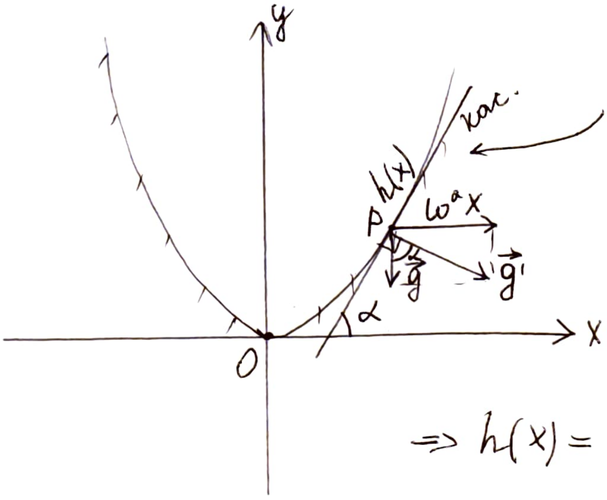
Параболическое зеркало из ртути



свободная поверхность $\Rightarrow \perp$ равнодейств. всех сил

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 x}{g}$$

С другой стороны, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{dx}h(x) \Rightarrow$

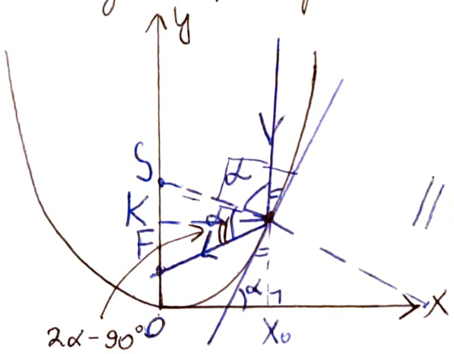
$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{\omega^2 x}{g}$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C, \text{ где } C = h(0)$$

Переместив начало координат в т. О, получим $h(0) = C = 0 \Rightarrow$

$h(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g} \Rightarrow$ сечение пов-ти ртути плоскостью xOy – это парабола $\boxed{h(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g}}$ $\Rightarrow$ пов-ть ртути есть параболоид вращения

Найдём фокус:



$$FO = h(x_0) - KF = \frac{\omega^2 x_0^2}{2g} - \frac{x_0}{-\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{\omega^2 x_0^2}{2g} + \frac{x_0}{\operatorname{tg}2\alpha}$$

$$FO = \frac{\omega^2 x_0^2}{2g} + \frac{x_0}{\operatorname{tg}2\alpha} \ominus$$

$$// \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \left.\frac{\frac{2\cdot\omega^2 x}{g}}{1-\frac{\omega^4 x^2}{g^2}}\right|_{x=x_0} = \frac{2\omega^2 x_0}{g\cdot\frac{(g^2-\omega^4 x_0^2)}{g^2}} = \frac{2\omega^2 x_0 g}{g^2-\omega^4 x_0^2}$$

$$\ominus \frac{\omega^2 x_0^2}{2g} + \frac{g^2-\omega^4 x_0^2}{2\omega^2 g} = \frac{\omega^2 x_0^2}{2g} + \frac{g}{2\omega^2} - \frac{\omega^2 x_0^2}{2g} = \frac{g}{2\omega^2}$$

$FO \neq f(x_0) \Rightarrow$ все лучи, падающие параллельно, пересекутся в F

$\Rightarrow FO = g/2\omega^2$ – фокус

Про аберрации:

– сферической нет (параболоид)

– хроматической нет (зеркало)

$$\Delta y' = f(y_1, m, M) \qquad \Delta y' = \Delta y'_{III} + \Delta y'_{V} + \Delta y'_{VII} + \ldots \quad \text{мерид.}$$

$$\Delta x' = F(y_1, m, M) \qquad \Delta x' = \Delta x'_{III} + \Delta x'_{V} + \Delta x'_{VII} + \ldots \quad \text{сагитт.}$$

