

Нелинейный анализ

Кравцов О.В.

11 сентября 2017 г.

Вступление

Глава 1

Нелинейные динамические системы

В настоящее время теория нелинейных динамических систем (НДС) представляет собой эффективный математический аппарат, нацеленный на качественное и количественное исследование поведения реальной системы (натуры).

1.1 Введение: фазовое пространство и его свойства

Определение 1.1.1: Фазовое пространство (ФП)

Фазовое пространство — это пространство состояний реальной системы; абстрактное математическое пространство, размерность которого определяется числом функций, необходимых для однозначного задания состояния реальной системы в некий момент времени.

Функции, однозначно задающие состояние реальной системы в момент времени t :

$$x_i(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Так как по осям координат ФП находятся значения $x_i(t)$, можно составить *вектор состояния*:

$$\vec{x}_i(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

Тогда эволюция состояния системы будет описана нелинейными (как правило) дифференциальными уравнениями (ДУ) 1 порядка.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_k) \quad (1.1)$$

или

$$\frac{d\vec{x}_i(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{x}_i(t), t, \vec{a}).$$

где a_j — параметры системы, $j = \overline{1, k}$.

Определение 1.1.2: Фазовая точка

Фазовая (изображающая) точка — это точка ФП, описывающая настоящее (в данный момент времени) состояние реальной системы.

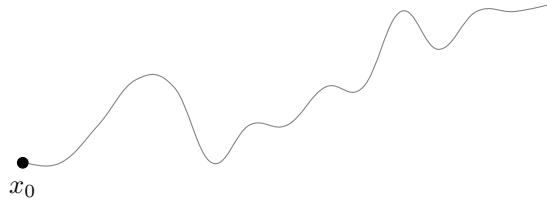


Рис. 1.1: Фазовая точка x_0 и траектория её движения.

(1.1) — уравнение движения фазовой точки.

Определение 1.1.3: Фазовая траектория (ФТр)

Траектория движения фазовой точки называется фазовой траекторией.

Для решения (1.1) нужно знать начальные условия, то есть координаты точки, из которой выходит фазовая траектория.

$$t = t_0 : \quad x_i(t_0) = x_0, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.2)$$

или

$$\vec{x}_i(t_0) = \vec{x}_0.$$

Если система неподвижна, то фазовая траектория — это фазовая точка.

Определение 1.1.4: Динамическая система (ДС)

Система называется динамической, если она описывается уравнением (1.1) и задание (1.2) полностью определяет её поведение в последующие моменты времени.

Замечание 1.1.5

В геометрии ФП стоит отметить, что ФП с размерностью:

- $n = 2k$ изучает симплектическая геометрия;
- $n = 2k + 1$ изучает контактная геометрия.

Замечание 1.1.6

Уравнения движения могут быть записаны и в старших производных. Для того, чтобы свести их к виду (1.1) вводим замену переменных.

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x_k) \quad \text{Замена:} \quad y_i = \frac{dx_i}{dt}$$

$$\text{Получаем систему:} \quad \begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = f_i(x_k) \\ \frac{dx_i}{dt} = y_i \end{cases}$$

Замечание 1.1.7

Число степеней свободы системы равно $\frac{n}{2}$, где n — размерность ФП.

Более формально ДС принято определять следующим образом:

Определение 1.1.8: Динамическая система (ДС)

Пусть некоторый эволюционный оператор T^t преобразовывает некоторое начальное состояние P_0 в момент времени t_0 в $P(t)$ в момент времени t .

$$T^t : P_0 \rightarrow P(t).$$

Тогда под ДС понимается такая система, эволюционный оператор которой определяется соотношением:

$$T^t T^\tau = T^{t+\tau}.$$

То есть время аддитивно, а оператор мультипликативный. При этом подразумевается коммутативность:

$$T^t T^\tau = T^\tau T^t.$$

Задание ДС является постановкой задачи Коши. Согласно теореме Коши при заданных (1.2) решение (1.1) существует и оно единственное. Это утверждение приводит к следующим следствиям:

- ФТр не самопересекаются.
- Так как существует и обратная задача Коши (вводится замена $t = -t$), то пересечение двух и более ФТр также невозможно.
- Если малое шевеление не изменяет ФТр системы, то такая система — *грубая* и к ней применима теорема Коши. В реальности негрубых систем гораздо больше, чем грубых, и для них существует *горизонт прогноза*.

