

## Аннотация

Разработано семейство гибридных алгоритмов фильтрации, в которых для поддержания сходимости фильтра Калмана используется  $H_\infty$ -фильтрация. Проведен вычислительный эксперимент на «игрушечной» задаче. **Переписать**

## Введение

Фильтр Калмана известен с 60-х годов XX века [1] за более чем 50 лет он нашел применения во многих областях деятельности от навигации до управления портфелями. Для нелинейных задач применяют Обобщенный Фильтр Калмана (ОФК) [2], разработанный инженерами НАСА во время миссии Аполлон [3].

При попытках применения ОФК в промышленности выяснилось, что в некоторых условиях может наблюдаться расходимость ОФК [4], обусловленная неточными математическими моделями наблюдаемых процессов. Данную проблему пытались решить различными модификациями ОФК, например, такими, как в [6].

Стало понятно, что нужен алгоритм фильтрации с гарантированной сходимостью при неточной модели наблюдаемого процесса. Таким алгоритмом стал  $H_\infty$  - фильтр, в [5] был использован теоретико-игровой подход к построению  $H_\infty$  - фильтра.

Мы сравним между собой алгоритмы ОФК и  $H_\infty$  - фильтра, рассмотрим, возможность применения последнего для обеспечения сходимости первого, построим гибридные алгоритмы фильтрации и сравним работу полученных алгоритмов с работой ОФК.

## Задача фильтрации

Пусть нам дана система, со следующей моделью пространства состояний:

$$x_k = F(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) ;$$

$$z_k = H(x_k) + v_k ;$$

где  $x_k$  - вектор состояния системы,  $u_{k-1}$  - вектор возмущения системы,  $z_k$  - вектор наблюдений,  $w_{k-1}$  - Гауссов шум системы с матрицей ковариации  $Q_k$  и нулевым математическим ожиданием,  $v_k$  - Гауссов шум наблюдения системы с матрицей ковариации  $R_k$  и нулевым математическим ожиданием.

Задача фильтрации состоит в том, чтобы оценить значение вектора состояния системы по доступным значениям наблюдений, минимизируя некоторую функцию стоимости.

# Фильтр Калмана

В [1] описан фильтр Калмана, в процессе работы фильтр Калмана минимизирует:

$$J = E \left( \|z_k - \hat{z}_k\|_2^2 \right) ,$$

где  $\hat{z}_k$  - оценка наблюдений, выдаваемая фильтром.

Алгоритм работы фильтра Калмана:

Прогноз:

$$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0)$$

$$F_k = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad B_k = \frac{\partial F}{\partial w} \Big|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad H_k = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x_{k|k-1}}$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T$$

$$v_k = z_k - H(x_{k|k-1})$$

Коррекция:

$$P_{k|k} = (P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1}$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k$$

$$K_k = P_{k|k} H_k R_k^{-1}$$

более привычная форма представления алгоритма:

Прогноз:

$$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0)$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T$$

$$F_k = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad B_k = \frac{\partial F}{\partial w} \Big|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad H_k = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x_{k|k-1}} ;$$

предполагается, что  $H_k$  имеет полный ранг;

$$v_k = z_k - H(x_{k|k-1})$$

Коррекция:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T)^{-1}$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

В условиях, когда невозможно обеспечить сходимость фильтра Калмана применяют  $H_\infty$  - фильтры а так же гибридные фильтры .

## $H_\infty$ — фильтр, дискретное время

В отличии от фильтра Калмана  $H_\infty$  - фильтр [5] оценивает не сам вектор состояния системы, а его линейную комбинацию:

$y_k = L_k x_k$  , где  $L_k$  - матрица, задаваемая пользователем и имеющая полный ранг.

При этом стремясь ограничить функцию стоимости:

$$J = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \|y_k - \hat{y}_k\|_{S_k}^2}{\|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} (\|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R_k^{-1}}^2)} < \frac{1}{\theta}$$

где  $\hat{y}_k$  - математическое ожидание  $y_k$  ,  $\theta$  - порог, задаваемый пользователем.

Запишем алгоритм работы  $H_\infty$  - фильтра в виде:

Прогноз:

$$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0)$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad H_k = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x_{k|k-1}} ;$$

$$v_k = z_k - H(x_{k|k-1}) ;$$

Коррекция:

$$P_{k|k} = P_{k|k-1}^{-1} (I - \theta \tilde{S}_k P_{k|k-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k P_{k|k-1})^{-1} = (P_{k|k-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_k + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} ;$$

$$\tilde{S}_k = L_k^T \bar{S}_k L_k , \text{ где } \bar{S}_k > 0 - \text{ матрица, задаваемая пользователем;}$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k ;$$

$$K_k = P_{k|k} H_k^T R_k^{-1} ;$$

Критерий работоспособности фильтра:

$$P_{k|k} = (P_{k|k-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_k + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} > 0 ;$$

Матрицу  $P_{k|k}$  можно представить в виде двух последовательных операций вида:

$$P_b = (P_{b-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_b)^{-1} = P_{b-1} + \Delta Q_b \quad (1);$$

$$P_d = (P_{d-1}^{-1} + H_d^T R_d^{-1} H_d)^{-1} \quad (2);$$

Операция (2) — обновление матрицы ковариации оценок, применяемое в фильтре Калмана, оно обычно сохраняет положительную определенность  $P$ .

Для того, чтобы операция (1) сохраняла положительную определенность  $P$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялся критерий:

$$\Delta Q_b > 0 \quad (3);$$

Порядок следования операций определяется особенностями реализации алгоритма фильтра.

## Гибридные фильтры

В [7] дано описание алгоритма гибридного фильтра, фактически представляющего собой  $H_\infty$ -фильтр с особым выбором параметров  $L_k, S_k, \theta$ .

Так же есть варианты гибридных алгоритмов фильтрации, в которых по умолчанию используется фильтр Калмана, а в случае обнаружения его расходимости используется коррекция с использованием  $H_\infty$ -технологии [8]. Однако, функция стоимости, которую минимизируют данные варианты алгоритмов фильтрации отличается от той, которую минимизирует  $H_\infty$ -фильтр [5].

Далее мы рассмотрим два класса гибридных алгоритмов фильтрации, в которых по умолчанию используется фильтр Калмана, а в случае обнаружения признаков его расходимости происходит переход к  $H_\infty$ -фильтрации [5] для восстановления целостности работы фильтра Калмана.

Так же мы опишем алгоритмы с последовательной обработкой измерений в UD-форме, относящихся к этим классам.

## Поддержание целостности работы фильтров: подход без ограничений на параметры $H_\infty$ — фильтра

Для поддержания целостности работы фильтров будет использована операция (1).

При анализе целостности работы оценивающих фильтров применяют  $\chi^2$ -тест [9], к квадратичной форме вида:

$$\beta_b = \delta_b^T \hat{S}_b^{-1} \delta_b$$

где  $\hat{S}_b = R_b + H_b P_b H_b^T$  - матрица ковариации невязок фильтра после выполнения операции,

$R_b$  - матрица ковариации шума процесса на момент вычисления  $\beta_b$ ,  $H_b = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x_b}$ ,  $P_b$  - матрица ковариации оценок фильтра на момент вычисления  $\beta_b$ ,  $\delta_b = z_b - H(x_b) \neq 0$  невязка на момент вычисления  $\beta_b$ .

Критерий сходимости фильтра:

$\beta_b \leq \beta_n = \chi_{\alpha, n}^2$  (4), где  $n$  — количество степеней свободы (размерность  $\delta_b$ ),  $\alpha$  — уровень значимости.