3 порядок; высшие порядки (трудны в подсчётах)

$$\Delta y'_{III} = Am(m^2+M^2) + By_1(3m^2+M^2) + Cy_1^2 m + Ey_1^3$$

$$\Delta x'_{III} = AM(m^2+M^2) + 2By_1 mM + Cy_1^2 M$$

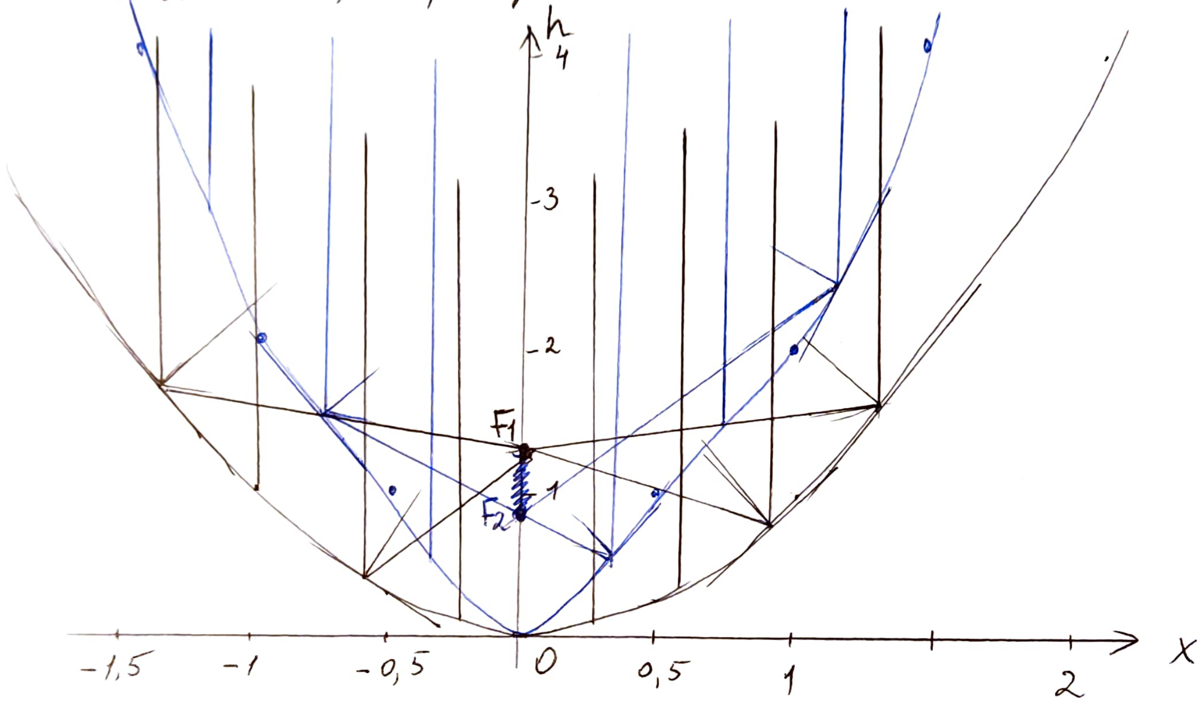
$A, \ldots, E$ не зав. от вх. луча

∃ $\omega = (1+\alpha)\omega_0$, где α - коэффициент, отвечающий за неравномерность вращения

Тогда аналогично рассуждениям выше, $h(x) = \dfrac{\omega_0^2(1+\alpha)^2 x^2}{2g}$ - пов-ть в любой мом. времени - параболоид вращения, $\alpha \neq const$

$$\boxed{FO = \frac{g}{2\omega_0^2(1+\alpha)^2}}$$ - положение фокуса.

Заметим, что при $\omega\uparrow$ $h(x)\uparrow$, $FO\downarrow$, т.е параболоид вытягивается, а фокус смещается ближе к O.



1) — : $\dfrac{\omega_0^2(1+0)^2}{2g} <$ — $\dfrac{\omega_0^2(1+\alpha)^2}{2g}$ $F_2O < F_1O$

Найдём min и max фокус:

$FO_{max}\Big|_{\omega=\omega_0\,(\alpha=0)} = \dfrac{g}{2\omega_0^2}$; $FO_{min}\Big|_{\omega=\omega_0(1+\alpha_{max})} = \dfrac{g}{2\omega_0^2(1+\alpha_{max})^2}$

т.е $FO_{max} - FO_{min} = F_1F_2$ - наше пятно

$$F_1F_2 = \frac{g}{2\omega_0^2} - \frac{g}{2\omega_0^2(1+\alpha_{max})^2} = \frac{g}{2\omega_0^2}\left(1 - \frac{1}{(1+\alpha_{max})^2}\right) = \frac{g}{2\omega_0^2}\,\frac{2\alpha_{max}+\alpha_{max}^2}{(1+\alpha_{max})^2} =$$

$$= \boxed{\frac{g}{2\omega_0^2}\,\frac{(2+\alpha_{max})\alpha_{max}}{(1+\alpha_{max})^2}}$$

Оценим это расстояние: ∃ один оборот кастрюли мы сделаем за ~2 секунды ⇒ $\omega = \pi$ рад/с

$\alpha \in [0; 1]$ $\Rightarrow F_1F_2 = \dfrac{9{,}8\ м/с^2}{2\cdot 3{,}14^2\ рад^2/с^2}\cdot\dfrac{3\cdot 1}{4} \simeq 37$ см

$\Rightarrow$ при таком неравномерном движении ничего не получится.