Примеры негрубых систем: изменение индекса Доу Джонса, погода. Также существуют системы только с вероятностными уравнениями, для которых даже невозможно записать уравнение движения (1.1).

Пример 1.1.9: Обычная ДС

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + ax(t - \tau) = 0 \quad \text{Замена: } \frac{dx}{dt} = y$$

Получаем систему:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -by - ax(t - \tau) \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases}$$

Определение 1.1.10: Фазовый портрет

Совокупность ФТр, соответствующих различным начальным условиям или значениям параметров называется фазовым портретом.

Поведение ФТр дает информацию о поведении системы. Существуют методы, которые позволяют не решая систему уравнений, а исходя только из вида правой части (1.1) получить представление о поведении ФТр системы. Это и есть задача качественной теории ДУ.

Определение 1.1.11: Фазовая плоскость (ФПл)

Фазовая плоскость — это ФП с размерностью 2.

Уравнения, описывающие эволюцию ДС:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, t). \end{cases} \quad (1.3)$$

Уравнение ФТр получаем из (1.3):

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2, t)}{f_2(x_1, x_2, t)}.$$

Разнообразие поведения ФТр на ФПл ограничено теоремой Бендиксона-Пуанкаре. ФТр может:

- уйти на бесконечность;
- уткнуться в особую точку;
- намотаться на предельный цикл.

Особые точки, они же неподвижные точки или стационарные точки определяются из уравнения (1.4).

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.4)$$

Определение 1.1.12: Автономная ДС

Если в правой части (1.1) при заданных значениях параметров время не входит в него явно, то такая ДС называется автономной.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{a}).$$

1.1.1 Особые точки и особые траектории

Рассмотрим ФПл:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Уравнение ФТр:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}.$$

1. Центр
2. Фокус
3. Узел
4. Предельный цикл
5. Седло

В ФПл нет других особых точек (ОТ), кроме указанных, за исключением того случая, когда ОТ сближаются, а затем сливаются.

Анализ таких ситуаций относится к разделу современной математики, который называется теорией структурной устойчивости или *теорией катастроф*.

Определение 1.1.13: Аттрактор

ОТ или области ФП любой размерности, притягивающие ФТр, называются аттракторами.

1.2 Теорема Лиувилля-Остроградского

Рассмотрим в n -мерном ФП автономную ДС.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t)), \quad (1.5)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Вблизи точки \vec{x} элемент ФП равен:

$$d\Gamma = dx_1 dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n.$$

Пусть D — область ФП, тогда объём в этой области равен:

$$V = \int_D d\Gamma.$$

Область D образуют точки ФП, которые можно рассматривать как точки разных ФТр в каждый момент времени. Это *фазовая капля* объёма V в момент времени t .

$$D = D(t),$$

$$V = \int_{D(t)} d\Gamma.$$

Теорема 1.2.1: (Лиувилля-Остроградского)

$$\frac{dV}{dt} = \int_{D(t)} \operatorname{div} \vec{f} d\Gamma, \quad \text{где} \quad \vec{f} = \frac{d\vec{x}}{dt}.$$

Доказательство. За время τ координаты точек области D изменятся.

$$x_i(t) \xrightarrow{\tau} x_i(t + \tau).$$

Тогда и область D и объём V также изменятся соответственно.

$$D(t) \xrightarrow{\tau} D(t + \tau).$$

$$V(t) \xrightarrow{\tau} V(t + \tau).$$

Учитывая тот факт, что ФТр не пересекаются, можно утверждать, что между $x_i(t)$ и $x_i(t + \tau)$ существует взаимно однозначное соответствие.