Для обеспечения целостности работы фильтра нужно выполнение критерия:

$$\delta_b^T (R_b + H_b P_b H_b^T)^{-1} \delta_b = \beta_n ;$$

$$\delta_b^T (R_b + H_b (P_{b-1} + \Delta Q_b) H_b^T) \delta_b = \beta_n ;$$

$$\delta_b^T (R_b + H_b P_{b-1} H_b^T + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} \delta_b = \beta_n ;$$

$$\delta_b^T (R_b + H_b P_{k-1} H_b^T + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} \delta_b = \beta_n ;$$

$\delta_k^T (S_k + H_k \Delta Q_k H_k^T)^{-1} \delta_k = \beta_n$ , где  $S_b = R_b + H_b P_{b-1} H_b^T$  (5) - матрица ковариации невязок фильтра после выполнения операции.

$$\delta_b \delta_b^T (S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T)^{-1} \delta_b \delta_b^T = \beta_n \delta_b \delta_b^T$$

Сравнивая правую и левую части получим:

$$\delta_k \delta_k^T (S_k + H_k \Delta Q_k H_k^T)^{-1} = \beta_n I$$

$$\delta_b \delta_b^T = \beta_n (S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T)$$

$$\frac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} = S_b + H_b \Delta Q_b H_b^T$$

$$A_b = H_b \Delta Q_b H_b^T = \frac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} - S_b \quad (6);$$

С другой стороны в силу (1):

$$, \quad P_b = (P_{b-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_b)^{-1} \quad \text{где} \quad \tilde{S}_b = L_b^T \bar{S}_b L_b \quad ;$$

$$P_b = (P_{b-1}^{-1} - \theta L_b^T S_b L_b)^{-1} = (P_{b-1}^{-1} - L_b^T M_b^{-1} L_b)^{-1} \quad , \quad \text{где} \quad M_b^{-1} = \theta S_b \quad ;$$

$$P_b = (P_{b-1}^{-1} - L_b^T M_b^{-1} L_b)^{-1} = P_{b-1} + P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} = P_{b-1} + \Delta Q_b \quad ;$$

$$\Delta Q_b = P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} \quad (7);$$

$$A_b = H_b \Delta Q_b H_b^T = H_b P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} H_b^T$$

$$A_b = H_b P_{b-1} L_b^T (M_b + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1} H_b^T$$

$$A_b = C_b (M_b + B_b) C_b^T \quad , \quad \text{где} \quad C_k = H_k P_{k-1} L_k^T \quad (8), \quad B_b = L_b P_{b-1} L_b^T \quad ;$$

$$C_b^T A_b C_b = C_b^T C_b (M_b + B_b) C_b^T C_b \quad (9);$$

Рассмотрим левые множители равенства (9):

$$C_b^T A_b C_b = (C_b^T C_b + \varepsilon I - \varepsilon I) (M_b + B_b) C_b^T C_b = (C_b^T C_b + \varepsilon I) (M_b + B_b) C_b^T C_b - \varepsilon I (M_b + B_b) C_b^T C_b$$

$$(C_b^T C_b + \varepsilon I)^{-1} C_b^T A_b C_b = (M_b + B_b) C_b^T C_b - \varepsilon (C_b^T C_b + \varepsilon I)^{-1} (M_b + B_b) C_b^T C_b$$

В силу симметричности матриц:

$$(C_k^T C_k + \varepsilon I)^{-1} C_k^T A_k C_k = (M_k + B_k) C_k^T C_k - \varepsilon (C_k^T C_k + \varepsilon I)^{-1} C_k^T C_k (M_k + B_k)$$

В пределе при переходе к  $\varepsilon \rightarrow +0$  получим:

$$C_b^+ A_b C_b = (M_b + B_b) C_b^T C_b$$

Прделаав аналогичные преобразования с правыми множителями матриц получим:

$$C_b^+ A_b C_b^{+T} = M_b + B_b$$

$$M_b = C_b^+ A_b C_b^{+T} - B_b = C_b^+ A_b C_b^{+T} - L_b P_{b-1} L_b^T$$

Подставим  $M_b$  в (7):

$$\Delta Q_b = P_{b-1} L_b^T (C_b^+ A_b C_b^{+T} - L_b P_{b-1} L_b^T + L_b P_{b-1} L_b^T) L_b P_{b-1}$$

получим:

$$\Delta Q_b = P_{b-1} L_b^T C_b^+ A_b C_b^{+T} L_b P_{b-1} \quad (10), \quad \text{где:}$$

$$A_b = \frac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} - S_b \quad , \quad S_b = R_b + H_b P_{b-1} H_b^T \quad , \quad C_b = H_b P_{b-1} L_b^T \quad \text{согласно (6),(5) и (8) соответственно.}$$

Для выполнения критерия (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия [12]:

- матрица  $Z_b = P_{b-1} L_b^T C_b^+$  должна иметь полный ранг;
- $A_b > 0$  (11);

Рассмотрим матрицу  $Z_b = P_{b-1} L_b^T C_b^+$  :

- т. к.  $P_b > 0$  , а  $L_b$  имеет полный ранг, то произведение  $P_{b-1} L_b$  так же имеет полный ранг;
- т. к.  $H_b$  и  $L_b$  имеют полный ранг, а  $P_b > 0$  , то  $C_b$  так же имеет полный ранг, следовательно: произведение  $C_b^T C_b > 0$  [12], соответственно,  $C_b^+ = (C_b^T C_b)^{-1} C_b^T$  так же имеет полный ранг;
- т. к. произведение  $P_{b-1} L_b$  и матрица  $C_b^+$  имеют полный ранг, то  $Z_b$  так же имеет полный ранг.

Рассмотрим матрицу  $A_b$  :

- $S_k \geq H_k P_{k-1} H_k^T > 0$  ;
- рассмотрим произведение  $x^T (\delta_b \delta_b^T) x = (x^T \delta_b) (\delta_b^T x)$  для любого вектора  $x \neq 0$  :
  - в случае размерности вектора  $x$  больше одного  $x^T (\delta_b \delta_b^T) x = x^T (\delta_b \delta_b^T) x \geq 0$  , следовательно, в силу положительной определенности  $S_b$  гарантировать существование гибридного фильтра невозможно;
  - в случае размерности вектора  $x$  равной одному (при UD-реализации фильтра)  $x^T (\delta_b \delta_b^T) x = \delta_b^2 x^2 > 0$  ,
    - при этом выражение (5) вырождается в  $a_b = \frac{\delta_b^2}{\beta_1} - s_b$  ,
    - критерий (4) нарушается в случае, когда  $\frac{\delta_b^2}{s_j} > \beta_1$  или  $\frac{\delta_b^2}{\beta_1} - s_b > 0$  ,
    - таким образом, при нарушении критерия (4),  $A_b = a_b > 0$  ,
    - т. е. существует UD-реализация гибридного фильтра.

Таким образом, выбор параметров  $L_k, S_k, \theta$  при использовании  $H_\infty$ -фильтрации для поддержания целостности работы фильтра Калмана сводится к выбору матрицы  $L_b$  в конкретном алгоритме, а так же к выбору невязки  $\delta_b$  , используемой для оценки целостности работы фильтра.

# Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по априорным невязкам (UDEKHF\_A)

Инициализация:

$$x_{0|0}=x_0 ; U_{0|0}, D_{0|0}=udu(P_0) ; U_q, D_q=udu(Q) ; U_r^{-1}, D_r=udu(R) , \text{ где } D_r=[r_1 \dots r_j \dots r_n]$$

Работа:

1 Прогноз:

$$m_0=x_{k|k-1}=F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0)$$

$$F_k=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_{k-1|k-1}} ; B_k=\left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{x_{k-1|k-1}}$$

$$U_0, D_0=MWGS([F_k U_{k-1|k-1}; B_k U_q], [D_{k-1|k-1}; D_q])$$

2 Коррекция:

$$\hat{z}=U_r z_k$$

2.1 Итерации по j = 1, n:

$$v_j=\hat{z}_j-H_j(m_{j-1})$$

$$h_j=\left(U_r \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{m_{j-1}}\right)_j$$

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$$f_j=h_j U_{j-1} ; v_j=D_{j-1} f_j^T ; c_j=f_j v_j ; s_j=c_j+r_j$$

$$s_j=\frac{v_j^2}{\beta_1}-e_j$$

Если  $d_j \geq 0$  - делаем адаптивную коррекцию:

$$q_j=\frac{d_j}{c_j^2}$$

$$\tilde{U}_{j-1}, \tilde{D}_{j-1}=MWGS([U_{j-1}; U_{j-1} v_j], [D_{j-1}; q_j])$$

$$\tilde{f}_j=h_j \tilde{U}_{j-1} ; \tilde{v}_j=\tilde{D}_{j-1} \tilde{f}_j^T ; \tilde{\alpha}_j=\tilde{f}_j \tilde{v}_j+r_j$$

иначе:

$$\tilde{U}_{j-1}, \tilde{D}_{j-1}, \tilde{f}_j, \tilde{v}_j, \tilde{\alpha}_j=U_{j-1}, D_{j-1}, f_j, v_j, e_j$$

2.1.2 Обновление матрицы ковариации оценок и вектора состояний:



$$K_j = \tilde{U}_{j-1} \tilde{v}_j \tilde{\alpha}_j^{-1}$$

$$m_j = m_{j-1} + K_j v_j$$

$$U_j, D_j = MWGS([K_j \tilde{f}_j - \tilde{U}_{j-1} : K_j], [\tilde{D}_{j-1} : r_j])$$

2.2 По окончании итераций:

$$U_{k|k}, D_{k|k} = U_n, D_n$$

$$x_{k|k} = m_n$$

## Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по апостериорным невязкам (UDEKHF\_B)

Алгоритм гибридного UD-фильтра с оценкой сходимости по апостериорным невязкам:

Инициализация:

$$x_{0|0} = x_0 ; U_{0|0}, D_{0|0} = udu(P_0) ; U_q, D_q = udu(Q) ; U_r^{-1}, D_r = udu(R) , \text{ где } D_r = [r_1 \dots r_j \dots r_n]$$

Работа:

1 Прогноз:

$$m_0 = x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0)$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}}$$

$$U_0, D_0 = MWGS([F_k U_{k-1|k-1} : B_k U_q], [D_{k-1|k-1} : D_q])$$

2 Коррекция:

$$\hat{z} = U_r z_k$$

2.1 Итерации по j = 1, n:

$$v_j = \hat{z}_j - H_j(m_{j-1})$$

$$h_j = \left( U_r \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{m_{j-1}} \right)_j$$

Обновление матрицы ковариации оценок и вектора состояний:

$$f_j = h_j U_{j-1} ; v_j = D_{j-1} f_j^T ; \alpha_j = f_j v_j + r_j$$

$$K_j = U_{j-1} v_j \alpha_j^{-1}$$

$$\tilde{m}_j = m_{j-1} + K_j v_j$$

$$\tilde{U}_j, \tilde{D}_j = \text{MWGS}([K_j f_j - U_{j-1}; K_j], [D_{j-1}; r_j])$$

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$$\eta_j = \hat{z}_j - H_j(\tilde{m}_j)$$

$$\hat{h}_j = \left( U_r \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{\tilde{m}_j} \right)_j$$

$$\hat{f}_j = \hat{h}_j \tilde{U}_j \quad ; \quad \hat{v}_j = \tilde{D}_j \hat{f}_j^T \quad ; \quad s_j = \hat{f}_j \hat{v}_j + r_j$$

$$d_j = \frac{\eta_j^2}{\beta_1} - s_j$$

Если  $d_j \geq 0$  - делаем адаптивную коррекцию:

$$\tilde{h}_j = \hat{h}_j - \hat{h}_j K_j h_j$$

$$\tilde{f}_j = \tilde{h}_j \tilde{U}_j \quad ; \quad \tilde{v}_j = \tilde{D}_j \tilde{f}_j^T \quad ; \quad c_j = \hat{f}_j \tilde{v}_j$$

$$q_j = \frac{d_j}{c_j^2}$$

$$U_j, D_j = \text{MWGS}([\tilde{U}_j; \tilde{U}_j \tilde{v}_j], [\tilde{D}_j; q_j])$$

$$m_j = m_{j-1} + U_j D_j U_j^T h_j^T \frac{v_j}{r_j}$$

иначе:

$$U_j, D_j, m_j = \tilde{U}_j, \tilde{D}_j, \tilde{m}_j$$

2.2 По окончании итераций:

$$U_{k|k}, D_{k|k} = U_n, D_n$$

$$x_{k|k} = m_n$$

## Поддержание целостности работы фильтров: подход с ограничениями на параметры $H_\infty$ — фильтра

В рамках данного подхода мы будем использовать следующий выбор параметров  $H_\infty$ -фильтра:

$$L_k = I;$$

$$\bar{S}_k = P_b^{-1};$$

При этом выражение (1) примет следующий вид:

$$P_a = (P_b^{-1} - \theta P_b^{-1})^{-1} = P_b + \Delta Q_b = P_b + \frac{\theta}{1-\theta} P_b = P_b + a_b P_b \quad (11).$$

Для того, чтобы операция (11) позволяла сохранять матрицу ковариации оценок положительно определенной достаточно выполнение условия:

$$0 < \theta < 1 \quad (12);$$

при этом:

$$\Delta Q_b = a_b P_b \quad (13), \text{ где } a_b > 0 \quad (14).$$

Подставим (13) в (6):

$$a_b H_b P_b H_b^T = \frac{\delta_b \delta_b^T}{\beta_n} - S_b \quad (15);$$

домножим (15) справа и слева на  $\delta_b$  и  $\delta_b^T$  соответственно:

$$a_b \delta_b^T H_b P_b H_b^T \delta_b = \frac{(\delta_b^T \delta_b)(\delta_b^T \delta_b)}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b = \frac{(\delta_b^T \delta_b)^2}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b;$$

отсюда:

$$a_b = \frac{\frac{(\delta_b^T \delta_b)^2}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b}{\delta_b^T H_b P_b H_b^T \delta_b} = \frac{\delta_b^T A_b \delta_b}{\delta_b^T H_b P_b H_b^T \delta_b} \quad (16);$$

для того, чтобы существовал гибридный фильтр достаточно, чтобы выполнялось условие (14) в случае нарушения критерия (4).

Знаменатель выражения (16) положителен при ненулевых  $\delta_b$ , следовательно нам достаточно проанализировать знак числителя с учетом нарушения критерия сходимости фильтра (4), или:

$$\delta_b^T S_b^{-1} \delta_b > \beta_n \Leftrightarrow \delta_b \delta_b^T > \beta_n S_b \Leftrightarrow \delta_b^T (\delta_b \delta_b^T) \delta_b - \beta_n \delta_b^T S_b \delta_b > 0 \Leftrightarrow \frac{(\delta_b^T \delta_b)^2}{\beta_n} - \delta_b^T S_b \delta_b > 0;$$

а это и есть наш числитель, таким образом, гибридный фильтр существует.

## Гибридный фильтр с оценкой сходимости по априорным невязкам (ЕКНФ\_С)

В данном классе алгоритмов фильтрации используется следующая последовательность операций при обновлении  $P_{k|k}$  :

$$\tilde{P}_{k|k-1} = (P_{k|k-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_k)^{-1} = P_{k|k-1} + \Delta Q_k$$

$$P_{k|k} = (\tilde{P}_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1}$$

Этот вариант представления фактически предполагает увеличение  $Q_k$  величину  $\Delta Q_k = (P_{k|k-1}^{-1} - \theta \tilde{S}_k)^{-1} - P_{k|k-1}$ , что позволяет связать  $H_\infty$ -фильтр и Калмана. При использовании такого представления  $P_{k|k}$  работа  $H_\infty$ -фильтра отличается от работы фильтра Калмана лишь добавкой  $\Delta Q_k$ , которая гарантирует сходимость фильтра в сложных условиях работы.

