

Лекции  
по курсу *”Математическая Статистика”*  
Ибрагимов Д. Н.

## Contents

<b>Источники</b>	<b>7</b>
<b>1 Многомерное нормальное распределение</b>	<b>8</b>
Замечание	8
1.1 Лемма 1	8
1.2 Определение 1	8
1.3 Лемма 2	8
1.4 Лемма 3	9
1.5 Лемма 4	9
note	9
1.6 Определение 2	9
Замечание	9
1.7 Лемма 5	10
Доказательство	10
Замечание	10
1.8 Определение 3	10
1.8.1 Доказательство леммы 3	10
1.8.2 Доказательство леммы 4	11
Замечание	11
<b>2 Теорема о нормальной корреляции</b>	<b>12</b>
2.1 Определение 1	12
2.2 Основные свойства условного М. О.	12
2.2.1 Свойство 1	12
2.2.2 Свойство 2	12
2.2.3 Свойство 3	12
2.2.4 Свойство 4	12
2.2.5 Свойство 5	12
2.3 Лемма 1	13
Доказательство	13
Замечание	13
2.4 Определение 2	13
2.5 Определение 3	13
2.6 Теорема 1	13
Доказательство	13
2.7 Теорема 2 (О нормальной корреляции)	14
Доказательство	14
Замечание	15
<b>3 Виды сходимости последовательностей случайных величин</b>	<b>16</b>
3.1 Определение 1	16
3.2 Определение 2	16
3.3 Определение 3	16
3.4 Определение 4	16
3.5 Пример 1	16
3.6 Пример 2	17

3.7	Пример 3	17
3.8	Пример 4	17
3.9	Пример 5	18
	Замечание	18
3.10	Лемма 1	18
	Доказательство	18
3.11	Лемма 2 (Неравенство Маркова)	18
	Доказательство	18
3.12	Следствие 1	19
	Доказательство	19
3.13	Следствие 2 (Неравенство Чебышёва)	19
	Доказательство	19
3.14	Лемма 3	19
	Доказательство	19
3.15	Теорема 1 (Бореля — Кантелли)	19
	Доказательство	19
3.16	Лемма 4	20
	Доказательство	20
	Замечание	20
<b>4</b>	<b>Закон больших чисел</b>	<b>22</b>
4.1	Определение 1	22
4.2	Определение 2	22
4.3	Теорема 1 (Закон Больших Чисел Чебышёва)	22
	Доказательство	22
4.4	Теорема 2 (Закон Больших Чисел Колмогорова)	22
	Замечание	22
4.5	Теорема 3	22
	Доказательство	22
4.6	Следствие 1	23
	Доказательство	23
4.7	Теорема 4	23
	Замечание	23
4.8	Следствие 2	23
	Доказательство	23
<b>5</b>	<b>Центральная предельная теорема (ЦПТ)</b>	<b>25</b>
	Замечание	25
5.1	Определение 1	25
5.2	Лемма 1	25
5.3	Лемма 2	25
	Доказательство	25
5.4	Доказательство леммы 5.1	26
	Замечание	26
5.5	Определение 2	26
5.6	Теорема 1 (Центральная предельная)	26
	Доказательство	26
5.7	Следствие 1 (Теорема Муавра - Лапласа)	27

Доказательство	27
5.8 Пример 1	27
5.9 Теорема 2 (Ляпунова)	28
Замечание	28
5.10 Теорема 3 (Неравенство Берри-Эссена)	28
Замечание	28
5.11 Пример	28
<b>6 Выборка и ее характеристики</b>	<b>29</b>
6.1 Определение 1	29
6.2 Определение 2	29
6.3 Определение 3	29
Замечание	29
6.4 Определение 4	29
6.5 Определение 5	29
Замечание	29
6.6 Определение 6	29
6.7 Определение 7	29
6.8 Лемма 1	30
Доказательство	30
6.9 Следствие 1	30
6.10 Определение 8	30
6.11 Теорема 1 (Мостеллера)	30
6.12 Определение 9	30
Замечание	30
6.13 Свойства $\hat{F}_n(x)$	31
Замечание	31
6.14 Определение 10	32
Замечание	32
<u>Выборочные моменты</u>	33
6.15 Определение 1	33
6.16 Определение 2	33
6.17 Определение 3	33
6.18 Свойства выборочных моментов	33
<b>7 Основные распределения в статистике</b>	<b>35</b>
<u>Точечные оценки</u>	35
7.1 Определение 1	35
7.2 Свойства распределения $\chi^2(n)$	35
7.3 Определение 2	36
7.4 Свойства распределения $t(n)$	36
7.5 Определение 3	37
7.6 Свойства распределения $F(n; m)$	37
7.7 Определение 4	38
7.8 Определение 5	39
Замечание	39
7.9 Определение 6	39
7.10 Определение 7	39

7.11	Определение 8	39
7.12	Определение 9	39
	Замечание	39
7.13	Определение 10	39
7.14	Пример	39
7.15	Теорема 1	40
	Доказательство	40
<b>8</b>	<b>Эффективные оценки</b>	<b>41</b>
8.1	Определение 1	41
	Замечание	41
8.2	Определение 2	41
	Замечание	41
8.3	Определение 3	41
8.4	Лемма 1	41
	Доказательство	42
8.5	Определение 4	42
	Замечание	42
8.6	Лемма 2	42
	Доказательство	42
8.7	Пример 1	42
8.8	Пример 2	43
8.9	Теорема 1 (Неравенство Рао-Крамера)	43
	Доказательство	43
8.10	Определение 5	43
	Замечание	44
8.11	Пример 3	44
<b>9</b>	<b>Методы построения точечных оценок</b>	<b>45</b>
	<u>Метод максимального правдоподобия</u>	45
9.1	Определение 1	45
	Замечание	45
9.2	Пример 1	45
9.3	Пример 2	46
	Замечание	46
9.4	Пример 3	46
	Замечание	46
9.5	Теорема 1	47
	<u>Метод моментов</u>	47
9.6	Определение 2	47
9.7	Определение 3	47
9.8	Теорема 2	47
	Доказательство	47
9.9	Пример 1	47
9.10	Пример 2	48
	Замечание	48

<b>10 Интервальные оценки</b>	<b>49</b>
10.1 Определение 1 . . . . .	49
10.2 Определение 2 . . . . .	49
10.3 Определение 3 . . . . .	49
Замечание . . . . .	49
<u>Построение доверительного интервала на основе центральной статистики</u> . . . . .	50
10.4 Определение 4 . . . . .	50
Замечание . . . . .	50
10.5 Определение 5 . . . . .	50
10.6 Лемма 1 . . . . .	50
Доказательство . . . . .	50
10.7 Теорема 1 (ФИШЕРА) . . . . .	51
Доказательство . . . . .	51
10.8 Пример 3 . . . . .	52
10.9 Пример 4 . . . . .	52
<b>11 Проверка статистических гипотез</b>	<b>54</b>
11.1 Определение 1 . . . . .	54
11.2 Определение 2 . . . . .	54
11.3 Определение 3 . . . . .	54
11.4 Примеры . . . . .	54
Замечание . . . . .	54
11.5 Определение 4 . . . . .	54
11.6 Определение 5 . . . . .	55
11.7 Определение 6 . . . . .	55
11.8 Определение 7 . . . . .	55
Замечание . . . . .	55
11.9 Определение 8 . . . . .	55
11.10 Определение 9 . . . . .	55
Замечание . . . . .	56
<u>Критерий согласия Колмогорова</u> . . . . .	56
<u>Критерий согласия хи-квадрат Пирсона</u> . . . . .	56
11.11 Теорема 1 . . . . .	56
Замечание . . . . .	57
<u>Проверка гипотезы о значении параметра</u> . . . . .	57
<b>12 Метод наименьших квадратов</b>	<b>58</b>
12.1 Определение 1 . . . . .	58
12.2 Определение 2 . . . . .	58
12.3 Определение 3 . . . . .	58
12.4 Теорема 1 (Гаусса-Маркова) . . . . .	58
Доказательство . . . . .	59
Замечание . . . . .	60
<u>Нормальная регрессия</u> . . . . .	60
12.5 Определение 4 . . . . .	60
12.6 Лемма 1 . . . . .	60
Доказательство . . . . .	60
12.7 Лемма 2 . . . . .	60