$$x_i(t + \tau) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \tau).$$

Обозначим: $y_i = x_i(t + \tau)$, тогда $y_i = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \tau)$, $i = \overline{1, n}$. Это соотношение можно интерпретировать как преобразование системы координат (x_1, x_2, \dots, x_n) в систему координат (y_1, y_2, \dots, y_n) . В новой системе координат элемент ФП равен:

$$d\tilde{\Gamma} = dy_1 dy_2 \cdot \dots \cdot dy_n.$$

Два элемента ФП $d\Gamma$ и $d\tilde{\Gamma}$ связаны якобианом преобразования.

$$d\tilde{\Gamma} = J d\Gamma, \quad \text{где} \quad J = \left| \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|.$$

Получаем выражение для объёма:

$$V(t + \tau) = \int_{D(t)} d\tilde{\Gamma} = \int_{D(t)} J d\Gamma. \quad (1.6)$$

Пусть τ достаточно малый интервал: $\tau = dt$.

Используя уравнение движения (1.5) в координатном виде можно записать следующее соотношение:

$$y_i = x_i(t + \tau) = x_i(t + dt) = x_i(t) + dx_i = x_i(t) + f_i dt.$$

Тогда

$$J = \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right) = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} + dt \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) = \det(\hat{E} + \hat{F} dt),$$

где $\hat{E}_{(n \times n)}$ — единичная матрица, $\hat{F} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)$, $F_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $(i, k) = \overline{1, n}$.

Раскладываем J в ряд Тейлора по степеням dt с точностью до бесконечно малого 2 порядка:

$$\det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right) = 1 + \text{Tr} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) dt + o((dt)^2), \quad \text{где } \text{Tr} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) = \text{div} \vec{f}.$$

Таким образом, якобиан равен:

$$J \approx 1 + \text{div} \vec{f} dt. \quad (1.7)$$

Из выражений (1.6) и (1.7) получаем:

$$V(t + \tau) = V(t) + dt \int_{D(t)} \text{div} \vec{f} d\Gamma \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \int_{D(t)} \text{div} \vec{f} d\Gamma.$$

□

Следствие 1.2.2

Величина фазового объёма гамильтоновых систем не изменяется с течением времени. Рассмотрим гамильтонову систему:

$$\begin{cases} \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \\ \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} \end{cases} \quad (1.8)$$

Принято обозначение: $\text{div} \vec{f} = \Lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \left[\text{подставляем (1.8)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} + \frac{\partial}{\partial P_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right) = 0 \\ \Lambda = 0 &\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = \text{const.} \end{aligned}$$

Следствие 1.2.3

Пусть область D достаточно мала так, чтобы подынтегральное выражение в (1.2.1) можно было считать постоянным.

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= V \operatorname{div} \vec{f} \\ \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} &= \operatorname{div} \vec{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, когда f_i — линейная функция координат.

$$\begin{aligned}f_i &= \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ii} = \Lambda \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad V(t) &= V_0 \exp(\Lambda t), \quad \text{где } V_0 \equiv V(0).\end{aligned}$$

1.3 Математические модели и классификация ДС

Существует две основные модели: поток и отображение.

1.3.1 Модель-поток (flows)

Модель задаётся ДУ:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\{x_k(t)\}, \{a_j\}, t), \quad (i, k) = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}. \quad (1.9)$$

Определение 1.3.1: Модель-поток

Модель вида (1.9), в которой время непрерывно, называется модель-поток.

Уравнение (1.9) можно записать в векторном виде:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{a}, t). \quad (1.10)$$

Часто удобно считать правую часть уравнения (1.9) не зависящей явно от времени t . Это всегда можно сделать введя динамическую переменную, численно совпадающую со временем.

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = t.$$

В этом случае ФП является расширенным ФП.

1.3.2 Модель-отображение (maps)

Это класс моделей, в которых время дискретно: $\{t_n\}, n \in \mathbb{Z}$. Номер n момента времени t_n принимается за независимую переменную.

