac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} - S_b \quad (6);$$

С другой стороны в силу (1):

$$P_b = (P_{b-1}^{-1} - \theta \widetilde{S}_b)^{-1} \quad \text{, где} \quad \widetilde{S}_b = L_b^T \bar{S}_b L_b \quad ;$$

$$P_b = (P_{b-1}^{-1} - \theta L_b^T S_b L_b)^{-1} = (P_{b-1}^{-1} - L_b^T M_b^{-1} L_b)^{-1} \quad \text{, где} \quad M_b^{-1} = \theta S_b \quad ;$$

$$P_b = (P_{b-1}^{-1} - L_b^T M_b^{-1} L_b)^{-1} = P_{b-1} + P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} = P_{b-1} + \Delta Q_b \quad ;$$

$$\Delta Q_b = P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} \quad (7);$$

$$A_b = H_b \Delta Q_b H_b^T = H_b P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} H_b^T \quad ;$$

$$A_b = H_b P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} H_b^T \quad ;$$

$$A_b = C_b (M_b + B_b) C_b^T \quad \text{, где} \quad C_b = H_b P_{b-1} L_b^T \quad (8), \quad B_b = L_b P_{b-1} L_b^T \quad ;$$

$$C_b^T A_b C_b = C_b^T C_b (M_b + B_b) C_b^T C_b \quad (9);$$

Рассмотрим левые множители равенства (9):

$$C_b^T A_b C_b = (C_b^T C_b + \varepsilon I - \varepsilon I)(M_b + B_b) C_b^T C_b = (C_b^T C_b + \varepsilon I)(M_b + B_b) C_b^T C_b - \varepsilon I (M_b + B_b) C_b^T C_b \quad ;$$

$$(C_b^T C_b + \varepsilon I)^{-1} C_b^T A_b C_b = (M_b + B_b) C_b^T C_b - \varepsilon (C_b^T C_b + \varepsilon I)^{-1} (M_b + B_b) C_b^T C_b \quad ;$$

В силу симметричности матриц:

$$(C_b^T C_b + \varepsilon I)^{-1} C_b^T A_b C_b = (M_b + B_b) C_b^T C_b - \varepsilon (C_b^T C_b + \varepsilon I)^{-1} C_b^T C_b (M_b + B_b) \quad ;$$

В пределе при переходе к $\varepsilon \to +0$ получим:

$$C_b^+ A_b C_b = (M_b + B_b) C_b^T C_b \quad ;$$

Проделав аналогичные преобразования с правыми множителями матриц получим:

$$C_b^+ A_b C_b^{+T} = M_b + B_b \quad ;$$

$$M_b = C_b^+ A_b C_b^{+T} - B_b = C_b^+ A_b C_b^{+T} - L_b P_{b-1} L_b^T \quad ;$$

Подставим M_b в (7):

$$\Delta Q_b = P_{b-1} L_b^T (C_b^+ A_b C_b^{+T} - L_b P_{b-1} L_b^T + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} \quad ;$$

получим:

$$\Delta Q_b = P_{b-1} L_b^T C_b^+ A_b C_b^{+T} L_b P_{b-1} \quad (10), \text{ где:}$$

$A_b = \dfrac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} - S_b$, $S_b = R_b + H_b P_{b-1} H_b^T$, $C_b = H_b P_{b-1} L_b^T$ согласно (6),(5) и (8) соответственно.

Для выполнения критерия (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия [12]:

- матрица $Z_b = P_{b-1} L_b^T C_b^+$ должна иметь полный ранг;
- $A_b > 0$ (11);

Рассмотрим матрицу $Z_b = P_{b-1} L_b^T C_b^+$:

- т. к. $P_b > 0$, а L_b имеет полный ранг, по произведение $P_{b-1} L_b$ так же имеет полный ранг;
- т. к. H_b и L_b имеют полный ранг, а $P_b > 0$, то C_b так же имеет полный ранг, следовательно: произведение $C_b^T C_b > 0$ [12], соответственно, $C_b^+ = \left(C_b^T C_b\right)^{-1} C_b^T$ так же имеет полный ранг;
- т. к. произведение $P_{b-1} L_b$ и матрица C_b^+ имеют полный ранг, то Z_b так же имеет полный ранг.

Рассмотрим матрицу A_b :

- $S_b \ge H_b P_{b-1} H_b^T > 0$;
- рассмотрим произведение $x^T \left(\delta_b \delta_b^T\right) x = \left(x^T \delta_b\right)\left(\delta_b^T x\right)$ для любого вектора $x \neq 0$:
    - в случае размерности вектора x больше одного $x^T \left(\delta_b \delta_b^T\right) x = x^T \left(\delta_b \delta_b^T\right) x \ge 0$, следовательно, в силу положительной определенности S_b гарантировать существование гибридного фильтра невозможно;
    - в случае размерности вектора x равной одному (при UD-реализации фильтра) $x^T \left(\delta_b \delta_b^T\right) x = \delta_b^2 x^2 > 0$,
        - при этом выражение (5) вырождается в $a_b = \frac{\delta_b^2}{\beta_1} - s_b$,
        - критерий (4) нарушается в случае, когда $\frac{\delta_b^2}{s_b} > \beta_1$ или $\frac{\delta_b^2}{\beta_1} - s_b > 0$,
        - таким образом, при нарушении критерия (4), $A_b = a_b > 0$,

Таким образом, существует UD-реализация гибридного фильтра.

Выбор параметров L_b, S_b, θ при использовании H_∞ -фильтрации для поддержания целостности работы фильтра Калмана сводится к выбору матрицы L_b в конкретном алгоритме, а так же к выбору невязки δ_b , используемой для оценки целостности работы фильтра.

Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по априорным невязкам (UDEKHF_A)

Инициализация:

$x_{0|0}=x_0$; $U_{0|0},D_{0|0}=udu(P_0)$; $U_q,D_q=udu(Q)$; $U_r^{-1},D_r=udu(R)$, где $D_r=[r_1 \dots r_j \dots r_n]$;

Работа:

1 Прогноз:

$m_0=x_{k|k-1}=F(x_{k-1|k-1},u_{k-1},0)$;

$F_k=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_{k-1|k-1}}$; $B_k=\left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{x_{k-1|k-1}}$;

$U_{0,}D_0=MWGS([F_k U_{k-1|k-1} \vdots B_k U_q],[D_{k-1|k-1} \vdots D_q])$;

2 Коррекция:

$\hat{z}=U_r z_k$;

2.1 Итерации по j = 1,n:

$\nu_j=\hat{z}_j-H_j(m_{j-1})$;

$h_j=\left(U_r \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{m_{j-1}}\right)_j$;

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$f_j=h_j U_{j-1}$; $v_j=D_{j-1} f_j^T$; $c_j=f_j v_j$; $s_j=c_j+r_j$;

$s_j=\frac{\nu_j^2}{\beta_1}-e_j$;

Если $d_j \geqslant 0$ - делаем адаптивную коррекцию:

$q_j=\frac{d_j}{c_j^2}$;

$\tilde{U}_{j-1},\tilde{D}_{j-1}=MWGS([U_{j-1} \vdots U_{j-1} v_j],[D_{j-1} \vdots q_j])$;

$\tilde{f}_j=h_j \tilde{U}_{j-1}$; $\tilde{v}_j=\tilde{D}_{j-1} \tilde{f}_j^T$; $\tilde{\alpha}_j=\tilde{f}_j \tilde{v}_j+r_j$;

иначе:

$\tilde{U}_{j-1},\tilde{D}_{j-1},\tilde{f}_j,\tilde{v}_j,\tilde{\alpha}_j=U_{j-1},D_{j-1},f_j,v_j,e_j$;