Доказательство . . . . .	60
12.8 Следствие 1 . . . . .	60
Доказательство . . . . .	60
12.9 Лемма 3 . . . . .	60
Доказательство . . . . .	61
12.10 Определение 5 . . . . .	61
12.11 Лемма 4 . . . . .	61
Доказательство . . . . .	61
12.12 Лемма 5 . . . . .	61
Доказательство . . . . .	61
12.13 Лемма 6 . . . . .	61
Доказательство . . . . .	62
12.14 Лемма 7 . . . . .	62
Доказательство . . . . .	62
12.15 Лемма 8 . . . . .	63
Доказательство . . . . .	63
Замечание . . . . .	63
<u>Критерий Фишера</u> . . . . .	63

## **Источники**

- Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. “Математическая статистика”, изд. “Высшая школа”, 1984
- Кибзун А. И., Наумов А. В., Горяинова Е. Р. “Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами”, изд “ФИЗМАТЛИТ”, 2013
- Панков А. Р., Платонов Е. Н. “Практикум по математической статистике”, изд. “МАИ”, 2006



## 1 Многомерное нормальное распределение

### Замечание

Вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  называется *случайным*, если  $X_1, \dots, X_n$  — случайные величины (далее **с.в.**), определенные на одном вероятностном пространстве.

Через  $M[X] = m_X$  обозначим **вектор математического ожидания**:

$$M[X] = m_X = \begin{pmatrix} M[X_1] \\ \vdots \\ M[X_n] \end{pmatrix}$$

Через  $K_x$  обозначим *ковариационную матрицу* с.в.  $X$ :

$$K_X = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \dots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \dots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

### 1.1 Лемма 1

Пусть  $K_X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — ковариационная матрица с.в.  $X$ . Тогда:

1.  $K_X \geq 0$ , т.е.  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^T K_X x \geq 0$ ;
2.  $K_X^T = K_X$

### 1.2 Определение 1

Случайный вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  называется **невыврожденным нормальным вектором**:

$$X \sim N(m_X, K_X)$$

если совместная плотность вероятности имеет вид:

$$f_X(x) = ((2\pi)^n \det K_X)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m_X)^T K_X^{-1}(x - m_X)\right\}$$

где  $m_X \in \mathbb{R}^n, K_X \in \mathbb{R}^{n \times n}, K_X > 0, K_X^T = K_X$

### 1.3 Лемма 2

Пусть  $X$  — невырожденный нормальный вектор с параметрами  $m_X$  и  $K_X$ .

Тогда  $M[X] = m_X$ , а  $K_X$  — ковариационная матрица  $X$ .

Рассмотрим основные свойства многомерного нормального распределения.

**1.4 Лемма 3**

Пусть  $X \sim N(m_X, K_X)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Тогда:

$$\begin{aligned} Y = AX + b &\sim N(m_Y, K_Y), \\ m_Y &= Am_X + b, \\ K_Y &= AK_X A^T. \end{aligned}$$

**1.5 Лемма 4**

Пусть  $X \sim N(m_X, K_X)$ .

Тогда компоненты вектора  $X$  **независимы** тогда и только тогда, когда они *некоррелированы*.

**note**

Доказательство данных утверждений при помощи аппарата функций распределения и плотности довольно сложно. Поэтому рассмотрим аппарат характеристических функций.

**1.6 Определение 2**

Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  — случайный вектор.

Тогда **характеристической функцией** называется:

$$\psi_X(\lambda) = M[e^{i\lambda^T X}] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda^T X} dF_X(x)$$

**Замечание**

*Характеристическая функция* определена для любого случайного вектора или с.в.

Если с.в **дискретная**, то:

$$\psi_X(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\lambda X_k} p_k$$

Если с.в **абсолютно непрерывная**, то

$$\psi_X(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda X} f_X(x) dx$$

В этом случае  $\psi_X(\lambda)$  является **преобразованием Фурье**  $f_X$ .

Поскольку преобразование Фурье взаимно однозначно, а  $f_X$  однозначно определяет распределение, то характеристическая функция  $\psi_X(x)$  также однозначно определяет распределение с.в  $X$ .

Причем:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda^T X} \psi_X(\lambda) d\lambda$$

## 1.7 Лемма 5

Пусть  $X$  — случайный вектор,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Тогда:

1. для  $Y = AX + b$

$$\psi_Y(\lambda) = e^{i\lambda^T b} \psi_X(A^T \lambda)$$

2. компоненты вектора  $X$  **независимы** тогда и только тогда, когда

$$\psi_Y(\lambda) = \prod_{k=1}^n \psi_{X_k}(\lambda_k)$$

## Доказательство

1.  $\psi_Y(\lambda) = M[e^{i\lambda^T Y}] = M[e^{i\lambda^T AX} e^{i\lambda^T b}] = e^{i\lambda^T b} M[e^{i(A^T \lambda)^T X}] = e^{i\lambda^T b} \psi_X(A^T \lambda)$
2.  $\psi_X(\lambda) = \int \dots \int_{\mathbb{R}} e^{i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \stackrel{\text{H/3}}{=} \int \dots \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_1 x_1} \dots e^{i\lambda_n x_n} \cdot f_{X_1}(x) \cdot \dots \cdot f_{X_n} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_1 x_1} f_{x_1}(x_1) dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_n x_n} f_{x_n}(x_n) dx_n = \prod_{k=1}^n \psi_{X_k}(\lambda_k)$

■

## Замечание

При помощи характеристической функции можно дать другое определение нормального распределения. В том числе для вырожденного  $K_X$ .

