

Аннотация

Разработано семейство гибридных алгоритмов фильтрации, в которых для поддержания сходимости фильтра Калмана используется H_∞ -фильтрация. Проведен вычислительный эксперимент на «игрушечной» задаче. [Дописать](#)

Введение

Фильтр Калмана известен с 60-х годов XX века [1] за более чем 50 лет он нашел применения во многих областях деятельности от навигации до управления портфелями. Для нелинейных задач применяют Обобщенный Фильтр Калмана (ОФК) [2], разработанный инженерами НАСА во время миссии Аполлон [3].

При попытках применения ОФК в промышленности выяснилось, что в некоторых условиях может наблюдаться расходимость ОФК [4], обусловленная неточными математическими моделями наблюдаемых процессов. Данную проблему пытались решить различными модификациями ОФК, например, такими, как в [6].

Стало понятно, что нужен алгоритм фильтрации с гарантированной сходимостью при неточной модели наблюдаемого процесса. Таким алгоритмом стал H_∞ - фильтр, в [5] был использован теоретико-игровой подход к построению H_∞ - фильтра.

Мы сравним между собой алгоритмы ОФК и H_∞ - фильтра, рассмотрим, возможность применения последнего для обеспечения сходимости первого, построим гибридные алгоритмы фильтрации и сравним работу полученных алгоритмов с работой ОФК.

Задача фильтрации

Пусть нам дана система, со следующей моделью пространства состояний:

$$x_k = F(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) ;$$

$$z_k = H(x_k) + v_k ;$$

где x_k - вектор состояния системы, u_{k-1} - вектор возмущения системы, z_k - вектор наблюдений, w_{k-1} - Гауссов шум системы с матрицей ковариации Q_k и нулевым математическим ожиданием, v_k - Гауссов шум наблюдения системы с матрицей ковариации R_k и нулевым математическим ожиданием.

Задача фильтрации состоит в том, чтобы оценить значение вектора состояния системы по доступным значениям наблюдений, минимизируя некоторую функцию стоимости.

Фильтр Калмана

В [1] описан фильтр Калмана, в процессе работы фильтр Калмана минимизирует:

$$J = E \left(\|z_k - \hat{z}_k\|_2^2 \right) ,$$

где \hat{z}_k - оценка наблюдений, выдаваемая фильтром.

Алгоритм работы фильтра Калмана:

Прогноз:

$$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) ;$$

$$F_k = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad B_k = \frac{\partial F}{\partial w} \Big|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad H_k = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x_{k|k-1}}$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T ;$$

$$v_k = z_k - H(x_{k|k-1}) ;$$

Коррекция:

$$P_{k|k} = (P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} ;$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k ;$$

$$K_k = P_{k|k} H_k R_k^{-1} ;$$

более привычная форма представления алгоритма:

Прогноз:

$$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) ;$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T ;$$

$$F_k = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad B_k = \frac{\partial F}{\partial w} \Big|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad H_k = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x_{k|k-1}} ;$$

предполагается, что H_k имеет полный ранг;

$$v_k = z_k - H(x_{k|k-1}) ;$$

Коррекция:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T)^{-1} ;$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k ;$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} ;$$

В условиях, когда невозможно обеспечить сходимость фильтра Калмана применяют H_∞ - фильтры а так же гибридные фильтры .

H_∞ — фильтр, дискретное время

В отличии от фильтра Калмана H_∞ - фильтр [5] оценивает не сам вектор состояния системы, а его линейную комбинацию:

$y_k = L_k x_k$, где L_k - матрица, задаваемая пользователем и имеющая полный ранг.

При этом стремясь ограничить функцию стоимости:

$$J = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \|y_k - \hat{y}_k\|_{S_k}^2}{\|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} (\|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R_k^{-1}}^2)} < \frac{1}{\theta} ;$$

где \hat{y}_k - математическое ожидание y_k , θ - порог, задаваемый пользователем.

Запишем алгоритм работы H_∞ - фильтра в виде:

Прогноз:

$$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) ;$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T ;$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad H_k = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x_{k|k-1}} ;$$

$$v_k = z_k - H(x_{k|k-1}) ;$$

Коррекция:

$$P_{k|k} = P_{k|k-1}^{-1} (I - \theta \tilde{S}_k P_{k|k-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k P_{k|k-1})^{-1} = (P_{k|k-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_k + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} ;$$

$$\tilde{S}_k = L_k^T \bar{S}_k L_k , \text{ где } \bar{S}_k > 0 - \text{ матрица, задаваемая пользователем;}$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k ;$$

$$K_k = P_{k|k} H_k R_k^{-1} ;$$

Критерий работоспособности фильтра:

$$P_{k|k} = (P_{k|k-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_k + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} > 0 ;$$

Матрицу $P_{k|k}$ можно представить в виде двух последовательных операций вида:

$$P_b = (P_{b-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_b)^{-1} = P_{b-1} + \Delta Q_b \quad (1);$$

$$P_d = (P_{d-1}^{-1} + H_d^T R_d^{-1} H_d)^{-1} \quad (2);$$

Операция (2) — обновление матрицы ковариации оценок, применяемое в фильтре Калмана, оно обычно сохраняет положительную определенность P .

Для того, чтобы операция (1) сохраняла положительную определенность P необходимо и достаточно, чтобы выполнялся критерий:

$$\Delta Q_b > 0 \quad (3);$$

Порядок следования операций определяется особенностями реализации алгоритма фильтра.

Гибридные фильтры

В [7] дано описание алгоритма гибридного фильтра, фактически представляющего собой H_∞ -фильтр с особым выбором параметров L_k, S_k, θ .

Так же есть варианты гибридных алгоритмов фильтрации, в которых по умолчанию используется фильтр Калмана, а в случае обнаружения его расходимости используется коррекция с использованием H_∞ -технологии [8]. Однако, функция стоимости, которую минимизируют данные варианты алгоритмов фильтрации отличается от той, которую минимизирует H_∞ -фильтр [5].

Далее мы рассмотрим два класса гибридных алгоритмов фильтрации, в которых по умолчанию используется фильтр Калмана, а в случае обнаружения признаков его расходимости происходит переход к H_∞ -фильтрации [5] для восстановления целостности работы фильтра Калмана.

Так же мы опишем алгоритмы с последовательной обработкой измерений в UD-форме, относящихся к этим классам.

Поддержание целостности работы фильтров: подход без ограничений на параметры H_∞ — фильтра

Для поддержания целостности работы фильтров будет использована операция (1).

При анализе целостности работы оценивающих фильтров применяют χ^2 -тест [9], к квадратичной форме вида:

$$\beta_b = \delta_b^T \hat{S}_b^{-1} \delta_b ;$$

где $\hat{S}_b = R_b + H_b P_b H_b^T$ - матрица ковариации невязок фильтра после выполнения операции,

R_b - матрица ковариации шума процесса на момент вычисления β_b , $H_b = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x_b}$, P_b - матрица ковариации оценок фильтра на момент вычисления β_b , $\delta_b = z_b - H(x_b) \neq 0$ невязка на момент вычисления β_b .

Критерий сходимости фильтра:

$\beta_b \leq \beta_n = \chi_{\alpha, n}^2$ (4), где n — количество степеней свободы (размерность δ_b), α — уровень значимости.