2.1.2 Обновление матрицы ковариации оценок и вектора состояний:

$$K_j = \widetilde{U}_{j-1} \widetilde{v}_j \widetilde{\alpha}_j^{-1} \quad ;$$

$$m_j = m_{j-1} + K_j \nu_j \quad ;$$

$$U_j, D_j = MWGS([K_j \widetilde{f}_j - \widetilde{U}_{j-1} \vdots K_j], [\widetilde{D}_{j-1} \vdots r_j]) \quad ;$$

2.2 По окончании итераций:

$$U_{k|k}, D_{k|k} = U_n, D_n \quad ;$$

$$x_{k|k} = m_n \quad .$$

Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по апостериорным невязкам (UDEKHF_B)

В [8] для опреации (1) выбрано следующее значение L_k :

$$L_k = \widetilde{H}_k^T \text{, где } \widetilde{H}_k = \left.\frac{\partial H(x + \widetilde{K}_k(z_k - H(x)))}{\partial x}\right|_{x_{k|k-1}} = \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\widetilde{x}_{k|k}} \left(\left.\frac{\partial x}{\partial x}\right|_{x_{k|k-1}} - \widetilde{K}_k \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x_{k|k-1}} \right) = \widehat{H}_k (I - \widetilde{K}_k H_k) \;;$$

Алгоритм гибридного UD-фильтра с оценкой сходимости по апостериорным невязкам:

Инициализация:

$$x_{0|0} = x_0 \quad ; \quad U_{0|0}, D_{0|0} = udu(P_0) \quad ; \quad U_q, D_q = udu(Q) \quad ; \quad U_r^{-1}, D_r = udu(R) \quad \text{, где} \quad D_r = [r_1 \ldots r_j \ldots r_n] \quad ;$$

Работа:

1 Прогноз:

$$m_0 = x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) \quad ;$$

$$F_k = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ; \quad B_k = \left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ;$$

$$U_{0,} D_0 = MWGS([F_k U_{k-1|k-1} \vdots B_k U_q], [D_{k-1|k-1} \vdots D_q]) \quad ;$$

2 Коррекция:

$$\hat{z} = U_r z_k \quad ;$$

2.1 Итерации по j = 1,n:

$$\nu_j = \hat{z}_j - H_j(m_{j-1}) \quad ;$$

$$h_j = \left(U_r \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{m_{j-1}} \right)_j \quad ;$$

Обновление матрицы ковариации оценок и вектора состояний:

$$f_j = h_j U_{j-1} \quad ; \quad v_j = D_{j-1} f_j^T \quad ; \quad \alpha_j = f_j v_j + r_j \quad ;$$

$$K_j = U_{j-1} v_j \alpha_j^{-1} \quad ;$$

$$\tilde{m}_j = m_{j-1} + K_j v_j \quad ;$$

$$\tilde{U}_j, \tilde{D}_j = MWGS([K_j f_j - U_{j-1} \vdots K_j], [D_{j-1} \vdots r_j]) \quad ;$$

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$$\eta_j = \hat{z}_j - H_j(\tilde{m}_j) \quad ;$$

$$\hat{h}_j = \left(U_r \frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{\tilde{m}_j} \right)_j \quad ;$$

$$\hat{f}_j = \hat{h}_j \tilde{U}_j \quad ; \quad \hat{v}_j = \tilde{D}_j \hat{f}_j^T \quad ; \quad s_j = \hat{f}_j \hat{v}_j + r_j \quad ;$$

$$d_j = \frac{\eta_j^2}{\beta_1} - s_j \quad ;$$

Если $d_j \geqslant 0$ - делаем адаптивную коррекцию:

$$\tilde{h}_j = \hat{h}_j - \hat{h}_j K_j h_j \quad ;$$

$$\tilde{f}_j = \tilde{h}_j \tilde{U}_j \quad ; \quad \tilde{v}_j = \tilde{D}_j \tilde{f}_j^T \quad ; \quad c_j = \hat{f}_j \tilde{v}_j \quad ;$$

$$q_j = \frac{d_j}{c_j^2} \quad ;$$

$$U_j, D_j = MWGS([\tilde{U}_j \vdots \tilde{U}_j \tilde{v}_j], [\tilde{D}_j \vdots q_j]) \quad ;$$

$$m_j = m_{j-1} + U_j D_j U_j^T h_j^T \frac{v_j}{r_j} \quad ;$$

иначе:

$$U_j, D_j, m_j = \tilde{U}_j, \tilde{D}_j, \tilde{m}_j \quad ;$$

2.2 По окончании итераций:

$$U_{k|k}, D_{k|k} = U_n, D_n \quad ;$$

$$x_{k|k} = m_n \quad .$$

Поддержание целостности работы фильтров: подход с ограничениями на параметры H∞ — фильтра

В рамках данного подхода мы будем использовать следующий выбор параметров H_∞ -фильтра:

$L_k = I$;

$\bar{S}_k = P_b^{-1}$;

При этом выражение (1) примет следующий вид:

$$P_a = \left(P_b^{-1} - \theta P_b^{-1}\right)^{-1} = P_b + \Delta Q_b = P_b + \frac{\theta}{1-\theta} P_b = P_b + a_b P_b \quad (11).$$

Для того, чтобы операция (11) позволяла сохранять матрицу ковариации оценок положительно определенной достаточно выполнение условия:

$0 < \theta < 1$ (12);

при этом:

$\Delta Q_b = a_b P_b$ (13), где $a_b > 0$ (14).

Подставим (13) в (6):

$$a_b H_b P_b H_b^T = \frac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} - S_b \quad (15);$$

домножим (15) справа и слева на δ_b и δ_b^T соответственно:

$$a_b \delta_b^T H_b P_b H_b^T \delta_b = \frac{\left(\delta_b^T \delta_b\right)\left(\delta_b^T \delta_b\right)}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b = \frac{\left(\delta_b^T \delta_b\right)^2}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b \quad ;$$

отсюда:

$$a_b = \frac{\dfrac{\left(\delta_b^T \delta_b\right)^2}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b}{\delta_b^T H_b P_b H_b^T \delta_b} = \frac{\delta_b^T A_b \delta_b}{\delta_b^T H_b P_b H_b^T \delta_b} \quad (16);$$

для того, чтобы существовал гибридный фильтр достаточно, чтобы выполнялось условие (14) в случае нарушения критерия (4).

Знаменатель выражения (16) положителен при ненулевых δ_b , следовательно, нам достаточно проанализировать знак числителя с учетом нарушения критерия сходимости фильтра (4), или:

$$\delta_b^T S_b^{-1} \delta_b > \beta_n \;\Leftrightarrow\; \delta_b \delta_b^T > \beta_n S_b \;\Leftrightarrow\; \delta_b^T\left(\delta_b \delta_b^T\right)\delta_b - \beta_n \delta_b^T S_b \delta_b > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\left(\delta_b^T \delta_b\right)^2}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b > 0 \quad ;$$

а это и есть наш числитель, таким образом, гибридный фильтр существует.

Гибридный фильтр с оценкой сходимости по априорным невязкам (EKHF_C)

В данном классе алгоритмов фильтрации используется следующая последовательность операций при обновлении $P_{k|k}$:

$$\widetilde{P}_{k|k-1}=\left(P^{-1}_{k|k-1}-\theta\widetilde{S}_k\right)^{-1}=P_{k|k-1}+\Delta Q_k \quad ;$$

$$P_{k|k}=\left(\widetilde{P}^{-1}_{k|k-1}+H^T_k R^{-1}_k H_k\right)^{-1} \quad ;$$

Этот вариант представления фактически предполагает увеличение Q_k величину $\Delta Q_k=\left(P^{-1}_{k|k-1}-\theta\widetilde{S}_k\right)^{-1}-P_{k|k-1}$, что позволяет связать H_∞ -фильтр и Калмана. При использовании такого представления $P_{k|k}$ работа H_∞ -фильтра отличается от работы фильтра Калмана лишь добавкой ΔQ_k, которая гарантирует сходимость фильтра в сложных условиях работы.