Алгоритм работы гибридного фильтра в этом случае следующий:

Прогноз:

$$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0)$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad H_k = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x_{k|k-1}}$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T$$

$$v_k = z_k - H(x_{k|k-1})$$

контроль целостности работы фильтра по априорной невязке:

$$E_k = R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T$$

Критерий расходимости фильтра:

$$v_k^T E_k^{-1} v_k > \beta_n$$

при наличии признаков расходимости, - адаптивная коррекция:

$$A_k = \frac{v_k v_k^T}{\beta_n} - E_k ;$$

$$a_k = \frac{v_k^T A_k v_k}{v_k^T H_k P_{k|k-1} H_k^T v_k} ;$$

$$\tilde{P}_{k|k-1} = (1 + a_k) P_{k|k-1} ;$$

иначе:

$$\tilde{P}_{k|k-1} = P_{k|k-1}$$

Коррекция:

$$K_k = \tilde{P}_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k \tilde{P}_{k|k-1} H_k^T)^{-1}$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) \tilde{P}_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T = (I - K_k H_k) \tilde{P}_{k|k-1}$$

## Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по априорным невязкам (UDEKHF\_C)

Инициализация:

$$x_{0|0} = x_0 ; U_{0|0}, D_{0|0} = udu(P_0) ; U_q, D_q = udu(Q) ; U_r^{-1}, D_r = udu(R) , \text{ где } D_r = [r_1 \dots r_j \dots r_n]$$

Работа:

1 Прогноз:

$$m_0 = x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0)$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}}$$

$$U_0, D_0 = MWGS([F_k U_{k-1|k-1}; B_k U_q], [D_{k-1|k-1}; D_q])$$

2 Коррекция:

$$\hat{z} = U_r z_k$$

2.1 Итерации по j = 1, n:

$$v_j = \hat{z}_j - H_j(m_{j-1})$$

$$h_j = \left( U_r \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{m_{j-1}} \right)_j$$

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$$f_j = h_j U_{j-1} ; v_j = D_{j-1} f_j^T ; c_j = f_j v_j ; e_j = c_j + r_j ;$$

$$a_j = \frac{v_j^2}{\beta_1} - e_j$$

Если  $a_j > 0$  - делаем адаптивную коррекцию:

$$\tilde{U}_{j-1} = U_{j-1} ; \quad \tilde{D}_{j-1} = (1+a_j) D_{j-1} ; \quad \tilde{f}_j = f_j ; \quad \tilde{v}_j = (1+a_j) v_j ; \quad \tilde{\alpha}_j = (1+a_k) c_j + r_j$$

иначе:

$$\tilde{U}_{j-1}, \tilde{D}_{j-1}, \tilde{f}_j, \tilde{v}_j, \tilde{\alpha}_j = U_{j-1}, D_{j-1}, f_j, v_j, e_j$$

2.1.2 Обновление матрицы ковариации ошибок и вектора состояний:

$$K_j = \tilde{U}_{j-1} \tilde{v}_j \tilde{\alpha}_j^{-1}$$

$$m_j = m_{j-1} + K_j v_j$$

$$U_j, D_j = MWGS([K_j \tilde{f}_j - \tilde{U}_{j-1} : K_j], [\tilde{D}_{j-1} : r_j])$$

2.2 По окончании итераций:

$$U_{k|k}, D_{k|k} = U_n, D_n$$

$$x_{k|k} = m_n$$

## Гибридный фильтр с оценкой сходимости по апостериорным невязкам (EKFH\_D)

В данном классе алгоритмов фильтрации используется следующая последовательность операций при обновлении  $P_{k|k}$  :

$$\tilde{P}_{k|k} = (P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1}$$

$$P_{k|k-1} = (\tilde{P}_{k|k}^{-1} - \theta \tilde{S}_k)^{-1} = \tilde{P}_{k|k} + \Delta Q_k$$

Алгоритм работы гибридного фильтра в этом случае следующий:

Прогноз:

$$x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0)$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; \quad H_k = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x_{k|k-1}}$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + B_k Q_k B_k^T$$

$$v_k = z_k - H(x_{k|k-1})$$

$$\tilde{K}_k = P_{k|k-1} H_k^T (R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T)^{-1}$$

$$\tilde{P}_{k|k} = (I - \tilde{K}_k H_k) P_{k|k-1} (I - \tilde{K}_k H_k)^T + \tilde{K}_k R_k \tilde{K}_k^T = (I - \tilde{K}_k H_k) P_{k|k-1}$$

$$\tilde{x}_{k|k} = x_{k|k-1} + \tilde{K}_k v_k$$

контроль целостности работы фильтра по апостериорной невязке,

$$\eta_k = z_k - H(\tilde{x}_{k|k})$$

$$\hat{H}_k = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{\tilde{x}_{k|k}}$$

$$E_k = R_k + \hat{H}_k \tilde{P}_{k|k} \hat{H}_k^T$$

Критерий расходимости фильтра:

$$v_k^T E_k^{-1} v_k > \beta_n$$

при наличии признаков расходимости, - адаптивная коррекция:

$$A_k = \frac{\eta_k \eta_k^T}{\beta_n} - E_k \quad ;$$

$$a_k = \frac{\eta_k^T A_k \eta_k}{\eta_k^T H_k P_{k|k-1} H_k^T \eta_k} \quad ;$$

$$P_{k|k-1} = (1 + a_k) \tilde{P}_{k|k-1} \quad ;$$

$$K_k = P_{k|k} H_k^T R_k^{-1}$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k v_k$$

иначе:

$$P_{k|k} = \tilde{P}_{k|k}$$

$$x_{k|k} = \tilde{x}_{k|k}$$

# Гибридный UD — фильтр с оценкой сходимости по апостериорным невязкам (UDEKHF\_D)

Алгоритм гибридного UD-фильтра с оценкой сходимости по апостериорным невязкам:

Инициализация:

$$x_{0|0} = x_0 ; U_{0|0}, D_{0|0} = \text{udu}(P_0) ; U_q, D_q = \text{udu}(Q) ; U_r^{-1}, D_r = \text{udu}(R) , \text{ где } D_r = [r_1 \dots r_j \dots r_n]$$

Работа:

1 Прогноз:

$$m_0 = x_{k|k-1} = F(x_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0)$$

$$F_k = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_{k-1|k-1}} ; B_k = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{x_{k-1|k-1}}$$

$$U_0, D_0 = \text{MWGS}([F_k U_{k-1|k-1}; B_k U_q], [D_{k-1|k-1}; D_q])$$

2 Коррекция:

$$\hat{z} = U_r z_k$$

2.1 Итерации по j = 1, n:

$$v_j = \hat{z}_j - H_j(m_{j-1})$$

$$h_j = \left( U_r \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{m_{j-1}} \right)_j$$

Обновление матрицы ковариации ошибок и вектора состояний:

$$f_j = h_j U_{j-1} ; v_j = D_{j-1} f_j^T ; \alpha_j = f_j v_j + r_j$$

$$K_j = U_{j-1} v_j \alpha_j^{-1}$$

$$\tilde{m}_j = m_{j-1} + K_j v_j$$

$$\tilde{U}_j, \tilde{D}_j = \text{MWGS}([K_j f_j - U_{j-1}; K_j], [D_{j-1}; r_j])$$

2.1.1 Контроль целостности фильтра:

$$\eta_j = \hat{z}_j - H_j(\tilde{m}_j)$$

$$\hat{h}_j = \left( U_r \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{\tilde{m}_j} \right)_j$$

$$\hat{f}_j = \hat{h}_j \tilde{U}_j ; \hat{v}_j = \tilde{D}_j \hat{f}_j^T ; e_j = \hat{f}_j \hat{v}_j + r_j ; a_j = \frac{\eta_j^2}{\beta_1} - e_j ;$$



Если  $a_j > 0$  - делаем адаптивную коррекцию:

$$U_j = \tilde{U}_j ; \quad D_j = (1 + a_j) \tilde{D}_j ; \quad m_j = m_{j-1} + U_j D_j U_j^T h_j^T \frac{v_j}{r_j}$$

иначе:

$$U_j, D_j, m_j = \tilde{U}_j, \tilde{D}_j, \tilde{m}_j$$

2.2 По окончании итераций:

$$U_{k|k}, D_{k|k} = U_n, D_n$$

$$x_{k|k} = m_n$$

## Резюме по гибридным алгоритмам фильтрации

Переписать!