Пример 1.3.2

| | | | | | |
|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------|
| $t :$ | $0c$ | $5c$ | $10c$ | $15c$ | \dots |
| | \downarrow | \downarrow | \downarrow | \downarrow | |
| $n :$ | 1 | 2 | 3 | 4 | \dots |

Тогда уравнения движения модели-отображения выражают значения динамических переменных в момент времени $(n + 1)$ через значение динамических переменных в момент времени n .

$$\vec{X}(n + 1) = \vec{M}(\vec{X}(n), \vec{a}). \quad (1.11)$$

Определение 1.3.3: Модель-отображение

Модель вида (1.11), в которой время дискретно, называется модель-отображение.

Рассмотрим источники этих моделей. Пусть реальная система имеет характерный временной масштаб T .

- За состоянием потока $x(t)$ следят в избранные моменты времени t_n , а не в произвольные. Эти t_n разделены интервалом $\tau \approx T$.

Замечание

$\tau \leq T$, но ни в коем случае не $\tau > T$.

Таким образом,

$$\vec{x}(t_0 + n\tau) = \vec{x}_n - \text{временной ряд.}$$

- Условие $\tau \gg T$ используется для численного решения уравнения (1.9); потоки (1.9) заменяем отображениями (1.11), то есть дискретными разностными схемами для потоков.

Пример 1.3.4: Метод ломаных Эйлера

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n), \quad h \ll T.$$

- Источником модели-отображения являются также системы, в которых дискретный счет времени.

Пример 1.3.5: Динамика популяций

u — количество особей,

n — номер поколения.

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

ФТр этой системы с начальными условиями $u_1 = 1, u_2 = 1$ — это числа Фибоначчи.

1.3.3 Классификация ДС**Определение 1.3.6: Автономная ДС**

Если ДС задана моделью потоков:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\{x_k(t)\}, \{a_j\}), \quad (i, k) = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}, \quad (1.12)$$

а в правую часть не входит время явно и все параметры не зависят от времени, то такая ДС называется автономной.

Определение 1.3.7: Неавтономная ДС

Если в правую часть входит явно время и существует такое a_j , зависящее от времени, то такая ДС называется неавтономной.

Данные определения справедливы и для модели-отображения, где вместо (1.12) используется уравнение:

$$\vec{X}(n+1) = \vec{M}(\{\vec{X}(n)\}, \{\vec{a}\}). \quad (1.13)$$

Определение 1.3.8: Локальная диссипация

Для ДС-потока локальной диссипацией $G(\vec{x})$ в точке \vec{x} ФП принято называть дивергенцию поля фазовых скоростей в этой точке, взятой с обратным знаком.

$$G(\vec{x}) = -\operatorname{div} \dot{\vec{x}} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = -\operatorname{div} \vec{f}.$$

Из теоремы Лиувилля-Остроградского следует, что для малого V вблизи точки \vec{x} получаем уравнение:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \operatorname{div} \vec{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -G(\vec{x}).$$

Это означает, что относительная скорость изменения фазового объема равна диссипации с обратным знаком.

Определение 1.3.9: Диссипативная система

Системы, для которых $G(\vec{x}) \neq 0$ во всех точках ФП называют диссипативными.

Определение 1.3.10: Консервативная система

Системы, для которых $G(\vec{x}) = 0$ во всех точках ФП называют консервативными.

Замечание 1.3.11

Согласно этому определению консервативность — это сохранение фазового объема, а не энергии.

Любые гамильтоновы системы являются консервативными, но все консервативные системы являются гамильтоновыми.

Пример 1.3.12

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = xz \\ \dot{z} = xy \end{cases} \Rightarrow G(\vec{x}) = 0 \quad (1.14)$$

Однако система не гамильтонова.

