Нелинейный анализ

Кравцов О.В.

18 августа 2017 г.

Вступление

Глава 1

Нелинейные динамические системы

В настоящее время теория нелинейных динамических систем (НДС) представляет собой эффективный математический аппарат, нацеленный на качественное и количественное исследование поведения реальной системы (натуры).

1.1 Введение: фазовое пространство и его свойства

Определение 1.1.1: Фазовое пространство (ФП)

Фазовое пространство — это пространство состояний реальной системы; абстрактное математическое пространство, размерность которого определяется числом функций, необходимых для однозначного задания состояния реальной системы в некий момент времени.

Функции, однозначно задающие состояние реальной системы в момент времени t:

$$x_i(t), \qquad i = \overline{1, n}.$$

Так как по осям координат ФП находятся значения $x_i(t)$, можно составить *вектор состояния*:

$$\vec{x}_i(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

Тогда эволюция состояния системы будет описана нелинейными (как правило) дифференциальными уравнениями (ДУ) 1 порядка.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_k) \tag{1.1}$$

или

$$\frac{d\vec{x}_i(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{x}_i(t), t, \vec{a}).$$

где a_j — параметры системы, $j = \overline{1, k}$.

Определение 1.1.2: Фазовая точка

Фазовая (изображающая) точка — это точка ФП, описывающая настоящее (в данный момент времени) состояние реальной системы.

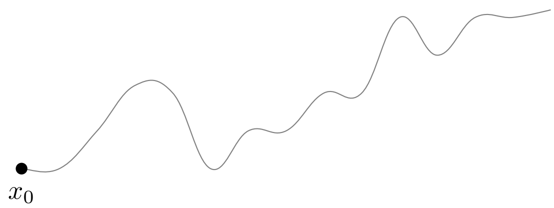

Рис. 1.1: Фазовая точка x_0 и траектория её движения.

(1.1) — уравнение движения фазовой точки.

Определение 1.1.3: Фазовая траектория (ФТр)

Траектория движения фазовой точки называется фазовой траекторией.

Для решения (1.1) нужно знать начальные условия, то есть координаты точки, из которой выходит фазовая траектория.

$$t = t_0: \qquad x_i(t_0) = x_0, \qquad i = \overline{1, n} \tag{1.2}$$

или

$$\vec{x}_i(t_0) = \vec{x}_0.$$

Если система неподвижна, то фазовая траектория — это фазовая точка.

Определение 1.1.4: Динамическая система (ДС)

Система называется динамической, если она описывается уравнением (1.1) и задание (1.2) полностью определяет её поведение в последующие моменты времени.

Замечание 1.1.5

В геометрии ФП стоит отметить, что ФП с размерностью:

- $n = 2k$ изучает симплектическая геометрия;
- $n = 2k + 1$ изучает контактная геометрия.

Замечание 1.1.6

Уравнения движения могут быть записаны и в старших производных. Для того, чтобы свести их к виду (1.1) вводим замену переменных.

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x_k) \qquad \text{Замена:} \quad y_i = \frac{dx_i}{dt}$$

$$\text{Получаем систему:} \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} = f_i(x_k) \\ \dfrac{dx_i}{dt} = y_i \end{cases}$$

Замечание 1.1.7

Число степеней свободы системы равно $\frac{n}{2}$, где n — размерность ФП.

Более формально ДС принято определять следующим образом:

Определение 1.1.8: Динамическая система (ДС)

Пусть некоторый эволюционный оператор T^t преобразовывает некоторое начальное состояние P_0 в момент времени t_0 в $\mathrm{P}(t)$ в момент времени t.

$$\mathrm{T}^t : \mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}(t).$$

Тогда под ДС понимается такая система, эволюционный оператор которой определяется соотношением:

$$\mathrm{T}^t \mathrm{T}^\tau = \mathrm{T}^{t+\tau}.$$

То есть время аддитивно, а оператор мультипликативный. При этом подразумевается коммутируемость:

$$\mathrm{T}^t \mathrm{T}^\tau = \mathrm{T}^\tau \mathrm{T}^t.$$

Задание ДС является постановкой задачи Коши. Согласно теореме Коши при заданных (1.2) решение (1.1) существует и оно единственное. Это утверждение приводит к следующим следствиям:

- ФТр не самопересекаются.

- Так как существует и обратная задача Коши (вводится замена $t = -t$), то пересечение двух и более ФТр также невозможно.

- Если малое шевеление не изменяет ФТр системы, то такая система — *грубая* и к ней применима теорема Коши. В реальности негрубых систем гораздо больше, чем грубых, и для них существует *горизонт прогноза*.