## Вычислительный эксперимент

Сравним поведение гибридных алгоритмов фильтрации с обычным фильтром Калмана для несоответствия модели реального наблюдаемого процесса.

Для предварительной оценки алгоритмов и выбора алгоритмов для последующей реализации во встраиваемых системах рассмотрим «игрушечную» задачу «наблюдение маневрирующего объекта».

### Наблюдение маневрирующего объекта

Пусть мы наблюдаем объект, который совершает маневр [11], на рис. 1 изображен пример траектории такого объекта.

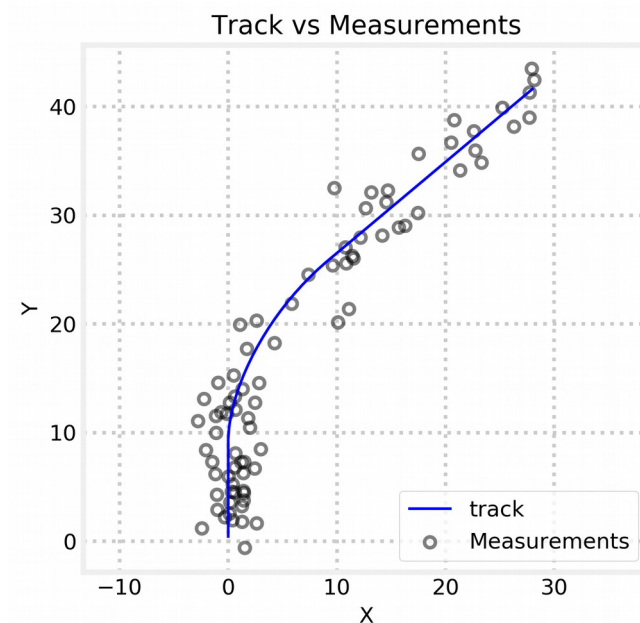


Рис. 1. Путь сопровождаемого объекта и результаты измерения его координат

Наблюдаемый объект движется прямолинейно и равномерно, а за тем совершает поворот с ускорением.

Мы рассмотрим два примера наблюдения нашего объекта:

- одномерный, когда мы наблюдаем лишь одну координату,
- двухмерный, когда мы наблюдаем обе координаты

В обоих случаях кинематическая модель движения объекта — прямолинейное равномерное движение.

## Одномерный случай

В данном случае мы наблюдаем только координату  $x$  объекта.

Матрица переходов:

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдения:

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Переписать

Результаты моделирования представлены на рис. 2 в двух масштабах времени:

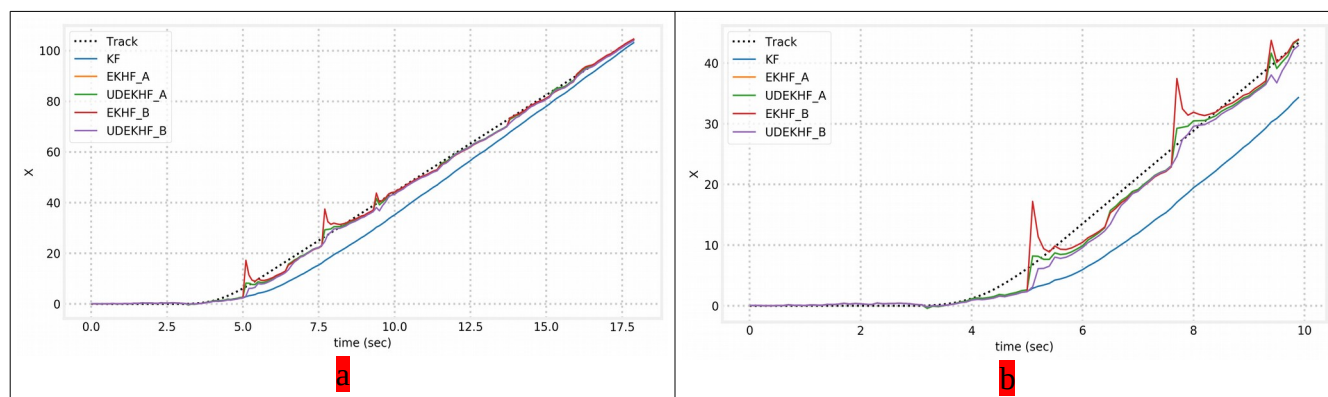


Рис. 2. Изменение абсциссы объекта во времени и результаты работы фильтров

Можно видеть, что фильтр Калмана расходится, когда объект совершает маневр.

Гибридные фильтры дают более точные оценки абсциссы наблюдаемого объекта, за исключением выбросов, даваемых алгоритмом EKHF\_B.

Алгоритмы EKHF\_A и UDEKHF\_A дают идентичные оценки, в то время как оценки, даваемые алгоритмами EKHF\_B и UDEKHF\_B разные.

Выбросы оценок, даваемых алгоритмом EKHF\_B могут быть связаны с неустойчивостью последнего.

Сравним невязки разных вариантов гибридных фильтров с невязками фильтра Калмана при разных значениях дисперсии шумов наблюдения.

## EKFH\_A и UDEKHF\_A

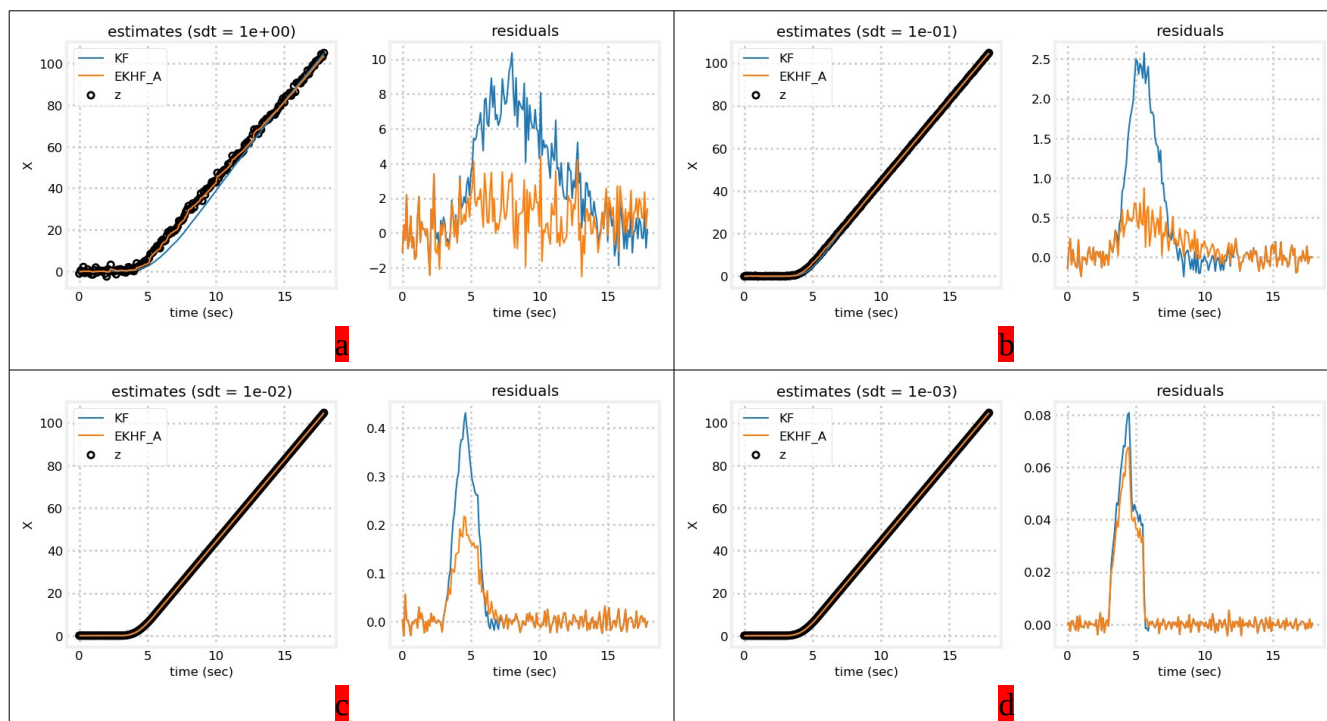


Рис. 3 Работа EKFH\_A и UDEKHF\_A при различных значениях дисперсии шума наблюдения

Результаты сравнения алгоритмов представлены на рис. 3, оба варианта алгоритма дают идентичные оценки, при этом их оценки точнее тех, что даёт фильтр Калмана в тех же условиях (максимальная невязка гибридных фильтров меньше).