Рассмотрим диссипацию для системы, заданной моделью-отображением (1.11). Для одного отображения:

$$V' = JV, \quad \text{где } J = \det \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_i} \right).$$

Найдем локальную диссипацию:

- для потока:

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -\frac{d \ln|V|}{dt}.$$

- для отображения:

$$\begin{aligned} G(\vec{x}) &= -\frac{\Delta \ln|V|}{\Delta n} = \left[\Delta n = 1 - \text{локальность} \right] = -\Delta \ln|V| \\ &= -(\ln|V'| - \ln|V|) = -(\ln|JV| - \ln|V|) = -\ln|J|. \end{aligned}$$

Таким образом, локальная диссипация для модели-отображения — это логарифм абсолютной величины якобиана, взятый с обратным знаком.

$$G(\vec{x}) = -\ln|J|.$$

1.4 Основные типы задач теории ДС

1. Задача Коши
2. Задача исследования устойчивости движения
3. Задача исследования структуры ФП
4. Задача исследования самой ДС

1.4.1 Задача Коши

Пусть есть уравнение движения:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{a}).$$

Тогда требуется в заданный момент времени t_0 , $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ найти её состояние в любой момент времени.

Решение задачи Коши должно удовлетворять прямой и обратной задачи Коши (прямая: $t \rightarrow +\infty$, обратная: $t \rightarrow -\infty$).

1.4.2 Задача исследования устойчивости движения

Устойчивость определяет качественный характер взаимного поведения $\vec{x}(t)$ с близкими начальными условиями и является фундаментальной характеристикой потока.

Определение 1.4.1: Устойчивость по Ляпунову

Движение является устойчивым по Ляпунову, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad |x'(0) - x(0)| < \delta(\varepsilon) : \quad \forall t \quad |x'(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Это означает, что точки, близкие при $t = 0$ остаются близкими и в последующие моменты времени.

Определение 1.4.2: Орбитальная устойчивость (устойчивость по Пуанкаре)

Движение является орбитально устойчивым (устойчивым по Пуанкаре), если точки, близкие в одном месте ФП, остаются близкими и в остальных областях ФП.

Замечание 1.4.3

Из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость по Пуанкаре, но не наоборот.

Частным случаем устойчивости по Ляпунову является асимптотическая устойчивость.

Определение 1.4.4: Асимптотическая устойчивость

Движение является асимптотически устойчивым, если точки, которые находятся на ФТр близко друг к другу в момент времени $t = 0$, неограниченно сближаются по мере движения.

Определение 1.4.5: Экспоненциальная устойчивость

Движение является экспоненциально устойчивым, если при этом расстояние между точками убывает не медленнее (т.е. быстрее или так же) чем $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.

1.4.3 Задача исследования структуры ФП

Для автономных систем с фиксированным значением параметров нахождение структуры ФП сводится в первую очередь к выделению особых точек и ФТр.

К особым траекториям и точкам относятся:

- неподвижные точки (fixed point), которые находятся из условия:

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{a}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_{fp}} = 0.$$

- ФТр, соответствующая периодическому движению, так как в общем случае движение системы не является периодическим. Для автономных систем такие ФТр являются замкнутыми.

- сепаратрисы седловых точек.

В задачу исследования структуры ФП также входит нахождение границ областей финитного движения и хаотичных компонент.

Определение 1.4.6: Хаотичные компоненты

Границы областей, в которых движение хаотично, называются хаотичными компонентами ФП.

Задача исследования структуры ФП также включает в себя определение зависимости границ хаотичных компонент от значения параметров данной системы.

Определение 1.4.7: Финитное движение

Движение называется финитным, если движение системы при заданном значении параметра остается ограниченным:

$$\exists x_j > 0 : \quad \forall t \quad \forall i = \overline{1, n} \quad |x_i(t)| < x_j. \quad (1.15)$$

Определение 1.4.8: Инфинитное движение

Движение называется инфинитным, если хотя бы для одной x_i утверждение (1.15) не выполняется.

Определение 1.4.9: Хаос (хаотическое движение)

Финитное экспоненциально неустойчивое по Ляпунову движение нелинейной ДС называется хаосом или хаотическим движением.

Определение 1.4.10: Экспоненциальная неустойчивость по Ляпунову

Экспоненциальная неустойчивость по Ляпунову — это неустойчивость, при которой расстояние между близкими при $t = 0$ точками ФП растёт со временем по закону:

$$\Delta(t) \sim \Delta(\sigma)e^{\sigma t},$$

где σ — показатель Ляпунова.

Определение 1.4.11: Показатель Ляпунова

Показатель Ляпунова — это характерная устойчивая скорость экспоненциального расхождения близких ФТр.

