

Нелинейный анализ

Кравцов О.В.

11 августа 2017 г.

Вступление

Глава 1

Нелинейные динамические системы

В настоящее время теория нелинейных динамических систем (НДС) представляет собой эффективный математический аппарат, нацеленный на качественное и количественное исследование поведения реальной системы (натуры).

1.1 Введение: фазовое пространство и его свойства

Определение 1.1.1: Фазовое пространство (ФП)

Фазовое пространство — это пространство состояний реальной системы; абстрактное математическое пространство, размерность которого определяется числом функций, необходимых для однозначного задания состояния реальной системы в некий момент времени.

Функции, однозначно задающие состояние реальной системы в момент времени t :

$$x_i(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Так как по осям координат ФП находятся значения $x_i(t)$, можно составить *вектор состояния*:

$$\vec{x}_i(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

Тогда эволюция состояния системы будет описана нелинейными (как правило) дифференциальными уравнениями (ДУ) 1 порядка.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_k) \quad (1.1)$$

или

$$\frac{d\vec{x}_i(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{x}_i(t), t, \vec{a}).$$

где a_j — параметры системы, $j = \overline{1, k}$.

Определение 1.1.2: Фазовая точка

Фазовая (изображающая) точка — это точка ФП, описывающая настоящее (в данный момент времени) состояние реальной системы.

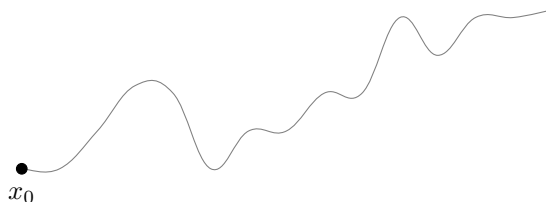


Рис. 1.1: Фазовая точка x_0 и траектория её движения.

(1.1) — уравнение движения фазовой точки.

Определение 1.1.3: Фазовая траектория (ФТр)

Траектория движения фазовой точки называется фазовой траекторией.

Для решения (1.1) нужно знать начальные условия, то есть координаты точки, из которой выходит фазовая траектория.

$$t = t_0 : \quad x_i(t_0) = x_0, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.2)$$

или

$$\vec{x}_i(t_0) = \vec{x}_0.$$

Если система неподвижна, то фазовая траектория — это фазовая точка.

Определение 1.1.4: Динамическая система (ДС)

Система называется динамической, если она описывается уравнением (1.1) и задание (1.2) полностью определяет её поведение в последующие моменты времени.

Замечание 1.1.5

В геометрии ФП стоит отметить, что ФП с размерностью:

- $n = 2k$ изучает симплектическая геометрия;
- $n = 2k + 1$ изучает контактная геометрия.

Замечание 1.1.6

Уравнения движения могут быть записаны и в старших производных. Для того, чтобы свести их к виду (1.1) вводим замену переменных.

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x_k) \quad \text{Замена: } y_i = \frac{dx_i}{dt}$$

$$\text{Получаем систему: } \begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = f_i(x_k) \\ \frac{dx_i}{dt} = y_i \end{cases}$$

Замечание 1.1.7

Число степеней свободы системы равно $\frac{n}{2}$, где n — размерность ФП.

Более формально ДС принято определять следующим образом:

Определение 1.1.8: Динамическая система (ДС)

Пусть некоторый эволюционный оператор T^t преобразовывает некоторое начальное состояние P_0 в момент времени t_0 в $P(t)$ в момент времени t .

$$T^t : P_0 \rightarrow P(t).$$

Тогда под ДС понимается такая система, эволюционный оператор которой определяется соотношением:

$$T^t T^\tau = T^{t+\tau}.$$

То есть время аддитивно, а оператор мультипликативный. При этом подразумевается коммутативность:

$$T^t T^\tau = T^\tau T^t.$$

Задание ДС является постановкой задачи Коши. Согласно теореме Коши при заданных (1.2) решение (1.1) существует и оно единственное. Это утверждение приводит к следующим следствиям:

- ФТр не самопересекаются.
- Так как существует и обратная задача Коши (вводится замена $t = -t$), то пересечение двух и более ФТр также невозможно.
- Если малое шевеление не изменяет ФТр системы, то такая система — *грубая* и к ней применима теорема Коши. В реальности негрубых систем гораздо больше, чем грубых, и для них существует *горизонт прогноза*.

Примеры негрубых систем: изменение индекса Доу Джонса, погода. Также существуют системы только с вероятностными уравнениями, для которых даже невозможно записать уравнение движения (1.1).