Алгоритм работы гибридного фильтра в этом случае следующий:

Прогноз:

$$x_{k|k-1}=F\left(x_{k-1|k-1},u_{k-1},0\right) \quad ;$$

$$F_k=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ; \quad B_k=\left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ; \quad H_k=\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x_{k|k-1}} \quad ;$$

$$P_{k|k-1}=F_k P_{k-1|k-1}F^T_k+B_k Q_k B^T_k \quad ;$$

$$\nu_k=z_k-H\left(x_{k|k-1}\right) \quad ;$$

контроль целостности работы фильтра по априорной невязке:

$$E_k=R_k+H_k P_{k|k-1}H^T_k \quad ;$$

Критерий расходимости фильтра:

$$\nu^T_k E^{-1}_k \nu_k>\beta_n \quad ;$$

при наличии признаков расходимости, - адаптивная коррекция:

$$A_k=\frac{\nu_k \nu^T_k}{\beta_n}-E_k \quad ;$$

$$a_k=\frac{\nu^T_k A_k \nu_b}{\nu^T_k H_k P_{k|k-1}H^T_k \nu_k} \quad ;$$

$$\widetilde{P}_{k|k-1}=\left(1+a_k\right)P_{k|k-1} \quad ;$$

иначе:

$$\widetilde{P}_{k|k-1}=P_{k|k-1} \quad ;$$

Коррекция:

$$K_k = \widetilde{P}_{k|k-1} H_k^T \left(R_k + H_k \widetilde{P}_{k|k-1} H_k^T \right)^{-1} \quad ;$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k \nu_k \quad ;$$

$$P_{k|k} = \left(I - K_k H_k \right) \widetilde{P}_{k|k-1} \left(I - K_k H_k \right)^T + K_k R_k K_k^T = \left(I - K_k H_k \right) \widetilde{P}_{k|k-1} \quad .$$

Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по априорным невязкам (UDEKHF_C)

Инициализация:

$$x_{0|0} = x_0 \quad ; \quad U_{0|0}, D_{0|0} = udu\left(P_0\right) \quad ; \quad U_q, D_q = udu\left(Q\right) \quad ; \quad U_r^{-1}, D_r = udu\left(R\right) \quad , \text{где} \quad D_r = \left[r_1 \ldots r_j \ldots r_n \right] \quad ;$$

Работа:

1 Прогноз:

$$m_0 = x_{k|k-1} = F\left(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0 \right) \quad ;$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ; \quad B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ;$$

$$U_{0,} D_0 = MWGS\left(\left[F_k U_{k-1|k-1} \vdots B_k U_q \right], \left[D_{k-1|k-1} \vdots D_q \right] \right) \quad ;$$

2 Коррекция:

$$\hat{z} = U_r z_k \quad ;$$

2.1 Итерации по j = 1,n:

$$\nu_j = \hat{z}_j - H_j\left(m_{j-1} \right) \quad ;$$

$$h_j = \left(U_r \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{m_{j-1}} \right)_j \quad ;$$

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$$f_j = h_j U_{j-1} \quad ; \quad v_j = D_{j-1} f_j^T \quad ; \quad c_j = f_j v_j \quad ; \quad e_j = c_j + r_j \quad ;$$

$$d_j = \frac{\nu_j^2}{\beta_1} - e_j \quad ;$$

Если $d_j > 0$ - делаем адаптивную коррекцию:

$$a_j = \frac{d_j}{c_j} + 1 \quad ;$$

$$\tilde{U}_{j-1} = U_{j-1} \quad ; \quad \tilde{D}_{j-1} = a_j D_{j-1} \quad ; \quad \tilde{f}_j = f_j \quad ; \quad \tilde{v}_j = a_j v_j \quad ; \quad \tilde{\alpha}_j = a_k c_j + r_j \quad ;$$

иначе:

$$\tilde{U}_{j-1}, \tilde{D}_{j-1}, \tilde{f}_j, \tilde{v}_j, \tilde{\alpha}_j = U_{j-1}, D_{j-1}, f_j, v_j, e_j \quad ;$$

2.1.2 Обновление матрицы ковариации ошибок и вектора состояний:

$$K_j = \tilde{U}_{j-1} \tilde{v}_j \tilde{\alpha}_j^{-1} \quad ;$$

$$m_j = m_{j-1} + K_j v_j \quad ;$$

$$U_j, D_j = MWGS([K_j \tilde{f}_j - \tilde{U}_{j-1} \vdots K_j], [\tilde{D}_{j-1} \vdots r_j]) \quad ;$$

2.2 По окончании итераций:

$$U_{k|k}, D_{k|k} = U_n, D_n \quad ;$$

$$x_{k|k} = m_n \quad .$$

Гибридный фильтр с оценкой сходимости по апостериорным невязкам (EKHF_D)

В данном классе алгоритмов фильтрауции используется следующая последовательность операций при обновлении $P_{k|k}$:

$$\tilde{P}_{k|k} = (P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} \quad ;$$

$$P_{k|k-1} = (\tilde{P}_{k|k}^{-1} - \theta \tilde{S}_k)^{-1} = \tilde{P}_{k|k} + \Delta Q_k \quad ;$$

Алгоритм работы гибридного фильтра в этом случае следующий:

Прогноз:

$$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) \quad ;$$

$$F_k = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ; \quad B_k = \left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ; \quad H_k = \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x_{k|k-1}} \quad ;$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T \quad ;$$

$$v_k = z_k - H(x_{k|k-1}) \quad ;$$

$$\tilde{K}_k = P_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T)^{-1} \quad ;$$

$$\tilde{P}_{k|k} = (I - \tilde{K}_k H_k) P_{k|k-1} (I - \tilde{K}_k H_k)^T + \tilde{K}_k R_k \tilde{K}_k^T = (I - \tilde{K}_k H_k) P_{k|k-1} \quad ;$$

$$\tilde{x}_{k|k} = x_{k|k-1} + \tilde{K}_k \nu_k \quad ;$$

контроль целостности работы фильтра по апостериорной невязке,

$$\eta_k = z_k - H(\tilde{x}_{k|k}) \quad ;$$

$$\hat{H}_k = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{\tilde{x}_{k|k}} \quad ;$$

$$E_k = R_k + \hat{H}_k \tilde{P}_{k|k} \hat{H}_k^T \quad ;$$

Критерий расходимости фильтра:

$$\nu_k^T E_k^{-1} \nu_k > \beta_n \quad ;$$

при наличии признаков расходимости, - адаптивная коррекция:

$$A_k = \frac{\eta_k \eta_k^T}{\beta_n} - E_k \quad ;$$

$$a_k = \frac{\eta_k^T A_k \eta_b}{\eta_k^T H_k P_{k|k-1} H_k^T \eta_k} \quad ;$$

$$P_{k|k-1} = (1 + a_k) \tilde{P}_{k|k-1} \quad ;$$

$$K_k = P_{k|k} H_k^T R_k^{-1} \quad ;$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k \nu_k \quad ;$$

иначе:

$$P_{k|k} = \tilde{P}_{k|k} \quad ;$$

$$x_{k|k} = \tilde{x}_{k|k} \quad .$$

Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по апостериорным невязкам (UDEKHF_D)

Адгоритм гибридного UD-фильтра с оценкой сходимости по апостериорным невязкам:

Инициализация:

$x_{0|0}=x_0$; $U_{0|0}, D_{0|0}=udu(P_0)$; $U_q, D_q=udu(Q)$; $U_r^{-1}, D_r=udu(R)$, где $D_r=[r_1 \ldots r_j \ldots r_n]$;

Работа:

1 Прогноз:

$$m_0=x_{k|k-1}=F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) \quad ;$$

$$F_k=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ; \quad B_k=\left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{x_{k-1|k-1}} \quad ;$$

$$U_{0,} D_0=MWGS([F_k U_{k-1|k-1} \vdots B_k U_q],[D_{k-1|k-1} \vdots D_q]) \quad ;$$

