Лекции

по курсу *"Математическая Статистика"*

Ибрагимов Д. Н.

Contents

Last build: March 9, 2023

Источники

- Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. “Математическая статистика”, изд. “Высшая школа”, 1984
- Кибзун А. И., Наумов А. В., Горяинова Е. Р. “Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами”, изд “ФИЗМАТЛИТ”, 2013
- Панков А. Р., Платонов Е. Н. “Практикум по математической статистике”, изд. “МАИ”, 2006

1 Многомерное нормальное распределение

Замечание

Вектор $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ называется ***случайным***, если $X_1, \dots, X_n$ — *случайные величины (далее **с.в**)*, определенные на одном вероятностном пространстве.
Через $M[X] = m_X$ обозначим ***вектор математического ожидания***:

$$M[X] = m_X = \begin{pmatrix} M[X_1] \\ \vdots \\ M[X_n] \end{pmatrix}$$

Через K_x обозначим *ковариационную матрицу* с.в X:

$$K_X = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X_1, X_1) & \dots & \operatorname{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(X_n, X_1) & \dots & \operatorname{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

1.1 Лемма 1

Пусть $K_X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — ковариационная матрица с.в X. Тогда:

1. $K_X \geqslant 0$, т.е. $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, x^T K_X x \geqslant 0$;
2. $K_X^T = K_X$

1.2 Определение 1

Случайный вектор $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ называется ***невырожденным нормальным вектором***:

$$X \sim N(m_X, K_X)$$

если совместная плотность вероятности имеет вид:

$$f_X(x) = ((2\pi)^n \det K_X)^{\frac{-1}{2}} \exp\{\frac{-1}{2}(x - m_X)^T K_X^{-1}(x - m_X)\}$$

где $m_X \in \mathbb{R}^n, K_X \in \mathbb{R}^{n \times n}, K_X > 0, K_X^T = K_X$

1.3 Лемма 2

Пусть X — *невырожденный нормальный вектор* с параметрами m_X и K_X.
Тогда $M[X] = m_X$, а K_X — ковариационная матрица X.
Рассмотрим основные свойства многомерного нормального распределения.

1.4 Лемма 3

Пусть $X \sim N(m_X, K_X), A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$.
Тогда:

$$\begin{aligned} Y = AX + b \sim N(m_Y, K_Y), \\ m_Y = Am_X + b, \\ K_Y = AK_X A^T. \end{aligned}$$

1.5 Лемма 4

Пусть $X \sim N(m_X, K_X)$.
Тогда компоненты вектора X ***независимы*** тогда и только тогда, когда они *некоррелированы*.

note

Доказательство данных утверждений при помощи аппарата функций распределения и плотности довольно сложно. Поэтому рассмотрим аппарат характеристических функций.

1.6 Определение 2

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ — случайный вектор.
Тогда ***характеристической функцией*** называется:

$$\psi_X(\lambda) = M[e^{i\lambda^T X}] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda^T X} dF_X(x)$$

Замечание

Характеристическая функция определена для любого случайного вектора или с.в.
Если с.в **дискретная**, то:

$$\psi_X(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\lambda X_k} p_k$$

Если с.в **абсолютно непрерывная**, то

$$\psi_X(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda X} f_X(x) dx$$

В этом случае $\psi_X(\lambda)$ является ***преобразованием Фурье*** f_X.

Поскольку преобразование Фурье взаимно однозначно, а f_X однозначно определяет распределение, то характеристическая функция $\psi_X(x)$ также однозначно определяет распределение с.в X.

Причем:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda^T X} \psi_X(\lambda) d\lambda$$

1.7 Лемма 5

Пусть X — случайный вектор, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$.
Тогда:

1. для $Y = AX + b$
$$\psi_Y(\lambda) = e^{i\lambda^T b}\psi_X(A^T\lambda)$$

2. компоненты вектора X ***независимы*** тогда и только тогда, когда
$$\psi_Y(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}\psi_{X_k}(\lambda_k)$$

Доказательство

1. $\psi_Y(\lambda) = M[e^{i\lambda^T Y}] = M[e^{i\lambda^T AX}e^{i\lambda^T b}] = e^{i\lambda^T b}M[e^{i(A^T\lambda)^T X}] = e^{i\lambda^T b}\psi_X(A^T\lambda)$

2. $\psi_X(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n \overset{\text{н/з}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_1 x_1} \cdot \dots \cdot e^{i\lambda_n x_n} \cdot f_{X_1}(x) \cdot$
$\dots \cdot f_{X_n} dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_1 x_1} f_{x_1}(x_1) dx_1 \cdot \dots \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_n x_n} f_{x_n}(x_n) dx_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\psi_{X_k}(\lambda_k)$

■

Замечание

При помощи характеристической функции можно дать другое определение нормального распределения. В том числе для вырожденного K_X.

1.8 Определение 3

Случайный вектор X называется ***нормальным***: $X \sim N(m_X, K_X)$, если:
$$\psi_X(\lambda) = \exp\{i\lambda^T m_X - \frac{1}{2}\lambda^T K_X \lambda\}$$

1.8.1 Доказательство леммы 3

В силу Леммы 5, п.1

$$\psi_Y(\lambda) = e^{i\lambda^T b}\psi_X(A^T\lambda) = e^{i\lambda^T b}\exp\{i\lambda^T A m_x - \frac{1}{2}\lambda^T A K_X A^T \lambda\} =$$
$$= \exp\{i\lambda^T \underbrace{(Am_x + b)}_{m_Y} - \frac{1}{2}\lambda^T \underbrace{(AK_x A^T)}_{K_Y}\lambda\}$$

■

1.8.2 Доказательство леммы 4

Пусть $X_i, \dots, X_n$ *попарно некоррелированы.* Тогда $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$, $i \neq 0$, т.е. :

$$K_x = diag(\sigma^2_{X_1}, \dots, \sigma^2_{X_n}) =$$
$$= \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma^2_{X_n} \end{pmatrix}$$

$\psi_X(\lambda) = \exp\{i\lambda_1 m_{X_1} + \dots + i\lambda_n m_{X_n} - \frac{1}{2}\lambda^T K_X \lambda\} = \exp\{i\lambda_1 m_{X_1} + \dots + i\lambda_n m_{X_n} - \frac{1}{2}(\lambda_1^2 \sigma^2_{X_1} + \dots + \lambda_n^2 \sigma^2_{X_n})\} = \prod\limits_{k=1}^{n} \exp\{i\lambda_k m_{X_k} - \frac{1}{2}\lambda_k^2 \sigma^2_{K_k}\} = \prod\limits_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(\lambda_k)$.

Откуда с учетом Леммы 5, п.1 $X_1, \dots, X_n$ — **н/з**.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — н/з. Тогда $X_1, \dots, X_n$ *попарно некоррелированы.* ■

Замечание

Поскольку K_X — невырожденная, симметрическая и положительноопределенная, то существует $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — *ортогональная* (т. е. $S^T = S^{-1}$) такая, что:

$$S^T K_X S = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

где $\lambda_i > 0, i = \overline{1, n}$

Определим матрицу $\Lambda^{-\frac{1}{2}} = diag(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}})$.

Рассмотрим вектор

$$Y = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T (X - m_X)$$

Тогда $A = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T, b = -\Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T m_X$.

В силу Леммы 3:

$$m_Y = A m_X + b = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T m_X - \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T m_X = 0,$$
$$K_Y = A K_X A^T = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T K_X S \Lambda^{-\frac{1}{2}} = I,$$

т. е. $Y \sim N(0, I)$.

При помощи невырожденного линейного преобразования с.в. X может быть преобразован в стандартный нормальный вектор.

Верно и обратное:

$$X = m_X + S \Lambda^{\frac{1}{2}} Y,$$

откуда следует Лемма 2

2 Теорема о нормальной корреляции

2.1 Определение 1

Условным математическим ожиданием абсолютно непрерывного случайного вектора X относительно абсолютно непрерывного случайного вектора Y называется:

$$M[X \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid Y) dx,$$

где $f_{X|Y}(x \mid Y) = \frac{f_z(x,Y)}{f_y(Y)}, z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

2.2 Основные свойства условного М. О.

2.2.1 Свойство 1

$\boxed{M[C \mid Y] = C}$

<u>**Доказательство**</u>

$M[C \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C f_{X|Y}(x \mid Y) dx = \frac{C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_z(x,Y) dx}{f_Y(Y)} = C \frac{f_Y(Y)}{f_Y(Y)} = C.$ ■

2.2.2 Свойство 2

$\boxed{M[X\varphi(Y)|Y] = \varphi(Y) M[X \mid Y]}$

<u>**Доказательство**</u>

$M[\varphi(Y) X \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Y) X f_{X|Y}(x \mid Y) dx = \varphi(Y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid Y) dx =$
$= \varphi(Y) M[X \mid Y].$ ■

2.2.3 Свойство 3

$\boxed{M[\alpha X_1 + \beta X_2 \mid Y] = \alpha M[X_1 \mid Y] + \beta M[X_2 \mid Y]}$

2.2.4 Свойство 4

Пусть X, Y — *независимые.* Тогда $\boxed{M[X \mid Y] = M[X]}$

<u>**Доказательство**</u>

$M[X \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid Y) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_z(x,Y)}{f_Y(Y)} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_X(x) f_Y(Y)}{f_Y(Y)} dx = M[X].$ ■

2.2.5 Свойство 5

$\boxed{M[M[X \mid Y]] = M[X]}$ ***(формула повторного М. О.)***

Доказательство

$M[M[X \mid Y]] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} M[X \mid Y] f_Y(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_Y(y) f_z(x,y)}{f_Y(y)} dydx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_z(x,y)dydx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = M[X].$ ■

2.3 Лемма 1

Пусть X, Y — случайные векторы с конечными вторыми моментами. Тогда:
$M[(X - \hat{X})\varphi(Y)^T] = 0$
где $\hat{X} = M[X \mid Y]$

Доказательство

$M[(X - \hat{X})\varphi(Y)^T] = M[X\varphi(Y)^T] - M[M[X \mid Y]\varphi(Y)^T] =$
$=$ по Свойству 2 $= M[X\varphi(Y)^T] - M[M[X\varphi(Y)^T \mid Y]] =$ по Свойству 5 $= M[X\varphi(Y)^T] - M[X\varphi(Y)^T] = 0.$ ■

Замечание

Если рассмотреть евклидово пространство $\mathbb{L}_2(\Omega)$ со скалярным произведением:

$$(X, Y) = M[X \cdot Y]$$

то *условное* М. О. — ***оператор ортогонального проектирования*** X на подпространство, порождаемое Y.

2.4 Определение 2

Оценкой X ***по наблюдениям*** Y называется любая измеримая функция $\varphi(Y)$.

2.5 Определение 3

Оценка $\hat{X}$ ***называется с.к.-оптимальной оценкой*** X, если для любой другой оценки $\tilde{X}$ верно

$$M[|X - \hat{X}|^2] \leqslant M[|X - \tilde{X}|^2]$$

2.6 Теорема 1

$M[X \mid Y]$ — ***с.к.-оптимальная оценка*** X ***по наблюдениям*** Y.

Доказательство

$M[|X - \tilde{X}|^2] = M[|X - \hat{X} + \hat{X} - \tilde{X}|^2] = M[|X - \hat{X}|^2] + 2M[(X - \hat{X})^T(\hat{X} - \tilde{X})] + M[|\hat{X} - \tilde{X}|^2] \stackrel{*}{=}$
Поскольку по определению $\tilde{X} - \hat{X} = \varphi(Y)$, то в силу Леммы 2.1 $M[(X - \hat{X})^T(\tilde{X} - \hat{X})] = 0.$
$\stackrel{*}{=} M[|X - \hat{X}|^2] + M[|\hat{X} - \tilde{X}|^2] \geqslant M[|X - \hat{X}|^2].$ ■

2.7 Теорема 2 (О нормальной корреляции)

Пусть

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K_X & K_{XY} \\ K_{XY}^T & K_Y \end{pmatrix}\right)$$

Тогда

1. $Law(X \mid Y) = N(\mu(Y), \Delta)$,

   где

   $$\mu(Y) = M[X \mid Y] = m_X + K_{XY}K_Y^{-1}(Y - m_Y)$$

   $$\Delta = K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{YX}$$

2. $M[|X - \mu(Y)|^2] = tr(K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{YX})$

Доказательство

Рассмотрим линейное преобразование Y:

$$\mu(Y) = m_X + K_{XY}K_Y^{-1}(Y - m_Y)$$

В силу Леммы 1.3

$X - \mu(Y) = (I - K_{XY}K_Y^{-1})\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - m_X + K_{XY}K_Y^{-1}m_Y \sim N(\mu, K)$

$\mu = (I - K_{XY}K_Y^{-1})\begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix} - m_X + K_{XY}K_Y^{-1}m_Y = 0$

$K = (I - K_{XY}K_Y^{-1})\begin{pmatrix} K_X & K_{XY} \\ K_{XY}^T & K_Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ -(K_{XY}K_Y^{-1})^T \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{XY}^T & K_{XY} - K_{XY}K_Y^{-1}K_Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ K_Y^{-1}K_{XY}^T \end{pmatrix} =$

$= K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{XY}^{-1} = \Delta$

$\mathrm{cov}(X - \mu(Y), Y) = \mathrm{cov}(X, Y) - \mathrm{cov}(\mu(Y), Y) = \mathrm{cov}(X, Y) - \mathrm{cov}(K_{XY}K_Y^{-1}Y + m_X - K_{XY}K_Y^{-1}m_Y, Y) = \mathrm{cov}(X, Y) - K_{XY}K_Y^{-1}\mathrm{cov}(Y, Y) = K_{XY} - K_{XY}K_Y^{-2}K_Y = 0$

т.е. $X - \mu(Y)$ и Y **некорреливаны**.

Тогда в силу Леммы 1.4, п.2 $X - \mu(Y)$ и Y **независимы**. Построим характеристическую функцию условного распределения X относительно Y:

$\psi_{X|Y}(\lambda \mid Y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda^T X} f_{X|Y}(x \mid Y)dx = M[e^{i\lambda^T X} \mid Y] = M[e^{i\lambda^T (X - \mu(Y))}e^{i\lambda^T \mu(Y)} \mid Y] \overset{*}{=}$

в силу Свойства 2 УМО и *независимости* $X - \mu(Y)$ и Y

$\overset{*}{=} M[e^{i\lambda^T (X - \mu(Y))} \mid Y] \cdot M[e^{i\lambda^T \mu(Y)} \mid Y] = M[e^{i\lambda^T (X - \mu(Y))}]e^{i\lambda^T \mu(Y)} = \psi_{X - \mu(Y)}(\lambda)e^{i\lambda^T \mu(Y)} = \exp\{-\frac{1}{2}\lambda^T\Delta\lambda\} \cdot \exp\{i\lambda^T\mu(Y) - \frac{1}{2}\lambda^T\Delta\lambda\}$

т.е. Условное распределение ***нормальное***:

$$X(Y \sim N(\mu(Y), \Delta)$$

Вычислим с.к. ошибку:

$M[|X - \mu(Y)|^2] = M[\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 + \dots + \Delta X_n^2] = \sum\limits_{k=1}^{n} M[\Delta X_k^2] = \sum\limits_{k=1}^{n} D[\Delta X_k] = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{kk} = tr\Delta.$

■

Замечание

1. Из Теоремы о нормальной корреляции следует, что в *гауссовском* случае с.к.-оптимальная оценка является ***линейной***.
2. Если X и Y — *независимы*, то с.к.-оптимальная оценка — m_X.
3. С.к.-оптимальная оценка ***несмещенная***, т.к. $M[X - \mu(Y)] = 0$.