Для обеспечения целостности работы фильтра нужно выполнение критерия:

$$\delta_b^T (R_b + H_b P_b H_b^T)^{-1} \delta_b = \beta_n ;$$

$$\delta_b^T (R_b + H_b (P_{b-1} + \Delta Q_b) H_b^T) \delta_b = \beta_n ;$$

$$\delta_b^T (R_b + H_b P_{b-1} H_b^T + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} \delta_b = \beta_n ;$$

$$\delta_b^T (R_b + H_b P_{k-1} H_b^T + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} \delta_b = \beta_n ;$$

$\delta_b^T (S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} \delta_b = \beta_n$, где $S_b = R_b + H_b P_{b-1} H_b^T$ (5) - матрица ковариации невязок фильтра до выполнения операции;

$$\delta_b \delta_b^T (S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} \delta_b \delta_b^T = \beta_n \delta_b \delta_b^T ;$$

Сравнивая правую и левую части получим:

$$\delta_b \delta_b^T (S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} = \beta_n I ;$$

$$\delta_b \delta_b^T = \beta_n (S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T) ;$$

$$\frac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} = S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T ;$$

$$A_b = H_b \Delta Q_b H_b^T = \frac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} - S_b \quad (6);$$

С другой стороны в силу (1):

$$P_b = (P_{b-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_b)^{-1}, \text{ где } \tilde{S}_b = L_b^T \bar{S}_b L_b ;$$

$$P_b = (P_{b-1}^{-1} - \theta L_b^T S_b L_b)^{-1} = (P_{b-1}^{-1} - L_b^T M_b^{-1} L_b)^{-1}, \text{ где } M_b^{-1} = \theta S_b ;$$

$$P_b = (P_{b-1}^{-1} - L_b^T M_b^{-1} L_b)^{-1} = P_{b-1} + P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} = P_{b-1} + \Delta Q_b ;$$

$$\Delta Q_b = P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} \quad (7);$$

$$A_b = H_b \Delta Q_b H_b^T = H_b P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} H_b^T ;$$

$$A_b = H_b P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} H_b^T ;$$

$$A_b = C_b (M_b + B_b) C_b^T, \text{ где } C_b = H_b P_{b-1} L_b^T \quad (8), \quad B_b = L_b P_{b-1} L_b^T ;$$

$$C_b^T A_b C_b = C_b^T C_b (M_b + B_b) C_b^T C_b \quad (9);$$

Рассмотрим левые множители равенства (9):

$$C_b^T A_b C_b = (C_b^T C_b + \varepsilon I - \varepsilon I) (M_b + B_b) C_b^T C_b = (C_b^T C_b + \varepsilon I) (M_b + B_b) C_b^T C_b - \varepsilon I (M_b + B_b) C_b^T C_b ;$$

$$(C_b^T C_b + \varepsilon I)^{-1} C_b^T A_b C_b = (M_b + B_b) C_b^T C_b - \varepsilon (C_b^T C_b + \varepsilon I)^{-1} (M_b + B_b) C_b^T C_b ;$$

В силу симметричности матриц:

$$(C_b^T C_b + \varepsilon I)^{-1} C_b^T A_b C_b = (M_b + B_b) C_b^T C_b - \varepsilon (C_b^T C_b + \varepsilon I)^{-1} C_b^T C_b (M_b + B_b) ;$$

В пределе при переходе к $\varepsilon \rightarrow +0$ получим:

$$C_b^+ A_b C_b = (M_b + B_b) C_b^T C_b ;$$

Проделав аналогичные преобразования с правыми множителями матриц получим:

$$C_b^+ A_b C_b^{+T} = M_b + B_b ;$$

$$M_b = C_b^+ A_b C_b^{+T} - B_b = C_b^+ A_b C_b^{+T} - L_b P_{b-1} L_b^T ;$$

Подставим M_b в (7):

$$\Delta Q_b = P_{b-1} L_b^T (C_b^+ A_b C_b^{+T} - L_b P_{b-1} L_b^T + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} ;$$

получим:

$$\Delta Q_b = P_{b-1} L_b^T C_b^+ A_b C_b^{+T} L_b P_{b-1} \quad (10), \text{ где:}$$

$$A_b = \frac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} - S_b, \quad S_b = R_b + H_b P_{b-1} H_b^T, \quad C_b = H_b P_{b-1} L_b^T \text{ согласно (6), (5) и (8) соответственно.}$$

Для выполнения критерия (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия [12]:

- матрица $Z_b = P_{b-1} L_b^T C_b^+$ должна иметь полный ранг;
- $A_b > 0$ (11);

Рассмотрим матрицу $Z_b = P_{b-1} L_b^T C_b^+$:

- т. к. $P_b > 0$, а L_b имеет полный ранг, по произведение $P_{b-1} L_b$ так же имеет полный ранг;
- т. к. H_b и L_b имеют полный ранг, а $P_b > 0$, то C_b так же имеет полный ранг, следовательно: произведение $C_b^T C_b > 0$ [12], соответственно, $C_b^+ = (C_b^T C_b)^{-1} C_b^T$ так же имеет полный ранг;
- т. к. произведение $P_{b-1} L_b$ и матрица C_b^+ имеют полный ранг, то Z_b так же имеет полный ранг.

Рассмотрим матрицу A_b :

- $S_b \geq H_b P_{b-1} H_b^T > 0$;
- рассмотрим произведение $x^T (\delta_b \delta_b^T) x = (x^T \delta_b) (\delta_b^T x)$ для любого вектора $x \neq 0$:
 - в случае размерности вектора x больше одного $x^T (\delta_b \delta_b^T) x = x^T (\delta_b \delta_b^T) x \geq 0$, следовательно, в силу положительной определенности S_b гарантировать существование гибридного фильтра невозможно;
 - в случае размерности вектора x равной одному (при UD-реализации фильтра) $x^T (\delta_b \delta_b^T) x = \delta_b^2 x^2 > 0$,
 - при этом выражение (5) вырождается в $a_b = \frac{\delta_b^2}{\beta_1} - s_b$,
 - критерий (4) нарушается в случае, когда $\frac{\delta_b^2}{s_b} > \beta_1$ или $\frac{\delta_b^2}{\beta_1} - s_b > 0$,
 - таким образом, при нарушении критерия (4), $A_b = a_b > 0$,

Таким образом, существует UD-реализация гибридного фильтра.

Выбор параметров L_b, S_b, θ при использовании H_∞ -фильтрации для поддержания целостности работы фильтра Калмана сводится к выбору матрицы L_b в конкретном алгоритме, а так же к выбору невязки δ_b , используемой для оценки целостности работы фильтра.

Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по априорным невязкам (UDEKHF_A)

Инициализация:

$$x_{0|0}=x_0 ; U_{0|0}, D_{0|0}=udu(P_0) ; U_q, D_q=udu(Q) ; U_r^{-1}, D_r=udu(R) , где D_r=[r_1...r_j...r_n] ;$$

Работа:

1 Прогноз:

$$m_0=x_{k|k-1}=F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) ;$$

$$F_k=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_{k-1|k-1}} ; B_k=\left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{x_{k-1|k-1}} ;$$

$$U_0, D_0=MWGS([F_k U_{k-1|k-1}; B_k U_q], [D_{k-1|k-1}; D_q]) ;$$

2 Коррекция:

$$\hat{z}=U_r z_k ;$$

2.1 Итерации по j = 1, n:

$$v_j=\hat{z}_j-H_j(m_{j-1}) ;$$

$$h_j=\left(U_r \frac{\partial H}{\partial x}\right)_{m_{j-1}} ;$$

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$$f_j=h_j U_{j-1} ; v_j=D_{j-1} f_j^T ; c_j=f_j v_j ; s_j=c_j+r_j ;$$

$$s_j=\frac{v_j^2}{\beta_1}-e_j ;$$

Если $d_j \geq 0$ - делаем адаптивную коррекцию:

$$q_j=\frac{d_j}{c_j^2} ;$$

$$\tilde{U}_{j-1}, \tilde{D}_{j-1}=MWGS([U_{j-1}; U_{j-1} v_j], [D_{j-1}; q_j]) ;$$

$$\tilde{f}_j=h_j \tilde{U}_{j-1} ; \tilde{v}_j=\tilde{D}_{j-1} \tilde{f}_j^T ; \tilde{\alpha}_j=\tilde{f}_j \tilde{v}_j+r_j ;$$

иначе:

$$\tilde{U}_{j-1}, \tilde{D}_{j-1}, \tilde{f}_j, \tilde{v}_j, \tilde{\alpha}_j=U_{j-1}, D_{j-1}, f_j, v_j, e_j ;$$

2.1.2 Обновление матрицы ковариации оценок и вектора состояний:

$$K_j = \tilde{U}_{j-1} \tilde{v}_j \tilde{\alpha}_j^{-1} ;$$

$$m_j = m_{j-1} + K_j v_j ;$$

$$U_j, D_j = MWGS([K_j \tilde{f}_j - \tilde{U}_{j-1} : K_j], [\tilde{D}_{j-1} : r_j]) ;$$

2.2 По окончании итераций:

$$U_{k|k}, D_{k|k} = U_n, D_n ;$$

$$x_{k|k} = m_n .$$

Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по апостериорным невязкам (UDEKHF_B)