Примеры негрубых систем: изменение индекса Доу Джонса, погода. Также существуют системы только с вероятностными уравнениями, для которых даже невозможно записать уравнение движения (1.1).

Пример 1.1.9: Обычная ДС

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + ax(t-\tau) = 0 \qquad \text{Замена:} \frac{dx}{dt} = y$$

$$\text{Получаем систему:} \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -by - ax(t-\tau) \\ \dfrac{dx}{dt} = y \end{cases}$$

Определение 1.1.10: Фазовый портрет

Совокупность ФТр, соответствующих различным начальным условиям или значениям параметров называется фазовым портретом.

Поведение ФТр дает информацию о поведении системы. Существуют методы, которые позволяют не решая систему уравнений, а исходя только из вида правой части (1.1) получить представление о поведении ФТр системы. Это и есть задача качественной теории ДУ.

Определение 1.1.11: Фазовая плоскость (ФПл)

Фазовая плоскость — это ФП с размерностью 2.

Уравнения, описывающие эволюцию ДС:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, t). \end{cases} \tag{1.3}$$

Уравнение ФТр получаем из (1.3):

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2, t)}{f_2(x_1, x_2, t)}.$$

Разнообразие поведения ФТр на ФПл ограничено теоремой Бендиксона-Пуанкаре. ФТр может:

- уйти на бесконечность;
- уткнуться в особую точку;
- намотаться на предельный цикл.

Особые точки, они же неподвижные точки или стационарные точки определяются из уравнения (1.4).

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{1.4}$$

Определение 1.1.12: Автономная ДС

Если в правой части (1.1) при заданных значениях параметров время не входит в него явно, то такая ДС называется автономной.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{a}).$$

1.1.1 Особые точки и особые траектории

Рассмотрим ФПл:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Уравнение ФТр:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}.$$

1. Центр
2. Фокус
3. Узел
4. Предельный цикл
5. Седло

В ФПл нет других особых точек (ОТ), кроме указанных, за исключением того случая, когда ОТ сближаются, а затем сливаются.

Анализ таких ситуаций относится к разделу современной математики, который называется теорией структурной устойчивости или *теорией катастроф*.

Определение 1.1.13: Аттрактор

ОТ или области ФП любой размерности, притягивающие ФТр, называются аттракторами.

1.2 Теорема Лиувилля-Остроградского

Рассмотрим в n-мерном ФП автономную ДС.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t)), \tag{1.5}$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.
Вблизи точки $\vec{x}$ элемент ФП равен:

$$d\Gamma = dx_1 dx_2 \cdot \ldots \cdot dx_n.$$

Пусть D — область ФП, тогда объём в этой области равен:

$$V = \int\limits_D d\Gamma.$$

Область D образуют точки ФП, которые можно рассматривать как точки разных ФТр в каждый момент времени. Это *фазовая капля* объёма V в момент времени t.

$$D = D(t),$$
$$V = \int\limits_{D(t)} d\Gamma.$$

Теорема 1.2.1: (Лиувилля-Остроградского)

$$\frac{dV}{dt} = \int\limits_{D(t)} \mathrm{div}\vec{f} d\Gamma, \qquad \text{где} \quad \vec{f} = \frac{d\vec{x}}{dt}.$$

Доказательство. За время τ координаты точек области D изменятся.

$$x_i(t) \xrightarrow{\tau} x_i(t+\tau).$$

Тогда и область D и объём V также изменятся соответственно.

$$D(t) \xrightarrow{\tau} D(t+\tau).$$

$$V(t) \xrightarrow{\tau} V(t+\tau).$$

Учитывая тот факт, что ФТр не пересекаются, можно утверждать, что между $x_i(t)$ и $x_i(t+\tau)$ существует взаимно однозначное соответствие.

$$x_i(t+\tau) = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \tau).$$

Обозначим: $y_i = x_i(t+\tau)$, тогда $y_i = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \tau), \quad i = \overline{1,n}$. Это соотношение можно интерпретировать как преорбразование системы координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в систему координат $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. В новой системе координат элемент ФП равен:

$$d\tilde{\Gamma} = dy_1 dy_2 \cdot \ldots \cdot dy_n.$$

Два элемента ФП $d\Gamma$ и $d\tilde{\Gamma}$ связаны якобианом преобразования.

$$d\tilde{\Gamma} = \mathrm{J} d\Gamma, \qquad \text{где } \mathrm{J} = \left| \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|.$$

Получаем выражение для объёма:

$$V(t+\tau) = \int\limits_{D(t)} d\tilde{\Gamma} = \int\limits_{D(t)} \mathrm{J} d\Gamma. \tag{1.6}$$

Пусть τ достаточно малый интервал: $\tau = dt$.