## EKFH\_B

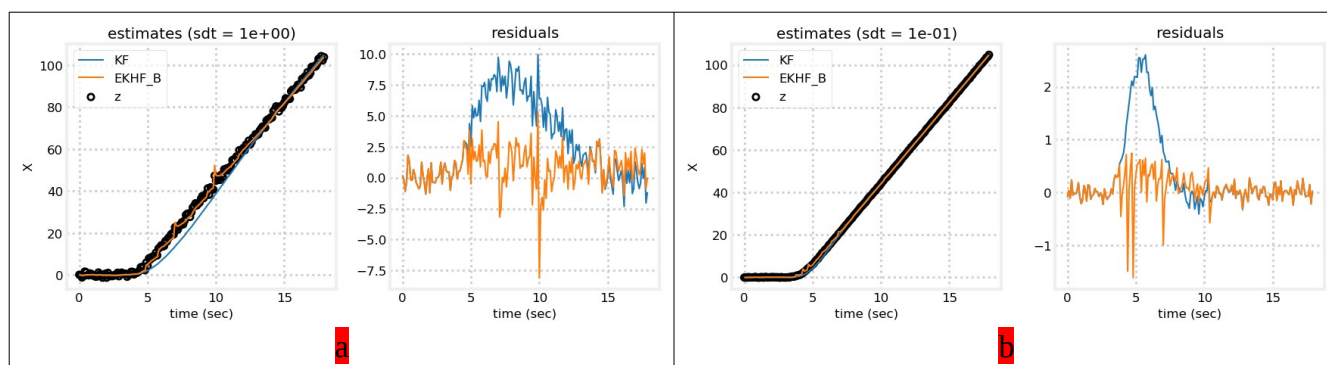


Рис. 4 Работа EKFH\_B при различных значениях дисперсии шума наблюдения.

На рис. 4 показаны результаты сравнения работы EKFH\_B при двух значениях дисперсии шума наблюдения. При низких значениях дисперсии шума наблюдения алгоритм EKFH\_B работает

не стабильно. Даже при относительно высоких значениях дисперсии шума наблюдения заметны выбросы априорных невязок.

## UDEKHF\_B

Как известно [10], квадратно-корневые методы Калмановской фильтрации более устойчивы в условиях ограниченной точности, по сравнению с обычными.

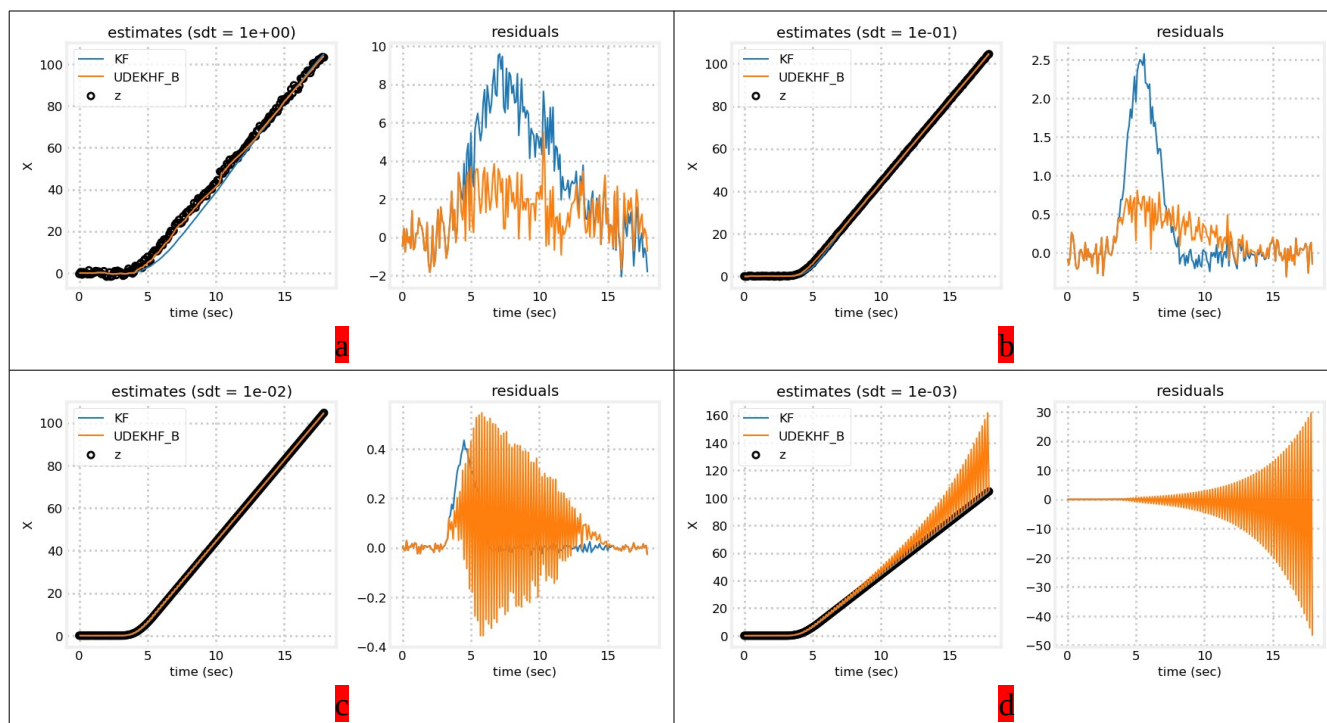


Рис. 5 Работа UDEKHF\_B при различных значениях дисперсии шума наблюдения.

Результаты работы UDEKHF\_B представлены на рис. 5, как и EKHF\_B, данный алгоритм не стабилен при низких значениях дисперсии шума наблюдения. При достаточно высоких значениях дисперсии шума наблюдения алгоритм стабилен и дает более «гладкие» оценки, чем остальные другие гибридные алгоритмы фильтрации.

## Двухмерный случай

В данном случае мы наблюдаем обе координаты объекта.