В [8] для операции (1) выбрано следующее значение L_k :

$$L_k = \tilde{H}_k^T, \text{ где } \tilde{H}_k = \frac{\partial H(x + \tilde{K}_k(z_k - H(x)))}{\partial x} \bigg|_{x_{k|k-1}} = \frac{\partial H}{\partial x} \bigg|_{\tilde{x}_{k|k}} \left(\frac{\partial x}{\partial x} \bigg|_{x_{k|k-1}} - \tilde{K}_k \frac{\partial H}{\partial x} \bigg|_{x_{k|k-1}} \right) = \hat{H}_k (I - \tilde{K}_k H_k) ;$$

Алгоритм гибридного UD-фильтра с оценкой сходимости по апостериорным невязкам:

Инициализация:

$$x_{0|0} = x_0 ; U_{0|0}, D_{0|0} = udu(P_0) ; U_q, D_q = udu(Q) ; U_r^{-1}, D_r = udu(R) , \text{ где } D_r = [r_1 \dots r_j \dots r_n] ;$$

Работа:

1 Прогноз:

$$m_0 = x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) ;$$

$$F_k = \frac{\partial F}{\partial x} \bigg|_{x_{k-1|k-1}} ; B_k = \frac{\partial F}{\partial w} \bigg|_{x_{k-1|k-1}} ;$$

$$U_0, D_0 = MWGS([F_k U_{k-1|k-1} : B_k U_q], [D_{k-1|k-1} : D_q]) ;$$

2 Коррекция:

$$\hat{z} = U_r z_k ;$$

2.1 Итерации по $j = 1, n$:

$$v_j = \hat{z}_j - H_j(m_{j-1}) ;$$

$$h_j = \left(U_r \frac{\partial H}{\partial x} \bigg|_{m_{j-1}} \right)_j ;$$

Обновление матрицы ковариации оценок и вектора состояний:

$$\begin{aligned}
f_j &= h_j U_{j-1} \quad ; \quad v_j = D_{j-1} f_j^T \quad ; \quad \alpha_j = f_j v_j + r_j \quad ; \\
K_j &= U_{j-1} v_j \alpha_j^{-1} \quad ; \\
\tilde{m}_j &= m_{j-1} + K_j v_j \quad ; \\
\tilde{U}_j, \tilde{D}_j &= MWGS([K_j f_j - U_{j-1}; K_j], [D_{j-1}; r_j]) \quad ;
\end{aligned}$$

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$$\begin{aligned}
\eta_j &= \hat{z}_j - H_j(\tilde{m}_j) \quad ; \\
\hat{h}_j &= \left(U_r \frac{\partial H}{\partial x} \bigg|_{\tilde{m}_j} \right) \quad ; \\
\hat{f}_j &= \hat{h}_j \tilde{U}_j \quad ; \quad \hat{v}_j = \tilde{D}_j \hat{f}_j^T \quad ; \quad s_j = \hat{f}_j \hat{v}_j + r_j \quad ; \\
d_j &= \frac{\eta_j^2}{\beta_1} - s_j \quad ;
\end{aligned}$$

Если $d_j \geq 0$ - делаем адаптивную коррекцию:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_j &= \hat{h}_j - \hat{h}_j K_j h_j \quad ; \\
\tilde{f}_j &= \tilde{h}_j \tilde{U}_j \quad ; \quad \tilde{v}_j = \tilde{D}_j \tilde{f}_j^T \quad ; \quad c_j = \hat{f}_j \tilde{v}_j \quad ; \\
q_j &= \frac{d_j}{c_j^2} \quad ; \\
U_j, D_j &= MWGS([\tilde{U}_j; \tilde{U}_j \tilde{v}_j], [\tilde{D}_j; q_j]) \quad ; \\
m_j &= m_{j-1} + U_j D_j U_j^T h_j^T \frac{v_j}{r_j} \quad ;
\end{aligned}$$

иначе:

$$U_j, D_j, m_j = \tilde{U}_j, \tilde{D}_j, \tilde{m}_j \quad ;$$

2.2 По окончании итераций:

$$\begin{aligned}
U_{k|k}, D_{k|k} &= U_n, D_n \quad ; \\
x_{k|k} &= m_n \quad .
\end{aligned}$$

Поддержание целостности работы фильтров: подход с ограничениями на параметры H_∞ — фильтра

В рамках данного подхода мы будем использовать следующий выбор параметров H_∞ -фильтра:

$$L_k = I ;$$

$$\bar{S}_k = P_b^{-1} ;$$

При этом выражение (1) примет следующий вид:

$$P_a = (P_b^{-1} - \theta P_b^{-1})^{-1} = P_b + \Delta Q_b = P_b + \frac{\theta}{1-\theta} P_b = P_b + a_b P_b \quad (11).$$

Для того, чтобы операция (11) позволяла сохранять матрицу ковариации оценок положительно определенной достаточно выполнение условия:

$$0 < \theta < 1 \quad (12);$$

при этом:

$$\Delta Q_b = a_b P_b \quad (13), \text{ где } a_b > 0 \quad (14).$$

Подставим (13) в (6):

$$a_b H_b P_b H_b^T = \frac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} - S_b \quad (15);$$

домножим (15) справа и слева на δ_b и δ_b^T соответственно:

$$a_b \delta_b^T H_b P_b H_b^T \delta_b = \frac{(\delta_b^T \delta_b)(\delta_b^T \delta_b)}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b = \frac{(\delta_b^T \delta_b)^2}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b ;$$

отсюда:

$$a_b = \frac{\frac{(\delta_b^T \delta_b)^2}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b}{\delta_b^T H_b P_b H_b^T \delta_b} = \frac{\delta_b^T A_b \delta_b}{\delta_b^T H_b P_b H_b^T \delta_b} \quad (16);$$

для того, чтобы существовал гибридный фильтр достаточно, чтобы выполнялось условие (14) в случае нарушения критерия (4).

Знаменатель выражения (16) положителен при ненулевых δ_b , следовательно, нам достаточно проанализировать знак числителя с учетом нарушения критерия сходимости фильтра (4), или:

$$\delta_b^T S_b^{-1} \delta_b > \beta_n \Leftrightarrow \delta_b \delta_b^T > \beta_n S_b \Leftrightarrow \delta_b^T (\delta_b \delta_b^T) \delta_b - \beta_n \delta_b^T S_b \delta_b > 0 \Leftrightarrow \frac{(\delta_b^T \delta_b)^2}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b > 0 ;$$

а это и есть наш числитель, таким образом, гибридный фильтр существует.

Гибридный фильтр с оценкой сходимости по априорным невязкам (ЕКНФ_С)

В данном классе алгоритмов фильтрации используется следующая последовательность операций при обновлении $P_{k|k}$:

$$\tilde{P}_{k|k-1} = (P_{k|k-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_k)^{-1} = P_{k|k-1} + \Delta Q_k ;$$

$$P_{k|k} = (\tilde{P}_{k|k-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} ;$$

Этот вариант представления фактически предполагает увеличение Q_k величину $\Delta Q_k = (P_{k|k-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_k)^{-1} - P_{k|k-1}$, что позволяет связать H_∞ -фильтр и Калмана. При использовании такого представления $P_{k|k}$ работа H_∞ -фильтра отличается от работы фильтра Калмана лишь добавкой ΔQ_k , которая гарантирует сходимость фильтра в сложных условиях работы.

