Лекции
по курсу *”Математическая Статистика”*

Ибрагимов Д. Н.

Contents

Источники

- Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. “Математическая статистика”, изд. “Высшая школа”, 1984
- Кибзун А. И., Наумов А. В., Горяинова Е. Р. “Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами”, изд “ФИЗМАТЛИТ”, 2013
- Панков А. Р., Платонов Е. Н. “Практикум по математической статистике”, изд. “МАИ”, 2006

1 Многомерное нормальное распределение

Замечание

Вектор $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ называется ***случайным***, если $X_1, \dots, X_n$ — *случайные величины (далее **с.в**)*, определенные на одном вероятностном пространстве.

Через $M[X] = m_X$ обозначим ***вектор математического ожидания***:

$$M[X] = m_X = \begin{pmatrix} M[X_1] \\ \vdots \\ M[X_n] \end{pmatrix}$$

Через K_x обозначим *ковариационную матрицу* с.в X:

$$K_X = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \dots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \dots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

1.1 Лемма 1

Пусть $K_X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — ковариационная матрица с.в X. Тогда:

1. $K_X \geqslant 0$, т.е. $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, x^T K_X x \geqslant 0$;
2. $K_X^T = K_X$

1.2 Определение 1

Случайный вектор $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ называется ***невырожденным нормальным вектором***:

$$X \sim N(m_X, K_X)$$

если совместная плотность вероятности имеет вид:

$$f_X(x) = ((2\pi)^n \det K_X)^{\frac{-1}{2}} \exp\{\frac{-1}{2}(x - m_X)^T K_X^{-1}(x - m_X)\}$$

где $m_X \in \mathbb{R}^n, K_X \in \mathbb{R}^{n \times n}, K_X > 0, K_x^T = K_X$

1.3 Лемма 2

Пусть X — невырожденный нормальный вектор с параметрами m_X и K_X.
Тогда $M[X] = m_X$, а K_X — корвариационная матрица X.
Рассмотрим основные свойства многомерного нормального распределения.

1.4 Лемма 3

Пусть $X \sim N(m_X, K_X), A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$.
Тогда:

$$\begin{aligned} Y = AX + b \sim N(m_Y, K_Y), \\ m_Y = Am_X + b, \\ K_Y = AK_XA^T. \end{aligned}$$

1.5 Лемма 4

Пусть $X \sim N(m_X, K_X)$.
Тогда компоненты вектора X ***независимы*** тогда и только тогда, когда они *некоррелированы.*

note

Доказательство данных утверждений при помощи аппарата функций распределения и плотности довольно сложно. Поэтому рассмотрим аппарат характеристических функций.

1.6 Определение 2

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ – случайный вектор.
Тогда ***характеристической функцией*** называется:

$$\psi_X(\lambda) = M[e^{i\lambda^T X}] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda^T X} dF_X(x)$$

Замечание

Характеристическая функция определена для любого случайного вектора или с.в.
Если с.в **дискретная**, то:

$$\psi_X(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\lambda X_k} p_k$$

Если с.в **абсолютно непрерывная**, то

$$\psi_X(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda X} f_X(x) dx$$

В этом случае $\psi_X(\lambda)$ является ***преобразованием Фурье*** f_X.
Поскольку преобразование Фурье взаимно однозначно, а f_X однозначно определяет распределение, то характеристическая функция $\psi_X(x)$ также однозначно определяет распределение с.в X.

Причем:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda^T X} \psi_X(x) d\lambda$$

1.7 Лемма 5

Пусть X – случайный вектор, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$.
Тогда:

1. для $Y = AX + b$
$$\psi_Y(\lambda) = e^{i\lambda^T b} \psi_X(A^T \lambda)$$
2. компоненты вектора X ***независимы*** тогда и только тогда, когда
$$\psi_Y(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(\lambda_k)$$

Доказательство

1. $\psi_Y(\lambda) = M[e^{i\lambda^T Y}] = M[e^{i\lambda^T AX} e^{i\lambda^T b}] = e^{i\lambda^T b} M[e^{i(A^T\lambda)^T X}] = e^{i\lambda^T b} \psi_X(A^T \lambda)$
2. $\psi_X(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} \ldots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)} f_X(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdot \cdots \cdot dx_n = \{\text{н/з}\} = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_1 x_1} \cdot \cdots \cdot e^{\lambda_n x_n} \cdot$ $f_{X_1}(x) \cdot \cdots \cdot f_{X_n} dx_1 \cdot \cdots \cdot dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_1 x_1} f_{x_1}(x_1) dx_1 \cdot \cdots \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_n x_n} f_{x_n}(x_n) dx_n = \prod_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(\lambda_k)$

■

Замечание

При помощи характеристической функции можно дать другое определение нормального распределения. В том числе для вырожденного K_X.