2 Коррекция:

$$\hat{z}=U_r z_k \quad ;$$

2.1 Итерации по j = 1,n:

$$\nu_j=\hat{z}_j-H_j(m_{j-1}) \quad ;$$

$$h_j=\left(U_r \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{m_{j-1}}\right)_j \quad ;$$

Обновление матрицы ковариации ошибок и вектора состояний:

$$f_j=h_j U_{j-1} \quad ; \quad v_j=D_{j-1} f_j^T \quad ; \quad \alpha_j=f_j v_j+r_j \quad ;$$

$$K_j=U_{j-1} v_j \alpha_j^{-1} \quad ;$$

$$\tilde{m}_j=m_{j-1}+K_j \nu_j \quad ;$$

$$\tilde{U}_j, \tilde{D}_j=MWGS([K_j f_j-U_{j-1} \vdots K_j],[D_{j-1} \vdots r_j]) \quad ;$$

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$$\eta_j=\hat{z}_j-H_j(\tilde{m}_j) \quad ;$$

$$\hat{h}_j=\left(U_r \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\tilde{m}_j}\right)_j \quad ;$$

$$\hat{f}_j=\hat{h}_j \tilde{U}_j \quad ; \quad \hat{v}_j=\tilde{D}_j \hat{f}_j^T \quad ; \quad e_j=\hat{f}_j \hat{v}_j+r_j \quad ; \quad d_j=\frac{\eta_j^2}{\beta_1}-e_j \quad ;$$

Если $d_j > 0$ - делаем адаптивную коррекцию:

$$a_j = \frac{d_j}{c_j} + 1 \quad ;$$

$$U_j = \tilde{U}_j \quad ; \quad D_j = a_j \tilde{D}_j \quad ; \quad m_j = m_{j-1} + U_j D_j U_j^T h_j^T \frac{\nu_j}{r_j} \quad ;$$

иначе:

$$U_j, D_j, m_j = \tilde{U}_j, \tilde{D}_j, \tilde{m}_j \quad ;$$

2.2 По окончании итераций:

$$U_{k|k}, D_{k|k} = U_n, D_n \quad ;$$

$$x_{k|k} = m_n \quad .$$

Резюме по гибридным алгоритмам фильтрации

Исходя из вида гибридных алгоритмов фильтрации можно сделать следующие предварительные выводы:

1. Алгоритмы с использованием априорных невязок для адаптивной коррекции требуют меньшего количества вычислений по сравнению с алгоритмами, использующими апостериорную невязку.
2. Так же они не требуют дополнительного вычисления обновленного состояния.
3. Алгоритм UDEKHF_A в случае отсутствия расходимости требует почти столько же вычислений, сколько ОФК. В то же время UDEKHF_B требует значительного дополнительного объема вычислений вне зависимости от наличия или отсутствия признаков расходимости.
4. Самый простой алгоритм - UDEKHF_C.

Вычислительный эксперимент

Сравним поведение гибридных алгоритмов фильтрации с обычным фильтром Калмана для несоответствия модели реального наблюдаемого процесса.

Для предварительной оценки алгоритмов и выбора алгоритмов для последующей реализации во встраиваемых системах рассмотрим «игрушечную» задачу «наблюдение маневрирующего объекта».

Наблюдение маневрирующего объекта

Пусть мы наблюдаем объект, который совершает маневр [11], на рис. 1 изображен пример траектории такого объекта.

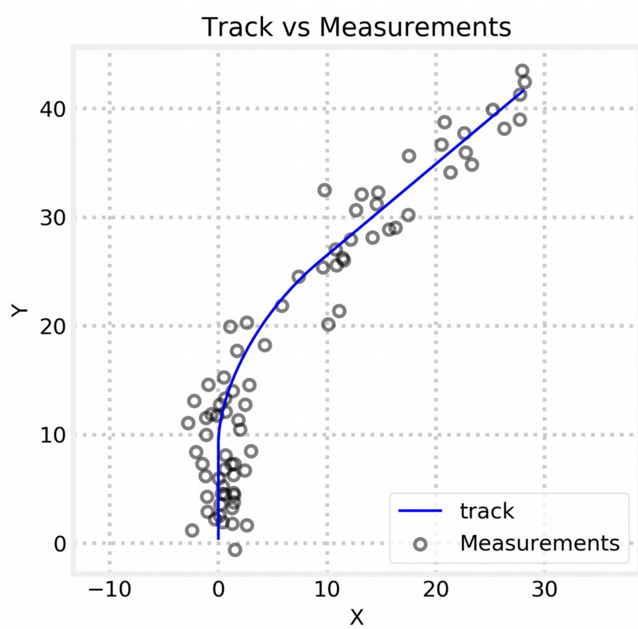


Рис. 1. Путь сопровождаемого объекта и результаты измерения его координат

Наблюдаемый объект движется прямолинейно и равномерно, а за тем совершает поворот с ускорением.

Мы рассмотрим два примера наблюдения нашего объекта:

- одномерный, когда мы наблюдаем лишь одну координату,
- двухмерный, когда мы наблюдаем обе координаты

В обоих случаях кинематическая модель движения объекта — прямолинейное равномерное движение.

Одномерный случай

В данном случае мы наблюдаем только координату x объекта.

Матрица переходов:

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ;$$

Матрица наблюдения:

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ;$$

Результаты моделирования представлены на рис. 2 в двух масштабах времени:

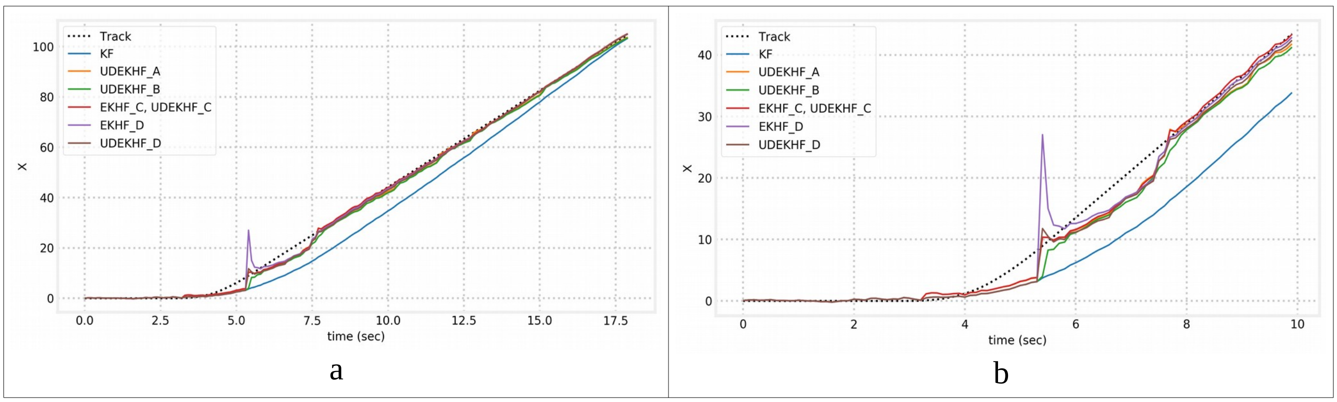


Рис. 2. Изменение абсциссы объекта во времени и результаты работы фильтров

Можно видеть, что фильтр Калмана расходится, когда объект совершает маневр.

Гибридные фильтры дают более точные оценки абсциссы наблюдаемого объекта, за исключением выбросов, даваемых алгоритмом EKHF_D.

Алгоритмы EKHF_C и UDEKHF_C дают идентичные оценки, в то время как оценки, даваемые алгоритмами EKHF_D и UDEKHF_D разные.

Выбросы оценок, даваемых алгоритмом EKHF_D могут быть связаны с неустойчивостью последнего.

Сравним невязки разных вариантов гибридных фильтров с невязками фильтра Калмана при разных значениях дисперсии шумов наблюдения.