Алгоритм работы гибридного фильтра в этом случае следующий:

Прогноз:

$$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) ;$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad H_k = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x_{k|k-1}} ;$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T ;$$

$$v_k = z_k - H(x_{k|k-1}) ;$$

контроль целостности работы фильтра по априорной невязке:

$$E_k = R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T ;$$

Критерий расходимости фильтра:

$$v_k^T E_k^{-1} v_k > \beta_n ;$$

при наличии признаков расходимости, - адаптивная коррекция:

$$A_k = \frac{v_k v_k^T}{\beta_n} - E_k ;$$

$$a_k = \frac{v_k^T A_k v_k}{v_k^T H_k P_{k|k-1} H_k^T v_k} ;$$

$$\tilde{P}_{k|k-1} = (1 + a_k) P_{k|k-1} ;$$

иначе:

$$\tilde{P}_{k|k-1} = P_{k|k-1} ;$$

Коррекция:

$$K_k = \tilde{P}_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k \tilde{P}_{k|k-1} H_k^T)^{-1} ;$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k ;$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) \tilde{P}_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T = (I - K_k H_k) \tilde{P}_{k|k-1} .$$

Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по априорным невязкам (UDEKHF_C)

Инициализация:

$$x_{0|0} = x_0 ; U_{0|0}, D_{0|0} = udu(P_0) ; U_q, D_q = udu(Q) ; U_r^{-1}, D_r = udu(R) , \text{ где } D_r = [r_1 \dots r_j \dots r_n] ;$$

Работа:

1 Прогноз:

$$m_0 = x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) ;$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}} ;$$

$$U_0, D_0 = MWGS([F_k U_{k-1|k-1}; B_k U_q], [D_{k-1|k-1}; D_q]) ;$$

2 Коррекция:

$$\hat{z} = U_r z_k ;$$

2.1 Итерации по j = 1,n:

$$v_j = \hat{z}_j - H_j(m_{j-1}) ;$$

$$h_j = \left(U_r \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{m_{j-1}} \right)_j ;$$

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$$f_j = h_j U_{j-1} ; v_j = D_{j-1} f_j^T ; c_j = f_j v_j ; e_j = c_j + r_j ;$$

$$a_j = \frac{v_j^2}{\beta_1} - e_j ;$$

Если $a_j > 0$ - делаем адаптивную коррекцию:

$$a_j = \frac{a_j}{c_j} + 1 ;$$

$$\tilde{U}_{j-1} = U_{j-1} ; \quad \tilde{D}_{j-1} = a_j D_{j-1} ; \quad \tilde{f}_j = f_j ; \quad \tilde{v}_j = a_j v_j ; \quad \tilde{\alpha}_j = a_j c_j + r_j ;$$

иначе:

$$\tilde{U}_{j-1}, \tilde{D}_{j-1}, \tilde{f}_j, \tilde{v}_j, \tilde{\alpha}_j = U_{j-1}, D_{j-1}, f_j, v_j, e_j ;$$

2.1.2 Обновление матрицы ковариации ошибок и вектора состояний:

$$K_j = \tilde{U}_{j-1} \tilde{v}_j \tilde{\alpha}_j^{-1} ;$$

$$m_j = m_{j-1} + K_j v_j ;$$

$$U_j, D_j = MWGS([K_j \tilde{f}_j - \tilde{U}_{j-1} : K_j], [\tilde{D}_{j-1} : r_j]) ;$$

2.2 По окончании итераций:

$$U_{k|k}, D_{k|k} = U_n, D_n ;$$

$$x_{k|k} = m_n .$$

Гибридный фильтр с оценкой сходимости по апостериорным невязкам (EKFH_D)

В данном классе алгоритмов фильтрации используется следующая последовательность операций при обновлении $P_{k|k}$:

$$\tilde{P}_{k|k} = (P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} ;$$

$$P_{k|k-1} = (\tilde{P}_{k|k}^{-1} - \theta \tilde{S}_k)^{-1} = \tilde{P}_{k|k} + \Delta Q_k ;$$

Алгоритм работы гибридного фильтра в этом случае следующий:

Прогноз:

$$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) ;$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad H_k = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x_{k|k-1}} ;$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T ;$$

$$v_k = z_k - H(x_{k|k-1}) ;$$

$$\tilde{K}_k = P_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T)^{-1} ;$$

$$\tilde{P}_{k|k} = (I - \tilde{K}_k H_k) P_{k|k-1} (I - \tilde{K}_k H_k)^T + \tilde{K}_k R_k \tilde{K}_k^T = (I - \tilde{K}_k H_k) P_{k|k-1} ;$$

$$\tilde{x}_{k|k} = x_{k|k-1} + \tilde{K}_k v_k ;$$

контроль целостности работы фильтра по апостериорной невязке,

$$\eta_k = z_k - H(\tilde{x}_{k|k}) ;$$

$$\hat{H}_k = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{\tilde{x}_{k|k}} ;$$

$$E_k = R_k + \hat{H}_k \tilde{P}_{k|k} \hat{H}_k^T ;$$

Критерий расходимости фильтра:

$$v_k^T E_k^{-1} v_k > \beta_n ;$$

при наличии признаков расходимости, - адаптивная коррекция:

$$A_k = \frac{\eta_k \eta_k^T}{\beta_n} - E_k ;$$

$$a_k = \frac{\eta_k^T A_k \eta_k}{\eta_k^T H_k P_{k|k-1} H_k^T \eta_k} ;$$

$$P_{k|k-1} = (1 + a_k) \tilde{P}_{k|k-1} ;$$

$$K_k = P_{k|k} H_k^T R_k^{-1} ;$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k ;$$

иначе:

$$P_{k|k} = \tilde{P}_{k|k} ;$$

$$x_{k|k} = \tilde{x}_{k|k} .$$

Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по апостериорным невязкам (UDEKHF_D)

Алгоритм гибридного UD-фильтра с оценкой сходимости по апостериорным невязкам:

Инициализация:

$$x_{0|0} = x_0 ; U_{0|0}, D_{0|0} = udu(P_0) ; U_q, D_q = udu(Q) ; U_r^{-1}, D_r = udu(R) , \text{ где } D_r = [r_1 \dots r_j \dots r_n] ;$$

Работа:

1 Прогноз:

$$m_0 = x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) ;$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}} ;$$

$$U_0, D_0 = MWGS([F_k U_{k-1|k-1}; B_k U_q], [D_{k-1|k-1}; D_q]) ;$$

2 Коррекция:

$$\hat{z} = U_r z_k ;$$

2.1 Итерации по j = 1, n:

$$v_j = \hat{z}_j - H_j(m_{j-1}) ;$$

$$h_j = \left(U_r \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{m_{j-1}} \right)_j ;$$

Обновление матрицы ковариации ошибок и вектора состояний:

$$f_j = h_j U_{j-1} ; v_j = D_{j-1} f_j^T ; \alpha_j = f_j v_j + r_j ;$$

$$K_j = U_{j-1} v_j \alpha_j^{-1} ;$$

$$\tilde{m}_j = m_{j-1} + K_j v_j ;$$

$$\tilde{U}_j, \tilde{D}_j = MWGS([K_j f_j - U_{j-1}; K_j], [D_{j-1}; r_j]) ;$$

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$$\eta_j = \hat{z}_j - H_j(\tilde{m}_j) ;$$

$$\hat{h}_j = \left(U_r \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{\tilde{m}_j} \right)_j ;$$

$$\hat{f}_j = \hat{h}_j \tilde{U}_j ; \hat{v}_j = \tilde{D}_j \hat{f}_j^T ; e_j = \hat{f}_j \hat{v}_j + r_j ; a_j = \frac{\eta_j^2}{\beta_1} - e_j ;$$

Если $a_j > 0$ - делаем адаптивную коррекцию:

$$a_j = \frac{a_j}{c_j} + 1 ;$$

$$U_j = \tilde{U}_j ; \quad D_j = a_j \tilde{D}_j ; \quad m_j = m_{j-1} + U_j D_j U_j^T h_j^T \frac{v_j}{r_j} ;$$

иначе:

$$U_j, D_j, m_j = \tilde{U}_j, \tilde{D}_j, \tilde{m}_j ;$$

2.2 По окончании итераций:

$$U_{k|k}, D_{k|k} = U_n, D_n ;$$

$$x_{k|k} = m_n .$$

Резюме по гибридным алгоритмам фильтрации

Исходя из вида гибридных алгоритмов фильтрации можно сделать следующие предварительные выводы:

1. Алгоритмы с использованием априорных невязок для адаптивной коррекции требуют меньшего количества вычислений по сравнению с алгоритмами, использующими апостериорную невязку.
2. Так же они не требуют дополнительного вычисления обновленного состояния.
3. Алгоритм UDEKHF_A в случае отсутствия расходимости требует почти столько же вычислений, сколько ОФК. В то же время UDEKHF_B требует значительного дополнительного объема вычислений вне зависимости от наличия или отсутствия признаков расходимости.
4. Самый простой алгоритм - UDEKHF_C.

Вычислительный эксперимент

Сравним поведение гибридных алгоритмов фильтрации с обычным фильтром Калмана для несоответствия модели реального наблюдаемого процесса.

Для предварительной оценки алгоритмов и выбора алгоритмов для последующей реализации во встраиваемых системах рассмотрим «игрушечную» задачу «наблюдение маневрирующего объекта».