Определение 1.4.12: Регулярное движение

Регулярное движение — это нехаотическое движение.

1.4.4 Задача исследования ДС

При изменении параметра системы $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ в общем случае изменяется и свойство её исключительных решений. Очень важным является найти границы значений параметров, при переходе через которые меняется и/или число и тип решений.

Определение 1.4.13: Бифуркация, точка бифуркации

Качественное изменение поведения ДС при переходе значений параметров системы через некоторое граничное значение называется бифуркацией, а соответствующее граничное значение $\vec{a} = \vec{a}_b$ называется точкой бифуркации.

Одной из важнейших задач исследования ДС является задача исследования хаотического движения, то есть выявление областей их существования в пространстве параметров и определение зависимости характеристик

таких движений (например таких, как показатель Ляпунова, корреляционные функции) от параметров ДС.

Если для регулярного движения при исследовании устойчивости важно просто знать, есть она или её нет, то для хаоса является важным исследование самой неустойчивости.

Определение 1.4.14: Сценарий перехода к хаосу

Изменение характеристик регулярного движения при приближении к хаотическим компонентам в пространстве параметров называется сценарием перехода к хаосу.

1.5 Особые точки

Рассмотрим автономную систему:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}}{dt} &= f_i(\vec{x}, \vec{a}), & \text{где } \vec{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vec{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_k), \\ \vec{f} &= (f_1, f_2, \dots, f_n).\end{aligned}$$

Особая точка: $f_i(\vec{x}, \vec{a}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_f} = 0$.

Сами по себе особые точки не представляют интереса. Более важным является то, как ведут себя ФТр вблизи этих точек.

Пример 1.5.1: Осцилятор без затухания

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x \end{cases}$$

Особая точка:

$$\begin{aligned}y &= 0, \\ -\omega^2 x &= 0, \\ x &= 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0).\end{aligned}$$

Найдем уравнение ФТр:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\omega^2 x}{y} \\ y dy &= -\omega^2 x dx \\ \frac{y^2}{2} + \frac{x^2 \omega^2}{2} &= const.\end{aligned}$$

Пример 1.5.2: Осцилятор с затуханием

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -2\gamma y - \omega^2 x \end{cases}$$

Особая точка: $(0, 0)$.

Найдем уравнение ФТр:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{2\gamma y + \omega^2 x}{y} \\ \frac{dy}{dx} &= -2\gamma - \omega^2 \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случаи:

- $\gamma \geq 0$:
 - $\gamma < \omega$: устойчивый фокус.
 - $\gamma > \omega$: устойчивый узел.
- $\gamma < 0$:
 - $\gamma < \omega$: неустойчивый фокус.
 - $\gamma > \omega$: неустойчивый узел.

Пример 1.5.3

$$\ddot{x} - r^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = r^2 x \end{cases}$$

Особая точка: $(0, 0)$.

Найдем уравнение ФТр:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{r^2 x}{y} \\ y dy &= r^2 x dx. \end{aligned}$$

Общий вид решения:

$$x = c_1 e^{rt} + c_2 e^{-rt}, \quad \text{где } c_1, c_2 \text{ — константы интегрирования.}$$

Рассмотрим случаи:

- $c_1 = 0, t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 0,$

- $c_2 = 0, t \rightarrow -\infty \Rightarrow x \rightarrow 0$,

т.е. особые точки существуют только тогда, когда либо c_1 , либо c_2 равно 0.

Таким образом, уравнение ФТр:

$$\frac{y^2}{2E} - \frac{x^2}{2E/t^2} = 1,$$

где $E = c_1 c_2 = \text{const}$.

- Если $E = 0$, т.е. $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2/t^2} = E = 0$, тогда ФТр — седло.
- Если $E \neq 0$, тогда ФТр — гиперболы.