$\alpha_{min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$; $l_{min} \simeq 1{,}22\frac{\lambda}{D} \cdot 7_1$ $\simeq 25$ см — норм. зрение

$D \simeq 3$ мм

$\lambda = 500$ нм

$\Rightarrow l_{min} \simeq 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ мм $\sim 10^{-2}$ мм

т.е нам нужно вращать так, чтобы мы этого не заметили:

$F_1F_2 \sim 10^{-2}$ мм $\sim 10^{-5}$ м: $\frac{g}{2\omega_0^2} \cdot \frac{(2+\alpha_{max})\alpha_{max}}{(1+\alpha_{max})^2} \sim 10^{-5}$ м

$\omega_0 \sim \pi \Rightarrow \frac{g}{2\omega_0^2} \simeq 0{,}5$

$\Rightarrow \frac{(2+\alpha_{max})\alpha_{max}}{1+\alpha_{max}} \sim \frac{10^{-5}}{1}$. $\quad 10^{-5} + 10^{-5}\alpha_{max} = 2\alpha_{max} + \alpha_{max}^2$;

$\alpha_{max}^2 + \alpha_{max}(2-10^{-5}) - 10^{-5} = 0$

$\alpha_{max} \simeq -2$

$\underline{\underline{\alpha_{max} \simeq 5 \cdot 10^{-6}}}$ $\leftarrow$ т.е вращаем почти постоянно.

Т.е итоговая формула: $F_1F_2 = \frac{g}{2\omega_0^2}\left(\frac{(2+\alpha_{max})\alpha_{max}}{(1+\alpha_{max})^2}\right)$, где α_{max} — коэфф. неравномерности

По данным из интернета, мозг обрабатывает изображение за $13 \cdot 10^{-3}$ секунд. Рассчитаем тогда $\frac{d\alpha}{dt}$, такое, чтобы чел. глаз не заметил аберраций:

$FO_1 = \frac{g}{2\omega_0^2(1+\alpha_1)^2}$; $FO_2 = \frac{g}{2\omega_0^2(1+\alpha_2)^2} \Rightarrow F_1F_2 = \frac{g}{2\omega_0^2}\left(\frac{1}{(1+\alpha_1)^2} - \frac{1}{(1+\alpha_2)^2}\right) =$

НУО $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$ $\quad = \frac{g}{2\omega_0^2}\left(\frac{2\alpha_2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1 - \alpha_1^2}{(1+\alpha_1)^2(1+\alpha_2)^2}\right) = \frac{g}{2\omega_0^2} \frac{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2+\alpha_1) + 2(\alpha_2-\alpha_1)}{(1+\alpha_1)^2(1+\alpha_2)^2} =$

$= \boxed{\frac{g}{2\omega_0^2} \underbrace{\frac{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2+\alpha_1+2)}{(1+\alpha_1)^2(1+\alpha_2)^2}}_{\gamma}} \lesssim l_{min}$; $\frac{9{,}8 \text{ м/с}}{2 \cdot 3{,}14^2 \text{ рад/с}} \gamma \lesssim 10^{-5}$ м $\Rightarrow$

$\gamma \sim 10^{-4}$ м $\quad \frac{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2+\alpha_1+2)}{\underbrace{(1+\alpha_1)^2(1+\alpha_2)^2}_{\sim 1}} \sim 10^{-4} \Rightarrow (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1 + 2) \sim 10^{-4} \Rightarrow$

$\alpha_2 - \alpha_1 \sim 10^{-4}$

$\Rightarrow \Delta\alpha \sim 10^{-4}$ — это за $\Delta t \sim 10^{-2}$ с $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \sim 10^{-2}}$

Поэтому скорее всего при нашем неравномерном вращении видимые аберрации будут.

(*) считаем, что смотрим близко к кастрюле $\Rightarrow$ изображение поступает в глаз почти мгновенно