Наблюдение маневрирующего объекта

Пусть мы наблюдаем объект, который совершает маневр [11], на рис. 1 изображен пример траектории такого объекта.

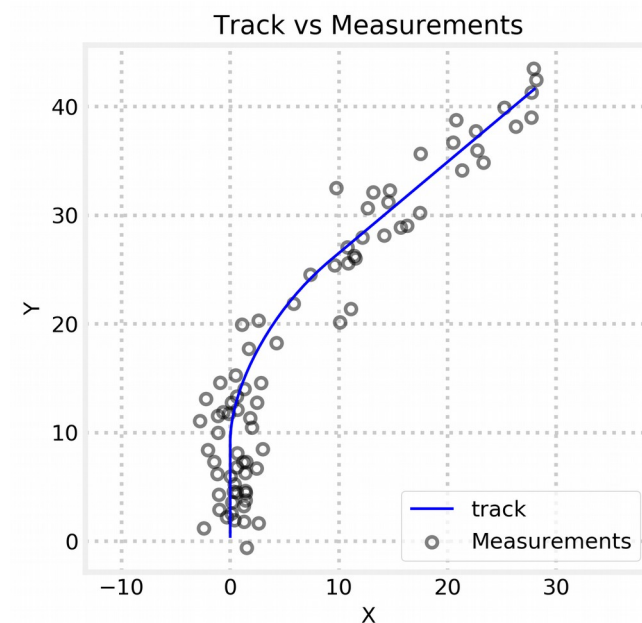


Рис. 1. Путь сопровождаемого объекта и результаты измерения его координат

Наблюдаемый объект движется прямолинейно и равномерно, а за тем совершает поворот с ускорением.

Мы рассмотрим два примера наблюдения нашего объекта:

- одномерный, когда мы наблюдаем лишь одну координату,
- двухмерный, когда мы наблюдаем обе координаты

В обоих случаях кинематическая модель движения объекта — прямолинейное равномерное движение.

Одномерный случай

В данном случае мы наблюдаем только координату x объекта.

Матрица переходов:

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

Матрица наблюдения:

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} ;$$

Результаты моделирования представлены на рис. 2 в двух масштабах времени:

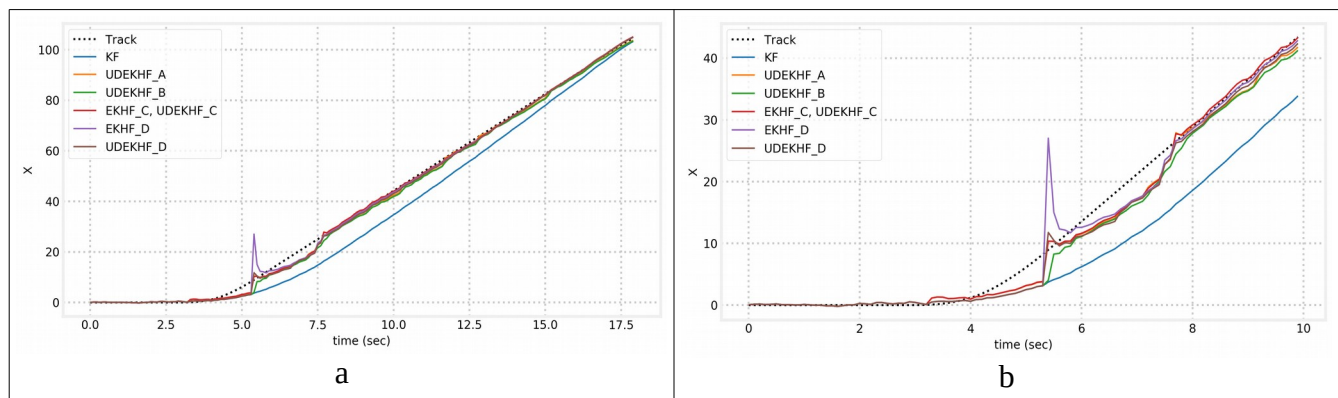


Рис. 2. Изменение абсциссы объекта во времени и результаты работы фильтров

Можно видеть, что фильтр Калмана расходится, когда объект совершает маневр.

Гибридные фильтры дают более точные оценки абсциссы наблюдаемого объекта, за исключением выбросов, даваемых алгоритмом EKHF_D.

Алгоритмы EKHF_C и UDEKHF_C дают идентичные оценки, в то время как оценки, даваемые алгоритмами EKHF_D и UDEKHF_D разные.

Выбросы оценок, даваемых алгоритмом EKHF_D могут быть связаны с неустойчивостью последнего.

Сравним невязки разных вариантов гибридных фильтров с невязками фильтра Калмана при разных значениях дисперсии шумов наблюдения.

UDERHF_A

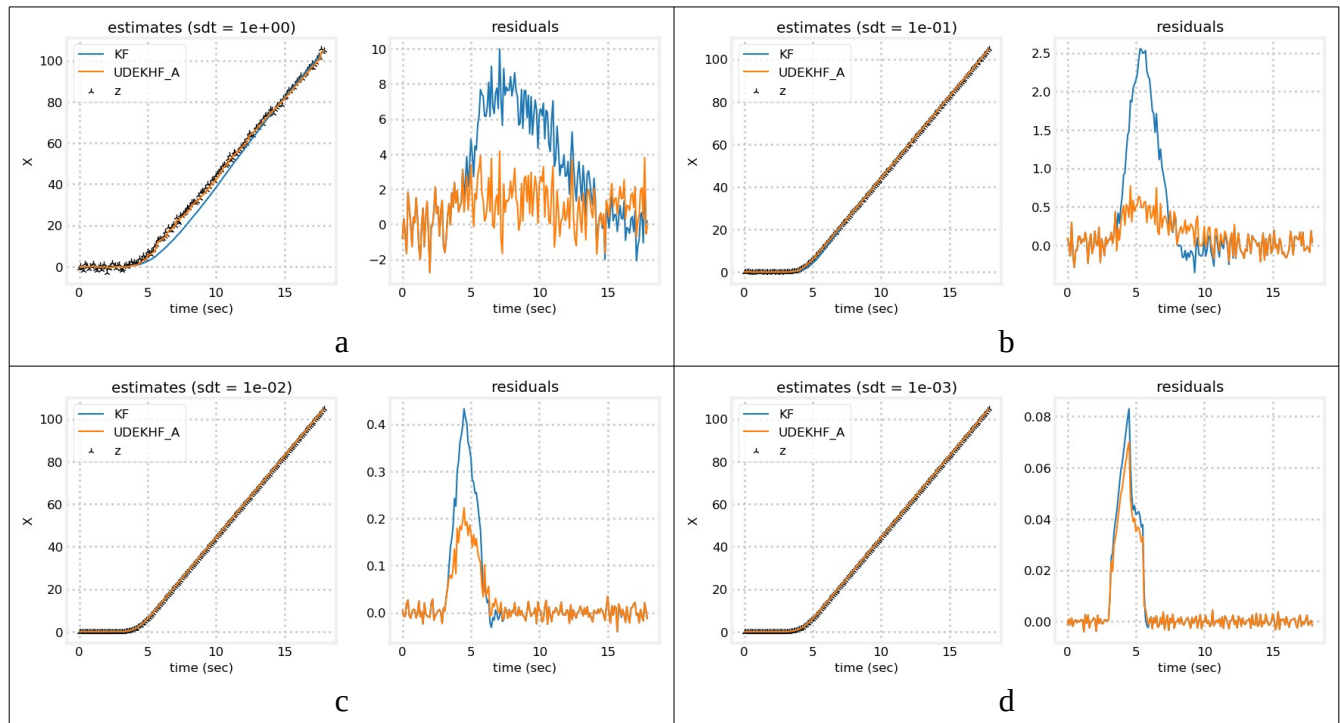


Рис. 3 Работа UDEKHF_A при различных значениях дисперсии шума наблюдения

Результаты сравнения алгоритмов представлены на рис. 3, при этом их оценки UDEKHF_A точнее тех, что даёт фильтр Калмана в тех же условиях (максимальная невязка гибридного фильтра меньше).