1.8 Определение 3

Случайный вектор X называется ***нормальным***: $X \sim N(m_X, K_X)$, если:

$$\psi_X(\lambda) = \exp\{i\lambda^T m_X - \frac{1}{2}\lambda^T K_X \lambda\}$$

1.8.1 Доказательство леммы 3

В силу Лемма 5 *(пункт 1)*

$$\psi_Y(\lambda) = e^{i\lambda^T b} \psi_X(A^T \lambda) = e^{i\lambda^T b} \exp\{i\lambda^T A m_x - \frac{1}{2}\lambda^T A K_X A^T \lambda\} =$$
$$= \exp\{i\lambda^T (A m_x + b) - \frac{1}{2}\lambda^T (A K_x A^T)\lambda\}$$

■

1.8.2 Доказательство леммы 4

Пусть $X_i, \dots, X_n$ *попарно некоррелированы.* Тогда $cov(X_i, X_j) = 0, i \neq 0$, т.е. :

$$K_x = diag(\sigma^2_{X_1}, \dots, \sigma^2_{X_n}) =$$
$$= \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma^2_{X_n} \end{pmatrix}$$

$\psi_X(\lambda) = \exp\{i\lambda_1 m_{X_1} + \dots + i\lambda_n m_{X_n} - \frac{1}{2}\lambda^T K_X \lambda\} = \exp\{i\lambda_1 m_{X_1} + \dots + i\lambda_n m_{X_n} - \frac{1}{2}(\lambda_1^2\sigma^2_{X_1} + \dots + \lambda_n^2\sigma^2_{X_n})\} = \prod\limits_{k=1}^{n} \exp\{i\lambda_n m_{X_n} - \frac{1}{2}\lambda_k^2\sigma^2_{K_n}\} = \prod\limits_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(\lambda_k)$.

Откуда с учетом Лемма 5 *(пункт 2)* $X_1, \dots, X_n$ — н/з.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — н/з. Тогда $X_1, \dots, X_n$ *попарно некоррелированы.* ■

Замечание

Поскольку K_X — невырожденная, симметричная и положительноопределенная, то существует $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — *ортогональная* (т. е. $S^T = S^{-1}$) такая, что:

$$S^T K_X S = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

где $\lambda_i > 0, i = \overline{1,n}$

Определим матрицу $\Lambda^{-\frac{1}{2}} = diag(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}})$.

Рассмотрим вектор

$$Y = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T (X - m_X)$$

Тогда $A = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T, b = -\Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T m_X$.

В силу Лемма 3:

$$m_Y = Am_X + b = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T - \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T m_X = 0,$$
$$K_Y = AK_X A^T = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T K_X S \Lambda^{-\frac{1}{2}} = I,$$

т. е. $Y \sim N(0, I)$.

При помощи невырожденного линейного преобразования с.в. X может быть преобразован в стандартный нормальный вектор.

Верно и обратное:

$$X = m_X + S\Lambda^{\frac{1}{2}} Y,$$

откуда следует Лемма 2.

2 Теорема о нормальной корреляции

2.1 Определение 1

Условным математическим ожиданием абсолютно непрерывного случайного вектора X относительно абсолютно непрерывного случайного вектора Y называется:

$$M[X \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid Y) dx,$$

где $f_{X|Y}(x \mid Y) = \frac{f_z(x,Y)}{f_y(Y)}, z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

2.2 Основные свойства условного М. О.