3 Виды сходимости последовательностей случайных величин

3.1 Определение 1

Говорят, что $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует ***последовательность случайных величин***, если $\forall N \in \mathbb{N}$ X_n определены на одном вероятностном пространстве.

3.2 Определение 2

Говорят, что последовательность с.в. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***сходится по вероятности*** к с.в. X, если $\forall\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leqslant \varepsilon) = 1$$

ИЛИ

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

3.3 Определение 3

Говорят, что последовательность с.в. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***сходится почти наверное*** к с.в. X, если

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} X(\omega)\}) = 0$$

ИЛИ

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\}) = 1$$

3.4 Определение 4

Говорят, что последовательность с.в. $\{X\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***сходится в среднем квадратическом*** к с.в. X, если

$$M[|X_n - X|^2] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3.5 Пример 1

Пусть $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — случайная последовательность.

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 - \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

$P(\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq 0\}) = P(\{\omega : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N : X_n(\omega) = n\}) = P(\prod\limits_{N=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega : X_n(\omega) = n\}) \overset{*}{=}$

1. $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\{\omega : X_n(\omega) = n\} \subset \sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega : X_n(\omega) = n\}$

2. $P(\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega : X_n(\omega) = n\}) \leqslant \sum\limits_{n=N}^{\infty} P(\{\omega : X_n(\omega) = n\}) = \sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$

т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

Тогда в силу *аксиомы непрерывности* $\stackrel{*}{=} 0$, т.е. $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$

3.6 Пример 2

Рассмотрим ту же последовательность. Выберем $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - 0| \leqslant \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \geqslant n \\ 1 - \frac{1}{n^2}, & \varepsilon \in (0; n) \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Тогда $X_n \xrightarrow{P} 0$

3.7 Пример 3

Рассмотрим ту же последовательность:

$M[|X_n - 0|^2] = M[X_n^2] = 0^2(1 - \frac{1}{n^2}) + n^2\frac{1}{n^2} = 1 \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$

Тогда $X_n \not\xrightarrow{\text{с.к.}} 0$

3.8 Пример 4

Пусть $f_{nk} : [0;1] \longrightarrow \{0;1\}, n \in \mathbb{N}, k = \overline{1,n}$,

$$f_{n,k} = \begin{cases} 0, & t \notin [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}], \\ 1, & t \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]. \end{cases}$$

Пусть $X \sim R(0;1)$. Рассмотрим последовательность с.в. $X_{nk} = f_{nk}(X)$. $\forall \omega \in \Omega X(\omega) \in [0;1]$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k = \overline{1,n}$ такое, что $X(\omega) \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]$. Т.е. если $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ найдется $k = \overline{1,n}$ такой, что

$$|f_{nk}(X(\omega)) - 0| > \varepsilon$$

Тогда $X_{nk}(\omega) \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.е.

$$\{\omega : \lim_{n,k\to\infty} X_{nk}(\omega) = 0\} = \emptyset$$

$$X_{nk} \not\xrightarrow{\text{п. н.}} 0$$

При этом $\forall \varepsilon > 0$

$$R(|X_{nk} - 0| > \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon \geqslant 1, \\ P(X \in [\frac{k-1}{n}, & \frac{k}{n}]), \varepsilon \in (0;1) \end{cases} = \begin{cases} 0, & \varepsilon \geqslant 1, \\ \frac{1}{n}, & \varepsilon \in (0;1) \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$X_{nk} \xrightarrow{P} 0$$

$$M[|X_{nk} - 0|^2] = M[X_{nk}] = M[f_{nk}(X)] = \int\limits_0^1 f_{nk}(x)\underbrace{f_X(x)}_{1}dx = \int\limits_0^1 f_{nk}(x)dx = \int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 1dx = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$X_{nk} \xrightarrow{\text{с.к}} 0$$

3.9 Пример 5

Рассмотрим последовательность с.в. $Y_{n_1k} = nK_{n_1k}$ Тогда $Y_{n_1k} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$. $\forall \varepsilon > 0$.

$P(|Y_{n_1k} - 0| > \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon \geqslant n, \\ P(X \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]), & \varepsilon \in (0; n) \end{cases} = \begin{cases} 0, & \varepsilon \geqslant n, \\ \frac{1}{n}, & \varepsilon \in (0; n) \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$Y_{n_1k} \xrightarrow{P} 0$$

$M[|Y_{n_1k} - 0|^2] = M[n^2 X_{nk}^2] = n^2 M[X_{nk}] = n \xrightarrow{P} \infty$

$$Y_{n_1k} \not\xrightarrow{\text{с.к.}} 0$$

Замечание

Согласно определению для исследования на сходимость нужно знать совместное распределение с.в. X_n и X, а для случая *сходимости почти наверное* совместное распределение всей последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и X. Поэтому исследование на сходимость иначе, чем к детерминированной константе, довольно проблематично.

3.10 Лемма 1

Пусть $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$. Тогда $X_n \xrightarrow{P} X$.

Доказательство

$0 = P(\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = P(\{\omega : \exists\varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geqslant N : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) =$
$P(\sum\limits_{\varepsilon>0} \prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \geqslant P(\prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon'\}), \forall\varepsilon' > 0$

Тогда $0 = P(\prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\})$,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \subset \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

В силу *аксиомы непрерывности*:

$0 = \lim\limits_{N\to\infty} P(\sum\limits_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \geqslant \lim\limits_{N\to\infty} P(\{\omega : |X_N(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\})$

$$X_N \xrightarrow{P} X$$

■

3.11 Лемма 2 (Неравенство Маркова)

Пусть $P(X \geqslant 0) = 1$, $M[X] < \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$

$$P(X > \varepsilon) \leqslant \frac{M[X]}{\varepsilon}$$

Доказательство

$M[X] = \int\limits_{0}^{+\infty} x dF_X(x) \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} x dF_X(x) \geqslant \varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} dF_X(x) = \varepsilon P(X > \varepsilon)$. ■

3.12 Следствие 1

Пусть $M[X^k] < \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$:

$$P(|X| > \varepsilon) \leqslant \frac{M[|X|^k|]}{\varepsilon^k}$$

Доказательство

$P(|X| > \varepsilon) = P(|X|^k > \varepsilon^k) \leqslant \frac{M[|X|^k]}{\varepsilon^k}$. ∎

3.13 Следствие 2 (Неравенство Чебышёва)

Пусть $M[X^2] < \infty$. Тогда

$$P(|X - M[X]| > \varepsilon) \leqslant \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$$

Доказательство

$P(|X - M[X]| > \varepsilon) \leqslant \frac{M[|X-M[X]|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$. ∎

3.14 Лемма 3

Пусть $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$. Тогда $X_n \xrightarrow{P} X$.

Доказательство

$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant \frac{M[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. ∎

3.15 Теорема 1 (Бореля — Кантелли)

Пусть $A_1, \dots, A_n \subset \Omega, B = \prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n$. Тогда

1. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, то $P(B) = 0$;
2. Если $A_1, \dots, A_n$ **независимы в совокупности** и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, то $P(B) = 1$.

Доказательство

1. $P(B) = P(\prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n) \overset{*}{=}$

т.к. $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} A_n \subset \sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n$, то *по аксиоме непрерывности* $\overset{*}{=} \lim\limits_{N\to\infty} P(\sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n) \leqslant \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} P(A_n) = 0$, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

2. $P(B) = \dots = \lim\limits_{N\to\infty} P(\sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{N\to\infty} (1 - P(\prod\limits_{n=N}^{\infty} \overline{A}_n)) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} P(\prod\limits_{M=N}^{\infty} \prod\limits_{n=N}^{M} \overline{A}_n) \overset{*}{=}$

т.к. $\prod\limits_{n=N}^{M+1} \overline{A}_n \subset \prod\limits_{n=N}^{M} \overline{A}_n$, то по *аксиоме непрерывности*

$\stackrel{*}{=} 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} P(\prod\limits_{n=N}^{M} \overline{A}_n) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} \prod\limits_{n=N}^{M} (1 - P(A_n)) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} \prod\limits_{n=N}^{M} e^{\ln(1-P(A_n))} =$
$1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} e^{\sum n=N^M \ln(1-P(A_n))} \stackrel{*}{\geqslant}$

т.к. $\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots < -t$, то

$\stackrel{*}{\geqslant} 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} e^{-\sum\limits_{n=N}^{M} P(A_n)} = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 1.$ ■

3.16 Лемма 4

Пусть $X_n \xrightarrow{P} X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$

Тогда $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$

Доказательство

В силу Теоремы 3.1 $\forall \varepsilon > 0$

$$P(\prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$$

Тогда

$P(\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = P(\{\omega : \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geqslant N : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) =$
$P(\{\omega : \exists M \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geqslant N : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{M}\}) = P(\sum\limits_{M=1}^{\infty} \prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n - X| > \frac{1}{M}\}) \leqslant$
$\sum\limits_{M=1}^{\infty} P(\prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum n = N^{\infty} \{\omega : |X_n - X| > \frac{1}{M}\}) = 0.$ ■

Замечание

1.

$X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$
ИЛИ
$X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$

2. В силу *теоремы Рисса* (функциональный анализ) если $X_n \xrightarrow{P} X$, то существует *подпоследовательность* $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.н.}} X$

3. В силу *теоремы о мажорирующей сходимости*, если $X_n \xrightarrow{P} X$ и $\exists Y$ — с.в.: $|X_n| \leqslant Y, M[Y^2] < \infty$, то $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$

4. Также из функционального анализа известно, что операция предела (по мере, почти наверное, в средне квадратическом) замкнута относительно линейных операций и непрерывных преобразований.

4 Закон больших чисел

4.1 Определение 1

Выборкой объема n будем называть с.в. $Z_n = (X_1, \dots, X_n)^T$, где $X_1, \dots, X_n$ — *независимые* с.в.

Через $F_k(x)$ обозначим *функцию распределения* k-го элемента выборки.

Если $F_k = F_1, k = \overline{2, n}$, то выборка называется ***однородной***.

4.2 Определение 2

Выборочным средним $\overline{X}_n$ выборки Z_n называется $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$

4.3 Теорема 1 (Закон Больших Чисел Чебышёва)

Пусть Z_n — однородная выборка, $M[X_k^2] < \infty$.

Тогда $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X, \overline{X}_n \xrightarrow{P} m_X$

Доказательство

$M[|\overline{X}_n - m_X|^2] = M[|\overline{X}_n - M[\overline{X}_n]|^2] = D[\overline{X}_n] = \frac{1}{n^2} D[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k] = \frac{nD[X_1]}{n^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Т.е. по определению $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X$.

С учетом Леммы 3.3 $\overline{X}_n \xrightarrow{P} m_X$. ■

4.4 Теорема 2 (Закон Больших Чисел Колмогорова)

Пусть Z_n — *однородная* выборка, $M[X_k] = m_X < \infty$.

Тогда $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} m_X$

Замечание

Т.о. для *однородной* выборки $\overline{X}_n$ сходится **почти наверное** и **по вероятности** к m_X, <u>если оно существует</u>, и **в среднем квадратичном**, <u>если существует дисперсия</u>.

4.5 Теорема 3

Пусть Z_n — *неоднородная* выборка, $M[X_k] = m_X < \infty, D[X_k] = D_k \leqslant D_{max} < \infty$, где $k \in \mathbb{N}$

Тогда $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X, \overline{X}_n \xrightarrow{P} m_X$.

Доказательство

$M[|\overline{X}_n - m_X|^2] = M[|\overline{X}_n - M[\overline{X}_n]|^2] = D[X_n] = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} D_k \leqslant \frac{nD_{max}}{n^2} = \frac{D_{max}}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Т.о. $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X$. Тогда в силу Леммы 3.3 $\overline{X}_n \xrightarrow{P} m_X$. ■

4.6 Следствие 1

Пусть Z_n — *неоднородная* выборка, $D[X_k] = D_k \leqslant D_{max} < \infty, k \in \mathbb{N}$.
Тогда $\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} m_{X_k} \xrightarrow{\text{с.к.}} 0, \overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} m_{X_k} \xrightarrow{P} 0.$

Доказательство

$\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} m_{X_k} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - m_{X_k}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k,$
где $M[Y_k] = 0, D[Y_k] = D[X_k] \leqslant D_{max} < \infty$
Тогда $\overline{Y}_k$ удовлетворяет условиям Теоремы 4.3. ■

4.7 Теорема 4

Пусть Z_n — *неоднородная* выборка, $M[X_k] = m_X < \infty, D[X_k] = D_k < \infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{D[X_k]}{k^2} < \infty$$

Тогда

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} m_X$$

Замечание

Условие Теоремы 4 более мягкое, чем условие Теоремы 3. Пусть $D[X_k] \leqslant D_{max}, k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{D[X_k]}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{max}}{k^2} = \frac{\pi^2 D_{max}}{\sigma} < \infty$$

4.8 Следствие 2

Пусть $N(A)$ — число появления события A в серии из N *независимых* опытов. Тогда

$$\frac{N(A)}{N} \xrightarrow{\text{п.н.}} P(A), \frac{N(A)}{N} \xrightarrow{\text{с.к.}} P(A)$$

Доказательство

По условию $N(A) \sim Bi(N; P(A))$. Тогда $\exists X_1, \dots, X_n \sim Be(P(A))$ — независимые с.в.
При этом $M[X_1] = P(A), D[X_1] = P(A)(1 - P(A)) \leqslant \frac{1}{4}$.
Тогда в силу Теоремы 4

$$\frac{N(A)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k \xrightarrow{\text{с.к.}} P(A)$$

в силу Теоремы 2

$$\frac{N(A)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k \xrightarrow{\text{п.н.}} P(A)$$

■

5 Центральная предельная теорема (ЦПТ)

Замечание

Сходимости ***с.к.***, ***п.н.*** и P в общем случае исследования предполагают либо знание совместного распределения элементов последовательности, либо наличие точкой функциональной зависимости от $\omega \in \Omega$.

Как правило, в теории вероятностей это неизвестно, а с.в. описываются при помощи их распределений, а не как функции. При этом если у двух величин совпадают распределения, то это вовсе не значит, что они равны.

Поэтому довольно важным является вид сходимости *по распределению*, т.е. в смысле "описательного инструмента" с.в.

5.1 Определение 1

Говорят, что последовательность с.в. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***сходится по распределению*** к с.в. X, если
$F_{X_n}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x)$, $\forall x$ — точки непрерывности $F_X(x)$.