UDEKHF_B

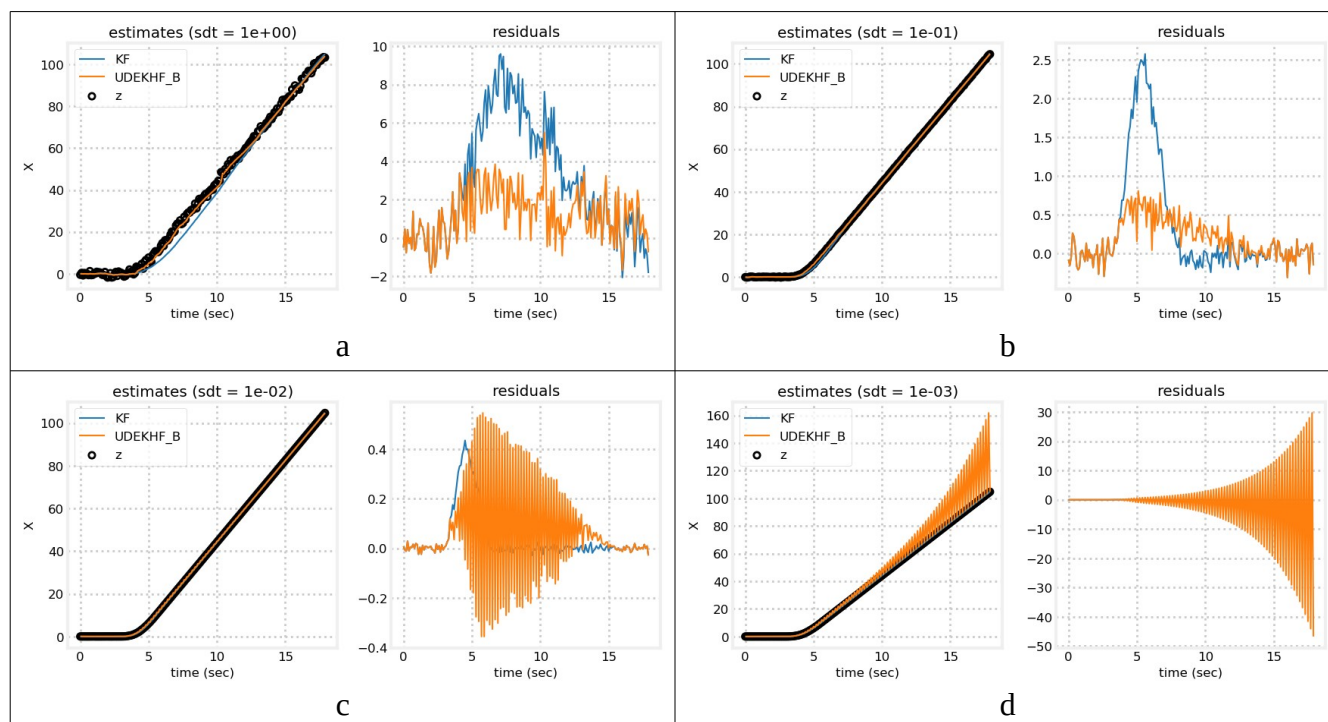


Рис. 5 Работа UDEKHF_B при различных значениях дисперсии шума наблюдения.

Результаты работы UDEKHF_B представлены на рис. 5, данный алгоритм не стабилен при низких значениях дисперсии шума наблюдения. При достаточно высоких значениях дисперсии шума наблюдения алгоритм стабилен и дает более точные оценки, чем фильтр Калмана.

TODO: Сделать график с $P[0,0]$ в условиях расходимости.

ЕКНН_C и UDEКНН_C

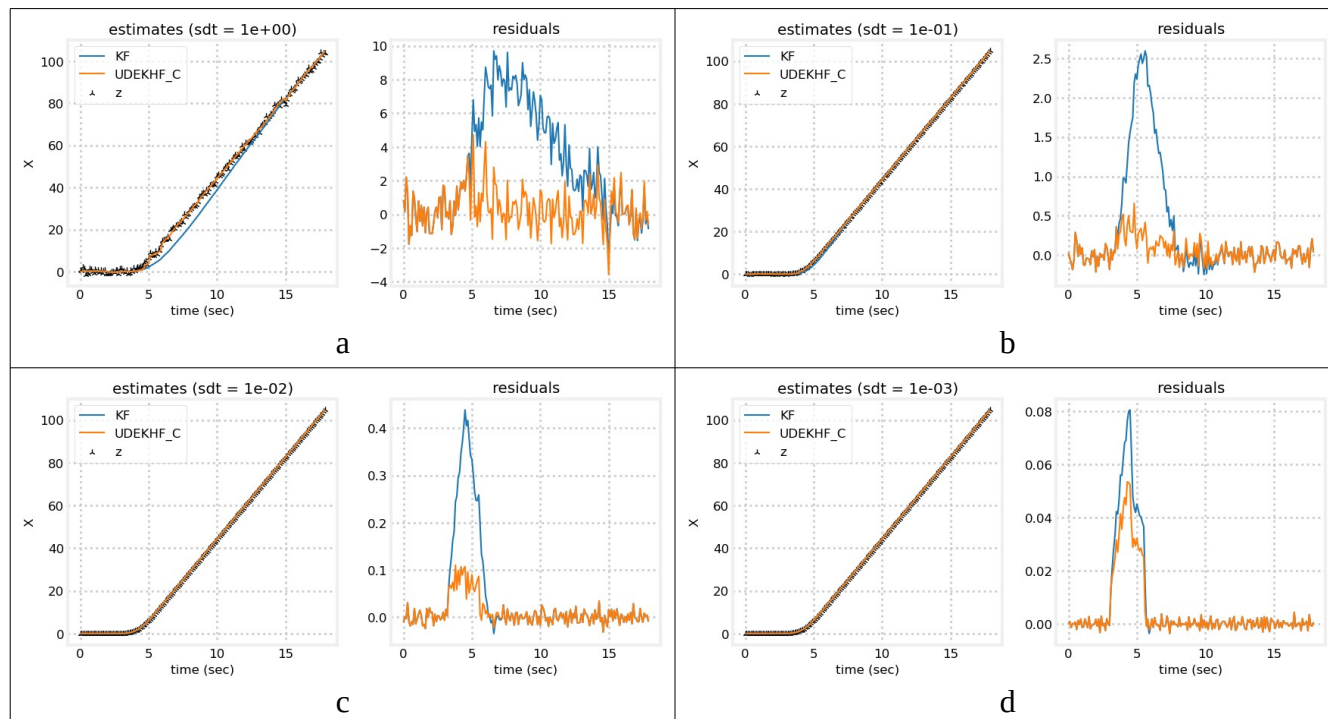


Рис. 6 Работа ЕКНН_C и UDEКНН_C при различных значениях дисперсии шума наблюдения.

Результаты работы ЕКНН_C и UDEКНН_C представлены на рис. 6, данные алгоритмы фильтрации во время совершения маневра дают более точные оценки, чем фильтр Калмана. Максимальные невязки даваемые ЕКНН_C и UDEКНН_C ниже, чем у ОФК.

ЕКНН_D и UDEКНН_D

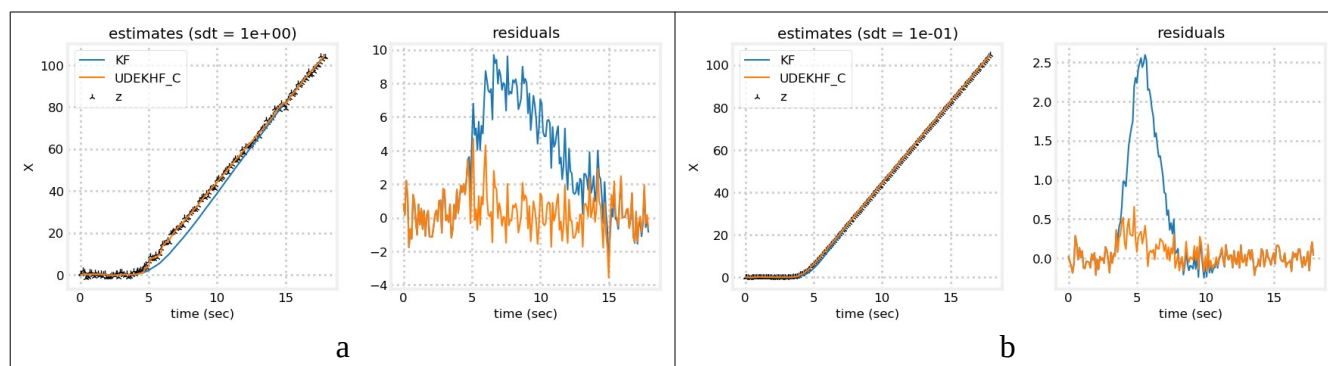


Рис. 7 Работа ЕКНН_D при различных значениях дисперсии шума наблюдения.