Матрица переходов:

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдения:

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Перепиать

Результаты моделирования представлены на рис. 6 в двух масштабах времени:

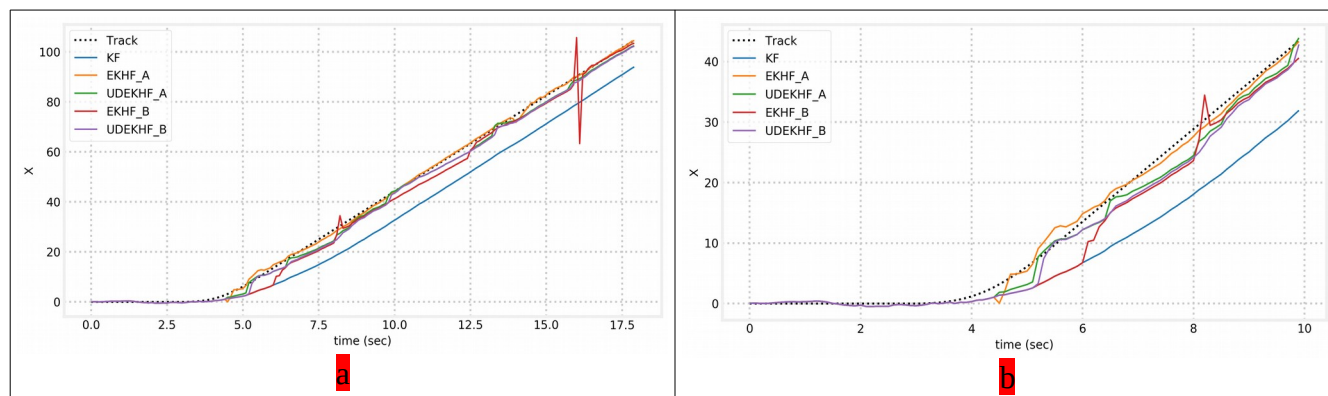


Рис. 6. Изменение абсциссы объекта во времени и результаты работы фильтров

Здесь, как и в одномерном случае, представлены данные для абсциссы наблюдаемого объекта.

Можно видеть, что фильтр Калмана расходится, когда объект совершает маневр.

Гибридные фильтры дают более точные оценки абсциссы наблюдаемого объекта, за исключением выбросов, даваемых алгоритмом EKHF\_B.

UD-версии гибридных фильтров дают похожие оценки.

Самую точную оценку дает алгоритм EKHF\_A, так же он начал коррекцию раньше остальных.

Алгоритм EKHF\_B, как и в одномерном случае, дает выбросы оценки абсциссы.

Как и в одномерном случае, рассмотрим невязки разных вариантов гибридных фильтров с невязками фильтра Калмана при разных значениях дисперсии шумов наблюдения.

## ЕКНН\_А

Результаты работы алгоритма для двухмерного случая представлены на рис. 7.

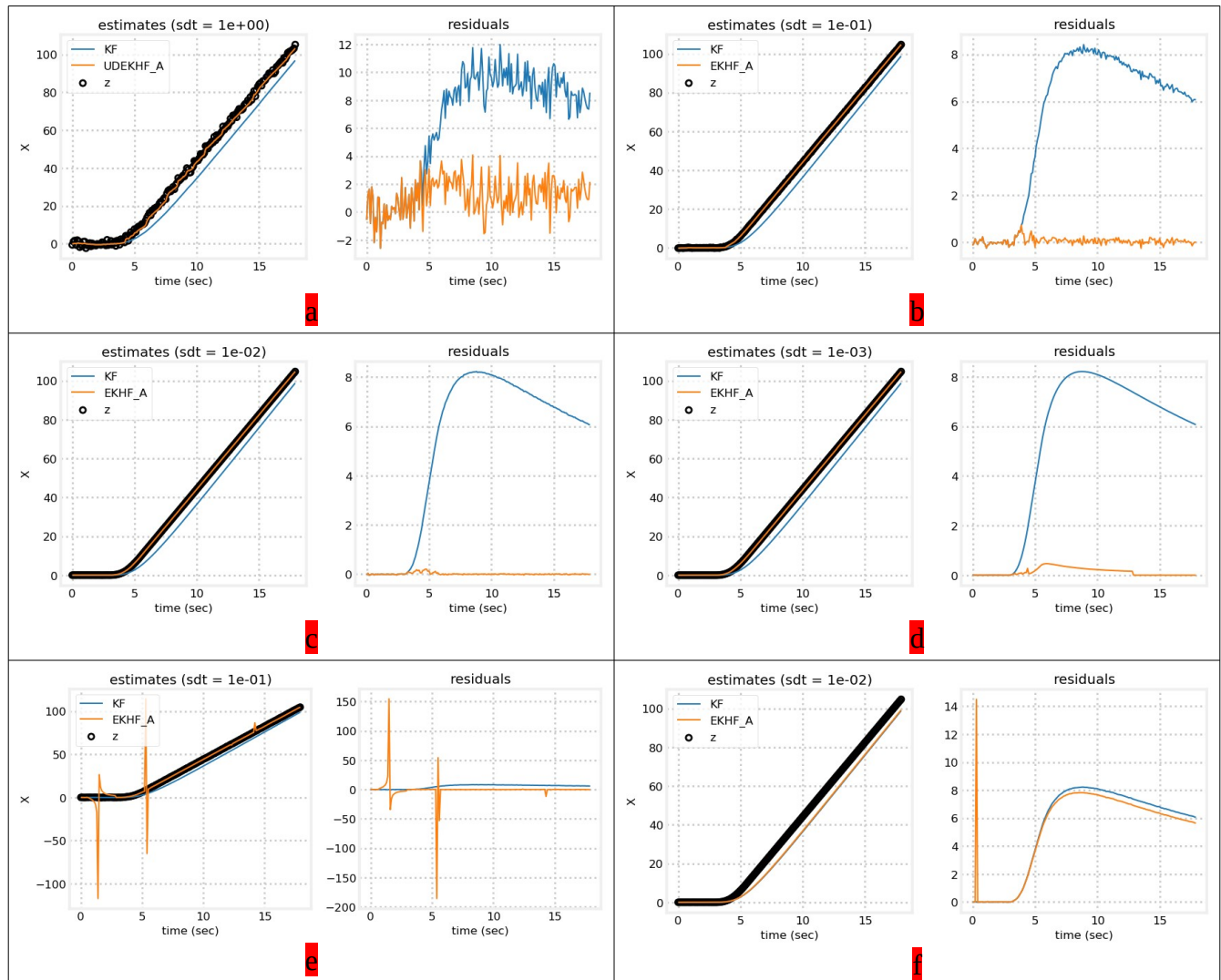


Рис. 7 Работа ЕКНН\_А при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Стабильная работа фильтра наблюдается на рис. 7а-d. Изучение поведения фильтра показало, что в некоторых случаях наблюдается его нестабильность (рис. 7е,ф), разрушение целостности работы, или отсутствие коррекции (рис. 7г).

Отметим, что данная некорректная работа фильтра зафиксирована при относительно низких значениях дисперсии шума наблюдения.

## UDEKHF\_A

На рис. 8 представлены результаты работы алгоритма UDEKHF\_A.