Используя уравнение движения (1.5) в координатном виде можно записать следующее соотношение:

$$y_i = x_i(t+\tau) = x_i(t+dt) = x_i(t) + dx_i = x_i(t) + f_i dt.$$

Тогда

$$\mathrm{J} = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right) = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} + dt\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right) = \det(\hat{E} + \hat{F}dt),$$

где $\hat{E}_{(n\times n)}$ — единичная матрица, $\hat{F} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$, $F_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $(i,k) = \overline{1,n}$.

Раскладываем J в ряд Тейлора по степеням dt с точностью до бесконечно малого 2 порядка:

$$\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right) = 1 + \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)dt + o((dt)^2), \qquad \text{где } \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right) = \mathrm{div}\vec{f}.$$

Таким образом, якобиан равен:

$$\mathrm{J} \approx 1 + \mathrm{div}\vec{f}dt. \tag{1.7}$$

Из выражений (1.6) и (1.7) получаем:

$$V(t+\tau) = V(t) + dt\int\limits_{D(t)} \mathrm{div}\vec{f}d\Gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \int\limits_{D(t)} \mathrm{div}\vec{f}d\Gamma.$$

□

Следствие 1.2.2

Величина фазового объёма гамильтоновых систем не изменяется с течением времени. Рассмотрим гамильтонову систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_i}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \\ \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Принято обозначение: $\mathrm{div}\vec{f} = \Lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right) = \left[\text{подставляем (1.8)}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} + \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}\right) = 0 \\ \Lambda &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = const. \end{aligned}$$

Следствие 1.2.3

Пусть область D достаточно мала так, чтобы подынтегральное выражение в (1.2.1) можно было считать постоянным.

$$\frac{dV}{dt} = V \operatorname{div} \vec{f}$$
$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \operatorname{div} \vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Рассмотрим частный случай, когда f_i — линейная функция координат.

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ii} = \Lambda \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad V(t) = V_0 \exp(\Lambda t), \quad \text{где } V_0 \equiv V(0).$$

1.3 Математические модели и классификация ДС

Существует две основные модели: поток и отображение.

1.3.1 Модель-поток (flows)

Модель задаётся ДУ:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\{x_k(t)\}, \{a_j\}, t), \qquad (i,k) = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}. \tag{1.9}$$

Определение 1.3.1: Модель-поток

Модель вида (1.9), в которой время непрерывно, называется модель-поток.

Уравнение (1.9) можно записать в векторном виде:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{a}, t). \tag{1.10}$$

Часто удобно считать правую часть уравнения (1.9) не зависящей явно от времени t. Это всегда можно сделать введя динамическую переменную, численно совпадающую со временем.

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = t.$$

В этом случае ФП является расширенным ФП.

1.3.2 Модель-отображение (maps)

Это класс моделей, в которых время дискретно: $\{t_n\}, n \in \mathbb{Z}$. Номер n момента времени t_n принимается за независимую переменную.

Пример 1.3.2

$$\begin{array}{cccccc} t: & 0c & 5c & 10c & 15c & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ n: & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array}$$

Тогда уравнения движения модели-отображения выражают значения динамических переменных в момент времени $(n+1)$ через значение динамических переменных в момент времени n.

$$\vec{X}(n+1) = \vec{M}(\vec{X}(n), \vec{a}). \tag{1.11}$$

Определение 1.3.3: Модель-отображение

Модель вида (1.11), в которой время дискретно, называется модель-отображение.

Рассмотрим источники этих моделей. Пусть реальная система имеет характерный временной масштаб Т.

• За состоянием потока $x(t)$ следят в избранные моменты времени t_n, а не в произвольные. Эти t_n разделены интервалом $\tau \approx$ Т.

Замечание

$\tau \leq$ Т, но ни в коем случае не $\tau >$ Т.

Таким образом,

$$\vec{x}(t_0 + n\tau) = \vec{x}_n \text{ — временной ряд.}$$

• Условие $\tau >>$ Т используется для численного решения уравнения (1.9); потоки (1.9) заменяем отображениями (1.11), то есть дискретными разностными схемами для потоков.

Пример 1.3.4: Метод ломаных Эйлера

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n), \quad h << \text{T}.$$

• Источником модели-отображения являются также системы, в которых дискретный счет времени.

Пример 1.3.5: Динамика популяций

u — количество особей,
n — номер поколения.