2.2.1 Свойство 1

$\boxed{M[C \mid Y] = C}$

Доказательство

$M[C \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C f_{X|Y}(x \mid Y) dx = \frac{C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_z(x,Y) dx}{f_Y(Y)} = C \frac{f_Y(Y)}{f_Y(Y)} = C.$ ■

2.2.2 Свойство 2

$\boxed{M[X\phi(Y)|Y] = \phi(Y) M[X \mid Y]}$

Доказательство

$M[\phi(Y)X \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(Y) X f_{X|Y}(x \mid Y) dx = \phi(Y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid Y) dx =$
$= \phi(Y) M[X \mid Y].$ ■

2.2.3 Свойство 3

$\boxed{M[\alpha X_1 + \beta X_2 \mid Y] = \alpha M[X_1 \mid Y] + \beta M[X_2 \mid Y]}$

2.2.4 Свойство 4

Пусть X, Y – *независимые*. Тогда $\boxed{M[X \mid Y] = M[X]}$

Доказательство

$M[X \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid Y) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_z(x,Y)}{f_Y(Y)} dx = \int\limits_{-\infty} +\infty x \frac{f_X(x) f_Y(Y)}{f_Y(Y)} dx = M[X].$ ■

2.2.5 Свойство 5

$\boxed{M[M[X \mid Y]] = M[X]}$ ***(формула повторного М. О.)***

Доказательство

$M[M[X \mid Y]] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} M[X \mid Y] f_Y(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_Y(y) f_z(x,y)}{f_Y(y)} dydx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_z(x,y)dydx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = M[X].$ ■

2.3 Лемма 1

Пусть X, Y — случайные векторы с конечными вторыми моментами. Тогда:
$M[(X - \hat{X})\phi(Y)^T] = 0$
где $\hat{X} = M[X \mid Y]$

Доказательство

$M[(X - \hat{X})\phi(Y)^T] = M[X\phi(Y)^T] - M[M[X \mid Y]\phi(Y)^T] =$
= по Свойство 2 $= M[X\phi(Y)^T] - M[M[X\phi(Y)^T \mid Y]] =$ по Свойство 5 $= M[X\phi(Y)^T] - M[X\phi(Y)^T] = 0.$ ■

Замечание

Если рассмотреть евклидово пространство $\mathbb{L}_2(\Omega)$ со скалярным произведением:

$$(X, Y) = M[X \cdot Y]$$

то *условное* М. О. — ***оператор ортогонального проектирования*** X на подпространство, порождаемое Y.

2.4 Определение 2

Оценкой X ***по наблюдениям*** Y называется любая измеримая функция $\phi(Y)$.

2.5 Определение 3

Оценка $\hat{X}$ ***называется с.к.-оптимальной оценкой*** X, если для любой другой оценки $\tilde{X}$ верно

$$M[|\tilde{X} - \hat{X}|^2] \leqslant M[|X - \tilde{X}|^2]$$

2.6 Теорема 1

$M[X \mid Y]$ — ***с.к.-оптимальная оценка*** X ***по наблюдениям*** Y.

Доказательство

$M[|X-\tilde{X}|^2] = M[|X-\hat{X}+\hat{X}-\tilde{X}|^2] = M[|X-\hat{X}|^2] + 2M[(X-\hat{X})^T(\hat{X}-\tilde{X})] + M[|\hat{X}-\tilde{X}|^2] \stackrel{*}{=}$

Поскольку по определению $\tilde{X}-\hat{X} = \phi(Y)$, то в силу Лемма 1 $M[(X-\hat{X})^T(\tilde{X}-\hat{X})] = 0$.

$\stackrel{*}{=} M[|X-\hat{X}|^2] + M[|\hat{X}-\tilde{X}|^2] \geqslant M[|X-\hat{X}|^2]$. ■

2.7 Теорема 2 (О нормальной корреляции)

Пусть

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K_X & K_{XY} \\ K_{XY}^T & K_Y \end{pmatrix}\right)$$

Тогда

1. $Law(X \mid Y) = N(\mu(Y), \Delta)$,

где

$$\mu(Y) = M[X \mid Y] = m_X + K_{XY}K_Y^{-1}(Y - m_Y)$$

$$\Delta = K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{YX}$$

2. $M[|X-\mu(Y)|^2] = tr(K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{YX})$

Доказательство

Рассмотрим линейное преобразование Y:

$$\mu(Y) = m_X + K_{XY}K_Y^{-1}(Y - m_Y)$$

В силу Лемма 1 *(пункт 3)*

$X - \mu(Y) = (I - K_{XY}K_Y^{-1})\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - m_X + K_{XY}K_Y^{-1}m_Y \sim N(\mu, K)$