## 1.8 Определение 3

Случайный вектор  $X$  называется **нормальным**:  $X \sim N(m_X, K_X)$ , если:

$$\psi_X(\lambda) = \exp\{i\lambda^T m_X - \frac{1}{2}\lambda^T K_X \lambda\}$$

## 1.8.1 Доказательство леммы 3

В силу [Леммы 5, п.1](#)

$$\begin{aligned} \psi_Y(\lambda) &= e^{i\lambda^T b} \psi_X(A^T \lambda) = e^{i\lambda^T b} \exp\{i\lambda^T A m_x - \frac{1}{2}\lambda^T A K_X A^T \lambda\} = \\ &= \exp\{i\lambda^T \underbrace{(A m_x + b)}_{m_Y} - \frac{1}{2}\lambda^T \underbrace{(A K_X A^T)}_{K_Y} \lambda\} \end{aligned}$$

■

## 1.8.2 Доказательство леммы 4

Пусть  $X_i, \dots, X_n$  попарно некоррелированы. Тогда  $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ ,  $i \neq j$ , т.е. :

$$K_x = \text{diag}(\sigma_{X_1}^2, \dots, \sigma_{X_n}^2) = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{pmatrix}$$

$$\psi_X(\lambda) = \exp\{i\lambda_1 m_{X_1} + \dots + i\lambda_n m_{X_n} - \frac{1}{2} \lambda^T K_X \lambda\} = \exp\{i\lambda_1 m_{X_1} + \dots + i\lambda_n m_{X_n} - \frac{1}{2}(\lambda_1^2 \sigma_{X_1}^2 + \dots + \lambda_n^2 \sigma_{X_n}^2)\} = \prod_{k=1}^n \exp\{i\lambda_k m_{X_k} - \frac{1}{2} \lambda_k^2 \sigma_{X_k}^2\} = \prod_{k=1}^n \psi_{X_k}(\lambda_k).$$

Откуда с учетом Леммы 5, п.1  $X_1, \dots, X_n$  — н/з.

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — н/з. Тогда  $X_1, \dots, X_n$  попарно некоррелированы. ■

## Замечание

Поскольку  $K_X$  — невырожденная, симметрическая и положительноопределенная, то существует  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — ортогональная (т. е.  $S^T = S^{-1}$ ) такая, что:

$$S^T K_X S = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

где  $\lambda_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$

Определим матрицу  $\Lambda^{-\frac{1}{2}} = \text{diag}(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}})$ .

Рассмотрим вектор

$$Y = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T (X - m_X)$$

Тогда  $A = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T$ ,  $b = -\Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T m_X$ .

В силу Леммы 3:

$$m_Y = A m_X + b = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T m_X - \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T m_X = 0,$$

$$K_Y = A K_X A^T = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T K_X S \Lambda^{-\frac{1}{2}} = I,$$

т. е.  $Y \sim N(0, I)$ .

При помощи невырожденного линейного преобразования с.в.  $X$  может быть преобразован в стандартный нормальный вектор.

Верно и обратное:

$$X = m_X + S \Lambda^{\frac{1}{2}} Y,$$

откуда следует Лемма 2

## 2 Теорема о нормальной корреляции

### 2.1 Определение 1

*Условным математическим ожиданием абсолютно непрерывного случайного вектора  $X$  относительно абсолютно непрерывного случайного вектора  $Y$  называется:*

$$M[X | Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x | Y) dx,$$

$$\text{где } f_{X|Y}(x | Y) = \frac{f_z(x, Y)}{f_Y(Y)}, z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

### 2.2 Основные свойства условного М. О.

#### 2.2.1 Свойство 1

$$\boxed{M[C | Y] = C}$$

Доказательство

$$M[C | Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} C f_{X|Y}(x | Y) dx = \frac{C \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(x, Y) dx}{f_Y(Y)} = C \frac{f_Y(Y)}{f_Y(Y)} = C. \blacksquare$$

#### 2.2.2 Свойство 2

$$\boxed{M[X \varphi(Y) | Y] = \varphi(Y) M[X | Y]}$$

Доказательство

$$\begin{aligned} M[\varphi(Y) X | Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Y) X f_{X|Y}(x | Y) dx = \varphi(Y) \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x | Y) dx = \\ &= \varphi(Y) M[X | Y]. \blacksquare \end{aligned}$$

#### 2.2.3 Свойство 3

$$\boxed{M[\alpha X_1 + \beta X_2 | Y] = \alpha M[X_1 | Y] + \beta M[X_2 | Y]}$$

#### 2.2.4 Свойство 4

Пусть  $X, Y$  — независимые. Тогда  $\boxed{M[X | Y] = M[X]}$

Доказательство

$$M[X | Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x | Y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_z(x, Y)}{f_Y(Y)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_X(x) f_Y(Y)}{f_Y(Y)} dx = M[X]. \blacksquare$$

#### 2.2.5 Свойство 5

$$\boxed{M[M[X | Y]] = M[X]} \quad (\text{формула повторного М. О.})$$

**Доказательство**

$$M[M[X | Y]] = \int_{-\infty}^{+\infty} M[X | Y] f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_Y(y) f_z(x, y)}{f_Y(y)} dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = M[X]. \blacksquare$$

### 2.3 Лемма 1

Пусть  $X, Y$  — случайные векторы с конечными вторыми моментами. Тогда:

$$M[(X - \hat{X})\varphi(Y)^T] = 0$$

где  $\hat{X} = M[X | Y]$

**Доказательство**

$$\begin{aligned} M[(X - \hat{X})\varphi(Y)^T] &= M[X\varphi(Y)^T] - M[M[X | Y]\varphi(Y)^T] = \\ &= \text{по Свойству 2} = M[X\varphi(Y)^T] - M[M[X\varphi(Y)^T | Y]] = \text{по Свойству 5} = M[X\varphi(Y)^T] - \\ &M[X\varphi(Y)^T] = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

### Замечание

Если рассмотреть евклидово пространство  $\mathbb{L}_2(\Omega)$  со скалярным произведением:

$$(X, Y) = M[X \cdot Y]$$

то условное М. О. — *оператор ортогонального проектирования*  $X$  на подпространство, порождаемое  $Y$ .

### 2.4 Определение 2

*Оценкой  $X$  по наблюдениям  $Y$*  называется любая измеримая функция  $\varphi(Y)$ .

### 2.5 Определение 3

*Оценка  $\hat{X}$  называется с.к.-оптимальной оценкой  $X$* , если для любой другой оценки  $\tilde{X}$  верно

$$M[|X - \hat{X}|^2] \leq M[|X - \tilde{X}|^2]$$

### 2.6 Теорема 1

$M[X | Y]$  — с.к.-оптимальная оценка  $X$  по наблюдениям  $Y$ .

**Доказательство**

$$\begin{aligned} M[|X - \tilde{X}|^2] &= M[|X - \hat{X} + \hat{X} - \tilde{X}|^2] = M[|X - \hat{X}|^2] + 2M[(X - \hat{X})^T(\hat{X} - \tilde{X})] + M[|\hat{X} - \tilde{X}|^2] \stackrel{*}{=} \\ &\text{Поскольку по определению } \tilde{X} - \hat{X} = \varphi(Y), \text{ то в силу Леммы 2.1 } M[(X - \hat{X})^T(\tilde{X} - \hat{X})] = 0. \\ &\stackrel{*}{=} M[|X - \hat{X}|^2] + M[|\hat{X} - \tilde{X}|^2] \geq M[|X - \hat{X}|^2]. \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.7 Теорема 2 (О нормальной корреляции)

Пусть

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K_X & K_{XY} \\ K_{XY}^T & K_Y \end{pmatrix} \right)$$