Пример 1.1.9: Обычная ДС

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + ax(t - \tau) = 0 \quad \text{Замена: } \frac{dx}{dt} = y$$

$$\text{Получаем систему: } \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -by - ax(t - \tau) \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases}$$

Определение 1.1.10: Фазовый портрет

Совокупность ФТр, соответствующих различным начальным условиям или значениям параметров называется фазовым портретом.

Поведение ФТр дает информацию о поведении системы. Существуют методы, которые позволяют не решая систему уравнений, а исходя только из вида правой части (1.1) получить представление о поведении ФТр системы. Это и есть задача качественной теории ДУ.

Определение 1.1.11: Фазовая плоскость (ФПл)

Фазовая плоскость — это ФП с размерностью 2.

Уравнения, описывающие эволюцию ДС:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, t). \end{cases} \quad (1.3)$$

Уравнение ФТр получаем из (1.3):

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2, t)}{f_2(x_1, x_2, t)}.$$

Разнообразие поведения ФТр на ФПл ограничено теоремой Бендиксона-Пуанкаре. ФТр может:

- уйти на бесконечность;
- уткнуться в особую точку;
- намотаться на предельный цикл.

Особые точки, они же неподвижные точки или стационарные точки определяются из уравнения (1.4).

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.4)$$

Определение 1.1.12: Автономная ДС

Если в правой части (1.1) при заданных значениях параметров время не входит в него явно, то такая ДС называется автономной.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{a}).$$

1.1.1 Особые точки и особые траектории

Рассмотрим ФПл:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Уравнение ФТр:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}.$$

1. Центр
2. Фокус
3. Узел
4. Предельный цикл
5. Седло

В ФПл нет других особых точек (ОТ), кроме указанных, за исключением того случая, когда ОТ сближаются, а затем сливаются.

Анализ таких ситуаций относится к разделу современной математики, который называется теорией структурной устойчивости или *теорией катастроф*.

Определение 1.1.13: Аттрактор

ОТ или области ФП любой размерности, притягивающие ФТр, называются аттракторами.

1.2 Теорема Лиувилля-Остроградского

Рассмотрим в n -мерном ФП автономную ДС.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t)), \quad (1.5)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Вблизи точки \vec{x} элемент ФП равен:

$$d\Gamma = dx_1 dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n.$$

Пусть D — область ФП, тогда объём в этой области равен:

$$V = \int_D d\Gamma.$$

Область D образуют точки ФП, которые можно рассматривать как точки разных ФТр в каждый момент времени. Это *фазовая капля* объёма V в момент времени t .

$$D = D(t),$$

$$V = \int_{D(t)} d\Gamma.$$

Теорема 1.2.1: (Лиувилля-Остроградского)

$$\frac{dV}{dt} = \int_{D(t)} \operatorname{div} \vec{f} d\Gamma, \quad \text{где} \quad \vec{f} = \frac{d\vec{x}}{dt}.$$

Доказательство. За время τ координаты точек области D изменятся.

$$x_i(t) \xrightarrow{\tau} x_i(t + \tau).$$

Тогда и область D и объём V также изменятся соответственно.

$$D(t) \xrightarrow{\tau} D(t + \tau).$$

$$V(t) \xrightarrow{\tau} V(t + \tau).$$

Учитывая тот факт, что ФТр не пересекаются, можно утверждать, что между $x_i(t)$ и $x_i(t + \tau)$ существует взаимно однозначное соответствие.

$$x_i(t + \tau) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \tau).$$

Обозначим: $y_i = x_i(t + \tau)$, тогда $y_i = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \tau)$, $i = \overline{1, n}$. Это соотношение можно интерпретировать как преобразование системы координат (x_1, x_2, \dots, x_n) в систему координат (y_1, y_2, \dots, y_n) . В новой системе координат элемент ФП равен:

$$d\tilde{\Gamma} = dy_1 dy_2 \cdot \dots \cdot dy_n.$$

Два элемента ФП $d\Gamma$ и $d\tilde{\Gamma}$ связаны якобианом преобразования.

$$d\tilde{\Gamma} = J d\Gamma, \quad \text{где} \quad J = \left| \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|.$$

Получаем выражение для объёма:

$$V(t + \tau) = \int_{D(t)} d\tilde{\Gamma} = \int_{D(t)} J d\Gamma. \quad (1.6)$$

Пусть τ достаточно малый интервал: $\tau = dt$.

Используя уравнение движения (1.5) в координатном виде можно записать следующее соотношение:

$$y_i = x_i(t + \tau) = x_i(t + dt) = x_i(t) + dx_i = x_i(t) + f_i dt.$$

Тогда

$$J = \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right) = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} + dt \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) = \det(\hat{E} + \hat{F} dt),$$

где $\hat{E}_{(n \times n)}$ — единичная матрица, $\hat{F} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)$, $F_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $(i, k) = \overline{1, n}$.