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

ФТр этой системы с начальными условиями $u_1 = 1, u_2 = 1$ — это числа Фибоначчи.

1.3.3 Классификация ДС

Определение 1.3.6: Автономная ДС

Если ДС задана моделью потоков:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\{x_k(t)\}, \{a_j\}), \qquad (i,k) = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}, \tag{1.12}$$

а в правую часть не входит время явно и все параметры не зависят от времени, то такая ДС называется автономной.

Определение 1.3.7: Неавтономная ДС

Если в правую часть входит явно время и существует такое a_j, зависящее от времени, то такая ДС называется неавтономной.

Данные определения справедливы и для модели-отображения, где вместо (1.12) используется уравнение:

$$\vec{X}(n+1) = \vec{M}(\{\vec{X}(n)\}, \{\vec{a}\}). \tag{1.13}$$

Определение 1.3.8: Локальная диссипация

Для ДС-потока локальной диссипацией $G(\vec{x})$ в точке $\vec{x}$ ФП принято называть дивергенцию поля фазовых скоростей в этой точке, взятой с обратным знаком.

$$G(\vec{x}) = -\mathrm{div}\dot{\vec{x}} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = -\mathrm{div}\vec{f}.$$

Из теоремы Лиувилля-Остроградского следует, что для малого V вблизи точки $\vec{x}$ получаем уравнение:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \mathrm{div}\vec{f} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -G(\vec{x}).$$

Это означает, что относительная скорость изменения фазового объема равна диссипации с обратным знаком.

Определение 1.3.9: Диссипативная система

Системы, для которых $G(\vec{x}) \neq 0$ во всех точках ФП называют диссипативными.

Определение 1.3.10: Консервативная система

Системы, для которых $G(\vec{x}) = 0$ во всех точках ФП называют консервативными.

Замечание 1.3.11

Согласно этому определению консервативность — это сохранение фазового объема, а не энергии.

Любые гамильтоновые системы являются консервативными, но все консервативные системы являются гамитоновыми.

Пример 1.3.12

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = xz \\ \dot{z} = xy \end{cases} \quad \Rightarrow \quad G(\vec{x}) = 0 \tag{1.14}$$

Однако система не гамильтонова.

Рассмотрим диссипацию для системы , заданной моделью-отображением (1.11). Для одного отображения:

$$V' = \mathrm{J}V, \qquad \text{где } \mathrm{J} = \det\left(\frac{\partial M_i}{\partial x_i}\right).$$

Найдем локальную диссипацию:

- для потока:
$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -\frac{d\ln|V|}{dt}.$$

- для отображения:
$$G(\vec{x}) = -\frac{\Delta\ln|V|}{\Delta n} = \Big[\Delta n = 1 - \text{локальность}\Big] = -\Delta\ln|V|$$
$$= -(\ln|V'| - \ln|V|) = -(\ln|\mathrm{J}V| - \ln|V|) = -\ln|\mathrm{J}|.$$

Таким образом, локальная диссипация для модели-отображения — это логарифм абсолютной величины якобиана, взятый с обратным знаком.

$$G(\vec{x}) = -\ln|\mathrm{J}|.$$

1.4 Основные типы задач теории ДС

1. Задача Коши
2. Задача исследования устойчивости движения
3. Задача исследования структуры ФП
4. Задача исследования самой ДС

1.4.1 Задача Коши

Пусть есть уравнение движения:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{a}).$$

Тогда требуется в заданный момент времени t_0, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ найти её состояние в любой момент времени.

Решение задачи Коши должно удовлетворять прямой и обратной задачи Коши (прямая: $t \to +\infty$, обратная: $t \to -\infty$).

1.4.2 Задача исследования устойчивости движения

Устойчивость определяет качественный характер взаимного поведения $\vec{x}(t)$ с близкими начальными условиями и является фундаментальной характеристикой потока.

Определение 1.4.1: Устойчивость по Ляпунову

Движение является устойчивым по Ляпунову, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad |x'(0) - x(0)| < \delta(\varepsilon) : \quad \forall t \quad |x'(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Это означает, что точки, близкие при $t = 0$ остаются близкими и в последующие моменты времени.

Определение 1.4.2: Орбитальная устойчивость (устойчвость по Пуанкаре)

Движение является орбитально устойчивым (устойчивым по Пуанкаре), если точки, близкие в одном месте ФП, остаются близкими и в остальным областях ФП.

Замечание 1.4.3

Из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость по Пуанкаре, но не наоборот.

Глава 2

Хаос и фракталы

Глава 3

Диссипативные системы. Синергетика

Оглавление