Тогда

$$1. \text{Law}(X | Y) = N(\mu(Y), \Delta),$$

где

$$\mu(Y) = M[X | Y] = m_X + K_{XY} K_Y^{-1} (Y - m_Y)$$

$$\Delta = K_X - K_{XY} K_Y^{-1} K_{YX}$$

$$2. M[|X - \mu(Y)|^2] = \text{tr}(K_X - K_{XY} K_Y^{-1} K_{YX})$$

### Доказательство

Рассмотрим линейное преобразование  $Y$ :

$$\mu(Y) = m_X + K_{XY} K_Y^{-1} (Y - m_Y)$$

В силу [Леммы 1.3](#)

$$X - \mu(Y) = (I - K_{XY} K_Y^{-1}) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - m_X + K_{XY} K_Y^{-1} m_Y \sim N(\mu, K)$$

$$\mu = (I - K_{XY} K_Y^{-1}) \begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix} - m_X + K_{XY} K_Y^{-1} m_Y = 0$$

$$K = (I - K_{XY} K_Y^{-1}) \begin{pmatrix} K_X & K_{XY} \\ K_{XY}^T & K_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -(K_{XY} K_Y^{-1})^T \end{pmatrix} =$$

$$= (K_X - K_{XY} K_Y^{-1} K_{XY}^T \quad K_{XY} - K_{XY} K_Y^{-1} K_Y) \begin{pmatrix} I \\ K_Y^{-1} K_{XY}^T \end{pmatrix} =$$

$$= K_X - K_{XY} K_Y^{-1} K_{XY}^T = \Delta$$

$$\text{cov}(X - \mu(Y), Y) = \text{cov}(X, Y) - \text{cov}(\mu(Y), Y) = \text{cov}(X, Y) - \text{cov}(K_{XY} K_Y^{-1} Y + m_X - K_{XY} K_Y^{-1} m_Y, Y) = \text{cov}(X, Y) - K_{XY} K_Y^{-1} \text{cov}(Y, Y) = K_{XY} - K_{XY} K_Y^{-1} K_Y = 0$$

т.е.  $X - \mu(Y)$  и  $Y$  **некорреливаны**.

Тогда в силу [Леммы 1.4, п.2](#)  $X - \mu(Y)$  и  $Y$  **независимы**. Построим характеристическую функцию условного распределения  $X$  относительно  $Y$ :

$$\psi_{X|Y}(\lambda | Y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda^T X} f_{X|Y}(x | Y) dx = M[e^{i\lambda^T X} | Y] = M[e^{i\lambda^T (X - \mu(Y))} e^{i\lambda^T \mu(Y)} | Y] \stackrel{*}{=}$$

в силу [Свойства 2 УМО](#) и **независимости**  $X - \mu(Y)$  и  $Y$

$$\stackrel{*}{=} M[e^{i\lambda^T (X - \mu(Y))} | Y] \cdot M[e^{i\lambda^T \mu(Y)} | Y] = M[e^{i\lambda^T (X - \mu(Y))}] e^{i\lambda^T \mu(Y)} = \psi_{X - \mu(Y)}(\lambda) e^{i\lambda^T \mu(Y)} = \exp\{-\frac{1}{2} \lambda^T \Delta \lambda\} \cdot \exp\{i\lambda^T \mu(Y) - \frac{1}{2} \lambda^T \Delta \lambda\}$$

т.е. Условное распределение **нормальное**:

$$X(Y \sim N(\mu(Y), \Delta))$$

Вычислим с.к. ошибку:

$$M[|X - \mu(Y)|^2] = M[\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 + \dots + \Delta X_n^2] = \sum_{k=1}^n M[\Delta X_k^2] = \sum_{k=1}^n D[\Delta X_k] = \sum_{k=1}^n \Delta_{kk} = \text{tr} \Delta.$$

■

### Замечание

1. Из [Теоремы о нормальной корреляции](#) следует, что в *гауссовском* случае с.к.-оптимальная оценка является *линейной*.
2. Если  $X$  и  $Y$  — *независимы*, то с.к.-оптимальная оценка —  $m_X$ .
3. С.к.-оптимальная оценка *несмещенная*, т.к.  $M[X - \mu(Y)] = 0$ .



### 3 Виды сходимости последовательностей случайных величин

#### 3.1 Определение 1

Говорят, что  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  образует *последовательность случайных величин*, если  $\forall N \in \mathbb{N}$   $X_n$  определены на одном вероятностном пространстве.

#### 3.2 Определение 2

Говорят, что последовательность с.в.  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  *сходится по вероятности* к с.в.  $X$ , если  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1$$

ИЛИ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

#### 3.3 Определение 3

Говорят, что последовательность с.в.  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  *сходится почти наверное* к с.в.  $X$ , если

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \not\rightarrow X(\omega)\}) = 0$$

ИЛИ

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)\}) = 1$$

#### 3.4 Определение 4

Говорят, что последовательность с.в.  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  *сходится в среднем квадратическом* к с.в.  $X$ , если

$$M[|X_n - X|^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

#### 3.5 Пример 1

Пусть  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — случайная последовательность.

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 - \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

$$P(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq 0\}) = P(\{\omega : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : X_n(\omega) = n\}) = P(\prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) = n\})^* =$$

$$1. \sum_{n=N+1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) = n\} \subset \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) = n\}$$

$$2. P(\sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) = n\}) \leq \sum_{n=N}^{\infty} P(\{\omega : X_n(\omega) = n\}) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

т.к.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

Тогда в силу аксиомы непрерывности  $\stackrel{*}{=} 0$ , т.е.  $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$

### 3.6 Пример 2

Рассмотрим ту же последовательность. Выберем  $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - 0| \leq \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \geq n \\ 1 - \frac{1}{n^2}, & \varepsilon \in (0; n) \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Тогда  $X_n \xrightarrow{P} 0$

### 3.7 Пример 3

Рассмотрим ту же последовательность:

$$M[|X_n - 0|^2] = M[X_n^2] = 0^2(1 - \frac{1}{n^2}) + n^2 \frac{1}{n^2} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Тогда  $X_n \not\xrightarrow{\text{с.к.}} 0$

### 3.8 Пример 4

Пусть  $f_{nk} : [0; 1] \rightarrow \{0; 1\}, n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, n}$ ,

$$f_{n,k} = \begin{cases} 0, & t \notin [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}], \\ 1, & t \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]. \end{cases}$$

Пусть  $X \sim R(0; 1)$ . Рассмотрим последовательность с.в.  $X_{nk} = f_{nk}(X)$ .  $\forall \omega \in \Omega X(\omega) \in [0; 1]$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k = \overline{1, n}$  такое, что  $X(\omega) \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]$ . Т.е. если  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , то  $\forall n \in \mathbb{N}$  найдется  $k = \overline{1, n}$  такой, что

$$|f_{nk}(X(\omega)) - 0| > \varepsilon$$

Тогда  $X_{nk}(\omega) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , т.е.

$$\{\omega : \lim_{n, k \rightarrow \infty} X_{nk}(\omega) = 0\} = \emptyset$$

$$X_{nk} \not\xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

При этом  $\forall \varepsilon > 0$

$$R(|X_{nk} - 0| > \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon \geq 1, \\ P(X \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]), & \varepsilon \in (0; 1) \end{cases} = \begin{cases} 0, & \varepsilon \geq 1, \\ \frac{1}{n}, & \varepsilon \in (0; 1) \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$X_{nk} \xrightarrow{P} 0$$

$$M[|X_{nk} - 0|^2] = M[X_{nk}] = M[f_{nk}(X)] = \int_0^1 f_{nk}(x) \underbrace{f_X(x)}_1 dx = \int_0^1 f_{nk}(x) dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 1 dx = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$X_{nk} \xrightarrow{\text{с.к.}} 0$$