$\mu = (I - K_{XY}K_Y^{-1})\begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix} - m_X + K_{XY}K_Y^{-1}m_Y = 0$

$K = (I - K_{XY}K_Y^{-1})\begin{pmatrix} K_X & K_{XY} \\ K_{XY}^T & K_Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ -(K_{XY}K_Y^{-1})^T \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{XY}^T & K_{XY} - K_{XY}K_Y^{-1}K_Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ K_Y^{-1}K_{XY}^T \end{pmatrix} =$

$= K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{XY}^{-1} = \Delta$

$cov(X-\mu(Y), Y) = cov(X, Y) - cov(\mu(Y), Y) = cov(X, Y) - cov(K_{XY}K_Y^{-1}Y + m_X - K_{XY}K_Y^{-1}m_Y, Y) = cov(X, Y) - K_{XY}K_Y^{-1}cov(Y, Y) = K_{XY} - K_{XY}K_Y^{-2}K_Y = 0$

т.е. $X - \mu(Y)$ и Y **некорреливаны**.

Тогда в силу Лемма 1 *(пункт 2)* $X - \mu(Y)$ и Y **независимы**. Построим характеристическую функцию условного распределения X относительно Y:

$\psi_{X|Y}(\lambda \mid Y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda^T X} f_{X|Y}(x \mid Y)dx = M[e^{i\lambda^T X} \mid Y] = M[e^{i\lambda^T (X-\mu(Y))} e^{i\lambda^T \mu(Y)} \mid Y] \stackrel{*}{=}$

в силу Лемма 2 и *независимости* $X - \mu(Y)$ и Y

$\stackrel{*}{=} M[e^{i\lambda^T (X-\mu(Y))} \mid Y] \cdot M[e^{i\lambda^T \mu(Y)} \mid Y] = M[e^{i\lambda^T (X-\mu(Y))}] e^{i\lambda^T \mu(Y)} = \psi_{X-\mu(Y)}(\lambda) e^{i\lambda^T \mu(Y)} = \exp\{-\frac{1}{2}\lambda^T \Delta\lambda\} \cdot \exp\{i\lambda^T \mu(Y) - \frac{1}{2}\lambda^T \Delta\lambda\}$

т.е. Условное распределение ***нормальное***:

$$X(Y \sim N(\mu(Y), \Delta)$$

Вычислим с.к. ошибку:

$M[|X-\mu(Y)|^2] = M[\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 + \dots + \Delta X_n^2] = \sum\limits_{k=1}^{n} M[\Delta X_k^2] = \sum\limits_{k=1}^{n} D[\Delta X_k] = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{kk} = tr\Delta$. ■

Замечание

1. Из Теорема 2 (О нормальной корреляции) следует, что в *гауссовском* случае с.к.-оптимальная оценка является ***линейной***.

2. Если X и Y — *независимы*, то с.к.-оптимальная оценка — m_X.

3. С.к.-оптимальная оценка ***несмещенная***, т.к. $M[X - \mu(Y)] = 0$.

3 Виды сходимости последовательностей случайных величин

3.1 Определение 1

Говорят, что $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует ***последовательность случайных величин***, если $\forall N \in \mathbb{N}$ X_n определены на одном вероятностном пространстве.

3.2 Определение 2

Говорят, что последовательность с.в. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***сходится по вероятности*** к с.в. X, если $\forall\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leqslant \varepsilon) = 1$$

или

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

3.3 Определение 3

Говорят, что последовательность с.в. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***сходится почти наверное*** к с.в. X, если

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} X(\omega)\}) = 0$$

или

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\}) = 1$$

3.4 Определение 4

Говорят, что последовательность с.в. $\{X\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***сходится в среднем квадратическом*** к с.в. X, если

$$M[|X_n - X|^2] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3.5 Пример 1

Пусть $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — случайная последовательность.