5.2 Лемма 1

Пусть $X_n \overset{P}{\longrightarrow} X$. Тогда $X_n \overset{d}{\longrightarrow} X$

5.3 Лемма 2

Пусть $X_n \overset{d}{\longrightarrow} X$, $Y_n \overset{P}{\longrightarrow} C$
Тогда $X_n + Y_n \overset{d}{\longrightarrow} X + C$

Доказательство

Пусть $C = 0$, x_0 — точка **непрерывности** $F_X(x)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$
$F_{X_n+Y_n}(x_0) = P(X_n+Y_n \leqslant x_0) = \underbrace{P(\{X_n + Y_n \leqslant x_0\}\{|Y_n| > \varepsilon\})}_{p_1} + \underbrace{P(\{X_n + Y_n \leqslant x_0\}\{|Y_n| \leqslant \varepsilon\})}_{p_2}$

$$0 \leqslant p_1 \leqslant P(|Y_n| > \varepsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$p_2 = P(\{X_n + Y_n \leqslant x_0\}\{-\varepsilon \leqslant Y_n \leqslant \varepsilon\}) \overset{*}{\leqslant}$

$$\begin{cases} X_n + Y_n \leqslant x_0 \\ -\varepsilon \leqslant Y_n \leqslant \varepsilon \end{cases} \implies \begin{cases} X_n + Y_n \leqslant x_0 \\ -\varepsilon \leqslant -Y_n \leqslant \varepsilon \end{cases} \implies X_n \leqslant x_0 + \varepsilon$$

$\overset{*}{\leqslant} P(X_n \leqslant x_0 + \varepsilon) = F_{X_n}(x_0 + \varepsilon)$

$p_2 \geqslant P(\{\varepsilon + X_n \leqslant x_0\}\{-\varepsilon \leqslant Y_n \leqslant \varepsilon\}) \overset{*}{\geqslant}$

$$P(AB) = P(A) - P(A\backslash B) \geqslant P(A) - P(\overline{B})$$

$\overset{*}{\geqslant} P(\varepsilon + X_n \leqslant x_0) - P(|Y_n > \varepsilon) = F_{X_n}(x_0 - \varepsilon) - P(|Y_n| > \varepsilon)$
Т.о. $F_{X_n}(x_0 - \varepsilon) - P(|Y_n| > \varepsilon) \leqslant F_{X_n+Y_n}(x_0) \leqslant F_{X_n}(x_0 + \varepsilon) + p_1$
Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ было областью непрерывности $F_X(x)$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x_0 \pm \varepsilon) = F_X(x_0 \pm \varepsilon)$

$$F_{X_n}(x_0 - \varepsilon) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x_0) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x_0) \leqslant F_X(x_0 + \varepsilon)$$

Возьмем предел по $\varepsilon \to 0$. В силу непрерывности $F_X(x)$ в x_0 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_X(x_0 \pm \varepsilon) = F_X(x_0)$
Откуда $F_X(x_0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_{X_n+Y_n}(x_0)$, т.е.

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X$$

Пусть $C \neq 0$. Тогда $Y_n - C = \tilde{Y} \xrightarrow{P} 0$,
$X_n + C = \tilde{X}_n \xrightarrow{d} X + C = \tilde{X}$
Получаем $X_n + Y_n = \tilde{X}_n + \tilde{Y}_n \xrightarrow{d} \tilde{X} = X + C$. ■

5.4 Доказательство леммы 5.1

$X_n = (X_n - X) + X$, где $X \xrightarrow{d} X, X_n - X \xrightarrow{P} 0$. В силу Леммы 5.2 $X_n = (X_n - X) + X \xrightarrow{d} X + 0 = X$. ■

Замечание

Из *теории преобразования Фурье* следует, что $X_n \xrightarrow{d} X$ тогда и только тогда, когда $\psi_{X_n}(\lambda) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi_X(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

5.5 Определение 2

Последовательность с.в. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется ***асимптотически нормальной***, если $X_n \xrightarrow{d} X$, где $X \sim N(m;\sigma^2)$

5.6 Теорема 1 (Центральная предельная)

Пусть $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность *независимых* и *одинаково распределенных* с.в., причем

$$M[X_1] = m_X, D[X_1] = \sigma_X^2$$

Тогда

$$S_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_n - nm_X}{\sigma_X\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0;1)$$

Доказательство

Обозначим через $Y_k = \frac{X_k - m_X}{\sigma_X\sqrt{n}}$
Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$, где $Y_1, \dots, Y_n$ — *независимые* с.в.
В силу Леммы 1.5

$$\psi_{S_n}(\lambda) = \psi_Y(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{Y_k}(\lambda) = \psi^n_{Y_1}(\lambda) = \psi^n(\frac{\lambda}{\sigma_X \sqrt{n}})$$

где $\psi(\lambda)$ — **характеристическая функция** $X_k - m_X$.

$\psi(0) = M[e^{i0(X_k - m_X)}] = M[1] = 1$

$\psi'(0) = M[i(X_k - m_X)e^{i0(X_k - m_X)}] = M[X_k - m_X]i = 0$

$\psi''(0) = -M[(X_k - m_X)^2 e^{i0(X_k - m_X)}] = -M[(X_k - m_X)^2] = -\sigma_X^2$

Тогда согласно *формуле Тейлора*

$\psi(\lambda) = \psi(0) + \psi'(0)\lambda + \psi''(0)\frac{\lambda^2}{2} + o(\lambda^2) = 1 - \frac{\sigma_X^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)$

Рассмотрим $\ln \psi_{S_n}(\lambda) = n \ln \psi(\frac{\lambda}{\sigma_X \sqrt{n}}) = n \ln(1 - \frac{\lambda^2}{2n} + o(\frac{\lambda^2}{\sigma_X^2 n})) = n(-\frac{\lambda^2}{2n} + o(\frac{\lambda^2}{\sigma_X^2 n}) + o(-\frac{\lambda^2}{2n} + o(\frac{\lambda^2}{\sigma_X^2 n}))) = n(-\frac{\lambda^2}{2n} + o(\frac{\lambda^2}{2n})) = -\frac{\lambda^2}{2} + \frac{o(\frac{\lambda^2}{\sigma_X^2 n})}{\frac{\lambda^2}{\sigma_X^2 n}} \cdot \frac{\lambda^2}{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{\lambda^2}{2}$,

$$\psi_{S_n}(\lambda) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

где $\psi_Y(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ по определению является *характеристической функцией $Y \sim N(0;1)$

Тогда $S_n \xrightarrow{d} Y \sim N(0;1)$. ■

5.7 Следствие 1 (Теорема Муавра - Лапласа)

Пусть $X_n \sim Bi(n;p)$

Тогда

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0;1)$$

Доказательство

Т.к. $X_n \sim Bi(n;p)$, то существуют **независимые** $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n \sim Be(p)$ такие, что

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k, M[\tilde{X}_k] = p = m_X, D[\tilde{X}_k] = p(1-p) = \sigma_X^2$$

Тогда в силу Теоремы 1:

$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{X}_k - nm_X}{\sigma_X \sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0;1)$. ■

5.8 Пример 1

Вычислить вероятность того, что при $n = 1000$ подбрасываниях монета упадет *"орлом"* от 400 до 600 раз.

Пусть X — число выпавших *"орлов"*. Тогда $X \sim Bi(1000; \frac{1}{2})$. По *формуле Бернулли*

$$P(X \in [400; 600]) = \sum_{k=400}^{600} C_{1000}^k \frac{1}{2^{1000}}$$

Оценим данную величину с помощью *ЦПТ*.

В силу Теоремы 1 и Следствия

$$\frac{X - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}} \xrightarrow{d} N(0;1)$$

Тогда

$P(400 \leqslant X \leqslant 600) = P(\frac{400-500}{\sqrt{250}} \leqslant \frac{X-nm_X}{\sigma_X\sqrt{n}} \leqslant \frac{600-500}{\sqrt{250}}) \approx \Phi_0(\frac{100}{5\sqrt{10}}) - \Phi_0(-\frac{100}{5\sqrt{10}}) = 2\Phi_0(2\sqrt{10}) \approx 1$.

5.9 Теорема 2 (Ляпунова)

Пусть $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность *независимых* с.в., $M[X_n] = m_{X_n}, D[X_n] = \sigma^2_{X_n}, M[|X_n - m_{X_n}|^3] = C_n^3 < \infty$

При этом $\frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} C_k^3)^{\frac{1}{3}}}{(\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma^2_{X_k})^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ***(Условие Ляпунова)***

Тогда $\frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - M[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k]}{\sqrt{D[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k]}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \sim N(0;1)$

Замечание

Для *аппроксимации* точности использования ЦПТ используется **неравенство Берри-Эссеена**

5.10 Теорема 3 (Неравенство Берри-Эссеена)

Пусть $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность *независимых* и *одинаково распределенных* с.в.

$$M[X_n] = m_X, D[X_n] = \sigma^2_X, M[|X_n - m_X|^3] = \rho < \infty$$

Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$|P(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - nm_X}{\sigma_X\sqrt{n}}) - (\frac{1}{2} + \Phi_0(x))| \leqslant \frac{C_0\rho}{\sigma^3_X\sqrt{n}}$$

Замечание

Точное значение константы C **неизвестно**.

По текущим данным *(2010 г.)* $C_0 \leqslant 0.4784$

5.11 Пример

Оценим точность решения в предыдущем примере: $\sigma^2_X = \frac{1}{4}, n = 1000, m_X = \frac{1}{2}, X_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\rho = M[|X_n - m_X|^3] = |0 - \frac{1}{2}|^3 \cdot \frac{1}{2} + |1 - \frac{1}{2}|^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Тогда погрешность составит для двухстороннего нер-ва:

$\frac{2C_0\rho}{\sigma^3_X\sqrt{n}} = \frac{2\cdot 0.4784\cdot\frac{1}{8}}{\frac{1}{64}\cdot\sqrt{1000}} \approx 0.03$

6 Выборка и ее характеристики

6.1 Определение 1

Выборкой называется $Z_n = (X_1, \dots, X_n)^T$ *независимый вектор* с.в. Если все $X_1, \dots, X_n$ — *одинаково распределены*, а $F(x)$ — *функция распределения*, то говорят, что Z_n — ***однородная*** выборка, порожденная распределением $F(x)$

6.2 Определение 2

Реализацией выборки $Z_n \in \mathbb{R}^n$ называется *неслучайный* вектор $z_n = Z_n(\omega)$, состоящий из реализаций элементов выборки $X_k, k = \overline{1, n}$.

6.3 Определение 3

Множество S всех возможных реализаций выборки Z_n называют ***выборочным пространством***

Замечание

Обычно распределение, порождающее выборку, известно неточно.

$$F_X = F_X(x; \theta)$$

Задача состоит в построении оценки θ по элементам выборки.

6.4 Определение 4

С.в. $\varphi(Z_n)$, где $\varphi : S \to \mathbb{R}$ — *измерима*, называется ***статистикой***.

6.5 Определение 5

k-ой порядковой статистикой называется k-е по величине значение элемента выборки $Z_n = (X_1, \dots, X_n)^T$ и обозначается $X^{(k)}$

Замечание

$X^{(k)}$ является функцией от всей выборки, т.к. при различных $\omega \in \Omega$ $X^{(k)}$ будет совпадать по значению с разными X_i.

6.6 Определение 6

Набор порядковых статистик $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ называется ***вариационным рядом***.

6.7 Определение 7

$X^{(1)} = \min_{k=\overline{1,n}} X_k, X^{(n)} = \max_{k=\overline{1,n}} X_k$.

6.8 Лемма 1

Пусть однородная выборка Z_n порождена распределением $F(x)$. Тогда функция распределения $X^{(k)}$ имеет вид:

$$F_{(k)}(x) = P(X^{(k)} \leqslant x) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}$$

Доказательство

Рассмотрим с.в. Y, равную числу элементов выборки, не превосходящих x. Тогда $Y \sim Bi(n; F(x))$.

$F_{(k)}(x) = P(X^{(k)} \leqslant x) = P(Y \geqslant k) = \sum\limits_{i=k}^{n} C_n^i (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}$. ■

6.9 Следствие 1

$F_{(1)}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$,
$F_{(n)}(x) = (F)^n$.

6.10 Определение 8

Выборочным квантилем уровня $\alpha \in (0; 1)$ называется *порядковая статистика* $X^{([n\alpha]+1)}$

6.11 Теорема 1 (Мостеллера)

Пусть X — *абсолютно непрерывная* с.в., x_α — *точка гладкости* $f_X(x), f_X(x_\alpha) > 0$
Тогда $(X^{([n\alpha]+1)} - x_\alpha)\sqrt{\frac{n f_X^2(x_\alpha)}{p(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0; 1)$

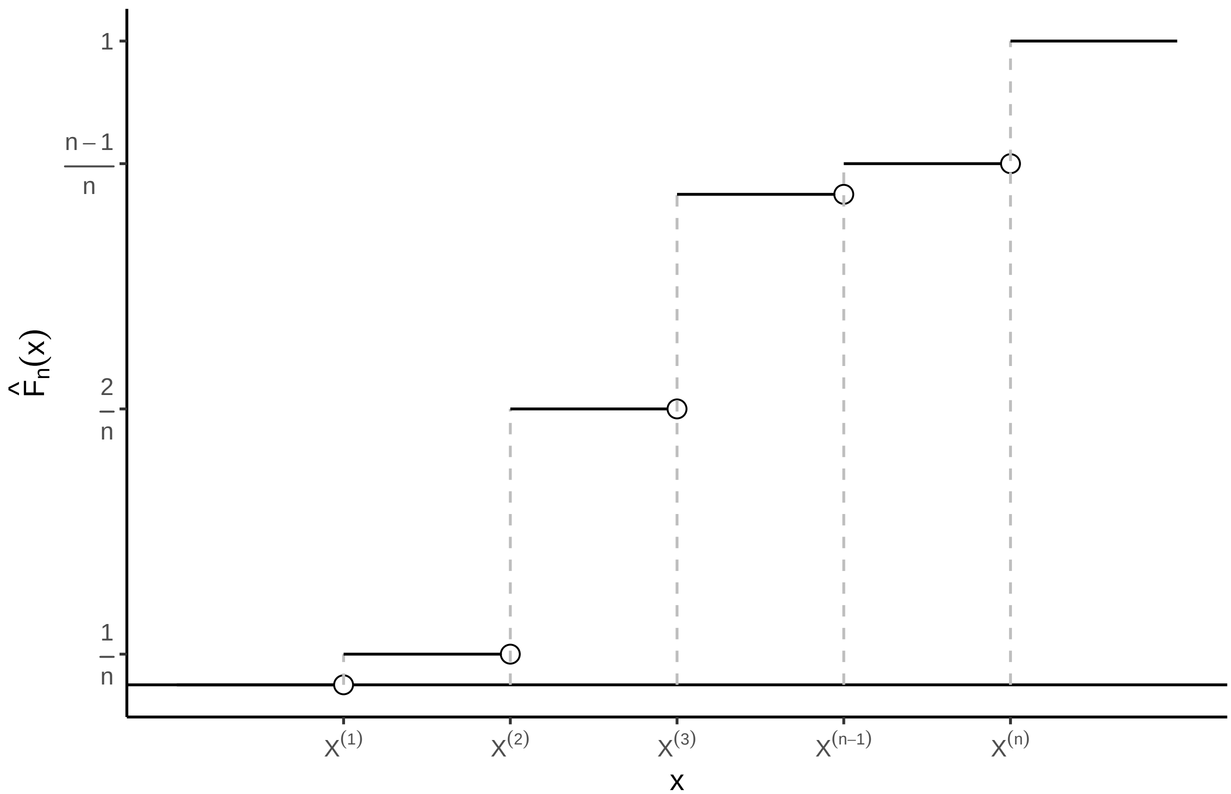
6.12 Определение 9

Выборочной функцией распределения называется статистика $\hat{F}_n(x)$:

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}\max\{k = \overline{1, n} : X^{(k)} \leqslant x\}, & x \geqslant X^{(1)}, \\ 0, & x < X^{(1)} \end{cases}$$

Замечание

Фактически $\hat{F}_n(x)$ — **частота события** $\{X \leqslant x\}$, которая используется для оценки вероятности $F(x) = P(X \leqslant x)$.



