Работа 2.1.3

Определение C_p/C_v по скорости звука в газе

Цель работы: 1) измерение частоты колебаний и длины волны при резонансе звуковых колебаний в газе, заполняющем трубу; 2) определение показателя адиабаты с помощью уравнения состояния идеального газа.
Оборудование: звуковой генератор ГЗ; электронный осциллограф ЭО; микрофон; телефон; раздвижная труба; теплоизолированная труба, обогреваемая водой из термостата; баллон со сжатым углекислым газом; газгольдер.

Теоретические сведения:
Скорость распространения звуковой волны в газах зависит от показателя адиабаты γ. На измерении скорости звука основан один из наиболее точных методов определения показателя адиабаты. Скорость звука в газах определяется формулой (1):

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

где R — газовая постоянная, T — температура газа, а μ — его молярная масса. Преобразуя эту формулу, найдем:

$$\gamma = \frac{\mu c^2}{RT}$$

Таким образом, для определения показателя адиабаты достаточно измерить температуру газа и скорость распространения звука (молярная масса газа предполагается известной). Звуковая волна, распространяющаяся вдоль трубы, испытывает многократные отражения от торцов. Звуковые колебания в трубе являются наложением всех отраженных волн и, вообще говоря, очень сложны. Картина упрощается, если длина трубы L равна целому числу полуволн(2), то есть когда

$$L = \frac{n\lambda}{2},$$

где λ — длина волны звука в трубе, а n — любое целое число. Если условие (2) выполнено, то волна, отраженная от торца трубы,вернувшаяся к ее началу и вновь отраженная, совпадает по фазе с падающей. Совпадающие по фазе волны усиливают друг друга. Амплитуда звуковых колебаний при этом резко возрастает — наступает резонанс.
При звуковых колебаниях слои газа, прилегающие к торцам трубы, не испытывают смещения (узел смещения). Узлы смещения повторяются по всей длине трубы через $\frac{\lambda}{2}$. Между узлами находятся максимумы смещения (пучности). Скорость звука с связана с его частотой f и длиной волны λ соотношением(3):

$$c = \lambda f$$

Подбор условий, при которых возникает резонанс, можно производить двояко:
1. При неизменной частоте f звукового генератора (а следовательно, и неизменной длине звуковой волны λ) можно изменять длину трубы L. Для этого применяется раздвижная труба. Длина раздвижной трубы постепенно увеличивается, и наблюдается ряд последовательных резонансов. Возникновение резонанса легко наблюдать на осциллографе по резкому увеличению амплитуды колебаний. Для последовательных резонансов имеем

$$L_n = n\frac{\lambda}{2}, L_{n+1} = (n+1)\frac{\lambda}{2}, ..., L_{n+k} = n\frac{\lambda}{2} + k\frac{\lambda}{2}$$

т. е. $\frac{\lambda}{2}$ равно угловому коэффициенту графика, изображающего зависимость длины трубы L от номера резонанса k. Скорость звука находится по формуле (3).
2. При постоянной длине трубы можно изменять частоту звуковых колебаний. В этом случае следует плавно изменять частоту f звукового генератора, а следовательно, и длину звуковой волны λ. Для последовательных резонансов получим(4)

$$L = \frac{\lambda_1}{2}n = \frac{\lambda_2}{2}(n+1) = ... = \frac{\lambda_{k+1}}{2}(n+k)$$

Из (3) и (4) имеем (5)

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2L}n, f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{c}{2L}(n+1) = f_1 + \frac{c}{2L}, ..., f_{k+1} = \frac{c}{\lambda_{k+1}} = \frac{c}{2L}(n+k) = f_1 + \frac{c}{2L}k$$

Скорость звука, деленная на $2L$, определяется, таким образом, по угловому коэффициенту графика зависимости частоты от номера резонанса.