### 3.9 Пример 5

Рассмотрим последовательность с.в.  $Y_{n_1k} = nK_{n_1k}$  Тогда  $Y_{n_1k} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ .  $\forall \varepsilon > 0$ .

$$P(|Y_{n_1k} - 0| > \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon \geq n, \\ P(X \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]), & \varepsilon \in (0; n) \end{cases} = \begin{cases} 0, & \varepsilon \geq n, \\ \frac{1}{n}, & \varepsilon \in (0; n) \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$Y_{n_1k} \xrightarrow{P} 0$$

$$M[|Y_{n_1k} - 0|^2] = M[n^2 X_{nk}^2] = n^2 M[X_{nk}] = n \xrightarrow{P} \infty$$

$$Y_{n_1k} \not\xrightarrow{\text{с.к.}} 0$$

#### Замечание

Согласно определению для исследования на сходимость нужно знать совместное распределение с.в.  $X_n$  и  $X$ , а для случая *сходимости почти наверное* совместное распределение всей последовательности  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  и  $X$ . Поэтому исследование на сходимость иначе, чем к детерминированной константе, довольно проблематично.

### 3.10 Лемма 1

Пусть  $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$ . Тогда  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

#### Доказательство

$$0 = P(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = P(\{\omega : \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) =$$

$$P(\sum_{\varepsilon > 0} \prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \geq P(\prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon'\}), \forall \varepsilon' > 0$$

$$\text{Тогда } 0 = P(\prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}),$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \subset \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

В силу аксиомы непрерывности:

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} P(\sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} P(\{\omega : |X_N(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\})$$

$$X_N \xrightarrow{P} X$$

■

### 3.11 Лемма 2 (Неравенство Маркова)

Пусть  $P(X \geq 0) = 1$ ,  $M[X] < \infty$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{M[X]}{\varepsilon}$$

#### Доказательство

$$M[X] = \int_0^{+\infty} x dF_X(x) \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} x dF_X(x) \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} dF_X(x) = \varepsilon P(X > \varepsilon). \blacksquare$$

### 3.12 Следствие 1

Пусть  $M[X^k] < \infty$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{M[|X|^k]}{\varepsilon^k}$$

**Доказательство**

$$P(|X| > \varepsilon) = P(|X|^k > \varepsilon^k) \leq \frac{M[|X|^k]}{\varepsilon^k}. \blacksquare$$

### 3.13 Следствие 2 (Неравенство Чебышёва)

Пусть  $M[X^2] < \infty$ . Тогда

$$P(|X - M[X]| > \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$$

**Доказательство**

$$P(|X - M[X]| > \varepsilon) \leq \frac{M[|X - M[X]|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \blacksquare$$

### 3.14 Лемма 3

Пусть  $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$ . Тогда  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

**Доказательство**

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{M[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \blacksquare$$

### 3.15 Теорема 1 (Бореля — Кантелли)

Пусть  $A_1, \dots, A_n \subset \Omega, B = \prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} A_n$ . Тогда

1. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , то  $P(B) = 0$ ;
2. Если  $A_1, \dots, A_n$  независимы в совокупности и  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ , то  $P(B) = 1$ .

**Доказательство**

$$1. P(B) = P\left(\prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} A_n\right)^* =$$

$$\begin{aligned} \text{т.к. } \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \subset \sum_{n=N}^{\infty} A_n, \text{ то по аксиоме непрерывности } & \stackrel{*}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\sum_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leq \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) = 0, \text{ т.к. } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty & \end{aligned}$$

$$2. P(B) = \dots = \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\sum_{n=N}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - P\left(\prod_{n=N}^{\infty} \bar{A}_n\right)) = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\prod_{M=N}^{\infty} \prod_{n=N}^M \bar{A}_n\right)^* =$$

$$\begin{aligned}
 & \text{т.к. } \prod_{n=N}^{M+1} \bar{A}_n \subset \prod_{n=N}^M \bar{A}_n, \text{ то по аксиоме непрерывности} \\
 & \stackrel{*}{=} 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} P\left(\prod_{n=N}^M \bar{A}_n\right) = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^M (1 - P(A_n)) = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^M e^{\ln(1-P(A_n))} = \\
 & 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} e^{\sum_{n=N}^M \ln(1-P(A_n))} \stackrel{*}{\geq} \\
 & \text{т.к. } \ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots < -t, \text{ то} \\
 & \stackrel{*}{\geq} 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-\sum_{n=N}^M P(A_n)} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 1. \blacksquare
 \end{aligned}$$

### 3.16 Лемма 4

Пусть  $X_n \xrightarrow{P} X$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$

Тогда  $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$

#### Доказательство

В силу Теоремы 3.1  $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & P(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = P(\{\omega : \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = \\
 & P(\{\omega : \exists M \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{M}\}) = P\left(\sum_{M=1}^{\infty} \prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n - X| > \frac{1}{M}\}\right) \leq \\
 & \sum_{M=1}^{\infty} P\left(\prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n - X| > \frac{1}{M}\}\right) = 0. \blacksquare
 \end{aligned}$$

#### Замечание

1.

$$X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$$

ИЛИ

$$X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$$

2. В силу теоремы Рисса (функциональный анализ) если  $X_n \xrightarrow{P} X$ , то существует подпоследовательность  $\{X_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} : X_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} X$

3. В силу теоремы о мажорирующей сходимости, если  $X_n \xrightarrow{P} X$  и  $\exists Y$  — с.в.:  $|X_n| \leq Y, M[Y^2] < \infty$ , то  $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$

4. Также из функционального анализа известно, что операция предела (по мере, почти наверное, в средне квадратическом) замкнута относительно линейных операций и непрерывных преобразований.

## 4 Закон больших чисел

### 4.1 Определение 1

**Выборкой** объема  $n$  будем называть с.в.  $Z_n = (X_1, \dots, X_n)^T$ , где  $X_1, \dots, X_n$  — *независимые* с.в.

Через  $F_k(x)$  обозначим *функцию распределения*  $k$ -го элемента выборки.

Если  $F_k = F_1, k = \overline{2, n}$ , то выборка называется **однородной**.

### 4.2 Определение 2

**Выборочным средним**  $\bar{X}_n$  выборки  $Z_n$  называется  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$

### 4.3 Теорема 1 (Закон Больших Чисел Чебышёва)

Пусть  $Z_n$  — однородная выборка,  $M[X_k^2] < \infty$ .

Тогда  $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X, \bar{X}_n \xrightarrow{P} m_X$

**Доказательство**

$$M[|\bar{X}_n - m_X|^2] = M[|\bar{X}_n - M[\bar{X}_n]|^2] = D[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \frac{nD[X_1]}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Т.е. по определению  $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X$ .

С учетом [Леммы 3.3](#)  $\bar{X}_n \xrightarrow{P} m_X$ . ■

### 4.4 Теорема 2 (Закон Больших Чисел Колмогорова)

Пусть  $Z_n$  — *однородная* выборка,  $M[X_k] = m_X < \infty$ .

Тогда  $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} m_X$

**Замечание**

Т.о. для *однородной* выборки  $\bar{X}_n$  сходится **почти наверное** и **по вероятности** к  $m_X$ , если оно существует, и в среднем квадратичном, если существует дисперсия.