UDERHF_A

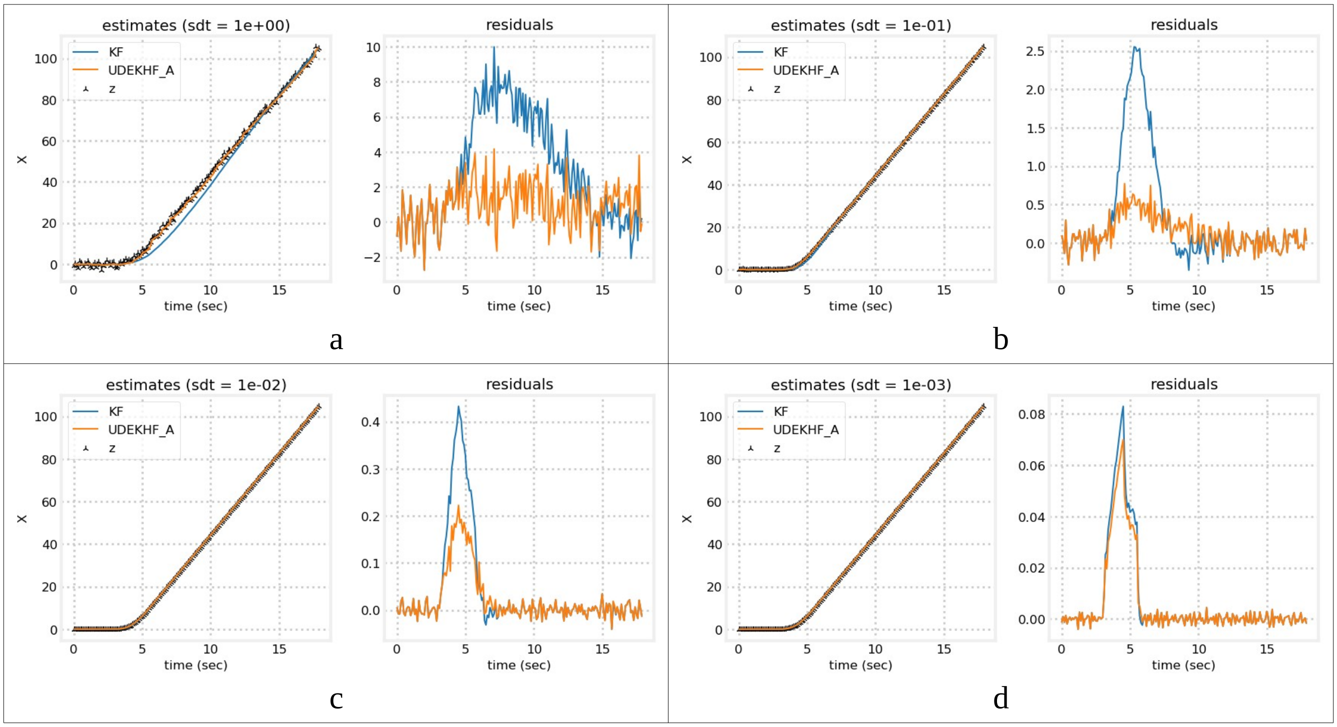


Рис. 3 Работа UDEKHF_A при различных значениях дисперсии шума наблюдения

Результаты сравнения алгоритмов представлены на рис. 3, при этом их оценки UDEKHF_A точнее тех, что даёт фильтр Калмана в тех же условиях (максимальная невязка гибридного фильтра меньше).

UDEKHF_B

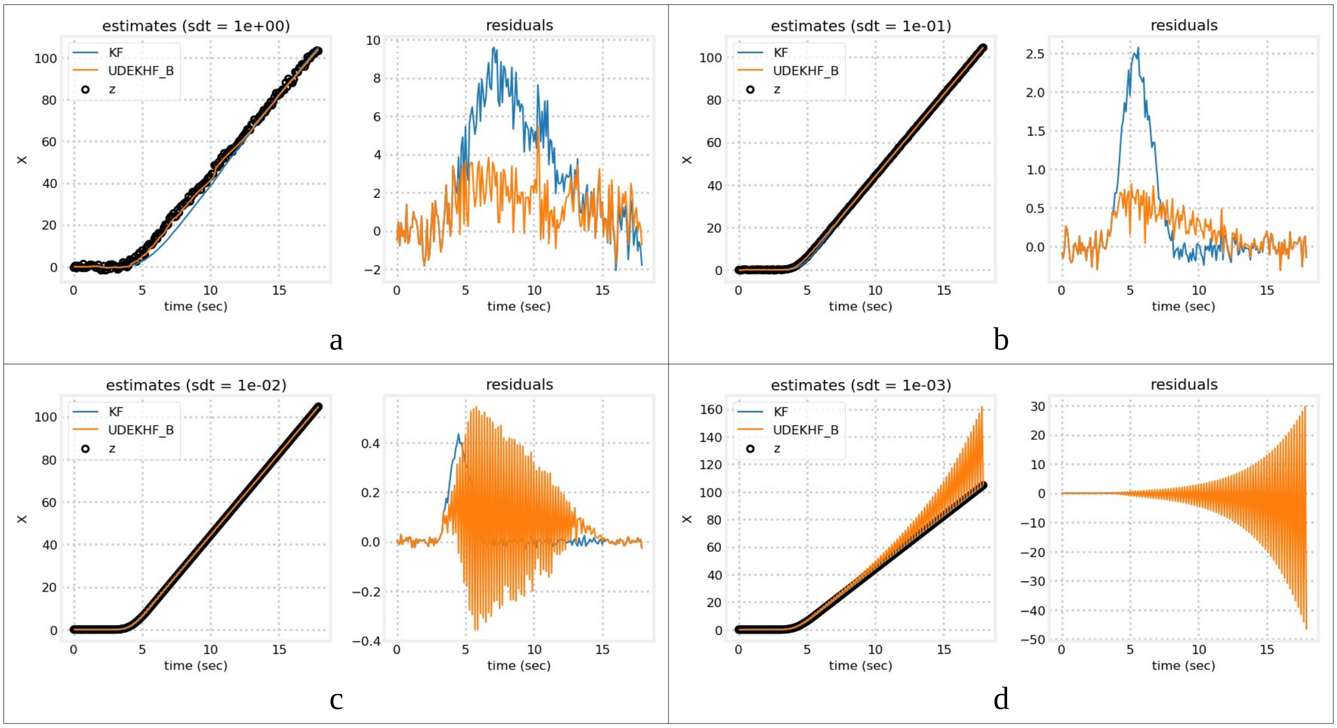


Рис. 5 Работа UDEKHF_B при различных значениях дисперсии шума наблюдения.

Результаты работы UDEKHF_B представлены на рис. 5, данный алгоритм не стабилен при низких значениях дисперсии шума наблюдения. При достаточно высоких значениях дисперсии шума наблюдения алгоритм стабилен и дает более точные оценки, чем фильтр Калмана.

TODO: Сделать график с P[0,0] в условиях расходимости.