Как и UDEКНН_B алгоритмы ЕКНН_D и UDEКНН_D не стабильны при низких значениях дисперсии шума наблюдения. Результаты работы ЕКНН_D представлены на рис. 7, алгоритм UDEКНН_D демонстрирует аналогичное ЕКНН_D поведение.

Двухмерный случай

В данном случае мы наблюдаем обе координаты объекта.

Матрица переходов:

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Матрица наблюдения:

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

Результаты моделирования представлены на рис. 8 в двух масштабах времени:

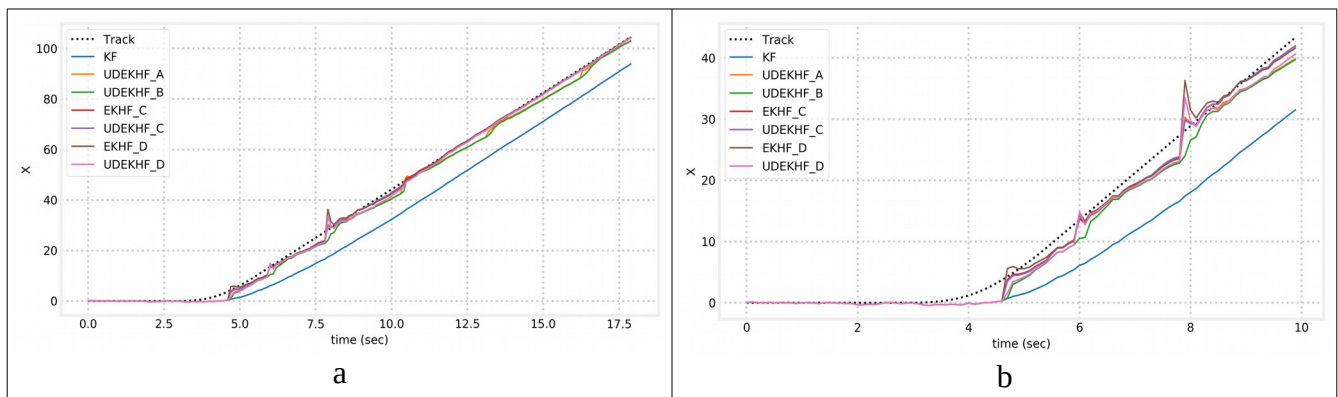


Рис. 8. Изменение абсциссы объекта во времени и результаты работы фильтров

Здесь, как и в одномерном случае, представлены данные для абсциссы наблюдаемого объекта.

Можно видеть, что фильтр Калмана расходится, во время и после совершения маневра наблюдаемым объектом.

Гибридные фильтры дают более точные оценки абсциссы наблюдаемого объекта, за исключением выбросов, даваемых EKHF_D и UDEKHF_D. UD-версии гибридных фильтров дают похожие оценки.

На графике видно, как происходит коррекция работы фильтров при обнаружении расходимости.

Самую точную оценку дают алгоритмы EKHF_C и UDEKHF_C, кроме того, им потребовалось меньше корректирующих воздействий для выхода на установившийся режим.

Как и в одномерном случае, рассмотрим невязки разных вариантов гибридных фильтров с невязками фильтра Калмана при разных значениях дисперсии шумов наблюдения.

UDEKHF_A

Результаты работы алгоритма для двухмерного случая представлены на рис. 9.

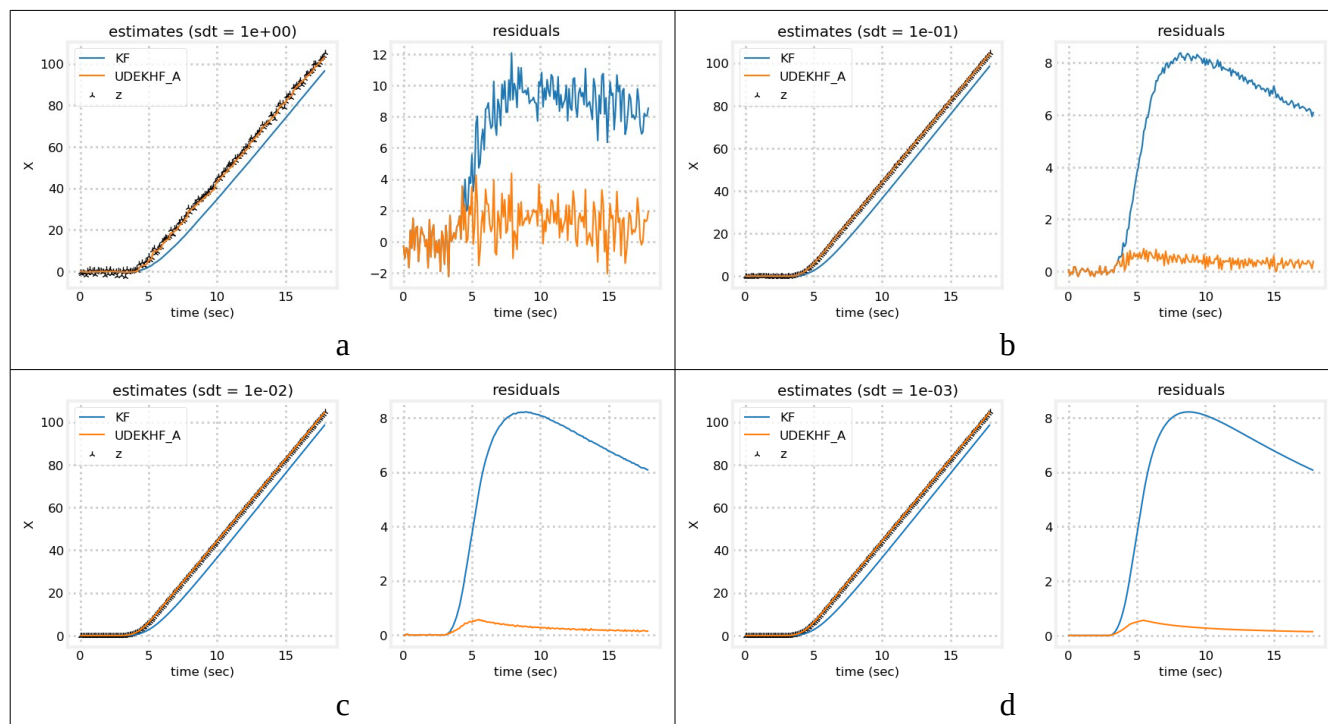


Рис. 9 Работа UDEKHF_A при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Как и в одномерном случае фильтр стабильно работает в разных условиях и выдает более точные оценки, чем фильтр Калмана.

UDEKHF_B

На рис. 10 отражены результаты работы алгоритма UDEKHF_B.