### 4.5 Теорема 3

Пусть  $Z_n$  — *неоднородная* выборка,  $M[X_k] = m_X < \infty, D[X_k] = D_k \leq D_{\max} < \infty$ , где  $k \in \mathbb{N}$

Тогда  $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X, \bar{X}_n \xrightarrow{P} m_X$ .

**Доказательство**

$$M[|\bar{X}_n - m_X|^2] = M[|\bar{X}_n - M[\bar{X}_n]|^2] = D[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D_k \leq \frac{nD_{\max}}{n^2} = \frac{D_{\max}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Т.о.  $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X$ . Тогда в силу [Леммы 3.3](#)  $\bar{X}_n \xrightarrow{P} m_X$ . ■

#### 4.6 Следствие 1

Пусть  $Z_n$  — неоднородная выборка,  $D[X_k] = D_k \leq D_{max} < \infty, k \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $\bar{X}_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_{X_k} \xrightarrow{\text{с.к.}} 0, \bar{X}_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_{X_k} \xrightarrow{P} 0$ .

#### Доказательство

$$\bar{X}_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_{X_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - m_{X_k}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k,$$

где  $M[Y_k] = 0, D[Y_k] = D[X_k] \leq D_{max} < \infty$

Тогда  $\bar{Y}_k$  удовлетворяет условиям [Теоремы 4.3](#). ■

#### 4.7 Теорема 4

Пусть  $Z_n$  — неоднородная выборка,  $M[X_k] = m_X < \infty, D[X_k] = D_k < \infty$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{D[X_k]}{k^2} < \infty$$

Тогда

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} m_X$$

#### Замечание

Условие [Теоремы 4](#) более мягкое, чем условие [Теоремы 3](#). Пусть  $D[X_k] \leq D_{max}, k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n \frac{D[X_k]}{k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{D_{max}}{k^2} = \frac{\pi^2 D_{max}}{\sigma} < \infty$$

#### 4.8 Следствие 2

Пусть  $N(A)$  — число появления события  $A$  в серии из  $N$  независимых опытов. Тогда

$$\frac{N(A)}{N} \xrightarrow{\text{п.н.}} P(A), \frac{N(A)}{N} \xrightarrow{\text{с.к.}} P(A)$$

#### Доказательство

По условию  $N(A) \sim Bi(N; P(A))$ . Тогда  $\exists X_1, \dots, X_n \sim Be(P(A))$  — независимые с.в.

При этом  $M[X_1] = P(A), D[X_1] = P(A)(1 - P(A)) \leq \frac{1}{4}$ .

Тогда в силу [Теоремы 4](#)

$$\frac{N(A)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \xrightarrow{\text{с.к.}} P(A)$$

в силу [Теоремы 2](#)

$$\frac{N(A)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \xrightarrow{\text{п.н.}} P(A)$$





## 5 Центральная предельная теорема (ЦПТ)

### Замечание

Сходимости **с.к.**, **п.н.** и  $P$  в общем случае исследования предполагают либо знание совместного распределения элементов последовательности, либо наличие точкой функциональной зависимости от  $\omega \in \Omega$ .

Как правило, в теории вероятностей это неизвестно, а с.в. описываются при помощи их распределений, а не как функции. При этом если у двух величин совпадают распределения, то это вовсе не значит, что они равны.

Поэтому довольно важным является вид сходимости *по распределению*, т.е. в смысле “описательного инструмента” с.в.

### 5.1 Определение 1

Говорят, что последовательность с.в.  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **сходится по распределению** к с.в.  $X$ , если

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x), \forall x \text{ — точки непрерывности } F_X(x).$$

### 5.2 Лемма 1

Пусть  $X_n \xrightarrow{P} X$ . Тогда  $X_n \xrightarrow{d} X$

### 5.3 Лемма 2

Пусть  $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{P} C$

Тогда  $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + C$

### Доказательство

Пусть  $C = 0, x_0$  — точка **непрерывности**  $F_X(x)$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$

$$F_{X_n+Y_n}(x_0) = P(X_n+Y_n \leq x_0) = \underbrace{P(\{X_n+Y_n \leq x_0\}\{|Y_n| > \varepsilon\})}_{p_1} + \underbrace{P(\{X_n+Y_n \leq x_0\}\{|Y_n| \leq \varepsilon\})}_{p_2}$$

$$0 \leq p_1 \leq P(|Y_n| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$p_2 = P(\{X_n + Y_n \leq x_0\}\{-\varepsilon \leq Y_n \leq \varepsilon\}) \stackrel{*}{\leq}$$

$$\begin{cases} X_n + Y_n \leq x_0 \\ -\varepsilon \leq Y_n \leq \varepsilon \end{cases} \implies \begin{cases} X_n + Y_n \leq x_0 \\ -\varepsilon \leq -Y_n \leq \varepsilon \end{cases} \implies X_n \leq x_0 + \varepsilon$$

$$\stackrel{*}{\leq} P(X_n \leq x_0 + \varepsilon) = F_{X_n}(x_0 + \varepsilon)$$

$$p_2 \geq P(\{\varepsilon + X_n \leq x_0\}\{-\varepsilon \leq Y_n \leq \varepsilon\}) \stackrel{*}{\geq}$$

$$P(AB) = P(A) - P(A \setminus B) \geq P(A) - P(\overline{B})$$

$$\stackrel{*}{\geq} P(\varepsilon + X_n \leq x_0) - P(|Y_n| > \varepsilon) = F_{X_n}(x_0 - \varepsilon) - P(|Y_n| > \varepsilon)$$

$$\text{Т.о. } F_{X_n}(x_0 - \varepsilon) - P(|Y_n| > \varepsilon) \leq F_{X_n+Y_n}(x_0) \leq F_{X_n}(x_0 + \varepsilon) + p_1$$

Выберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы  $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$  было областью непрерывности  $F_X(x)$

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x_0 \pm \varepsilon) = F_X(x_0 \pm \varepsilon)$

$$F_{X_n}(x_0 - \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n + Y_n}(x_0) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{X_n + Y_n}(x_0) \leq F_X(x_0 + \varepsilon)$$

Возьмем предел по  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В силу непрерывности  $F_X(x)$  в  $x_0$   $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_X(x_0 \pm \varepsilon) = F_X(x_0)$

Откуда  $F_X(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{X_n + Y_n}(x_0)$ , т.е.

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X$$

Пусть  $C \neq 0$ . Тогда  $Y_n - C = \tilde{Y} \xrightarrow{P} 0$ ,

$$X_n + C = \tilde{X}_n \xrightarrow{d} X + C = \tilde{X}$$

Получаем  $X_n + Y_n = \tilde{X}_n + \tilde{Y}_n \xrightarrow{d} \tilde{X} = X + C$ . ■

#### 5.4 Доказательство леммы 5.1

$X_n = (X_n - X) + X$ , где  $X \xrightarrow{d} X$ ,  $X_n - X \xrightarrow{P} 0$ . В силу Леммы 5.2  $X_n = (X_n - X) + X \xrightarrow{d} X + 0 = X$ . ■

#### Замечание

Из теории преобразования Фурье следует, что  $X_n \xrightarrow{d} X$  тогда и только тогда, когда  $\psi_{X_n}(\lambda) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi_X(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

#### 5.5 Определение 2

Последовательность с.в.  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  называется **асимптотически нормальной**, если  $X_n \xrightarrow{d} X$ , где  $X \sim N(m; \sigma^2)$

#### 5.6 Теорема 1 (Центральная предельная)

Пусть  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность независимых и одинаково распределенных с.в., причем

$$M[X_1] = m_X, D[X_1] = \sigma_X^2$$

Тогда

$$S_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm_X}{\sigma_X \sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0; 1)$$

#### Доказательство

Обозначим через  $Y_k = \frac{X_k - m_X}{\sigma_X \sqrt{n}}$

Тогда  $\sum_{k=1}^n Y_k$ , где  $Y_1, \dots, Y_n$  — независимые с.в.