6.13 Свойства $\hat{F}_n(x)$

1. $\boxed{n \cdot \hat{F}_n(x) \sim Bi(n; F(x))}$

2. $\boxed{M[\hat{F}_n(x)] = F(x)}$

3. $\boxed{\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0}$

   (Теорема Гливенко - Кантелли)

4. $\boxed{M[(\hat{F}_n(x) - F(x))^2] = \frac{F(x)(1-F(x))}{n} \leqslant \frac{1}{4n}}$

5. $\boxed{|\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{с.к.}} 0}$

6. $\boxed{\frac{\hat{F}_n(x) - F(x)}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}} \sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0;1)}$

   (Следует из теоремы Муавра - Лапласа)

Замечание

$\hat{F}_n(x)$ при увеличении n *равномерно приближается* к $F(x)$, при этом точность приближения можно оценить при помощи свойств **4** и **6**.

Гистограмма. На основе реализации вариационного ряда построим разбиение $\mathbb{R}$ $-\infty = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l < t_{l+1} = +\infty$,

$t_1 \leqslant x^{(1)}, t_l > x(n)$.
Как правило, длина интервалов разбиения выбирается *одинаковой*:

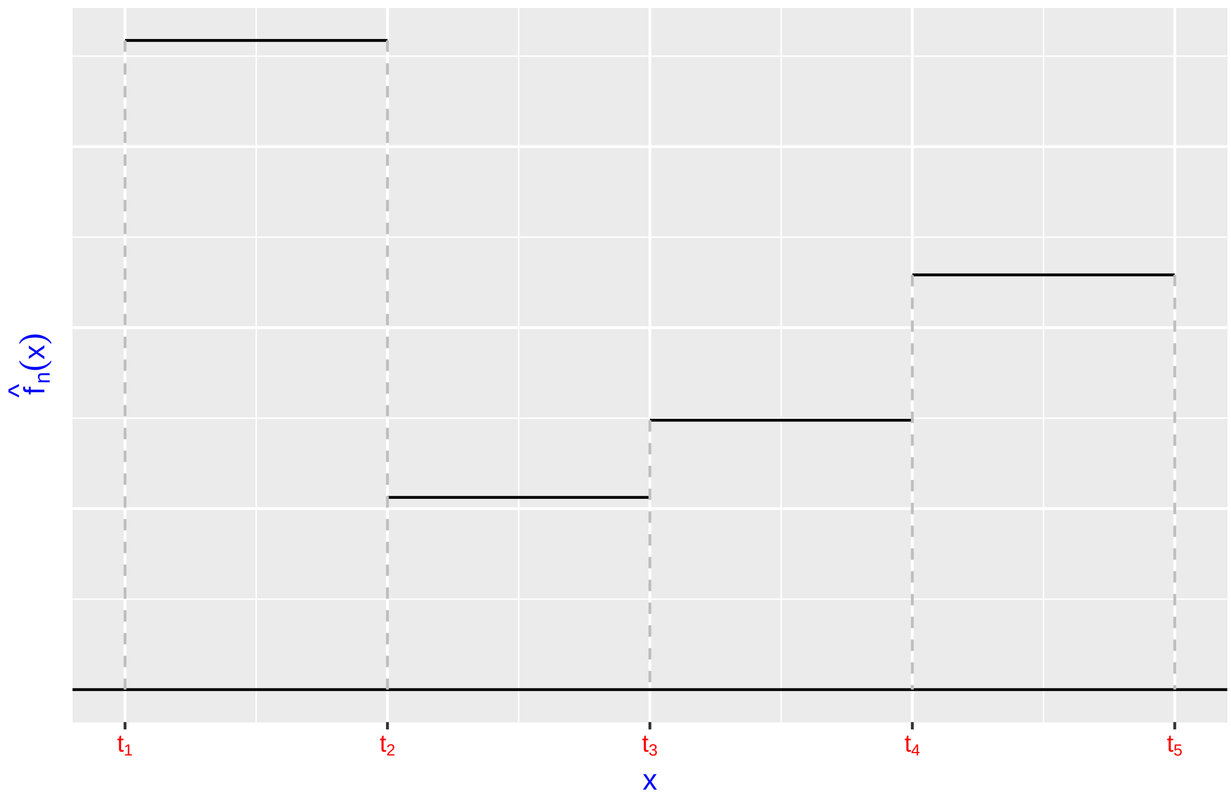
$$h_k = t_{k+1} - t_k = \frac{t_l - t_1}{l-1}, k = \overline{1, l-1}$$

Вычислим частоту попадания элементов выборки в k-й интервал:
$\widehat{p}_k = \frac{n_k}{n}$, где n_k — число элементов выборки, попавших в $[t_k; t_{k+1}), k = \overline{0, l}$
Заметим, что $\widehat{p}_0 = \widehat{p}_l = 0$.

6.14 Определение 10

Гистограммой называется функция:

$$\widehat{f}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (t_0; t_1) \cup [t_l; t_{l+1}), \\ \widehat{p}_k, & x \in (t_k; t_{k+1}), k = \overline{1, l-1} \end{cases}$$



Замечание

Если плотность вероятности $f_X(x)$ *непрерывна* и *ограничена*, а число разрядов гистограммы l_n *удовлетворяет условию*: $l_n \longrightarrow +\infty, \frac{n}{l_n} \longrightarrow +\infty$,
то

$$\widehat{f}_n(x) \xrightarrow{P} f_X(x)$$

Т.е. гистограмма является статистической аппроксимацией функции плотности вероятности.

Выборочные моменты

6.15 Определение 1

Выборочным начальным и ***центральным моментами*** называется соответственно статистики:

$\hat{\nu}_r(n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^r$

и

$\hat{\mu}_r(n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - \hat{\nu}_1(n))^r$

6.16 Определение 2

Выборочным средним и ***выборочной дисперсией*** называются соответственно статистики:

$\overline{X}_n = \hat{\nu}_1(n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$

и

$\hat{d}_X(n) = \hat{S}^2(n) = \hat{\mu}_2(n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2$

6.17 Определение 3

Пусть $Z_n = (X_1, \dots, X_n)^T$ и $V_n = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ — выборки, порожденные распределениями F_X и F_Y соответственно. Тогда ***выборочным коэффициентом корреляции*** называется:

$$\hat{r}_{XY} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X}_n)(Y_k - \overline{Y}_k)}{n\sqrt{\hat{d}_X \cdot \hat{d}_Y}}$$

6.18 Свойства выборочных моментов

1. $\boxed{M[\hat{\nu}_r(n)] = \nu_r, r \in \mathbb{N}}$

Доказательство

$M[\hat{\nu}_r(n)] = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} M[X_k^r] = \frac{1}{n} n\nu_r$. ■

2. $\boxed{\text{Если } M[X^r] < \infty, \text{ то } \hat{\nu}_r(n) \xrightarrow{\text{п.н.}} \nu_r}$

Доказательство

3. $\boxed{\text{Если } M[X^r] < \infty, \text{ то } \hat{\mu}_r(n) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu_r}$

Доказательство

$\hat{\mu}_r(n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X}_n)^r = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{r} C_r^i X_k^i (-\hat{X}_n)^{r-i} = \sum\limits_{i=0}^{r} C_r^i (-\hat{X}_n)^{r-i} (\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^i) = \sum\limits_{i=0}^{r} C_r^i (-\hat{X}_n)^{r-i} \hat{\nu}_i(n) \xrightarrow[\text{св-во (2)}]{\text{п.н.}} \sum\limits_{i=0}^{r} C_r^i (-\nu_1)^{r-i} \hat{\nu}_i = \dots = \mu_i$. ■

4. $\boxed{D[\overline{X}_n] = \frac{1}{n}D[X]}$

Доказательство

С учетом *независимости* $X_1, \dots, X_n$

$D[X\overline{X}_n] = D[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k] = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} D[X_k] = \frac{nD[X]}{n^2}$. ■

5. $\boxed{M[\hat{d}_X(n)] = \frac{n-1}{n}D[X]}$

Доказательство

$M[\hat{d}_X(n)] = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1} nM[(X_k - \overline{X}_n)^2] = M[(X_1 - \overline{X}_n)^2] = D[X_1 - \overline{X}_n)^2] = D[\frac{n-1}{n}X_1 - \sum\limits_{k=2} n\frac{1}{n}\overline{X}_k] \overset{\text{н / з}}{=} \frac{n-1}{n}D[X_1] + \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=2}^{n} D[X_k] = D[X]\frac{n^2-2n+1+n-1}{n^2} = D[X] \cdot \frac{n-1}{n}$. ■

6. $\boxed{\frac{\overline{X}_n - m_X}{\sigma_X}\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0;1)}$

Доказательство

Т.к. $X_1, \dots, X_n$ *независимые*, $M[X_k] = m_k, D[X_k] = \sigma_X^2, k \in \mathbb{N}$, то в силу Теоремы 5.1:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - nm_X}{\sigma_X\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - m_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} N(0;1)$$

■

7. $\boxed{\frac{\hat{d}_X(n) - \sigma_X^2}{\sqrt{\mu_4 - \mu_2}}\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0;1)}$

7 Основные распределения в статистике

Точечные оценки

7.1 Определение 1

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — *независимые* с.в.
Тогда

$$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \sim \chi^2(n)$$

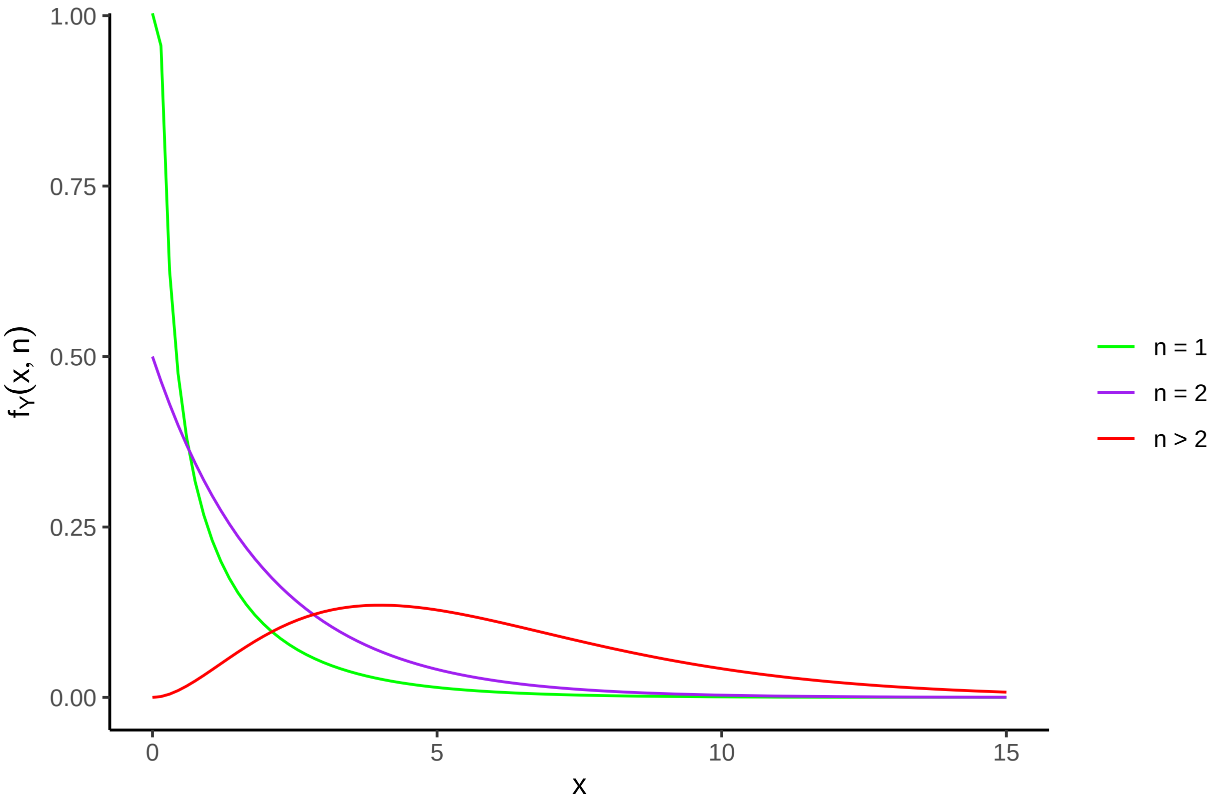
имеет ***распределение хи-квадрат*** с n степенями свободы.

7.2 Свойства распределения $\chi^2(n)$

1. Y имеет плотность вероятности

$$f_Y(x;n) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

где $\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} y^{z-1} e^{-y} dy$ — гамма-функция.



2. Y имеет характеристическую функцию

$$\psi_Y(\lambda) = (1 - 2\lambda i)^{\frac{n}{2}}$$

3. $Y \sim \chi^2(n), M[Y] = n, D[Y] = 2n$

4. Пусть *н / з* $Y_1 \sim \chi^2(n_1), \dots, Y_k \sim \chi^2(n_k)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} Y_i \sim \chi^2(\sum_{k=1}^{n} n_i)$$

5. $$\frac{Y-n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} N(0;1)$$

6. Пусть Z_n *порожденная распределением* $N(m_X, \sigma_X^2)$. Тогда если

$\hat{d}_X = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2$,
то $\frac{n\hat{d}_X}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(n-1)$.
(Доказательство приведено далее в теореме Фишера)

7.3 Определение 2

Пусть $X_0, X_1, \dots, X_n \sim N(0;1)$ — *независимые* с.в.. Тогда с.в.