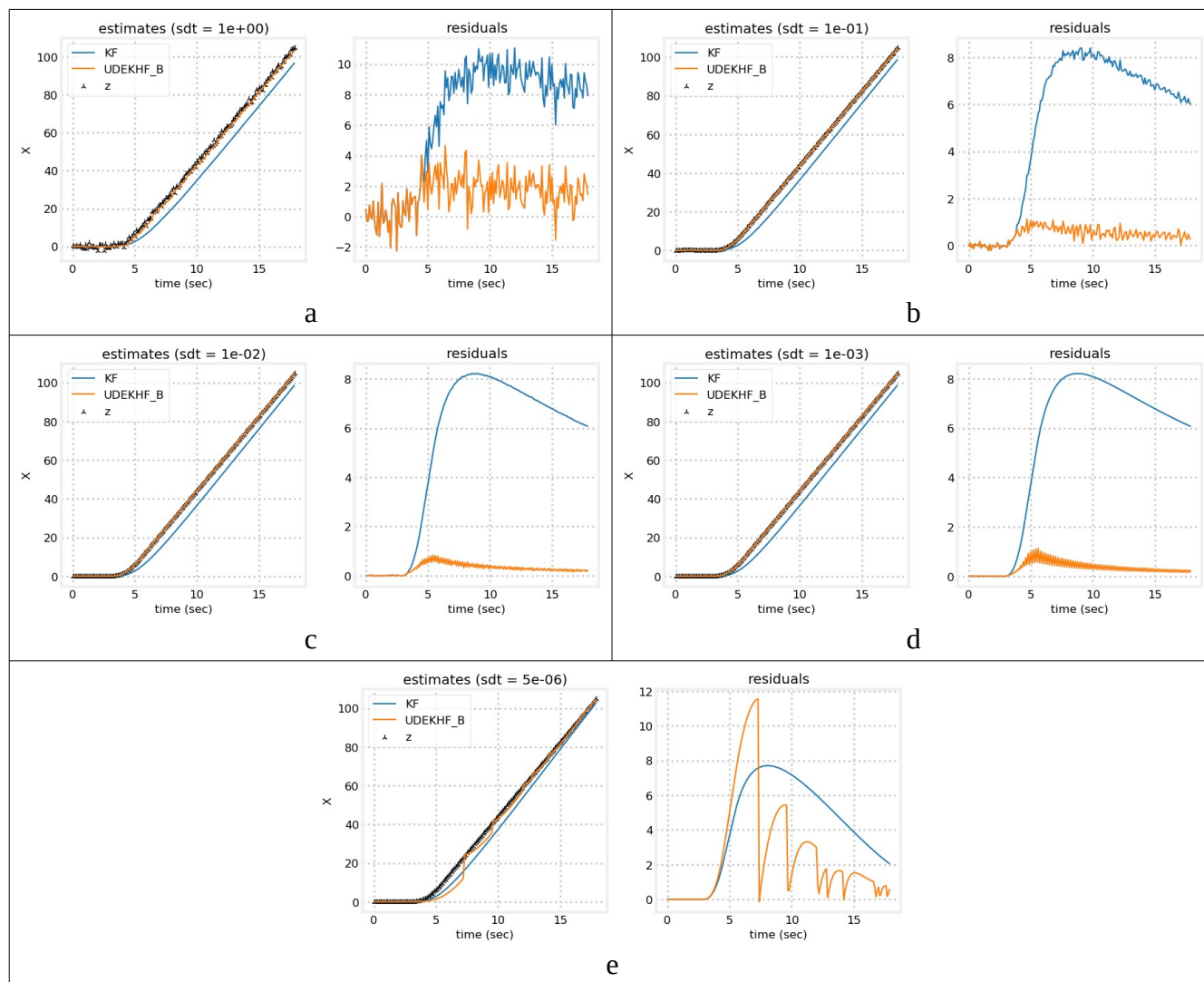


Рис. 10 Работа UDEKHF_B при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Как и в одномерном случае, фильтр работает нестабильно (рис. 10с-е) и расходится (рис. 10е) при относительно низких значениях дисперсии шума наблюдения.

ЕКНН_С и УДЕКНН_С

Результаты работы алгоритма для двухмерного случая представлены на рис. 11.

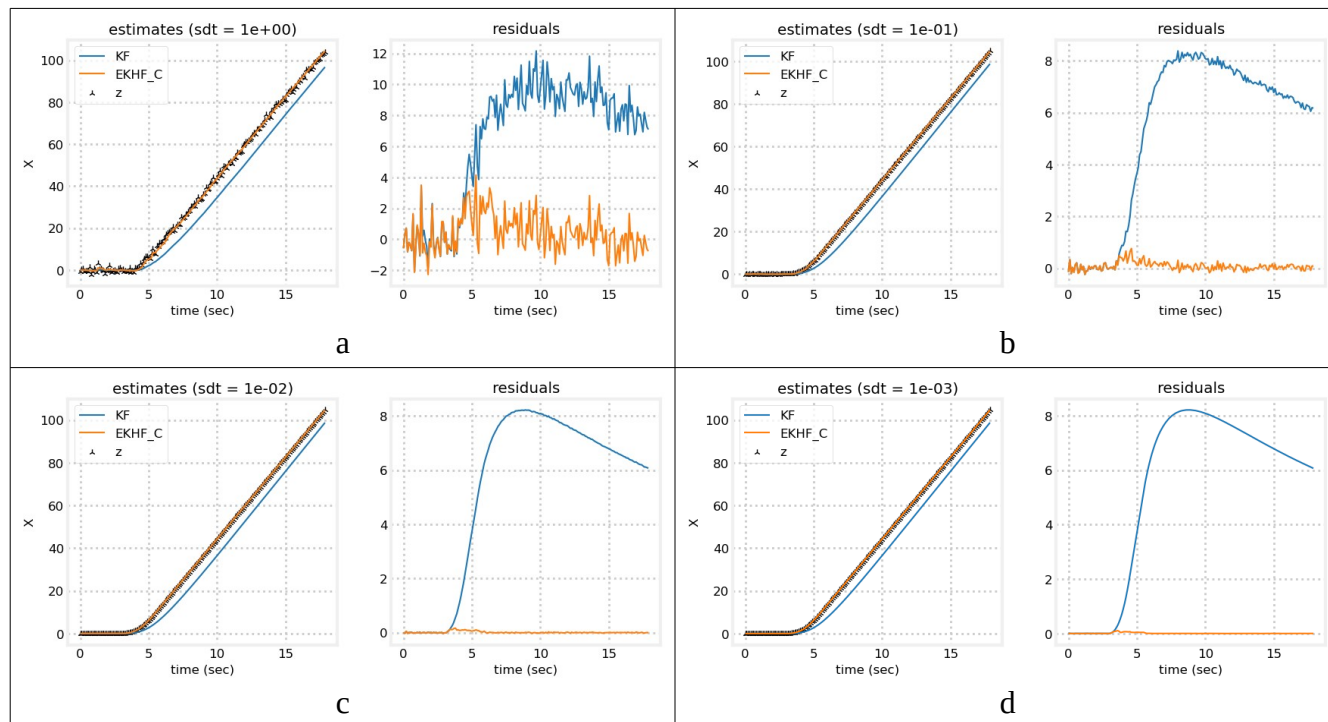


Рис. 11 Работа ЕКНН_С и УДЕКНН_С при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Как и в одномерном случае фильтр стабильно работает в разных условиях и выдает более точные оценки, чем фильтр Калмана, быстрее выходит на установившийся режим.

ЕКНН_D и UDEКНН_D

Результаты работы алгоритма для двухмерного случая представлены на рис. 12.

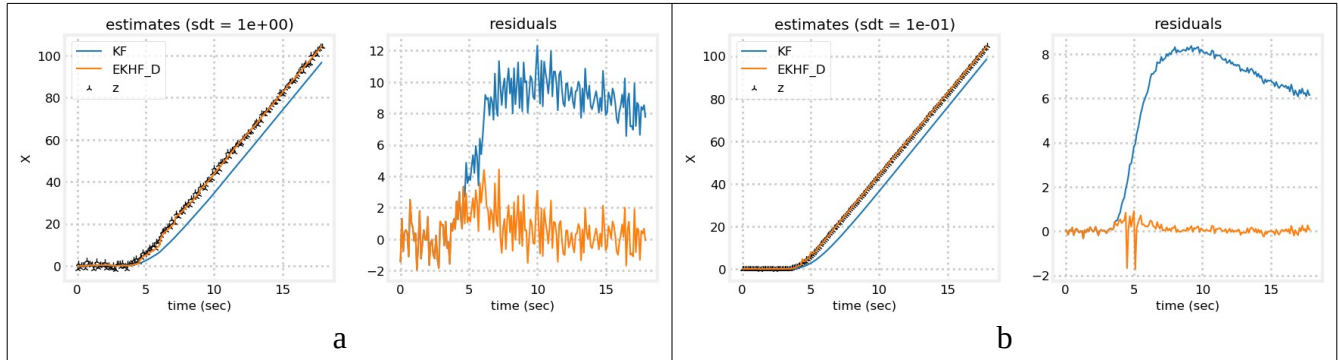


Рис. 12 Работа ЕКНН_D при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Как в одномерном случае, алгоритмы ЕКНН_D и UDEКНН_D не стабильны при низких значениях дисперсии шума наблюдения. Результаты работы ЕКНН_D представлены на рис. 12, алгоритм UDEКНН_D демонстрирует аналогичное ЕКНН_D поведение.

Заклучение

Переписать

Ссылки

- [illegible]