В силу Леммы 1.5

$$\psi_{S_n}(\lambda) = \psi_Y(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) = \prod_{k=1}^n \psi_{Y_k}(\lambda) = \psi_{Y_1}^n(\lambda) = \psi^n\left(\frac{\lambda}{\sigma_X \sqrt{n}}\right)$$

где  $\psi(\lambda)$  — **характеристическая функция**  $X_k - m_X$ .

$$\psi(0) = M[e^{i0(X_k - m_X)}] = M[1] = 1$$

$$\psi'(0) = M[i(X_k - m_X)e^{i0(X_k - m_X)}] = M[X_k - m_X]i = 0$$

$$\psi''(0) = -M[(X_k - m_X)^2 e^{i0(X_k - m_X)}] = -M[(X_k - m_X)^2] = -\sigma_X^2$$

Тогда согласно *формуле Тейлора*

$$\psi(\lambda) = \psi(0) + \psi'(0)\lambda + \frac{\psi''(0)}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2) = 1 - \frac{\sigma_X^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)$$

$$\text{Рассмотрим } \ln \psi_{S_n}(\lambda) = n \ln \psi\left(\frac{\lambda}{\sigma_X \sqrt{n}}\right) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda^2}{2n} + o\left(\frac{\lambda^2}{\sigma_X^2 n}\right)\right) = n\left(-\frac{\lambda^2}{2n} + o\left(\frac{\lambda^2}{\sigma_X^2 n}\right) + o\left(\frac{\lambda^2}{\sigma_X^2 n}\right)\right)$$

$$= n\left(-\frac{\lambda^2}{2n} + o\left(\frac{\lambda^2}{2n}\right)\right) = -\frac{\lambda^2}{2} + \frac{o\left(\frac{\lambda^2}{\sigma_X^2 n}\right)}{\frac{\lambda^2}{\sigma_X^2 n}} \cdot \frac{\lambda^2}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{\lambda^2}{2},$$

$$\psi_{S_n}(\lambda) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

где  $\psi_Y(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$  по определению является \*характеристической функцией  $Y \sim N(0; 1)$

Тогда  $S_n \xrightarrow{d} Y \sim N(0; 1)$ . ■

## 5.7 Следствие 1 (Теорема Муавра - Лапласа)

Пусть  $X_n \sim Bi(n; p)$

Тогда

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0; 1)$$

### Доказательство

Т.к.  $X_n \sim Bi(n; p)$ , то существуют **независимые**  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n \sim Be(p)$  такие, что

$$X_n = \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, M[\tilde{X}_k] = p = m_X, D[\tilde{X}_k] = p(1-p) = \sigma_X^2$$

Тогда в силу **Теоремы 1**:

$$\frac{\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k - nm_X}{\sigma_X \sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0; 1). \quad \blacksquare$$

## 5.8 Пример 1

Вычислить вероятность того, что при  $n = 1000$  подбрасываниях монета упадет “орлом” от 400 до 600 раз.

Пусть  $X$  — число выпавших “орлов”. Тогда  $X \sim Bi(1000; \frac{1}{2})$ . По *формуле Бернулли*

$$P(X \in [400; 600]) = \sum_{k=400}^{600} C_{1000}^k \frac{1}{2^{1000}}$$

Оценим данную величину с помощью *ЦПТ*.

В силу **Теоремы 1** и **Следствия**

$$\frac{X - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})}} \xrightarrow{d} N(0; 1)$$

Тогда

$$P(400 \leq X \leq 600) = P\left(\frac{400-500}{\sqrt{250}} \leq \frac{X-nm_X}{\sigma_X\sqrt{n}} \leq \frac{600-500}{\sqrt{250}}\right) \approx \Phi_0\left(\frac{100}{5\sqrt{10}}\right) - \Phi_0\left(-\frac{100}{5\sqrt{10}}\right) = 2\Phi_0(2\sqrt{10}) \approx 1.$$

### 5.9 Теорема 2 (Ляпунова)

Пусть  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность *независимых* с.в.,  $M[X_n] = m_{X_n}, D[X_n] = \sigma_{X_n}^2, M[|X_n - m_{X_n}|^3] = C_n^3 < \infty$

При этом  $\frac{(\sum_{k=1}^n C_k^3)^{\frac{1}{3}}}{(\sum_{k=1}^n \sigma_{X_k}^2)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (*Условие Ляпунова*)

Тогда  $\frac{(\sum_{k=1}^n X_k - M[\sum_{k=1}^n X_k])}{\sqrt{D[\sum_{k=1}^n X_k]}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \sim N(0; 1)$

#### Замечание

Для аппроксимации точности использования ЦПТ используется **неравенство Берри-Эссеена**

### 5.10 Теорема 3 (Неравенство Берри-Эссеена)

Пусть  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность *независимых* и *одинаково распределенных* с.в.

$$M[X_n] = m_X, D[X_n] = \sigma_X^2, M[|X_n - m_X|^3] = \rho < \infty$$

Тогда  $\forall x \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$

$$\left| P\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm_X}{\sigma_X\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \Phi_0(x)\right) \right| \leq \frac{C_0\rho}{\sigma_X^3\sqrt{n}}$$

#### Замечание

Точное значение константы  $C$  **неизвестно**.

По текущим данным (2010 г.)  $C_0 \leq 0.4784$

### 5.11 Пример

Оценим точность решения в предыдущем примере:  $\sigma_X^2 = \frac{1}{4}, n = 1000, m_X = \frac{1}{2}, X_n \sim$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho = M[|X_n - m_X|^3] = |0 - \frac{1}{2}|^3 \cdot \frac{1}{2} + |1 - \frac{1}{2}|^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Тогда погрешность составит для двухстороннего нер-ва:

$$\frac{2C_0\rho}{\sigma_X^3\sqrt{n}} = \frac{2 \cdot 0.4784 \cdot \frac{1}{8}}{\frac{1}{64} \cdot \sqrt{1000}} \approx 0.03$$

## 6 Выборка и ее характеристики

### 6.1 Определение 1

**Выборкой** называется  $Z_n = (X_1, \dots, X_n)^T$  *независимый вектор* с.в. Если все  $X_1, \dots, X_n$  — *одинаково распределены*, а  $F(x)$  — *функция распределения*, то говорят, что  $Z_n$  — **однородная** выборка, порожденная распределением  $F(x)$

### 6.2 Определение 2

**Реализацией выборки**  $Z_n \in \mathbb{R}^n$  называется *неслучайный* вектор  $z_n = Z_n(\omega)$ , состоящий из реализаций элементов выборки  $X_k, k = \overline{1, n}$ .

### 6.3 Определение 3

Множество  $S$  всех возможных реализаций выборки  $Z_n$  называют **выборочным пространством**

#### Замечание

Обычно распределение, порождающее выборку, известно неточно.

$$F_X = F_X(x; \theta)$$

Задача состоит в построении оценки  $\theta$  по элементам выборки.