Экспериментальная установка: Соответственно двум методам измерения скорости звука в работе имеются две установки (рис. 1 и 2). В обеих установках звуковые колебания в трубе возбуждаются телефоном Т и улавливаются микрофоном М. Мембрана телефона приводится в движение переменным током звуковой частоты; в качестве источника переменной ЭДС используется звуковой генератор ГЗ. Возникающий в микрофоне сигнал наблюдается на осциллографе ЭО. Микрофон и телефон присоединены к установке через тонкие резиновые трубки. Такая связь достаточна для возбуждения и обнаружения звуковых колебаний в трубе и в то же время мало возмущает эти колебания: при расчетах оба торца трубы можно считать неподвижными, а влиянием соединительных отверстий пренебречь. Первая установка (рис. 1) содержит раздвижную трубу с миллиметровой шкалой. Через патрубок (на рисунке не показан) труба может наполняться воздухом или углекислым газом из газгольдера. На этой установке производятся измерения γ для воздуха и для $CO2$. Вторая установка (рис. 2) содержит теплоизолированную трубу постоянной длины. Воздух в трубе нагревается водой из термостата. Температура газа принимается равной температуре омывающей трубу воды. На этой установке измеряется зависимость скорости звука от температуры.

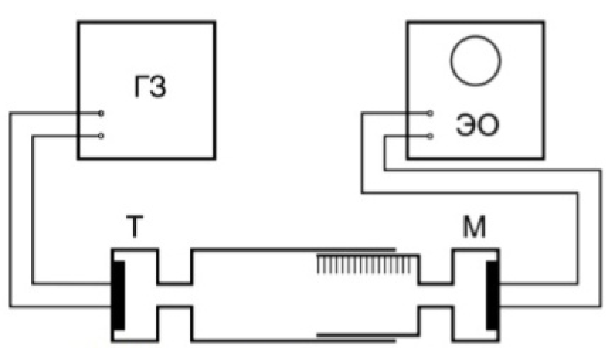

Рис. 1. Установка для измерения скорости звука при помощи раздвижной трубы

Ход работы:
1. Включили осциллограф ЭО и звуковой генератор ГЗ, дали им прогреться 5-7 минут.
2. Подобрали напряжение на выходе генератора так, чтобы при резонансе на осциллографе наблюдались колебания достаточной амплитуды, имеющие неискаженную синусоидальную форму.
3. Измерения на второй установке (рис.2):
а) Плавно увеличивая частоту генератора, получаем ряд последовательных резонансных значений частоты, отмечая момент резонанса по увеличению амплитуды колебаний на осциллографе, чтобы результат был более точный, делаем то же самое для уменьшения частоты.
б) Полученные результаты изображаем на графике, откладывая по оси абсцисс номер резонанса k, а по оси ординат - разность между частотой последующих резонансов и частотой первого резонанса: $f_{k+1} - f_1$. Тогда угловой коэффициент прямой определяет величину $\frac{c}{2L}$ (см. формулу 5). По этому коэффициенту определяем значение скорости звука.
Данные измерения проводим для трёх температур.
Из метода наименьших квадратов:

$$\delta f = a + bk$$
$$b = \frac{c}{2L} = \frac{\langle k\delta f\rangle - \langle k\rangle\langle\delta f\rangle}{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2}$$
$$\sigma_b \approx \frac{1}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{\langle\delta f^2\rangle - \langle\delta f\rangle^2}{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2} - b^2}$$
$$a = \langle\delta f\rangle - b\langle k\rangle$$
$$\sigma_a = \sigma_b\sqrt{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2}$$

T = 297,2K:

$$b = \frac{c}{2L} = \frac{2647,1 - 3,5 \times 566,22}{15,17 - 12,25} \approx 227,85 \approx 228\ c^{-1}$$
$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{472387,89 - 320601,31}{15,17 - 12,25} - 227,85^2} \approx 2,35 \approx 2\ c^{-1}$$
$$a = 566,22 - 228 \times 3,5 = -231,78 \approx -232$$
$$\sigma_a = 3\sqrt{15,17 - 12,25} = 5,126 \approx 5$$

