Лекции
по курсу *”Математическая Статистика”*

Contents

Источники

- Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. “Математическая статистика”, изд. “Высшая школа”, 1984
- Кибзун А. И., Наумов А. В., Горяинова Е. Р. “Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами”, изд “ФИЗМАТЛИТ”, 2013
- Панков А. Р., Платонов Е. Н. “Практикум по математической статистике”, изд. “МАИ”, 2006

1 Многомерное нормальное распределение

1.1 Замечание

Вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ называется ***случайным***, если $X_1, \ldots, X_n$ — *случайные векторы (далее **с.в**)*, определенные на одном вероятностном пространстве.

Через $M[X] = m_x$ обозначим вектор математического ожидания:

$$M[X] = m_x = \begin{pmatrix} M[X_1] \\ \vdots \\ M[X_n] \end{pmatrix}$$

Через K_x обозначим *ковариационную матрицу* с.в X:

$$K_x = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \ldots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \ldots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

1.2 Лемма 1

Пусть $K_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — ковариационная матрица с.в X. Тогда:

1. $K_x \geqslant 0$, т.е. $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, x^T K_x x \geqslant 0$;
2. $K_x^T = K_x$

1.3 Определение 1

Случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ называется ***невырожденным нормальным вектором***:

$$X \sim N(m_x, K_x)$$

если совместная плотность вероятности имеет вид:

$$f_x(x) = ((2\pi)^n \det K_x)^{\frac{-1}{2}} \exp\{\frac{-1}{2}(x - m_k)^T K_x^{-1}(x - m_x)\}$$

где $m_x \in \mathbb{R}^n, K_x \in \mathbb{R}^{n \times n}, K_x > 0, K_x^T = K_x$

1.4 Лемма 2

Пусть X — невырожденный нормальный вектор с параметрами m_x и K_x.

Тогда $M[X] = m_x$, а K_x — корвариационная матрица X.

Рассмотрим основные свойства многомерного нормального распределения.

1.5 Лемма 3

Пусть $X \sim N(m_x, K_x), A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$.
Тогда:

$$\begin{aligned} Y = AX + b \sim N(m_y, K_y), \\ m_y = Am_x + b, \\ K_y = AK_xA^T. \end{aligned}$$

1.6 Лемма 4

Пусть $X \sim N(m_x, K_x)$.
Тогда компоненты вектора X *независимы* тогда и только тогда, когда они *некоррелированы*.

note

Доказательство данных утверждений при помощи аппарата функций распределения и плотности довольно сложно. Поэтому рассмотрим аппарат характеристических функций.