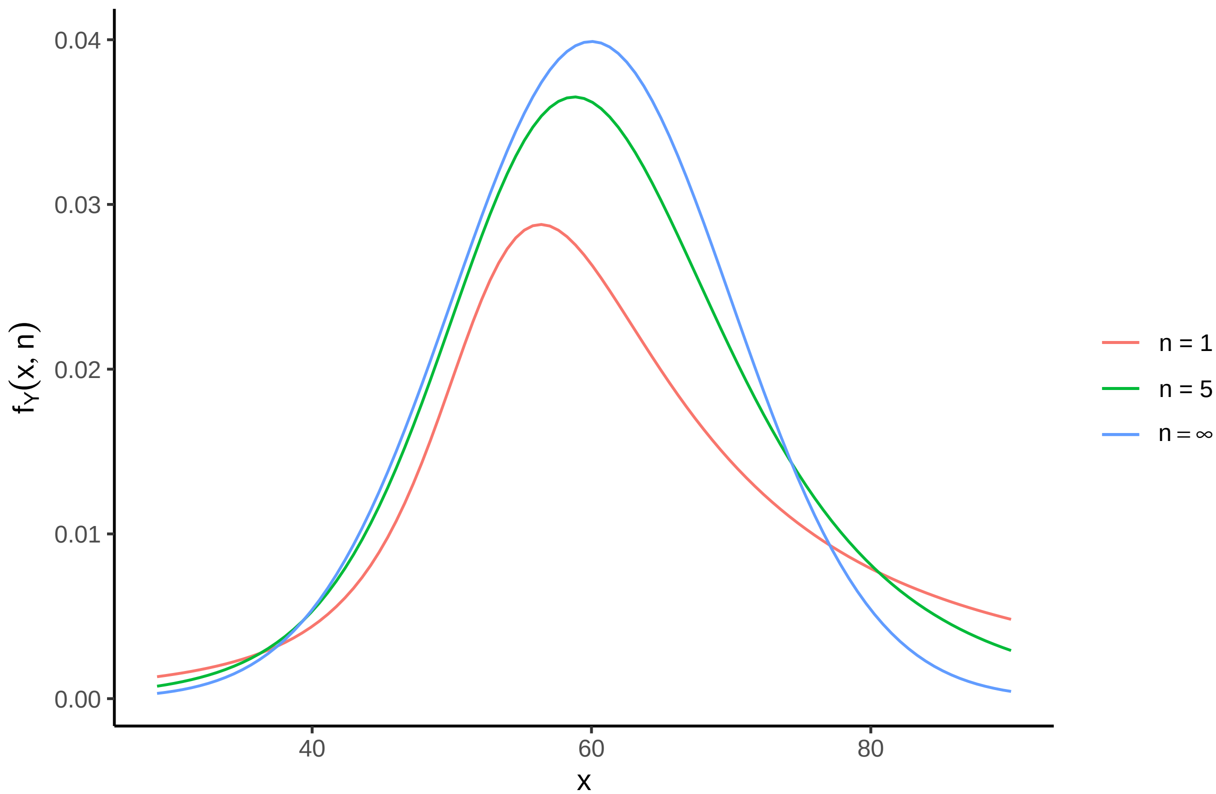
$$Y = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2}} \sim t(n)$$

имеем ***распределение Стьюдента*** с n степенями свободы.

7.4 Свойства распределения $t(n)$

1. Y имеет плотность вероятности

$$f_{x;n} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}(1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$



2. $Y \sim t(n), M[Y] = 0, n \geqslant 2$

$$D[Y] = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

3. $t(1) = C$ — *распределение Коши*

4. $Y \sim t(n), Y \xrightarrow{d} N(0;1)$

5. Пусть Z_n порождена распределением $N(m_X; \sigma_X^2)$. Тогда

$$\frac{\overline{X}_n - m_X}{\sqrt{\hat{d}_X}} \cdot \sqrt{n-1} \sim t(n-1)$$

(Доказательство приведено далее в теореме Фишера)

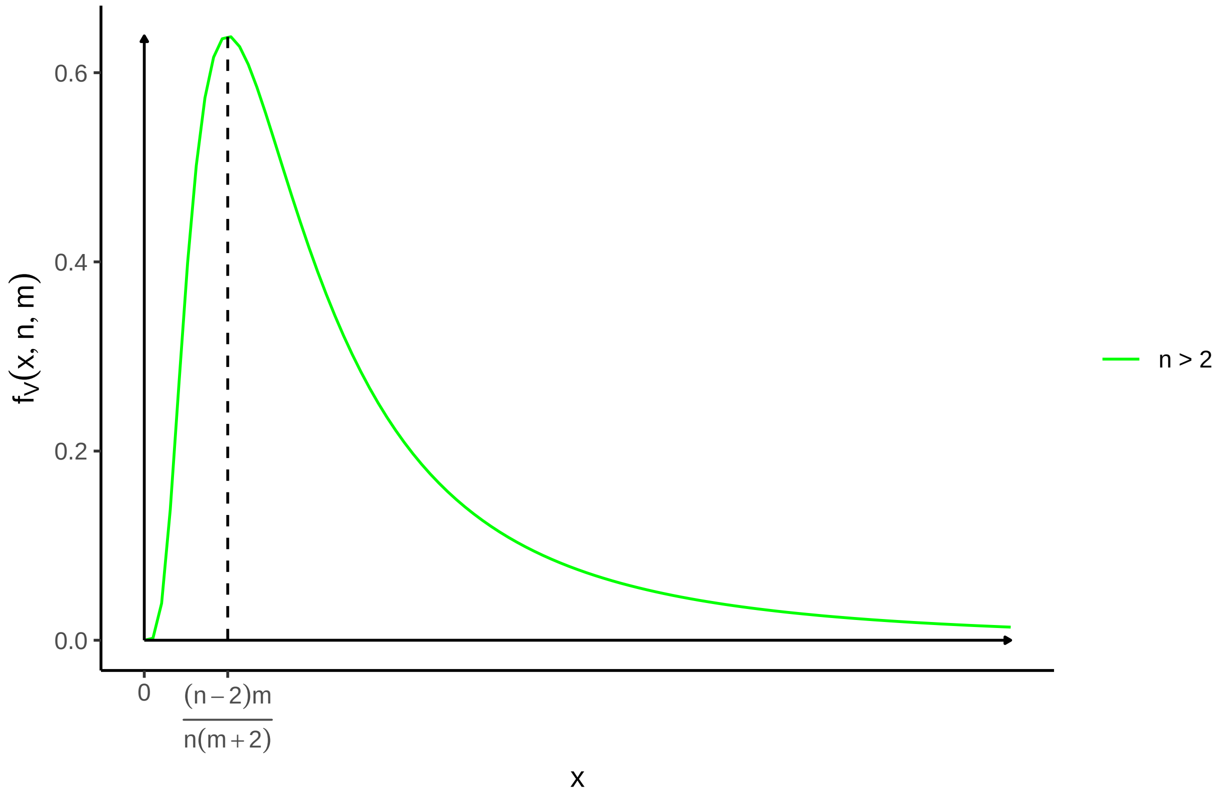
7.5 Определение 3

Пусть $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$ — *независимые* с.в. Тогда с.в. $V = \frac{Xm}{Yn} \sim F(n;m)$ имеет ***Распределение Фишера*** с n и m степенями свободы.

7.6 Свойства распределения $F(n;m)$

1. V имеет плотность вероятности

$$f_V(x,n,m) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\cdot\Gamma(\frac{m}{2})} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(m+nx)^{\frac{n+m}{2}}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$



2. $V \sim F(n;m), M[V] = \frac{m}{m-2}, m > 2,$

$$D[V] = \frac{2m^2(m+n-2)}{n(m-2)^2(m-4)}, m > 4$$

3. Пусть $Z_n = (X_1, \dots, X_n)^T$ и $W_m = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ — *однородные* выборки, порожденные распределениями $N(m_X; \sigma^2)$ и $N(m_Y; \sigma^2)$.

Тогда если Z_n и W_n **независимы**,

$$V = \frac{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1} n(X_k - \overline{X}_n)^2}{\frac{1}{m-1}\sum\limits_{k=1} n(Y_k - \overline{Y}_m)^2} \sim F(n-1; m-1)$$

(Данный факт следует из свойства 6 распределения $\chi^2(n)$)

7.7 Определение 4

Параметром $\theta \in \mathbb{R}^n$ ***распределения*** с.в. X называется любая числовая характеристика, входящая в $F_x(x, \theta)$ явно.

7.8 Определение 5

Точечной оценкой неизвестного параметра θ называется произвольная статистика $\hat{\theta}(Z_n)$.

Замечание

Оценка $\hat{\theta}(Z_n)$ является с.в.
На практике используется ее реализация.

7.9 Определение 6

Оценка $\hat{\theta}(Z_n)$ называется ***несмещенной***, если

$$M[\hat{\theta}] = \theta$$

7.10 Определение 7

Оценка $\hat{\theta}(Z_n)$ называется ***состоятельной***, если

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$$

7.11 Определение 8

Оценка $\hat{\theta}(Z_n)$ называется ***сильно состоятельной***, если

$$\hat{\theta} \xrightarrow{\text{п.н.}} \theta$$

7.12 Определение 9

Оценка $\hat{\theta}(Z_n)$ называется ***с.к. состоятельной***, если

$$\hat{\theta} \xrightarrow{\text{с.к.}} \theta$$

Замечание

1. Из свойств $\overline{X}_n$ следует, что $\overline{X}_n$ — **несмещенная** и **сильносостоятельная** оценка m_X.
2. Из свойств $\hat{d}_X$ следует, что $\hat{d}_X$ — **смещенная** и **сильносостоятельная** оценка m_X.

7.13 Определение 10

Несмещенная оценка $\hat{\theta}^*(Z_n)$ называется **эффективной**, если $\forall \hat{\theta}(Z_n)$ — *несмещенной* оценки верно, что

$$D[\hat{\theta}^*(Z_n)] \leqslant D[\hat{\theta}(Z_n)]$$

7.14 Пример

Пусть $M[\overline{X}] < \infty$. Тогда $\overline{X}$ — *сильно состоятельная* оценка m_X. Если $D[\overline{X}] < \infty$, то $\overline{X}$ — *с.к.-состоятельная* оценка m_X

(Доказательство следует из ЗБЧ)

7.15 Теорема 1

Пусть $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2,$ — *с.к.-оптимальные* оценки параметра θ. Тогда

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$$

Доказательство

Т.к. $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ **оптимальны**, то $D[\hat{\theta}_1] = D[\hat{\theta}_2] = d$.
Пусть $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{2}(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)$. Тогда
$D[\hat{\theta}_3] = \frac{1}{4}D[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2] = \frac{1}{4}(D[\hat{\theta}_1] + [D\hat{\theta}_2] + 2\mathrm{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)) = \frac{1}{2}(d + \mathrm{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)) \leqslant \frac{1}{2}(d + |\mathrm{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)|) \leqslant \frac{1}{2}(d + \sqrt{D[\hat{\theta}_1] \cdot D[\hat{\theta}_2]}) = d$
Тогда *в силу оптимальности* $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$

$$D[\hat{\theta}_3] = d$$

$d = D[\hat{\theta}_3] = \frac{1}{2}(d + \mathrm{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2))$, $\mathrm{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = d = \sqrt{D[\hat{\theta}_1] \cdot D[\hat{\theta}_2]}$,
т.е. в *неравенстве Коши-Буняковского* достигается *равенство*. Следовательно,

$$\hat{\theta}_1 = \alpha\hat{\theta}_2 + \beta, \alpha > 0$$

$$\begin{cases} M[\hat{\theta}_1] = \alpha M[\hat{\theta}_2] + \beta \\ D[\hat{\theta}_1] = \alpha^2 D[\hat{\theta}_2] \end{cases} \implies \begin{cases} \theta = \alpha\theta + \beta \\ d = \alpha^2 d \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Окончательно, $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$. $\blacksquare$

8 Эффективные оценки

Обозначим через $f(x;\theta)$ плотность вероятности с.в. X, порождающей **выборку** в *абсолютно непрерывном случае* или **функцию** в *дискретном случае.* В силу *критерия независимости* функция

$$L(z_n;\theta) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta)$$

является *плотностью вероятности* с.в. Z_n.

8.1 Определение 1

$L(z_n;\theta)$ при фиксированном $z_n \in S$ и переменной θ называется ***функцией правдоподобия***.

Замечание

Далее будем полагать, что $\theta \in \mathbb{R}^1$.

8.2 Определение 2

Распределение с.в. X называется ***регулярным***, если

1. $\sqrt{f(x;\theta)}$ — **дифференцируема** по θ *почти для всех* x.
2. $i(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta})^2 f(x;\theta) dx$ **конечна**, **непрерывна** по θ и **положительна**.

Замечание

Далее будем предполагать, что выборка Z_n порождена *регулярным распределением.*

8.3 Определение 3

Случайная величина

$$U(Z_n;\theta) = \frac{\partial \ln L(Z_n;\theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}$$

называется ***вкладом выборки*** Z_n

8.4 Лемма 1

Пусть распределение *регулярное.* Тогда

$$M[U(Z_n;\theta)] = 0$$

Доказательство

В силу *условия нормировки*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} L(z_n;\theta)d_{X_1},\dots,d_{X_n} = 1$$

С учетом *условий регулярности*

$0 = \frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^n} L(z_n;\theta)d_{X_1},\dots,d_{X_n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial L(z_n;\theta)}{\partial\theta}d_{X_1},\dots,d_{X_n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \ln L(z_n;\theta)}{\partial\theta}L(z_n;\theta)d_{X_1},\dots,d_{X_n} = M[U(Z_n;\theta)]$. ■

8.5 Определение 4

Информацией Фишера о параметре θ, ***содержащейся в выборке*** Z_n, называют

$$I_n(\theta) = D[U(Z_n;\theta)] \overset{\text{регул.}}{=} M[U^2(Z_n;\theta)]$$

$i(\theta) = M[(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta})^2]$ называется ***количеством информации Фишера, содержащимся в одном наблюдении***.

Замечание

Из определения $U(Z_n;\theta)$ и *независимости* элементов выборки следует, что $I_n(\theta) = n\cdot i(\theta)$, т.е. количество информации **вырастает пропорционально объему выборки**.

8.6 Лемма 2

Пусть $f(x;\theta)$ *дважды непрерывно дифференцируема* по θ. Тогда

$$i(\theta) = -M[\frac{\partial^2 \ln f(X_1;\theta)}{\partial\theta^2}]$$

Доказательство

$U(X_1;\theta) = \frac{\partial \ln f(X_1;\theta)}{\partial\theta}$. С учетом Леммы 1

$0 = \frac{\partial}{\partial\theta}M[U(X_1;\theta)] = \frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}f(x;\theta)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}f(x;\theta)dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}f(x;\theta)dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta})^2 f(x;\theta)dx = M[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}] + i(\theta)$. ■

8.7 Пример 1

Пусть $X \sim N(\theta;\sigma^2)$.