Тогда $\delta f = -232 + 228k$ - прямая аппроксимации

T = 308K:

$$b = \frac{2702,17 - 3,5 \times 578,83}{2,92} \approx 231,6 \approx 232\ c^{-1}$$
$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{491843,83 - 335048}{2,92} - 231,6^2} \approx 2,21 \approx 2\ c^{-1}$$
$$a = 578,83 - 232 \times 3,5 = -233,17 \approx -233$$

Тогда $\delta f = -233 + 232k$ - прямая аппроксимации

T = 318K:

$$b = \frac{2745,67 - 3,5 \times 587,83}{2,92} \approx 235,71 \approx 236\ c^{-1}$$

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{507958,17 - 345544,11}{2,92} - 235,71^2} \approx 2,27 \approx 2\ c^{-1}$$

$$a = 587,83 - 236 \times 3,5 = -238,17 \approx -238$$

Тогда $\delta f = -238 + 236k$ - прямая аппроксимации

T = 328K:

$$b = \frac{2790,67 - 3,5 \times 597,83}{2,92} \approx 239,13 \approx 239\ c^{-1}$$

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{524566,17 - 357400,7089}{2,92} - 239,13^2} \approx 2,33 \approx 2\ c^{-1}$$

$$a = 597,83 - 239 \times 3,5 = -238,67 \approx -239$$

Тогда $\delta f = -239 + 239k$ - прямая аппроксимации

Вычислим значение скорости звука для четырёх различных значений температур:

$$b = \frac{c}{2L},$$

где $L = 0,74$ метра
$c = 2bL$, $(\frac{\sigma_c}{c})^2 = (\frac{\sigma_L}{L})^2 + (\frac{\sigma_b}{b})^2$, $\sigma_L = 0,005$ м, поэтому первое слагаемое очень мало и $(\frac{\sigma_c}{c})^2 \approx (\frac{\sigma_b}{b})^2$
Тогда:
$c_{297,2K} = 337,44$ м/с
$c_{308K} = 343,36$ м/с
$c_{318K} = 349,28$ м/с
$c_{328K} = 353,72$ м/с
$\langle c \rangle \approx 346$ м/с
$\varepsilon_c \leq 1\%$ для любого из четырёх случаев. Таким образом, можно считать, что опыт при измерении скорости звука в трубе с постоянной длиной прошёл с большой точностью:

$$\varepsilon_c = \frac{345 - 331}{331} \approx 4\%$$

4. Измерения на первой установке (рис.1):
Измеряем скорость звука в углекислом газе:
а)Рассчитали диапазон частот, при котором следует вести измерения, чтобы при удлинении трубы можно было наблюдать 2-5 резонансов:

$$500 \leq f \leq 3261$$

б)Плавно изменяя длину трубы, последовательно прошли через все доступные для наблюдения точки резонанса в нашем диапазоне частот. Для более точного результата делаем то же самое при уменьшении длины.
в) Полученные результаты изображаем на графике, откладывая по оси абсцисс номер k последовательного резонанса, а по оси ординат - соответствующее удлинение трубы $L_{n+k} - L_n$. Тогда угловой коэффициент прямой определяет длину полуволны $\dfrac{\lambda}{2}$. Из метода наименьших квадратов:

$$\delta f = a + bk$$
$$b = \frac{c}{2L} = \frac{\langle k\delta f\rangle - \langle k\rangle\langle \delta f\rangle}{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2}$$
$$\sigma_b \approx \frac{1}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{\langle \delta f^2\rangle - \langle \delta f\rangle^2}{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2} - b^2}$$
$$a = \langle \delta f\rangle - b\langle k\rangle$$
$$\sigma_a = \sigma_b\sqrt{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2}$$

f = 1500 Гц:

$$b = \frac{\lambda}{2} = \frac{23,6 - 2\times 8,83}{0,66} \approx 9\,cm$$
$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{130,84 - 78,028}{0,66} - 9^2} \approx 0,4\,cm$$
$$a = 8,83 - 9\times 2 = -9,17 \approx -9$$