Пример 1.5.4: Физический маятник

$$\ddot{x} + \frac{q}{l} \sin x = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{q}{l} \sin x \end{cases}$$

Особые точки: $y = 0$; $x = \pm 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Найдем уравнение ФТр:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{q}{l} \sin x}{y} \\ y dy &= \frac{q}{l} \sin x dx \\ \frac{y^2}{2} - \frac{q}{l} \cos x &= E \end{aligned}$$

Глава 2

Хаос и фракталы

2.1 Показатель Ляпунова и кинематика хаотического движения

Случайный процесс (СП) описывается определенными математическими закономерностями (либо это стохастические уравнения движения (уравнение Ланжевина), либо уравнения для функции распределения ФР (уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова)).

Исследование нелинейных Динамических Систем (ДС) показывает, что для них характерны такие режимы поведения, которые обладают свойствами СП. Это называется *динамическим хаосом*. Его называют также *детерминированным хаосом*, так как он возникает в отсутствии каких-либо устойчивых факторов и полностью определяет начальные условия.

Явление хаоса присуще большинству нелинейных систем (автономных и неавтономных), но оно может быть труднонаблюдаемо, если хаос является слабым или медленным, то есть проявляется только на большом промежутке t , либо \exists на узком промежутке значений параметров.

Определение 2.1.1: Хаотическое движение (или хаос)

Финитное экспоненциальное неустойчивое движение нелинейной ДС называется хаотическим движением или хаосом.

Определение 2.1.2: Экспоненциально неустойчивое движение по Ляпунову

Движение ДС называется экспоненциально неустойчивым по Ляпунову, если $\Delta(t)$ между близкими при $t = 0$ ФТр растет со временем по экспоненциальному закону

$$\Delta(t) = \Delta(0) \exp^{\Theta t}, \quad \Theta > 0$$

Если $x^*(t)$ — опорное движение, а $x_1(t)$ — сопутствующее движение с

близкими начальными условиями, то

$$\Delta(t) = |\vec{x}^*(t) - \vec{x}_1(t)|$$

А близость начальных условий означает, что

$$\Delta(0) = |\vec{x}^*(0) - \vec{x}_1(0)| \ll 1$$

Так как показатель Ляпунова в разных направлениях может быть разным, то он определяется как средняя скорость экспоненциального роста на большом интервале времени ($\Delta(t) \rightarrow \infty$), тогда:

$$\Theta = \lim_{\substack{\Delta(t) \rightarrow \infty \\ \Delta(0) \rightarrow \infty}} \ln\left(\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}\right) \Rightarrow \sim \quad (2.1)$$

$$\Theta \sim \frac{1}{\tau} \ln\left(\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}\right) \Rightarrow \tau = \frac{1}{\Theta} \ln\left(\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}\right) \quad (2.2)$$

Определенное время τ называется *горизонтом прогноза (предсказуемости)*

В этом случае,

$$\Delta(t) = \Delta(\tau)$$

является *характерным размером* области движения системы в ФП.

Замечание 2.1.3

Система называется *локально неустойчивой*, если для нее \exists направление в ФП, для которого

$$\Delta(t) = \Delta(0) \exp^{\Theta t}, \quad \Theta > 0$$

Глава 3

Диссипативные системы. Синергетика

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Вступление | 3 |
| 1 Нелинейные динамические системы | 5 |
| 1.1 Введение: фазовое пространство и его свойства | 5 |
| 1.1.1 Особые точки и особые траектории | 9 |
| 1.2 Теорема Лиувилля-Остроградского | 9 |
| 1.3 Математические модели и классификация ДС | 12 |
| 1.3.1 Модель-поток (flows) | 12 |
| 1.3.2 Модель-отображение (maps) | 13 |
| 1.3.3 Классификация ДС | 14 |
| 1.4 Основные типы задач теории ДС | 16 |
| 1.4.1 Задача Коши | 16 |
| 1.4.2 Задача исследования устойчивости движения | 16 |
| 1.4.3 Задача исследования структуры ФП | 17 |
| 1.4.4 Задача исследования ДС | 18 |
| 1.5 Особые точки | 19 |
| 2 Хаос и фракталы | 23 |
| 2.1 Показатель Ляпунова и кинематика хаотического движения | 23 |
| 3 Диссипативные системы. Синергетика | 25 |