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\}$$

$$U(X_1;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}(-\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}) = \frac{X_T\theta}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

С учетом Леммы 2

$$i(\theta) = -M[-\frac{1}{\sigma^2}] = \frac{1}{\sigma^2}$$

8.8 Пример 2

Рассмотрим нерегулярную модель.

$$X \sim R(0;\theta)$$

Здесь из множества $\int\limits_0^\theta \frac{1}{\theta}dx = 1$ не следует, что $\int\limits_0^\theta \frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\theta})dx = 0$, т.к. при диффференцировании по θ появляется еще одно слагаемое:
$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_0^\theta \frac{1}{\theta}dx = \frac{1}{\theta} + \int\limits_0^\theta \frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\theta})dx$

8.9 Теорема 1 (Неравенство Рао-Крамера)

Пусть распределение $F(x;\theta)$, порождающее выборку Z_n *регулярно.* Тогда для любой несмещенной оценки $\widehat{\theta}$ верно неравенство:

$$D[\widehat{\theta}(Z_n)] \geqslant \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{1}{ni(\theta)}$$

При этом равенство достигается лишь в том случае, если
$\widehat{\theta}(Z_n) - \theta = a(\theta)\cdot U(Z_n;\theta)$, где
$a(\theta)$ — некоторая функция от θ

Доказательство

В силу *несмещенности* $\widehat{\theta}$

$$M[\widehat{\theta}] = \int\limits_{\mathbb{R}^n}(z_n)L(z_n;\theta)dx_1,\dots,dx_n = \theta$$

В силу *регулярности* и Леммы 1
$1 = \frac{\partial}{\partial\theta}(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}M[\widehat{\theta}] = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{\theta}(z_n)\frac{\partial L(z_n;\theta)}{\partial\theta}dx_1,\dots,dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{\theta}(z_n)\frac{\partial \ln L(z_n;\theta)}{\partial\theta}\cdot L(z_n;\theta)dx_1,\dots,dx_n = M[\widehat{\theta}U(Z_n;\theta)] = M[(\widehat{\theta}-0)(U(Z_n;\theta)-\theta)] + \theta\cdot M[U(Z_n;\theta)] = \mathrm{cov}(\widehat{\theta},U(Z_n;\theta))$
Откуда с учетом *неравенства Коши-Буняковского*

$$1^2 \leqslant D[\widehat{\theta}]\cdot D[U(Z_n;\theta)] = D[\widehat{\theta}]\cdot I_n(\theta)$$

Причем *равенство достигается* в том и только том случае, когда $\widehat{\theta} = a(\theta)U(Z_n;\theta) + b(\theta)$
Но с учетом Леммы 1 $b(\theta) = 0$.

8.10 Определение 5

Оценка $\widehat{\theta}^*(Z_n)$, *для которой достигается равенство в неравенстве Рао-Крамера* называется ***эффективной***

Замечание

В силу Теоремы 1 эффективная оценка является *оптимальной.* А с учетом Теоремы 7.1 эффективная оценка **единственна**

8.11 Пример 3

Пусть $X \sim N(\theta; \sigma^2)$

$U(Z_n; \theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial \ln f(X_k; \theta)}{\partial \theta} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{X_k - \theta}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2}(\overline{X}_n - \theta)$

Т.о. $a(\theta) = \frac{\sigma^2}{n}$. Тогда $a(\theta)U(Z_n; \theta) = \overline{X}_n - \theta$, откуда следует, что $\overline{X}_n$ — *эффективная оценка.*

9 Методы построения точеченых оценок

Метод максимального правдоподобия

9.1 Определение 1

Оценкой максимального правдоподобия θ называют

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{argmax} L(Z_n; \theta)$$

Замечание

1. В силу *монотонности* функции $\ln x$ справедливо представление:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{argmax} L(Z_n; \theta) = \underset{\theta}{argmax} \ln L(Z_n; \theta)$$

2. Если $L(Z_n; \theta)$ — **гладкая** и **максимум** по θ достигается **внутри множества** возможных значений θ, то θ можно вычислить из *уравнения правдоподобия*

$$U(Z_n; \theta) = \frac{\partial \ln L(z_n; \theta)}{\partial \theta} = 0$$

3. Из Теоремы 8.1 следует, что $\hat{\theta}$ **будет также эффективной оценкой**.

9.2 Пример 1

Рассмотрим случайную величину $X \sim N(m; \sigma^2)$ с неизвестными m и σ^2:

$$\theta = (m; \sigma^2)^T$$

$$L(Z_n; \theta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{-\frac{(X_k - \theta_1)^2}{2\theta_2}}$$

$$\ln L(Z_k; \theta) = \sum_{k=1} n(-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\theta_2 - \frac{(X_k - \theta_1)^2}{2\theta_2})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(Z_n;\theta)}{\partial \theta_1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(X_k - \theta_1)}{\theta_2} = \frac{1}{\theta_2}(n\overline{X}_n - n\theta_1) = 0 \\ \frac{\partial \ln L(Z_n;\theta)}{\partial \theta_2} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{(X_k - \theta_1)^2}{2\theta_2^2} - \frac{1}{2\theta_2}) = \frac{1}{2\theta_2}(n\hat{d}_X(n) - n\theta_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \overline{X}_n \\ \hat{\theta}_2 = \hat{d}_X(n) \end{cases}$$

9.3 Пример 2

Пусть $X \sim R(\theta_1; \theta_2)$. В этом случае $L(Z_n; \theta)$ **не является** непрерывной:

$$L(Z_n; \theta) = \prod_{k=1}^{n} f_X(X_k; \theta) = \begin{cases} 0, & \exists k = \overline{1, n} : X_k \notin [\theta_1; \theta_2] \\ \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, & \forall k = \overline{1, n} : X_k \in [\theta_1; \theta_2] \end{cases}$$

Тогда оценка максимального правдоподобия **не может быть вычислена из уравнений правдоподобия**. Хотя $\hat{\theta}$ существует:

$$L(Z_n; \theta) = \begin{cases} 0, & \min_{k=\overline{1,n}} X_k < \theta_1 || \max_{k=\overline{1,n}} X_k > \theta_2 \\ \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, & \theta_1 \leqslant \min_{k=\overline{1,n}} X_k \leqslant \max_{k=\overline{1,n}} X_k \leqslant \theta_2 \end{cases}$$

Откуда $L(Z_n; \theta)$ *возрастает* по θ_1 и *убывает* по θ_2
Тогда $\hat{\theta}_1 = \min_{k=\overline{1,n}} X_k = X^{(1)}, \hat{\theta}_1 = \max_{k=\overline{1,n}} X_k = X^{(n)}$

Замечание

Для МП-оценок выполняется **принцип инвариантности**:
Пусть $g(\theta)$ — *биективное* отображение.
Тогда МП-оценка $\hat{g}(Z_n) = g(\hat{\theta}(Z_n))$.
Действительно,
$\sup\limits_{\theta} L(Z_n; \theta) = \sup\limits_{g} L(Z_n; g^{-1}(g))$
Тогда $g^{-1}(\hat{g}) = \hat{\theta}$, т.е. $\hat{g} = g(\hat{\theta})$

9.4 Пример 3

Пусть $X \sim N(\theta_1; \theta_2)$. Требуется оценить $F_X(x_0) = \frac{1}{2} + \Phi_0(\frac{x_0 - \theta_1}{\theta_2})$. Рассмотрим *биективное отображение*

$$g(\theta_1; \theta_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \Phi_0(\frac{x_0 - \theta_1}{\theta_2}) \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\hat{g}(Z_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \Phi_0(\frac{x_0 - \overline{X}_n}{\sqrt{\hat{d}_X(n)}}) \\ \sqrt{\hat{d}_X(n)} \end{pmatrix}$$

$X_0 \in \mathbb{R}$

Замечание

Для решения уравнений правдоподобия часто используются *численные методы*

9.5 Теорема 1

Пусть распределение с.в. X, порождающей выборку Z_n, *регулярно.*

Функция правдоподобия $L(z_n;\theta)$ *имеет единственный достижимый максимум* по $\theta \forall z_n \in S, n \in \mathbb{N}$. Тогда

1. МП-оценка $\hat{\theta}$ ***состоятельна***;

2. Если $|\frac{\partial^k f(x;\theta)}{\partial \theta^k}| \leqslant g_k(x), \forall \theta$, где

$\int\limits_{\mathbb{R}} g_1(x)dx < \infty, \int\limits_{\mathbb{R}} g_2(x)dx < \infty, \int\limits_{\mathbb{R}} g_3(x)f(x;\theta)dx \leqslant C \leqslant \infty$, а функция $i(\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}} (\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta})^2 f(x;\theta)dx$ *конечна* и *положительна* $\forall \theta$, то

2.1 $M[\hat{\theta}] \to \theta$ ***(асимптотически несмещенность)***

2.2 $\hat{\theta}$ ***сильно состоятельна***;

2.3 $\sqrt{ni(\theta)}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0;1)$

Асимптотическая нормальная

Метод моментов

9.6 Определение 2

Пусть $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$, а для распределения $F_X(x;\theta)$, порождающего выборку $Z_n, M[X^r] < \infty$

Тогда

$$\begin{cases} \nu_1(\theta) = & \hat{\nu}_1(n) \\ \vdots & \vdots \\ \nu_r(\theta) = & \hat{\nu}_r(n) \end{cases}$$

называется ***системой метода моментов***.

9.7 Определение 3

Решение системы метода моментов

$$\hat{\theta}_i = \varphi_i(\hat{\nu}_1(n), \dots, \hat{\nu}_r(n)), i = \overline{1, r}$$

называется ***оценкой метода моментов***.

9.8 Теорема 2

Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, определяющие оценку метода моментов *непрерывные* и *биективные*. Тогда оценка метода моментов ***состоятельна***.

Доказательство

Доказательство следует из **состоятельности** статистик $\hat{\nu}_i(n)$.

9.9 Пример 1

$X \sim N(\theta_1;\theta_2)$. Тогда $\hat{\theta}_1 = \overline{X}_n, \hat{\theta}_2 = \hat{d}_X(n)$

9.10 Пример 2

$X \sim R(\theta_1; \theta_2)$. Тогда

$$\begin{cases} \overline{X}_n = \frac{\theta_1+\theta_2}{2} \\ \hat{d}_X(n) = \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 2\overline{X}_n \\ \theta_2 - \theta_1 = 2\sqrt{\hat{d}_X(n)}\sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_1 = \overline{X}_n - \sqrt{3\hat{d}_X(n)} \\ \theta_2 = \overline{X}_n + \sqrt{3\hat{d}_X(n)} \end{cases}$$

Замечание

Метод моментов **трудноприменим**, если *теоретические моменты не удается вычислить явно.*

10 Интервальные оценки

10.1 Определение 1

Пусть выполнено условие:

$$P(\hat{\theta}_1(Z_n) \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_2(Z_n)) = 1 - \alpha$$

для некоторого распределения параметром $F_x(x;\theta)$. Тогда интервал $[\hat{\theta}_1(Z_n); \hat{\theta}_2(Z_n)]$ — называется ***доверительным интервалом*** или ***интервальной оценкой*** параметра θ уровня надежности $1 - \alpha$.

10.2 Определение 2

Доверительный интервал называется ***центральным***, если верно условие:

$$P(\theta \leqslant \hat{\theta}_1(Z_n)) = P(\theta \geqslant \hat{\theta}_2(Z_n)) = \frac{\alpha}{2}$$

10.3 Определение 3

Доверительный интервал называется ***правосторонним*** или ***левосторонним***, если выполнено условие:
$P(\theta \geqslant \hat{\theta}_2(Z_n)) = \alpha$ или $P(\theta \leqslant \hat{\theta}_1(Z_n)) = \alpha$

Замечание

1. Можно визуализировать интервальную оценку следующим образом:

2. Интервальную оценку можно рассматривать в качестве оценки погрешности точеченой оценки $\hat{\theta}(Z_n)$, если строить доверительный интервал в форме:

$$[\hat{\theta}(Z_n) - \varepsilon_1; \hat{\theta}(Z_n) + \varepsilon_2]$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Построение доверительного интервала на основе центральной статистики

10.4 Определение 4

Статистика $G(Z_n;\theta)$ называется ***центральной***, если G *непрерывна* и *строго монотонна* по $\theta, \forall z_n \in S$, а ее распределение **не зависит** от θ.

Если распределение $F_G(Z_n;\theta)$ известно, то можно подобрать числа g_1, g_2 такие, что $P(g_1 \leqslant G(Z_n;\theta) \leqslant g_2) = 1 - \alpha$.

Например, для центрального доверительного интервала $g_1 = G_{\frac{\alpha}{2}}, g_2 = G_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантили уровней $\frac{\alpha}{2}$ и $1 - \frac{\alpha}{2}$.

Если $G(Z_n;\theta)$ *монотонно возрастает* по θ, то можно перейти к эквивалентному неравенству:

$$P(G^{-1}(Z_n;g_1) \leqslant \theta \leqslant G^{-1}(Z_n;g_2) = 1 - \alpha$$

Тогда границы интервальной оценки имеют вид:

$$\hat{\theta}_1(Z_n) = G^{-1}(Z_n; g_1), \hat{\theta}_2(Z_n) = G^{-1}(Z_n; g_2)$$

Замечание

Построение центральных статистик **довольно сложно**. В связи с чем зачастую используют **асимптотические распределения**, которые в силу ЦПТ тесно связаны с нормальным распределением.

10.5 Определение 5

Матрица $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется ***ортогональной***, если $C^T = C^{-1}$.

10.6 Лемма 1

Пусть $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — *ортогональная матрица*, $C_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}, j = \overline{1, n}$. Тогда

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{jk} \cdot C_{ik} = 0, j \neq i; i, j = \overline{1, n}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{ik}^2 = 1, i = \overline{1, n}$
3. Если $y = Cx$, то $\|y\| = \|x\|$
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{ik} = 0, i = \overline{2, n}$

Доказательство

Пункты *1* и *2* следуют из тождества

$$C^T \cdot C = I$$

3. $\|y\|^2 = (y, y) = (Cx, Cx) = (x, C^T Cx) = (x, x) = \|x\|^2$
4. Рассмотрим свойство *1* для $i = 1$. Тогда

$$0 = \sum_{k=1}^{n} C_{1k} \cdot C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} C_{ik} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} C_{ik}$$

■

10.7 Теорема 1 (ФИШЕРА)

Пусть Z_n — *однородная* выборка, порожденная распределением $N(m_X; \sigma_X^2)$. Тогда

1. $\frac{\overline{X}_n - m_X}{\sigma_X} \sqrt{n} \sim N(0; 1)$
2. $\frac{n \hat{d}_X(n)}{\sigma_X^2} \sim \chi(n-1)$

3. $\frac{\overline{X}_n - m_X}{\sqrt{\hat{d}_X(n)}}\sqrt{n-1} \sim t(n-1)$

4. $\overline{X}_n$ и $\hat{d}_X(n)$ **независимы**

Доказательство

.1) $\frac{\overline{X}_n - m_X}{\sigma_X}\sqrt{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}} X_k - \frac{m_X\sqrt{n}}{\sigma_X} = (\frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}} + \frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}}) \cdot Z_n - \frac{m_X\sqrt{n}}{\sigma_X}$.