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 - \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

$P(\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq 0\}) = P(\{\omega : \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geqslant N : X_n(\omega) = n\}) = P(\prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) = n\}) \overset{*}{=}$

1. $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\{\omega : X_n(\omega) = n\} \subset \sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega : X_n(\omega) = n\}$

2. $P(\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega : X_n(\omega) = n\} \leqslant \sum\limits_{n=N}^{\infty} P(\{\omega : X_n(\omega) = n\}) = \sum\limits_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

Тогда в силу *аксиомы непрерывности* $\overset{*}{=} 0$, т.е. $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$

3.6 Пример 2

Рассмотрим ту же последовательность. Выберем $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - 0| \leqslant \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \geqslant n \\ 1 - \frac{1}{n^2}, & \varepsilon \in (0; n) \end{cases}$$

Тогда $X_n \xrightarrow{P} 0$

3.7 Пример 3

Рассмотрим ту же последовательность:

$M[|X_n - 0|^2] = M[X_n^2] = 0^2(1 - \frac{1}{n^2}) + n^2\frac{1}{n^2} = 1 \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$

Тогда $X_n \not\xrightarrow{\text{с.к.}} 0$

3.8 Пример 4

Пусть $f_{nk} : [0; 1] \longrightarrow \{0; 1\}, n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, n},$

$$f_{n,k} = \begin{cases} 0, & t \notin [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}], \\ 1, & t \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]. \end{cases}$$

Пусть $X \sim R(0; 1)$. Рассмотрим последовательность с.в. $X_{nk} = f_{nk}(X)$. $\forall\omega \in \Omega X(\omega) \in [0; 1]$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \exists k = \overline{1, n}$ такое, что $X(\omega) \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]$. Т.е. если $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ найдется $k = \overline{1, n}$ такой, что

$$|f_{nk}(X(\omega)) - 0| > \varepsilon$$

Тогда $X_{nk}(\omega) \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.е.

$$\{\omega : \lim_{n,k\to\infty} X_{nk}(\omega) = 0\} = \emptyset$$

$$X_{nk} \not\xrightarrow{\text{п. н.}} 0$$

При этом $\forall\varepsilon > 0$

$$R(|X_{nk}-0|>\varepsilon)=\begin{cases}0, & \varepsilon\geqslant 1,\\ P(X\in[\frac{k-1}{n}, \quad \frac{k}{n}]), \varepsilon\in(0;1)\end{cases}=\begin{cases}0, & \varepsilon\geqslant 1,\\ \frac{1}{n}, & \varepsilon\in(0;1)\end{cases}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$X_{nk}\xrightarrow{P}0$$

$M[|X_{nk}-0|^2]=M[X_{nk}]=M[f_{nk}(X)]=\int\limits_0^1 f_{nk}(x)f_x(x)dx=\int\limits_0^1 f_{nk}(x)dx=\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 1dx=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

$$X_{nk}\xrightarrow{\text{с.к}}0$$

3.9 Пример 5

Рассмотрим последовательность с.в. $Y_{n_1k}=nK_{n_1k}$ Тогда $Y_{n_1k}\xrightarrow{\text{п.н.}}0$. $\forall\varepsilon>0$.

$P(|Y_{n_1k}-0|>\varepsilon)=\begin{cases}0, & \varepsilon\geqslant n,\\ P(X\in[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}]), & \varepsilon\in(0;n)\end{cases}=\begin{cases}0, & \varepsilon\geqslant n,\\ \frac{1}{n}, & \varepsilon\in(0;n)\end{cases}\xrightarrow{nto\infty}0$

$$Y_{n_1k}\xrightarrow{P}0$$

$M[|Y_{n_1k}-0|^2]=M[n^2X_{nk}^2]=n^2M[X_{nk}]=n\xrightarrow{P}\infty$

$$Y_{n_1k}\not\xrightarrow{\text{с.к}}0$$

Замечание

Согласно определению для исследования на сходимость нужно знать совместное распределение с.в. X_n и X, а для случая *сходимости почти наверное* совместное распределение всей последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и X. Поэтому исследование на сходимость иначе, чем к детерминированной константе, довольно проблематично.

3.10 Лемма 1

Пусть $X_n\xrightarrow{\text{п.н.}}X$. Тогда $X_n\xrightarrow{P}X$.