Раскладываем J в ряд Тейлора по степеням dt с точностью до бесконечно малого 2 порядка:

$$\det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right) = 1 + \text{Tr} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) dt + o((dt)^2), \quad \text{где } \text{Tr} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) = \text{div} \vec{f}.$$

Таким образом, якобиан равен:

$$J \approx 1 + \text{div} \vec{f} dt. \quad (1.7)$$

Из выражений (1.6) и (1.7) получаем:

$$V(t + \tau) = V(t) + dt \int_{D(t)} \text{div} \vec{f} d\Gamma \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \int_{D(t)} \text{div} \vec{f} d\Gamma.$$

□

Следствие 1.2.2

Величина фазового объёма гамильтоновых систем не изменяется с течением времени. Рассмотрим гамильтонову систему:

$$\begin{cases} \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \\ \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} \end{cases} \quad (1.8)$$

Принято обозначение: $\text{div} \vec{f} = \Lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \left[\text{подставляем (1.8)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} + \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right) = 0 \\ \Lambda = 0 &\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = \text{const.} \end{aligned}$$

Следствие 1.2.3

Пусть область D достаточно мала так, чтобы подынтегральное выражение в (1.2.1) можно было считать постоянным.

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= V \operatorname{div} \vec{f} \\ \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} &= \operatorname{div} \vec{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, когда f_i — линейная функция координат.

$$\begin{aligned}f_i &= \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ii} = \Lambda \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow V(t) = V_0 \exp(\Lambda t), \quad \text{где } V_0 \equiv V(0).\end{aligned}$$

1.3 Математические модели и классификация ДС

Существует две основные модели: поток и отображение.

1.3.1 Модель-поток (flows)

Модель задаётся ДУ:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\{x_k(t)\}, \{a_j\}, t), \quad (i, k) = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}. \quad (1.9)$$

Определение 1.3.1: Модель-поток

Модель вида (1.9), в которой время непрерывно, называется модель-поток.

Уравнение (1.9) можно записать в векторном виде:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{a}, t). \quad (1.10)$$

Часто удобно считать правую часть уравнения (1.9) не зависящей явно от времени t . Это всегда можно сделать введя динамическую переменную, численно совпадающую со временем.

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = t.$$

В этом случае ФП является расширенным ФП.

1.3.2 Модель-отображение (maps)

Это класс моделей, в которых время дискретно: $\{t_n\}, n \in \mathbb{Z}$. Номер n момента времени t_n принимается за независимую переменную.

Пример 1.3.2

$t :$	$0c$	$5c$	$10c$	$15c$	\dots
	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	
$n :$	1	2	3	4	\dots

Тогда уравнения движения модели-отображения выражают значения динамических переменных в момент времени $(n + 1)$ через значение динамических переменных в момент времени n .

$$\vec{X}(n + 1) = \vec{M}(\vec{X}(n), \vec{a}). \quad (1.11)$$

Определение 1.3.3: Модель-отображение

Модель вида (1.11), в которой время дискретно, называется модель-отображение.

Рассмотрим источники этих моделей. Пусть реальная система имеет характерный временной масштаб T .

- За состоянием потока $x(t)$ следят в избранные моменты времени t_n , а не в произвольные. Эти t_n разделены интервалом $\tau \approx T$.

Замечание

$\tau \leq T$, но ни в коем случае не $\tau > T$.

Таким образом,

$$\vec{x}(t_0 + n\tau) = \vec{x}_n - \text{временной ряд.}$$

- Условие $\tau \gg T$ используется для численного решения уравнения (1.9); потоки (1.9) заменяем отображениями (1.11), то есть дискретными разностными схемами для потоков.

Пример 1.3.4: Метод ломаных Эйлера

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n), \quad h \ll T.$$

- Источником модели-отображения являются также системы, в которых дискретный счет времени.

Пример 1.3.5: Динамика популяций

u — количество особей,

n — номер поколения.

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

ФТр этой системы с начальными условиями $u_1 = 1, u_2 = 1$ — это числа Фибоначчи.

1.3.3 Классификация ДС

Глава 2

Хаос и фракталы

Глава 3

Диссипативные системы. Синергетика

Оглавление

Вступление	3
1 Нелинейные динамические системы	5
1.1 Введение: фазовое пространство и его свойства	5
1.1.1 Особые точки и особые траектории	9
1.2 Теорема Лиувилля-Остроградского	9
1.3 Математические модели и классификация ДС	12
1.3.1 Модель-поток (flows)	12
1.3.2 Модель-отображение (maps)	13
1.3.3 Классификация ДС	14
2 Хаос и фракталы	15
3 Диссипативные системы. Синергетика	17