Т.к. $Z_n \sim N(\begin{pmatrix} m_X \\ \vdots \\ m_X \end{pmatrix}; \sigma_X^2 I)$, то в силу Леммы 1.3

$\frac{\overline{X}_n - m_X}{\sigma_X}\sqrt{n} \sim N(m; \sigma^2)$, где $m = (\frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}}) \begin{pmatrix} m_X \\ \vdots \\ m_X \end{pmatrix} - \frac{m_X\sqrt{n}}{\sigma_X} = 0$

$$\sigma^2 = (\frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}})\sigma^2 I \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}} \end{pmatrix} = 1$$

.2) Построим матрицу $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ так, чтобы $C_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}, j = \overline{1,n}$; остальные строки выберем так, чтобы векторы $\begin{pmatrix} C_{11} \\ \vdots \\ C_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{21} \\ \vdots \\ C_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} C_{n1} \\ \vdots \\ C_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

образовывали *ортонормированный* базис, что возможно, т.к. вектор $\begin{pmatrix} C_{11} \\ \vdots \\ C_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$ всегда можно дополнить до *ортонормированного* базиса.

Тогда C удовлетворяет условиям Леммы 1.

Рассмотрим $Y = \frac{1}{\sigma_X} C Z_n$. Тогда $Y \sim N(m_Y; K_Y)$, где в силу Леммы 1.3 и Леммы 1, п.4:

$$m_Y = \frac{1}{\sigma_X} C(\sigma_X^2 I)\frac{1}{\sigma_X} C^T = CIC^T = CC^T = I$$

Т.о. $Y_1, \dots, Y_n$ — **некоррелированные** нормальные с.в.

Тогда в силу Леммы 1.4 $Y_1, \dots, Y_n$ *независимы*

$\frac{n\hat{d}_X(n)}{\sigma_X^2} = \frac{1}{\sigma_X^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{\sigma_X^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k^2 - 2X_k\overline{X}_n + \overline{X}_n^2) = \frac{1}{\sigma_X^2}(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2 - 2n\overline{X}_n(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) + n\overline{X}_n^2) = \frac{1}{\sigma_X^2}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{n}{\sigma_X^2}\overline{X}_n^2 \stackrel{*}{=}$

$Y_1 = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_X}\overline{X}_n$. Тогда с учетом Леммы 1

$\stackrel{*}{=} \frac{1}{\sigma_X^2}\|Z_n\|^2 - Y_1^2 = \frac{1}{\sigma_X^2}\|CZ_n\|^2 - Y_1^2 = \|\frac{1}{\sigma_X} Z_n\|^2 - Y_1^2 = \|Y\|^2 - Y_1^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k^2 - Y_1^2 = \sum\limits_{k=2}^{n} Y_k^2$, где $Y_k \sim N(0;1), k = \overline{2,n}$. Тогда по определению

$$\frac{n\hat{d}_X(n)}{\sigma_X^2} = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2 \sim \chi^2(n-1)$$

.4) Заметим, что $\overline{X}_n = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Y_1 = \varphi(Y_1)$, где Y_1 и $(Y_2, \dots, Y_n)^T$ **независимы**. Тогда **независимы** также $\varphi(Y_1)$ и $\psi(Y_2, \dots, Y_n)$, т.е. $\overline{X}_n$ и $\hat{d}_X(n)$

.3) $\frac{\overline{X}_n - m_X}{\sqrt{\hat{d}_X(n)}}\sqrt{n-1} = \frac{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}Y_1 - m_X}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}\sum\limits_{k=2}^{n}Y_k^2}}\sqrt{n-1} = \frac{Y_1 - \frac{m_X\sqrt{n}}{\sigma_X}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=2}^{n}Y_k^2}} \sim t(n-1)$, т.к.

$Y_1 - \frac{m_X\sqrt{n}}{\sigma_X} \sim N(0;1)$ и $Y_1, (Y_2, \dots, Y_n)^T$ **независимы**. ■

10.8 Пример 3

Построить интервальную оценку θ по однородной выборке Z_n, порожденной распределением $N(\theta; \sigma_X^2)$, если σ_X^2 *неизвестна*, уровня надежности $1-\alpha$

В силу Теоремы Фишера

$$G(Z_n;\theta) = \frac{\overline{X}_n - \theta}{\sqrt{\hat{d}_X(n)}}\sqrt{n-1} \sim (n-1)$$

Тогда

$1-\alpha = P(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant \frac{\overline{X}_n - \theta}{sqrt\hat{d}_X(n)}\sqrt(n-1) \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = P(\overline{X}_n - \sqrt{\frac{\hat{d}_X(n)}{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant \theta \leqslant \overline{X}_n + \sqrt{\frac{\hat{d}_X(n)}{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))$

Тогда интервальная оценка имеет вид:

$$[\overline{X}_n - \sqrt{\frac{\hat{d}_X(n)}{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); \overline{X}_n + \sqrt{\frac{\hat{d}_X(n)}{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)]$$

Заметим, что $\overline{X}_n$ — *точечная оценка* θ — лежит в середине интервала. При этом длина интервала $2\sqrt{\frac{\hat{d}_X(n)}{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ **возрастает** по σ_X^2 и **убывает** по α и n.

10.9 Пример 4

Пусть выборка Z_n порождена распределением $R(0;\theta)$. Пусть

$$G(Z_n;\theta) = (\frac{X^{(n)}}{\theta})^n$$

$F_G(x) = P((\frac{X^{(n)}}{\theta})^n \leqslant x) = P(X^{(n)} \leqslant \theta\sqrt[n]{x}) = F_{(n)}(\theta\sqrt[n]{x}) \overset{*}{=}$
в силу Следствия 6.1

$\overset{*}{=} (F_X(\theta\sqrt[n]{x}))^n = \begin{cases} 1^n, & \theta\sqrt[n]{x} \geqslant \theta, \\ 0^n, & 0 \leqslant 0, \\ -(\frac{\theta\sqrt[n]{x}-0}{\theta-0})^n, & 0 \leqslant (0;\theta) \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \geqslant 1, \\ 0, & x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases} \implies G(Z_n;\theta) \sim R(0;1)$

Тогда $G_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha}{2}, G_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1 - \frac{\alpha}{2}$,

$$1-\alpha = P(\frac{\alpha}{2} \leqslant (\frac{X^{(n)}}{\theta})^n \leqslant 1 - \frac{\alpha}{2}) = P(X^{(n)}(1-\frac{\alpha}{2})^{-\frac{1}{2}} \leqslant \theta \leqslant X^{(n)}(\frac{\alpha}{2})^{-\frac{1}{n}})$$

Интервальная оценка имеет вид:

$$[X^{(n)}(1-\frac{\alpha}{2})^{-\frac{1}{n}}; X^{(n)}(\frac{\alpha}{2})^{-\frac{1}{n}}]$$

Заметим, что точечная МП-оценка $\hat{\theta}(Z_n) = X^{(n)}$ **не лежит внутри** интервала.

11 Проверка статистических гипотез

11.1 Определение 1

Статистической гипотезой H называется любое предположение относительно закона распределения с.в. X, порождающей выборку Z_n.

11.2 Определение 2

Проверяемая гипотеза H_0 называется ***основной***. Конкурирующая с H_0 гипотеза H_1 называется ***альтернативой***.

11.3 Определение 3

Статистическим критерием или ***критерием согласия*** называется правило, в соответствии с которым по реализации выборки $z_n = Z_n(\omega)$ принимается или отвергается гипотеза H_0.

11.4 Примеры

Гипотеза о виде распределения

Пусть F_X — распределение, порождающее выборку Z_n, F — некоторая заданная функция распределения, $\mathbb{F}$ — некоторый заданный класс функций распределения.

Например, $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x-1), \mathbb{F} = \{F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-m}{\sigma}) : m \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$

Тогда можно рассмотреть

$H_0 : F_X(x) = F(x), x \in \mathbb{R}$ или $H_0 : F_X \in \mathbb{F}$

Гипотеза однородности

Пусть задано k выборок $Z^1_{n_1}, \dots, Z^k_{n_k}$.

Требуется определить, образуют ли они единую однородную выборку.

Если $F_i(x)$ — функция распределения, порождающая выборку $Z^i_{n_i}$, то

$$H_0 : F_1(x) = \dots = F_k(x)$$

Гипотеза независимости

Пусть Z^1_n, Z^2_n — *однородные* выборки, порождаемые с.в. X и Y соответственно с функциями распределения F_X и F_Y.

Через $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y); x, y \in \mathbb{R}$

Замечание

Для проверки гипотезы H_0 используется специальные статистики $T(Z_n)$, характеризующие отклонение наблюдения от теоретического предположения.

11.5 Определение 4

Обозначим через G ***множество всех возможных значений статистики*** T:

$$G = \{t : t = T(z_n), z_n \in S\}$$

11.6 Определение 5

Построим разбиение G на ***доверительную область*** $G_{\circ\alpha}$ ***и критическую область*** $G_{|\alpha}$ так, чтобы

$$G_{\circ\alpha} \cup G_{|\alpha} = G$$

$$G_{\circ\alpha} \cap G_{|\alpha} = \emptyset$$

$P(T(z_n) \in G_{|\alpha}|H_0) \leqslant \alpha, P(T(Z_n) \in G_{\circ\alpha}|H_0) \geqslant 1 - \alpha$ для некоторого $\alpha \in (0; 1)$.

Если H_0 принимается в случае, когда $T(Z_n) \in G_{|\alpha}$, то α называется ***уровнем значимости критерия***.

11.7 Определение 6

Ошибкой <u>первого</u> рода называется событие, когда H_0 *верна*, но она *отвергается* $\overline{T(z_n) \in G_{|\alpha}, H_0}$ **верно**.

11.8 Определение 7

Ошибкой <u>второго</u> рода называется событие, когда H_0 *неверно*, но она *принимается* $\overline{T(z_n) \in G_{\circ\alpha}, H_0}$ **неверно**.

Замечание

1. Если H_0 *принимается*, то это не значит, что H_0 верно. Это значит, что наблюдения $z_n = Z_n(\omega)$ ***согласуется*** с гипотезой H_0.

2. Для построения доверительной и критической областей необходимо знать

$$Law(T(Z_n)|H_0)$$

а также задать уровень значимости α

3. Структура критической области $G_{|\alpha}$ определяется алтернативой H_1

11.9 Определение 8

Пусть $\mathbb{F}$ — *множество всех распределений* $T(Z_n)$, *удовлетворяющих альтернативе* H_1. Тогда ***функцией мощности критерия*** $W : \mathbb{F} \to [0; 1]$ называется

$$W(F) = P(T(Z_n) \in G_{|\alpha}|Law(T(Z_n)) = F_)$$

Значение $W(F)$ называется ***мощностью критерия при альтернативе*** F.

11.10 Определение 9

Критерий называется ***несмещенным***, если $W(F) > \alpha, \forall F \in \mathbb{F}$.

Замечание

1. Для построения $W(F)$ необходимо знать $Law(T(Z_n)|F)$, что не всегда доступно.

2. Качество критерия определяется функцией мощности: чем выше мощность, тем чаще критерий отвергает H_0, если она *неверна*.

Критерий согласия Колмогорова

$H_0 : F_X(x) = F(x), x \in \mathbb{R}$
$H_1 : F_X(x_0) \neq F(x_0)$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$

$$T(Z_n) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x) - F(x)|$$

Данный критерий применяется для *непрерывных* $F(x)$.

$Law(T(Z_n)|H_0)$ известно. Для *малых* $n \in \mathbb{N}$ соответствующие квантили берутся из таблиц. При больших $n \in \mathbb{N}$ используют *асимптотическую аппроксимацию*:

$$F_{\sqrt{n}T(Z_n)|H_0}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} K(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

$K(x)$ — ***функция распределения Колмогорова***

Критерий согласия хи-квадрат Пирсона

Пусть для выборки Z_n построено разбиение $\mathbb{R}$:
$-\infty = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l < t_{l+1} = +\infty$, где
$t_1 \leqslant X^{(1)}, t_l > X^{(n)}$.
На построенном разбиении построим гистограмму:

$$\widehat{f}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (t_0, t_1) \cup [t_l; t_{l+1}), \\ \widehat{p}_k, & x \in [t_k; t_{k+1}), k = \overline{1, l-1} \end{cases}$$

Пусть $p_k = P(X \in [t_k; t_{k+1})|H_0) = F(t_{k+1}) - F(t_k), k = \overline{0, l}$.
Статистика критерия Пирсона имеет вид:

$$T_{\chi^2}(Z_n) = n \cdot \sum_{k=0}^{l} \frac{(\widehat{p}_k - p_k)^2}{p_k}$$

где $\widehat{p}_0 = \widehat{p}_l = 0$.

11.11 Теорема 1

Пусть $p_k \in (0; 1), k = \overline{0, l}$.
Тогда

$$Law(T_{\chi^2}(Z_n)|H_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi^2(l)$$

Замечание

1. **Высокая точность** приближения законом $\chi^2(l)$ **достигается** при $l \geqslant 5$ и $n \geqslant 50$.
2. Если у $F(x;\theta_1,\dots,\theta_5)$ теоретической функции распределения есть s *неизвестных параметров*, то

$$Law(T_{\chi^2}(Z_n)|H_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi^2(l-s)$$

Проверка гипотезы о значении параметра

Рассматривается выборка Z_n, порожденная распределением $N(m_X;\sigma_X^2)$
Рассмотрим $H_0 : m_X = m_0$ против
$H_1 : m_X \neq m_0, H_2 : m_X > m_0, H_3 : m_X < m_0$
1 случай: G_X^2 известна

$$T(Z_n) = \frac{(\overline{X}_n - m_0)}{\sigma_X}\sqrt{n}, Law(T(Z_n)|H_0) = N(0;1)$$

$$G_{1\alpha} = (-\infty; u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$$

$$G_{2\alpha} = (u_{1-\alpha}; +\infty), G_{3\alpha} = (-\infty; U_\alpha)$$

2 случай: G_X^2 неизвестна

$$T(Z_n) = \frac{(\overline{X}_n - m_0)}{\sqrt{\hat{d}_X(n)}}\sqrt{n-1}, Law(T(Z_n)|H_0) = t(n-1)$$

$$G_{1\alpha} = (-\infty; t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); +\infty)$$

$$G_{2\alpha} = (t_{1-\alpha}(n-1); +\infty), G_{3\alpha} = (-\infty; t_\alpha(n-1))$$

Рассмотрим $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_X^2$ против
$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_0^2$
1 случай: m_X известна

$$T(Z_n) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - m_X)}{\sigma_0^2}, Law(T(Z_n)|H_0) = \chi^2(n)$$

2 случай: m_X неизвестна

$$T(Z_n) = \frac{n\hat{d}_X(n)}{\sigma_0^2}, Law(T(Z_n)|H_0) = \chi^2(n-1)$$

12 Метод наименьших квадратов

В рамках регрессионного анализа рассматривается задача восстановления зависимости $Y = \varphi(x)$ по набору наблюдений $Y_1, \dots, Y_n$, которые предполагаются **защищенными**.