Тогда $\delta l = -9 + 9k$ - прямая аппроксимации
f = 2027 Гц:

$$b = \frac{\lambda}{2} = \frac{33,18 - 2,5\times 9,95}{1,25} \approx 6,6\,cm$$
$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{154,12 - 99}{1,25} - 6,6^2} = 0,26 \approx 0,3\,cm$$
$$a = 9,95 - 6,6\times 2,5 = -7,5 \approx -7,5$$

Тогда $\delta l = -7,5 + 6,6k$ - прямая аппроксимации
f = 2700 Гц:

$$b = \frac{\lambda}{2} = \frac{39,98 - 3\times 10}{2} \approx 5\,cm$$

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{149,8-100}{2} - 5^2} = 0,1 \approx 0,1\,cm$$

$$a = 10 - 5\times 3 = -5 \approx -5$$

Тогда $\delta l = -5 + 5k$ - прямая аппроксимации

f = 3553 Гц:

$$b = \frac{\lambda}{2} = \frac{44,52 - 3,5\times 9,55}{2,92} \approx 3,8\,cm$$

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{133,39-91,2}{2,92} - 3,8^2} = 0,1 \approx 0,1\,cm$$

$$a = 9,55 - 3,8\times 3,5 = -3,75 \approx -3,8$$

Тогда $\delta l = -3,8 + 3,8k$ - прямая аппроксимации

Вычислим теперь скорость звука для каждого из графиков:

$$c = \frac{\lambda}{2}\times 2f = 2bf$$

$c = 2bf$, $(\frac{\sigma_c}{c})^2 = (\frac{\sigma_f}{f})^2 + (\frac{\sigma_b}{b})^2$, $\sigma_f = 0,05$ Гц, поэтому первое слагаемое очень мало и $(\frac{\sigma_c}{c})^2 \approx (\frac{\sigma_b}{b})^2$

Тогда:

$c_{1500Hz} = 270$ м/с

$c_{2027Hz} = 267,56$ м/с

$c_{2700Hz} = 270$ м/с

$c_{3553Hz} = 270$ м/с

$\langle c\rangle \approx 269$ м/с

$\varepsilon_c \leq 5\%$ для любого из четырёх случаев. Видим, что результаты находятся в согласии друг с другом вне зависимости от частоты, однако в сравнении с табличным значением (258 м/с) они несколько завышены:

$$\varepsilon_c = \frac{270-258}{258} \approx 5\%$$

Расхождение эксперимента и практики составило всего 5 %, что говорит о том, что опыт прошел с достаточно хорошей точностью.

г) Таким же образом измерим скорость звука в воздухе:

Из метода наименьших квадратов:

$$\delta f = a + bk$$

$$b = \frac{c}{2L} = \frac{\langle k\delta f\rangle - \langle k\rangle\langle \delta f\rangle}{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2}$$

$$\sigma_b \approx \frac{1}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{\langle \delta f^2\rangle - \langle \delta f\rangle^2}{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2} - b^2}$$

$$a = \langle \delta f \rangle - b \langle k \rangle$$
$$\sigma_a = \sigma_b \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}$$

f = 1930 Гц:

$$b = \frac{\lambda}{2} = \frac{23,8 - 2 \times 8,93}{0,66} \approx 9\, cm$$
$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{132,61 - 79,8}{0,66} - 9^2} \approx 0,4\, cm$$
$$a = 8,93 - 9 \times 2 = -9,07 \approx -9$$

Тогда $\delta l = -9 + 9k$ - прямая аппроксимации
f = 2170 Гц:

$$b = \frac{\lambda}{2} = \frac{21,07 - 2 \times 7,9}{0,66} = 7,98 \approx 8\, cm$$
$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{104,01 - 62,41}{0,66} - 8^2} = 0,4 \approx 0,4\, cm$$
$$a = 7,9 - 8 \times 2 = -8,1 \approx -8,1$$

Тогда $\delta l = -8,1 + 8k$ - прямая аппроксимации
f = 2591 Гц:

$$b = \frac{\lambda}{2} = \frac{32,95 - 2,5 \times 9,88}{1,25} \approx 6,6\, cm$$
$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{152,13 - 97,52}{1,25} - 6,6^2} = 0,13 \approx 0,1\, cm$$
$$a = 9,88 - 6,6 \times 2,5 = -6,62 \approx -6,6$$