EKHF_C и UDEKHF_C

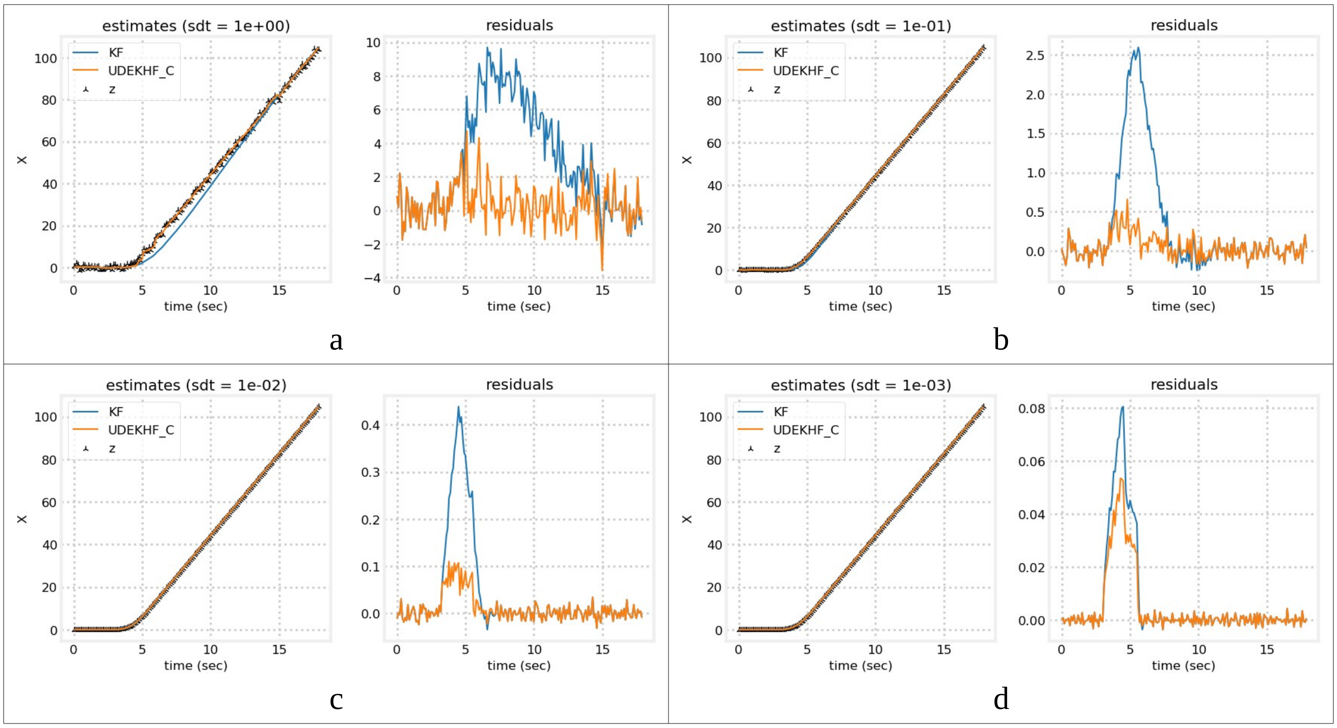


Рис. 6 Работа EKHF_C и UDEKHF_C при различных значениях дисперсии шума наблюдения.

Результаты работы EKHF_C и UDEKHF_C представлены на рис. 6, данные алгоритмы фильтрации во время совершения маневра дают более точные оценки, чем фильтр Калмана. Максимальные невязки даваемые EKHF_C и UDEKHF_C ниже, чем у ОФК.

EKHF_D и UDEKHF_D

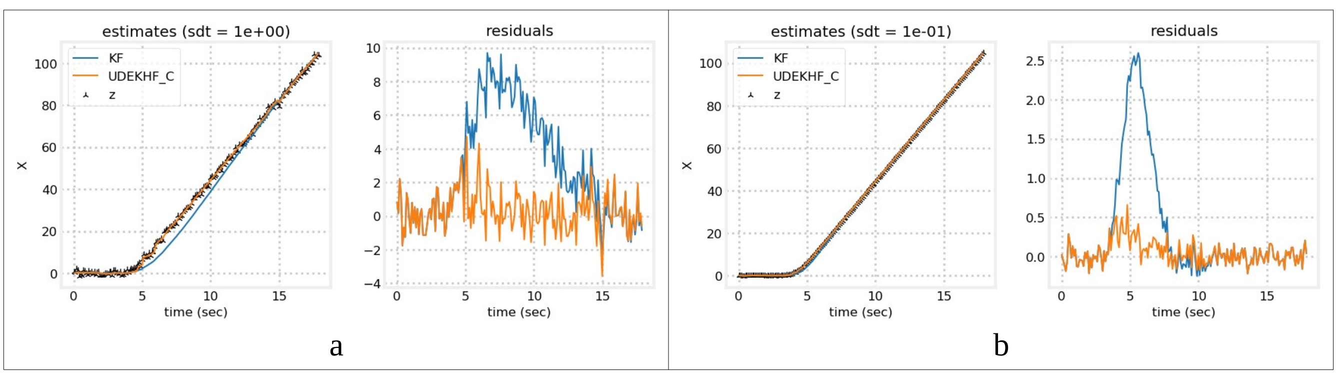


Рис. 7 Работа EKHF_D при различных значениях дисперсии шума наблюдения.

Как и UDEKHF_B алгоритмы EKHF_D и UDEKHF_D не стабильны при низких значениях дисперсии шума наблюдения. Результаты работы EKHF_D представлены на рис. 7, алгоритм UDEKHF_D демонстрирует аналогичное EKHF_D поведение.

Двухмерный случай

В данном случае мы наблюдаем обе координаты объекта.

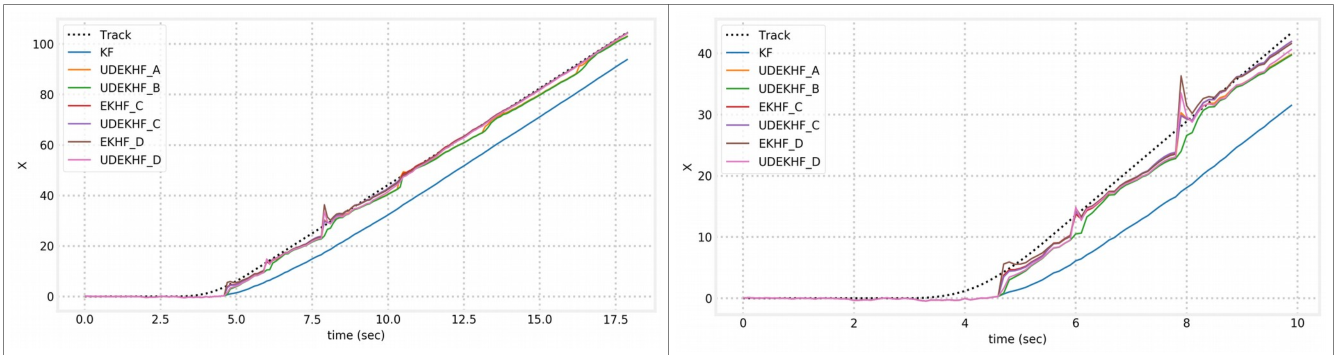
Матрица переходов:

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;;$$

Матрица наблюдения:

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;;$$

Результаты моделирования представлены на рис. 8 в двух масштабах времени:



a b

Рис. 8. Изменение абсциссы объекта во времени и результаты работы фильтров

Здесь, как и в одномерном случае, представлены данные для абсциссы наблюдаемого объекта.

Можно видеть, что фильтр Калмана расходится, во время и после совершения маневра наблюдаемым объектом.

Гибридные фильтры дают более точные оценки абсциссы наблюдаемого объекта, за исключением выбросов, даваемых EKHF_D и UDEKHF_D. UD-версии гибридных фильтров дают похожие оценки.

На графике видно, как происходит коррекция работы фильтров при обнаружении расходимости.

Самую точную оценку дают алгоритмы EKHF_C и UDEKHF_C, кроме того, им потребовалось меньше корректирующих воздействий для выхода на установившийся режим.

Как и в одномерном случае, рассмотрим невязки разных вариантов гибридных фильтров с невязками фильтра Калмана при разных значениях дисперсии шумов наблюдения.

UDEKHF_A

Результаты работы алгоритма для двухмерногослучая представлены представлены на рис. 9.