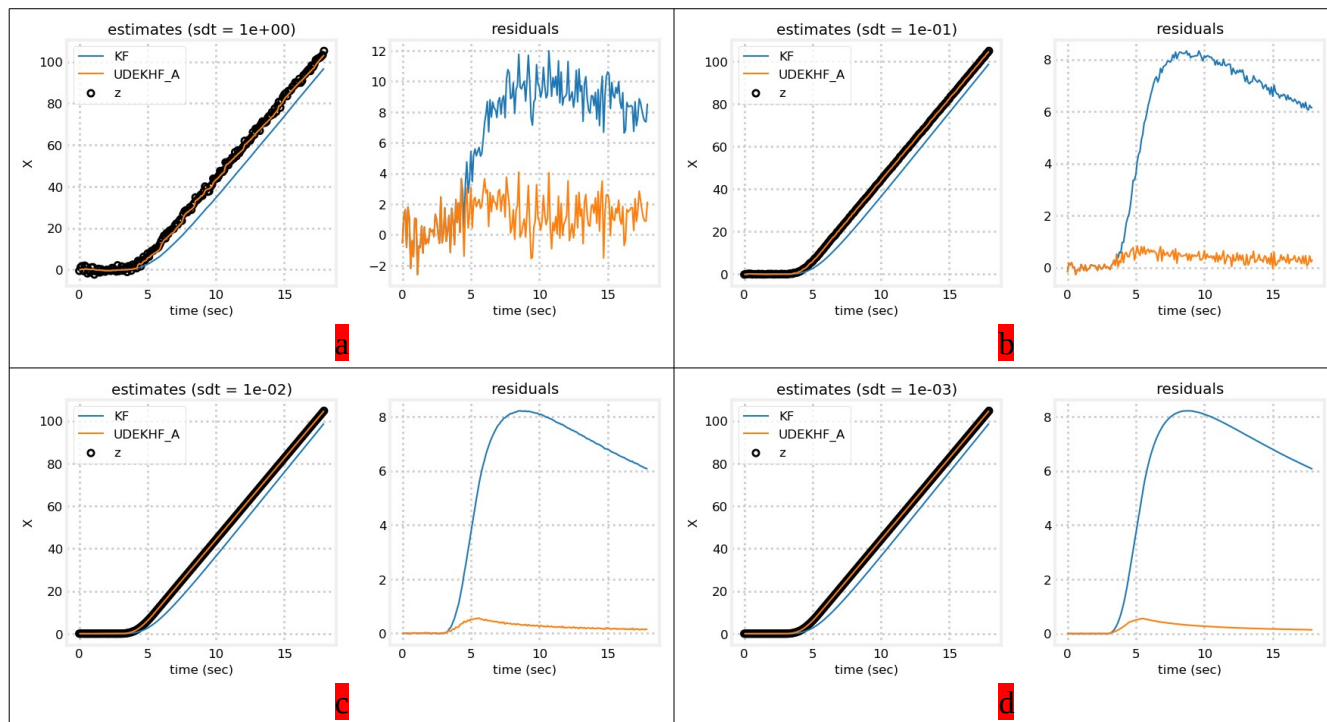


Рис. 8 Работа UDEKHF\_A при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Как и в одномерном случае фильтр стабильно работает в разных условиях и выдает более точные оценки, чем фильтр Калмана.

## EKNF\_B

Результаты работы EKNF\_B для двухмерного случая представлены на рис. 9.

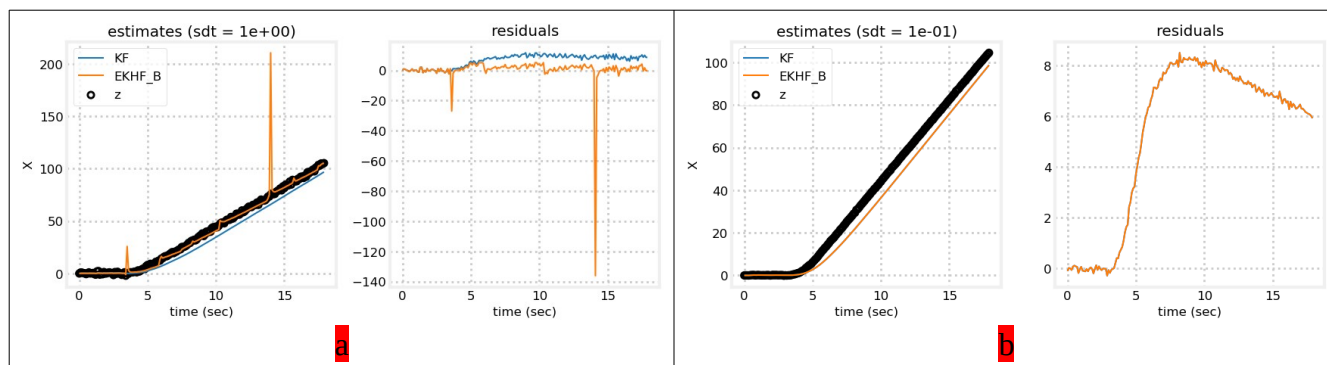


Рис. 9 Работа EKNF\_B при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Как и EKNF\_A, данный алгоритм демонстрирует нестабильную работу (рис. 9a), либо отсутствие адаптивной коррекции (рис. 9b).



## UDEKHF\_B

На рис. 10 отражены результаты работы алгоритма UDEKHF\_B.

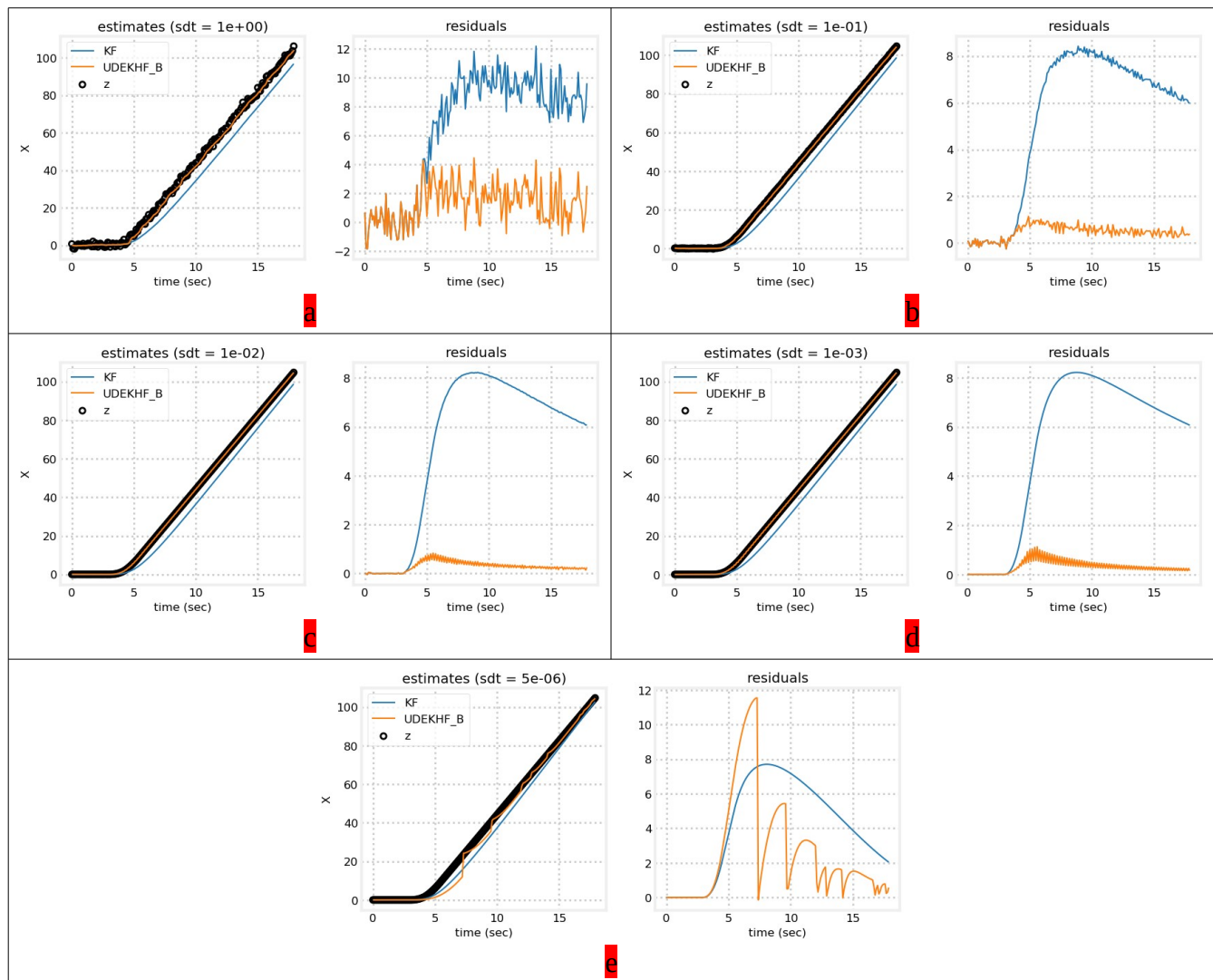


Рис. 10 Работа UDEKHF\_B при различных значениях дисперсии шума наблюдения (двухмерный случай).

Как и в одномерном случае, фильтр работает нестабильно (рис. 10с-е) и расходится (рис. 10е) при относительно низких значениях дисперсии шума наблюдения.

## Заключение

# Переписать

## Ссылки

- [illegible]