Тогда $\delta l = -6,6 + 6,6k$ - прямая аппроксимации
f = 3015 Гц:

$$b = \frac{\lambda}{2} = \frac{45,54 - 3 \times 11,38}{2} \approx 5,7\, cm$$
$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{194,5 - 129,5}{2} - 5,7^2} = 0,1 \approx 0,1\, cm$$
$$a = 11,38 - 3 \times 5,7 = -5,72 \approx -5,7$$

Тогда $\delta l = -5,7 + 5,7k$ - прямая аппроксимации

Вычислим теперь скорость звука для каждого из графиков:

$$c = \frac{\lambda}{2} \times 2f = 2bf$$

$c = 2bf$, $(\frac{\sigma_c}{c})^2 = (\frac{\sigma_f}{f})^2 + (\frac{\sigma_b}{b})^2$, $\sigma_f = 0,05$ Гц, поэтому первое слагаемое очень мало и $(\frac{\sigma_c}{c})^2 \approx (\frac{\sigma_b}{b})^2$

Тогда:

$c_{1930Hz} = 347,4$ м/с

$c_{2170Hz} = 347,2$ м/с

$c_{2591Hz} = 342$ м/с

$c_{3015Hz} = 343,7$ м/с

$\langle c \rangle \approx 345$ м/с

$\varepsilon_c \leq 5\%$ для любого из четырёх случаев. Видим, что результаты находятся в согласии друг с другом вне зависимости от частоты, однако они несколько завышены в сравнении с табличными (331 м/с):

$$\varepsilon_c = \frac{344 - 331}{331} \approx 4\%$$

Расхождение эксперимента и практики составило всего 4 %, что говорит о том, что опыт прошел с достаточно хорошей точностью.

5. Вычислим значение $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ по формуле (1):

$$\gamma = \frac{\mu c^2}{RT}$$

Для каждого из трех случаев (берём среднюю скорость звука для каждого опыта):

1) Для воздуха скорость звука в первом опыте и во втором равна соответственно:

$\langle c \rangle \approx 345$ м/с

$\langle c \rangle \approx 346$ м/с

Следовательно, $\langle c \rangle = 345,5$ м/с

$$\gamma = \frac{29 * 345,5 * 345,5}{8,31 * 312,75} 0,001 \approx 1,33$$

В сравнении с табличным значением 1,4 для данного диапазона температур:

$$\varepsilon_\gamma = \frac{1,4 - 1,33}{1,4} \approx 5\%$$

Погрешность опыта и теории составила всего 5 %, что говорит о высокой точности опыта.

2) Для углекислого газа:

$$\gamma = \frac{44 * 270 * 270}{8,31 * 273} 0,001 \approx 1,41$$

В сравнении с табличным значением 1,3 для данного диапазона температур:

$$\varepsilon_\gamma = \frac{1,41 - 1,3}{1,3} \approx 8\%$$

Погрешность опыта и теории составила 8 %
Оценим погрешность нахождения показателя адиабаты:
Так как молярную массу считаем табличным значением, то

$$(\frac{\sigma_\gamma}{\gamma})^2 = 4(\frac{\sigma_c}{c})^2$$

Так как погрешность измерения скорости звука не превышала 5 % для любого опыта, то и погрешность измерения показателя адиабаты:
$\varepsilon_\gamma \leq 10\%$ не превышает 10 процентов.
Вывод:
Определили скорость звука в воздухе и в углекислом газе с помощью резонанса звуковых колебаний, а также нашли показатель адиабаты с помощью полученной в опыте скорости звука и уравнения состояния идеального газа. Полученные результаты с хорошей точностью сошлись с табличными значениями:
$\langle c \rangle = 345,5$ м/с - для воздуха (погрешность 4 %)
$\langle c \rangle = 269$ м/с - для углекислого газа (погрешность 5 %)
$\gamma = 1,33$ - для воздуха (погрешность 5 %)
$\gamma = 1,41$ - для углекислого газа (погрешность 8 %)