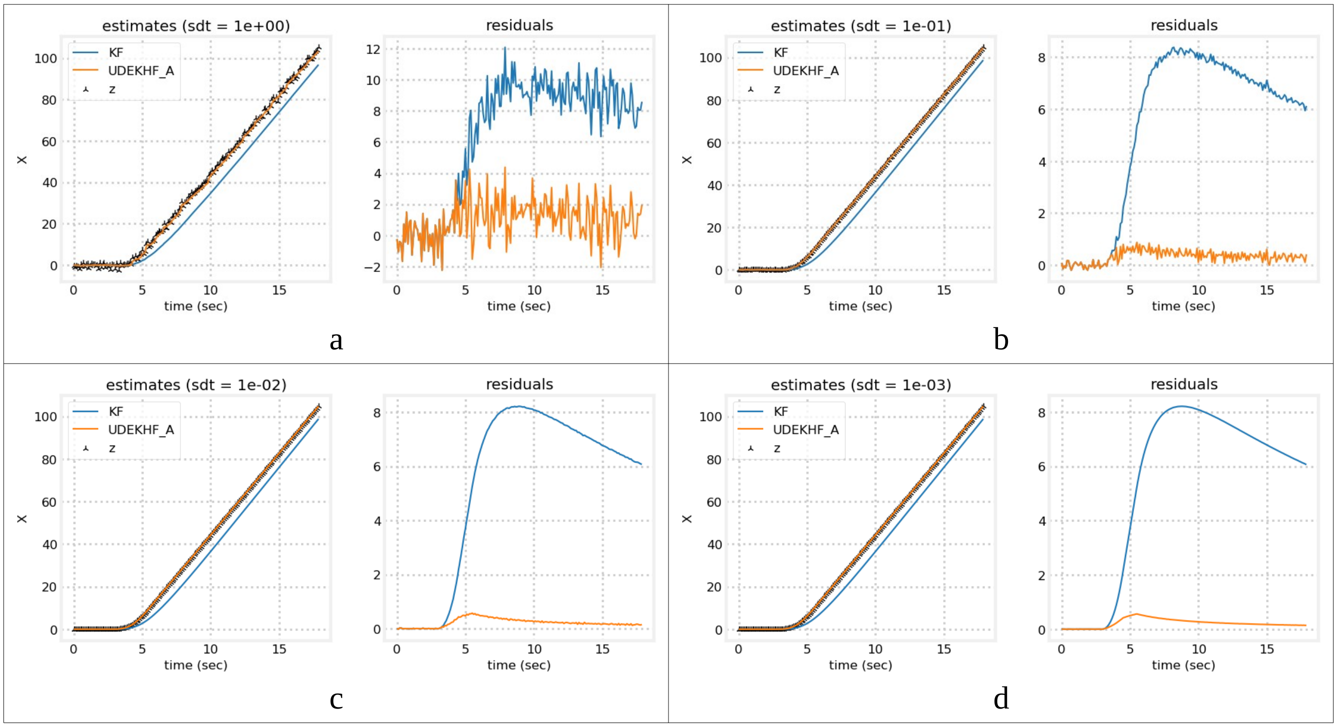


Рис. 9 Работа UDEKHF_A при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Как и в одномерном случае фильтр стабильно работает в разных условиях и выдает более точные оценки, чем фильтр Калмана.

UDEKHF_B

На рис. 10 отражены результаты работы алгоритма UDEKHF_B.

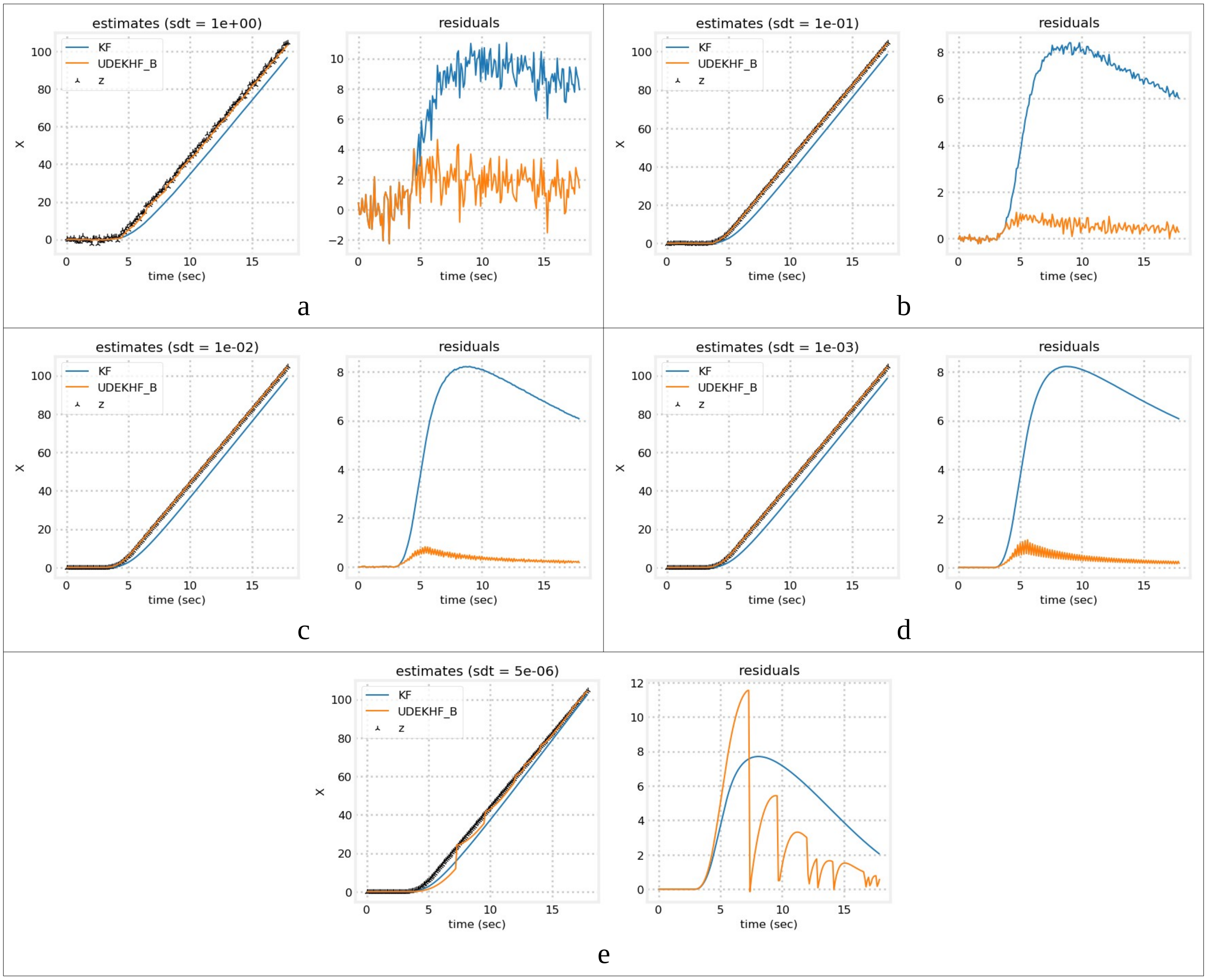


Рис. 10 Работа UDEKHF_B при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Как и в одномерном случае, фильтр работает нестабильно (рис. 10c-e) и расходится (рис. 10e) при относительно низких значениях дисперсии шума наблюдения.

EKHF_C и UDEKHF_C

Результаты работы алгоритма для двухмерного случая представлены представлены на рис. 11.