12.1 Определение 1

Линейной регрессионной моделью называется класс линейных по набору неизвестных параметров $\theta \in \mathbb{R}^s$ функций:

$$\varphi(x;\theta) = \theta_1\varphi_1(x) + \dots + \theta_s\varphi_s(x)$$

12.2 Определение 2

Схемой Гаусса-Маркова называется модель наблюдения линейной регрессионной модели при наличии случайных ошибок наблюдения:

$$Y_k = \theta_1\varphi_1(x) + \dots + \theta_s\varphi_s(x_k) + \varepsilon_k, k = \overline{1,n}$$

ИЛИ

$Y = X\theta + E$, где $X = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_s(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_s(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times s}$

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)^T \in \mathbb{R}^s, Y = (Y_1, \dots, Y_s)^T \in \mathbb{R}^n$$

$$E = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

где X называется ***регрессионной матрицей***. Предполагается, что

$$M[E] = 0, K_E = \sigma^2 \cdot I$$

12.3 Определение 3

МНК-оценкой вектора θ называется

$$\hat{\theta}(Y) = \underset{\theta}{argmin}(Y - X\theta)^T(Y - X\theta) = \underset{\theta}{argmin}(\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \theta_1\varphi_1(x_k) - \dots - \theta_s\varphi_s(x_k))^2)$$

12.4 Теорема 1 (Гаусса-Маркова)

Пусть матрица $X \in \mathbb{R}^{n \times s}$ такая, что $det(X^TX) \neq 0$
Тогда

1. МНК-оценка $\hat{\theta}(Y)$ существует, ***единственна*** и определяется соотношением:

$$\hat{\theta}(Y) = (X^TX)^{-1}X^TY$$

2. МНК-оценка $\hat{\theta}(Y)$ ***несмещенная*** обладает **наименьшей дисперсией** в классе линейных по Y и *несмещенных* оценок по координатам.

3. Ковариационная матрица $\hat{\theta}$ имеет вид

$$K_{\hat{\theta}} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

Доказательство

1.
$$J(\theta) = (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) = Y^T Y - 2Y^T X\theta + \theta^T X^T X\theta \longrightarrow \min_{\theta}$$

$J(\theta)$ — квадратичная функция. При этом $H_J = 2X^T X$ — *матрица Гессе* **невырождена** и **положительно определена**:

Пусть $x \in \mathbb{R}^s \backslash \{0\}$. Тогда $x^T(2X^T X)x = 2(Xx, Xx) > 0$.

Т.о. $J(\theta)$ имеем *единственный экстремум* — точку **минимума**, которая может быть найдена из необходимых условий:

$$\nabla_\theta J(\theta) = -(2Y^T X)^T + 2X^T \cdot X\theta = 0$$

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

2. $M[\hat{\theta}] = M[(X^T X)^{-1} X^T Y] = (X^T X)^{-1} X^T M[X\theta + E] = (X^T X)^{-1} X^T X\theta + (X^T X)^{-1} X^T \cancelto{0}{M[E]} = \theta$

Рассмотрим произвольную несмещенную линейную оценку $\tilde{\theta} = AY$, где $A \in \mathbb{R}^{s \times n}$

Тогда $\forall \theta \in \mathbb{R}^s$

$$\theta = M[\tilde{\theta}] = M[AX\theta + AE] = AX\theta + AM[E] = AX\theta$$

Откуда $AX = I$

$K_{\tilde{\theta}} = M[(\tilde{\theta} - \theta)(\tilde{\theta} - \theta)^T] = M[(AY - \theta)(AY - \theta)^T] = [(\cancel{AX\theta} - AX - \cancel{\theta})(\cancel{AX\theta} - AE - \cancel{\theta})^T] \overset{AX=I}{=} M[AEE^T A^T] = AK_E A^T = \sigma^2 AA^T$ $\qquad (*)$

$AA^T = (A - ((X^T X)^{-1} X^T) + ((X^T X)^{-1} X^T))(A - (X^T X)^{-1} X^T + (X^T X)^{-1} X^T)^T = (A - (X^T X)^{-1} X^T)(A - (X^T X)^{-1} X^T)^T + (A - (X^T X)^{-1} X^T) X (X^T X)^{-1} + (X^T X)^{-1} X^T (A - (X^T X)^{-1} X^T)^T + (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} = (A - (X^T X)^{-1} X^T)(A - (X^T X)^{-1} X^T)^T + AX(X^T X)^{-1} - (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} + (X^T X)^{-1} X^T A^T - (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} + (X^T X)^{-1} \overset{AX=I}{=} (A - (X^T X)^{-1} X^T)(A - (X^T X)^{-1} X^T)^T + (X^T X)^{-1}$

т.к. $(A - (X^T X)^{-1} X^T)(A - (X^T X)^{-1} X^T)^T \geqslant 0$, то все ее диагональные элементы, которые и определяют $D[\theta_k], k = \overline{1, s}$, **неотрицательны**. Тогда *минимальное* значение $D[\theta_k], \forall k = \overline{1, s}$ достигается, если

$(A - (X^T X)^{-1} X^T)(A - (X^T X)^{-1} X^T)^T = 0$, т.е.

$$A = (X^T X)^{-1} X^T$$

ИЛИ

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}$$

3. Если положить $A = (X^T X)^{-1} X^T$ то из $(*)$ следует, что

$K_{\hat{\theta}} = \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$. ■

Замечание

Теорема 1 гарантирует свойства МНК-оценки для любых коррелированных шумов.

Нормальная регрессия

12.5 Определение 4

Схема Гаусса-Маркова называется ***нормальной регрессией***, если $E \sim N(0; \sigma^2 I)$.

12.6 Лемма 1

В нормальной регрессии

$$\hat{\theta} \sim N(\theta; \sigma^2 (X^T X)^{-1})$$

Доказательство

Доказательство следует из Леммы 1.3 и Теоремы 1 п.2, п.3. ■

12.7 Лемма 2

В нормальной регрессии МНК-оценка и МП-оценка ***совпадают***

Доказательство

В силу Леммы 1.3 $Y \sim N(X\theta; \sigma^2 I)$
Тогда функция правдоподобия по определению имеет вид

$$L(y;\theta) = f_Y(y;\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\sigma^2 I)}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\theta)^T (y - X\theta)\}$$

откуда $\underset{\theta}{argmax} L(Y;\theta) = \underset{\theta}{argmin} (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) = \hat{\theta}$. ■

12.8 Следствие 1

В нормальной регрессии МНК-оценка $\hat{\theta}$ ***эффективна***, т.е. *оптимальна* в классе всех *несмещенных* оценок.

Доказательство

Доказательство следует из Леммы 2 и Теоремы 8.1. ■

12.9 Лемма 3

В нормальной регрессии МП-оценка σ^2 имеет вид

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \|Y - X\hat{\theta}\|$$

Доказательство

$\ln L(Y;\theta;\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{(Y-X\theta)^T(Y-X\theta)}{2\sigma^2}$,

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(Y;\theta;\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{(Y-X\theta)^T(Y-X\theta)}{2(\sigma^2)^2} = 0, \\ \nabla_\theta \ln L(Y;\theta;\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X^TY + 2X^TX\theta) = 0 \end{cases}$$

Откуда $\hat\theta = (X^TX)^{-1}X^TY$ — МНК-оценка,

$$\hat\sigma^2 = \frac{1}{n}(Y - X\hat\theta)^T(Y - X\hat\theta)$$

■

12.10 Определение 5

Вектором остатков называется

$$\hat E = Y - X\hat\theta$$

12.11 Лемма 4

В нормальной регрессии $\hat E \sim N(0;\sigma^2(I - X(X^TX)^{-1}X^T))$

Доказательство

$\hat E = Y - X\hat\theta = X\theta + E - X(X^TX)^{-1}X^T(X\theta + E) = X\theta + E - X(X^TX)^{-1}X^TX\theta - X(X^TX)^{-1}X^TE = (I - X(X^TX)^{-1}X^T)E$.

Тогда в силу Леммы 1.3 $m_{\hat E} = 0$

$K_{\hat E} = (I - X(X^TX)^{-1}X^T)\sigma^2 I(X - X(X^TX)^{-1}X^T)^T = \sigma^2(I - 2X(X^TX)^{-1}X^T + X(X^T)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1}X^T) = \sigma^2(I - (X(X^TX)^{-1}X^T))$. ■

12.12 Лемма 5

В нормальной регрессии $\hat\theta$ и $\hat E$ **независимы**

Доказательство

В силу Леммы 1.4 достаточно показать, что $\hat\theta$ и $\hat E$ *некоррелированы.*

$K_{\hat\theta\hat E} = \mathrm{cov}(\hat\theta, Y - X\hat\theta) = \mathrm{cov}(\hat\theta, Y) - \mathrm{cov}(\hat\theta,\hat\theta)\cdot X^T \overset{*}{=}$

с учетом Леммы 1 и Теоремы 1

$\overset{*}{=} \mathrm{cov}((X^TX)^{-1}X^TY, Y) - \sigma^2(X^TX)^{-1}X^T = (X^TX)^{-1}X^T\mathrm{cov}(X\theta + E, X\theta + E) - \sigma^2(X^TX)^{-1}X^T = (X^TX)^{-1}X^T\sigma^2 I - \sigma^2(X^TX)^{-1}X^T = 0$. ■

12.13 Лемма 6

В нормальной регрессии

$$\frac{\|\hat E\|^2}{\sigma^2} = n\cdot\frac{\hat\sigma^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-s)$$

Доказательство

Пусть $E_0 = \frac{E}{\sigma}$ Тогда $E_0 \sim N(0; I)$

$\frac{\|\hat{E}\|^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\|Y - X(X^TX)^{-1}X^TY\|^2 = \frac{1}{\sigma^2}\|X\theta + E - X(X^TX)^{-1}X^TX\theta - X(X^TX)^{-1}X^TE\|^2 = \frac{1}{\sigma^2}\|(I - X(X^TX)^{-1}X^T)E\|^2 = E_0^TAE_0$, где

$A = (I - X(X^TX)^{-1}X^T)^T(I - X(X^TX)^{-1}X^T) = I - 2X(X^TX)^{-1}X^T + X(X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1}X^T = I - X(X^TX)^{-1}X^T$. Откуда следует, что $A^2 = A$.

Т.к. $A^T = A$ и $A \geqslant 0$, то все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *неотрицательны*, а переход в нормальный жорданов базис описывается ортогональным преобразованием C:

$$C^T = C^{-1}, A = C^T diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)C$$

Тогда

$$A^2 = C^T diag(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)C$$

Из $A^2 = A$ следует, что $\lambda_i = \lambda_i^2, i = \overline{1, n}$, т.е. $\lambda_i \in \{0; 1\}$

Тогда

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

где $m = rgA$

$\frac{\|\hat{E}\|^2}{\sigma^2} = E_0^TC^T \cdot \Lambda CE_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\varepsilon_i}^2$, где с учетом Леммы 1.3

$CE_0 = (\tilde{\varepsilon_1}, \dots, \tilde{\varepsilon_n}) \sim N(0, CIC^T) = N(0; I)$

Т.о. по определению $\frac{\|\hat{E}\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m)$

Т.к. $tr(AB) = tr(BA), \forall A, B^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, то

$tr(A) = tr(C^T\Lambda C) = tr(CC^T\Lambda) = tr(\Lambda) = m = rgA$

$m = tr(I - X(X^TX)^{-1}X^T) = n - tr(X(X^TX)^{-1}X^T) = n - tr(X^TX(X^TX)^{-1}) = n - tr(\underset{s \times s}{I}) = n - s$. ■

12.14 Лемма 7

В нормальной регрессии

$$\frac{\hat{\theta}_k - \theta_k}{\|\hat{E}\|\sqrt{\alpha_k}} \cdot \sqrt{n - s} \sim t(n - s)$$

где α_k — элемент на главной диагонали матрицы $(X^TX)^{-1}$

Доказательство

Из Леммы 1 следует, что $\hat{\theta}_k \sim N(\theta_k, \sigma^2\alpha_k)$

Тогда

$\frac{\hat{\theta}_k - \theta_k}{\sigma\sqrt{\alpha_k}} \sim N(0; 1)$

С учетом определения распределения Стьюдента и Леммы 5, и Леммы 6

$\frac{\hat{\theta}_k - \theta_k}{\|\hat{E}\|\sqrt{\alpha_k}} \cdot \sqrt{n - s} = \frac{\frac{\hat{\theta}_k - \theta_k}{\sigma\sqrt{\alpha_k}}}{\sqrt{\frac{1}{n-s}\frac{\|\hat{E}\|^2}{\sigma^2}}} \sim t(n - s)$. ■

12.15 Лемма 8

В нормальной регрессии
$\frac{\varphi(x;\hat{\theta}_k)-\varphi(x;\theta_k)}{\|\hat{E}\|\sqrt{\alpha_k}} \cdot \sqrt{n-s} \sim t(n-s)$, где
$\alpha(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_s(x))(X^T X)^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_s(x) \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$

Доказательство

Из Леммы 1 следует, что

$$\varphi(x;\hat{\theta}) = \hat{\theta}\varphi_1(x) + \dots + \hat{\theta}_s\varphi_s(x) \sim N(\varphi(x;\theta); \alpha(x)\sigma^2)$$

Тогда
$\frac{\varphi(x;\hat{\theta}_k)-\varphi(x;\theta_k)}{\sigma\sqrt{\alpha_k}} \sim N(0;1)$.
С учетом лемм 5 и 6, определения Стьюдента
$\frac{\varphi(x;\hat{\theta}_k)-\varphi(x;\theta_k)}{\|\hat{E}\|\sqrt{\alpha_k}} = \frac{\frac{\varphi(x;\hat{\theta}_k)-\varphi(x;\theta_k)}{\sigma\sqrt{\alpha_k}}}{\sqrt{\frac{1}{n-s}\frac{\|\hat{E}\|^2}{\sigma^2}}} \sim t(n-s)$. ■

Замечание

Леммы *6, 7, 8* позволяют построить доверительные интервалы для $\theta_1, \dots, \theta_s, \sigma^2, \varphi(x;\theta)$.

Для построения точеченой оценки $\theta_1, \dots, \theta_s$ и $\varphi(x;\theta)$ используется Теорема 1, для точечной оценки — Лемма 3.

Зачастую в качестве $\varphi_k(x)$ рассматривают $\varphi_k(x) = x^{k-1}$. Однако порядок многочлена s, как правило, несмещен. Для его определения можно использовать ***критерий Фишера***:

Критерий Фишера

$$H_0 : \theta_k = 0$$

$$H_1 : \theta_k \neq 0$$

$$T(Y) = \frac{\hat{\theta}_k^2}{\alpha_k\|\hat{E}\|^2}(n-s)$$

где α_k — k-й элемент на главной диагонали матрицы $(X^T X)^{-1}$.

$$Law(T(Y)|H_0) = F(1, n-s)$$

$$G_{\circ\alpha} = [0; F_{1-\alpha}(1; n-s))$$

$$G_{|\alpha} = [F_{1-\alpha}(1; n-s); +\infty)$$