Доказательство

$0=P(\{\omega:\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega)\neq X(\omega)\})=P(\{\omega:\exists\varepsilon>0\forall N\in\mathbb{N}\exists n\geqslant N:|X_n(\omega)-X(\omega)>\varepsilon\})=P(\sum\limits_{\varepsilon>0)}\prod\limits_{N=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\})\geqslant P(\prod\limits_{N=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon'\})$, $\forall\varepsilon'>0$

Тогда $0=P(\prod\limits_{N=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\})$,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \subset \sum_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

В силу *аксиомы непрерывности*:

$0 = \lim\limits_{N\to\infty} P(\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \geqslant \lim\limits_{N\to\infty} P(\{\omega : |X_N(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\})$

$$X_N \xrightarrow{P} X$$

■

3.11 Лемма 2 (Неравенство Маркова)

Пусть $P(X \geqslant 0) = 1$, M[X] < ∞$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$

$$P(X > \varepsilon) = \frac{M[X]}{\varepsilon}$$

Доказательство

$M[X] = \int\limits_0^{+\infty} x dF_X(x) \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} x dF_X(x) \geqslant \varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} dF_X(X) = \varepsilon P(X > \varepsilon)$. ■

3.12 Следствие 1

Пусть $M[X^{-k}] < \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$:

$$P(|X| > \varepsilon) \leqslant \frac{M[|X|^k|]}{\varepsilon^k}$$

Доказательство

$P(|X| > \varepsilon) = P(|X|^k > \varepsilon^k) \leqslant \frac{M[|X|^k]}{\varepsilon^k}$. ■

3.13 Следствие 2 (Неравенство Чебышёва)

Пусть $M[X^2] < \infty$. Тогда

$$P(|X - M[X]| > \varepsilon) \leqslant \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$$

Доказательство

$P(|X - M[X]| > \varepsilon) \leqslant \frac{M[|X - M[X]|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$. ■

3.14 Лемма 3

Пусть $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$. Тогда $X_n \xrightarrow{P} X$.

Доказательство

$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant \frac{M[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$ ■

3.15 Теорема 1 (Бореля — Кантелли)

Пусть $A_1, \dots, A_n \subset \Omega, B = \prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n$. Тогда

1. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, то $P(B) = 0$;

2. Если $A_1, \dots, A_n$ **независимы в совокупности** и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, то $P(B) = 1$.

Доказательство

1. $P(B) = P(\prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n) \overset{*}{=}$

т.к. $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} A_n \subset \sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n$, то *по аксиоме непрерывности* $\overset{*}{=} \lim\limits_{N\to\infty} P(\sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n) \leqslant \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} P(A_n) \xrightarrow{N\to\infty} 0$, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

2. $P(B) = \dots = \lim\limits_{N\to\infty} P(\sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{N\to\infty} (1 - P(\prod\limits_{n=N}^{\infty} \overline{A_n})) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} P(\prod\limits_{M=N}^{\infty} \prod\limits_{n=N}^{M} \overline{A_n}) \overset{*}{=}$

т.к. $\prod\limits_{n=N}^{M+1} \overline{A_n} \subset \prod\limits_{n=N}^{M} \overline{A_n}$, то по *аксиоме непрерывности*

$\overset{*}{=} 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} P(\prod\limits_{n=N}^{M} \overline{A_n}) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} \prod\limits_{n=N}^{M} (1 - P(A_n)) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} \prod\limits_{n=N}^{M} e^{\ln(1-P(A_n))} = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} e^{\sum n=N^M \ln(1-P(A_n))} \overset{*}{\geqslant}$

т.к. $\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots < -t$, то

$\overset{*}{\geqslant} 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} e^{-\sum\limits_{n=N}^{M} P(A_n)} = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 1.$ ■

3.16 Лемма 3

Пусть $X_n \xrightarrow{P} X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$

Тогда $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$

Доказательство

В силу Теорема 1 $\forall\varepsilon > 0$

$$P(\prod_{N=1}^{\infty}\sum_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$$

Тогда

$P(\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = P(\{\omega : \exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}\exists n \geqslant N : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = P(\{\omega : \exists M \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}\exists n \geqslant N : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{M}\}) = P(\sum\limits_{M=1}^{\infty}\prod\limits_{N=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n - X| > \frac{1}{M}\}) \leqslant \sum\limits_{M=1}^{\infty} P(\prod\limits_{N=1}^{\infty}\sum n = N^{\infty}\{\omega : |X_n - X| > \frac{1}{M}\}) = 0.$ ■

Замечание

1.

$X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$

ИЛИ

$X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$