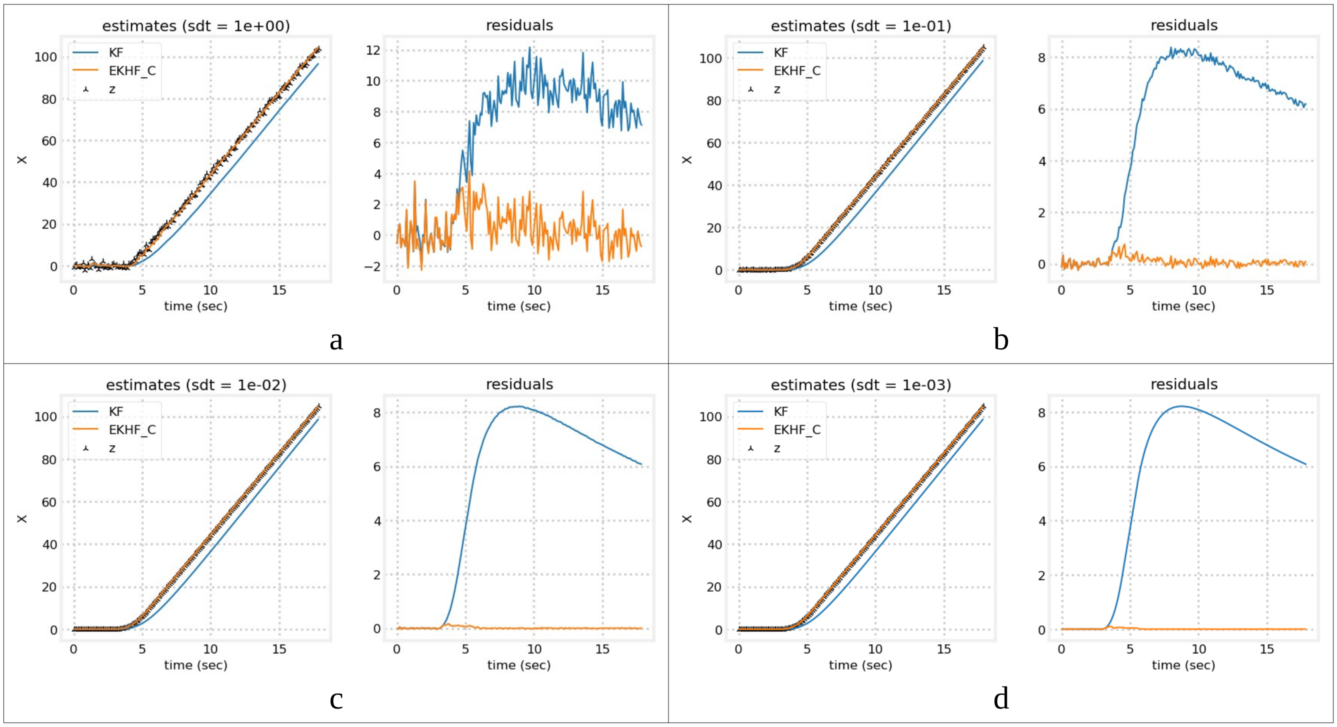


Рис. 11 Работа EKHF_C и UDEKHF_C при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Как и в одномерном случае фильтр стабильно работает в разных условиях и выдает более точные оценки, чем фильтр Калмана, быстрее выходит на установившийся режим.

EKHF_D и UDEKHF_D

Результаты работы алгоритма для двухмерного случая представлены представлены на рис. 12.

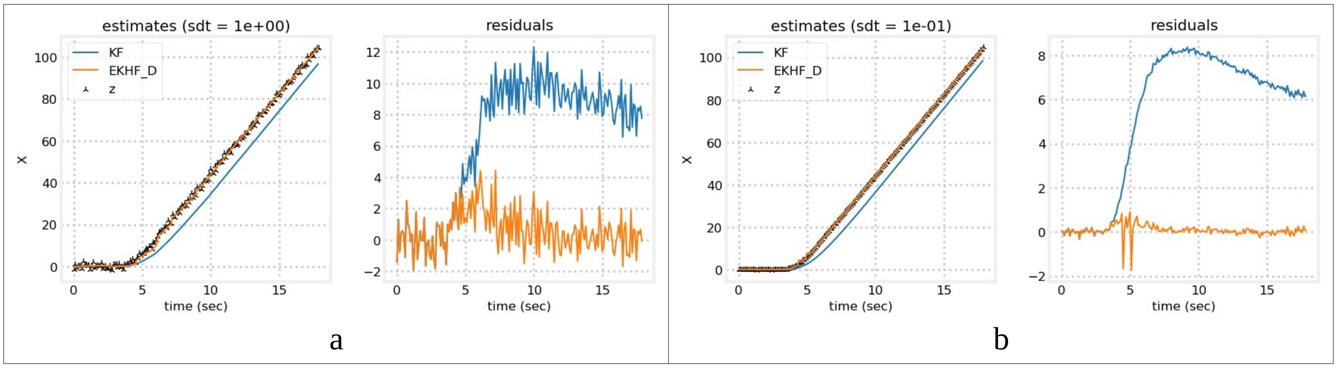


Рис. 12 Работа EKHF_D при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Как в одномерном случае, алгоритмы EKHF_D и UDEKHF_D не стабильны при низких значениях дисперсии шума наблюдения. Результаты работы EKHF_D представлены на рис. 12, алгоритм UDEKHF_D демонстрирует аналогичное EKHF_D поведение.

Заключение

В результате вычислительного эксперимента установлено, что гибридные алгоритмы фильтрации, использующие апостериорные невязки для адаптивной коррекции, показали нестабильную работу. Кроме того они сложнее в реализации, чем алгоритмы, использующие априорные невязки.

Алгоритмы, синтезированные на основе подхода с ограничением на параметры H_∞ - фильтра, устроены более просто, дают более точные оценки, делают меньше корректирующих действий, быстрее сходятся. Кроме того, они достаточно легко могут быть имплементированы как доработка существующих реализаций фильтров Калмана.

Таким образом, к реализации во встраиваемых системах мы рекомендуем EKHF_C для случаев с изменяющимися во времени параметрами шумов процесса и шумов наблюдения и алгоритм UDEKHF_C для случая с постоянными параметрами шумов процесса и шумов наблюдения.

Ссылки

1. R. Kalman, “Contributions to the theory of optimal control,” Boletin de la Sociedad Matematica Mezicana, 5 , pp. 102-119 (1960).
2. J. Bellantoni and K. Dodge, “A square root formulation of the Kalman-Schmidt filter,” AIAA Journal, 5, pp. 1309-1314, 1967.
3. L.MacGee and S.Schmidt, “Discovery of the Kalman Filter as a Practical Tool for Aerospace and Industry,” NASA Technical Memorandum 86847
4. R. Fitzgerald, “Divergence of the Kalman filter,” IEEE Transactions on Automatic Control, AC-16, pp. 736-747 (December 1971).
5. R. Banavar, “A game theoretic approach to linear dynamic estimation,” Doctoral Dissertation, University of Texas at Austin, May 1992.
6. S. Kosanam and D. Simon, “Kalman filtering with uncertain noise covariances,” Intelligent Systems and Control, Honolulu, Hawaii, pp. 375-379, August 2004.
7. W. Haddad, D. Bernstein, and D. Mustafa, “Mixed-norm H2/Hm regulation and estimation: The discrete-time case”, Systems and Control Letters, 16, pp. 235-247 (1991).
8. A.V. Chernodarov, V.N. Kovregin, “An H ∞ Technology for the Detection and Damping of Divergent Oscillations in Updatable Inertial Systems**”,** Proc. of the International Conference “Physics and Control”.– St.Petersburg, 2003, ed.1, pp. 121-126.
9. Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T. Kirubarajan, “Estimation with Application and Tracking and Navigation”, John Wiley & Sons, 2001.
10. G. Bierman, “Factorization Methods f o r Discrete Sequential Estimation”, Academic Press, San Diego, California, 1977.
11. R.R. Labbe, “Kalman and Bayesian Filters in Python”, ch. 14, https://github.com/rlabbe/Kalman-and-Bayesian-Filters-in-Python, 2015.
12. *R.A. Horn, C.R Johnson, Charles R. “Matrix Analysis (2nd ed.).”, Cambridge University Press, 2013, ISBN 978-0-521-38632-6.*
13. Вы находитесь здесь!!