### 6.4 Определение 4

С.в.  $\varphi(Z_n)$ , где  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$  — *измерима*, называется **статистикой**.

### 6.5 Определение 5

**$k$ -ой порядковой статистикой** называется  $k$ -е по величине значение элемента выборки  $Z_n = (X_1, \dots, X_n)^T$  и обозначается  $X^{(k)}$

#### Замечание

$X^{(k)}$  является функцией от всей выборки, т.к. при различных  $\omega \in \Omega$   $X^{(k)}$  будет совпадать по значению с разными  $X_i$ .

### 6.6 Определение 6

Набор порядковых статистик  $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$  называется **вариационным рядом**.

### 6.7 Определение 7

$$X^{(1)} = \min_{k=\overline{1, n}} X_k, X^{(n)} = \max_{k=\overline{1, n}} X_k.$$

### 6.8 Лемма 1

Пусть однородная выборка  $Z_n$  порождена распределением  $F(x)$ . Тогда функция распределения  $X^{(k)}$  имеет вид:

$$F_{(k)}(x) = P(X^{(k)} \leq x) = \sum_{i=k}^n C_n^i (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}$$

#### Доказательство

Рассмотрим с.в.  $Y$ , равную числу элементов выборки, не превосходящих  $x$ . Тогда  $Y \sim Bi(n; F(x))$ .

$$F_{(k)}(x) = P(X^{(k)} \leq x) = P(Y \geq k) = \sum_{i=k}^n C_n^i (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}. \blacksquare$$

### 6.9 Следствие 1

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x) &= 1 - (1 - F(x))^n, \\ F_{(n)}(x) &= (F(x))^n. \end{aligned}$$

### 6.10 Определение 8

**Выборочным квантилем** уровня  $\alpha \in (0; 1)$  называется *порядковая статистика*  $X^{([n\alpha]+1)}$

### 6.11 Теорема 1 (Мостеллера)

Пусть  $X$  — абсолютно непрерывная с.в.,  $x_\alpha$  — точка гладкости  $f_X(x)$ ,  $f_X(x_\alpha) > 0$

Тогда  $(X^{([n\alpha]+1)} - x_\alpha) \sqrt{\frac{nf_X^2(x_\alpha)}{p(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0; 1)$

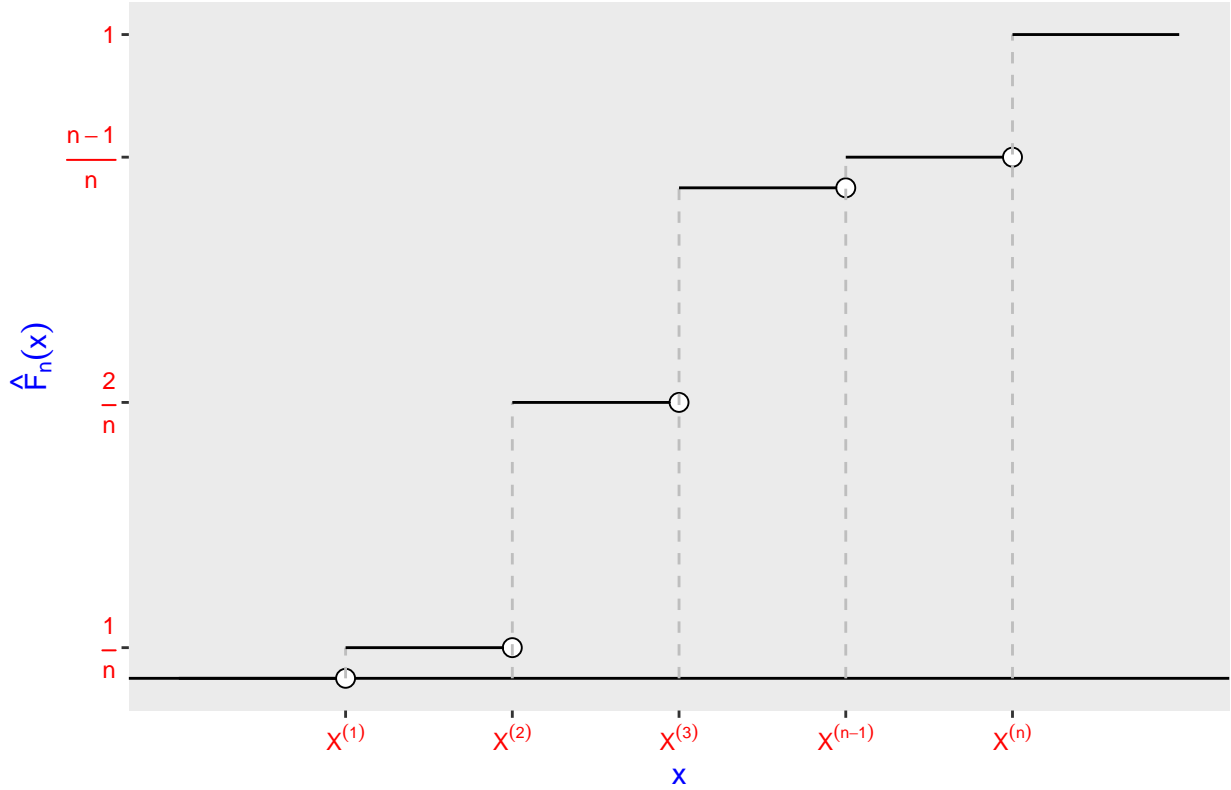
### 6.12 Определение 9

**Выборочной функцией распределения** называется статистика  $\hat{F}_n(x)$ :

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \max\{k = \overline{1, n} : X^{(k)} \leq x\}, & x \geq X^{(1)}, \\ 0, & x < X^{(1)} \end{cases}$$

#### Замечание

Фактически  $\hat{F}_n(x)$  — частота события  $\{X \leq x\}$ , которая используется для оценки вероятности  $F(x) = P(X \leq x)$ .



### 6.13 Свойства $\hat{F}_n(x)$

1.  $n \cdot \hat{F}_n(x) \sim Bi(n; F(x))$

2.  $M[\hat{F}_n(x)] = F(x)$

3.  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$

(Теорема Гливенко - Кантелли)

4.  $M[(\hat{F}_n(x) - F(x))^2] = \frac{F(x)(1-F(x))}{n} \leq \frac{1}{4n}$

5.  $|\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{с.к.}} 0$

6.  $\frac{\hat{F}_n(x) - F(x)}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}} \sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0; 1)$

(Следует из теоремы Муавра - Лапласа)

### Замечание

$\hat{F}_n(x)$  при увеличении  $n$  равномерно приближается к  $F(x)$ , при этом точность приближения можно оценить при помощи свойств 4 и 6.

Гистограмма. На основе реализации вариационного ряда построим разбиение  $\mathbb{R} - \infty = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l < t_{l+1} = +\infty$ ,



$$t_1 \leq x^{(1)}, t_l > x^{(n)}.$$

Как правило, длина интервалов разбиения выбирается *одинаковой*:

$$h_k = t_{k+1} - t_k = \frac{t_l - t_1}{l - 1}, k = \overline{1, l - 1}$$

Вычислим частоту попадания элементов выборки в  $k$ -й интервал:

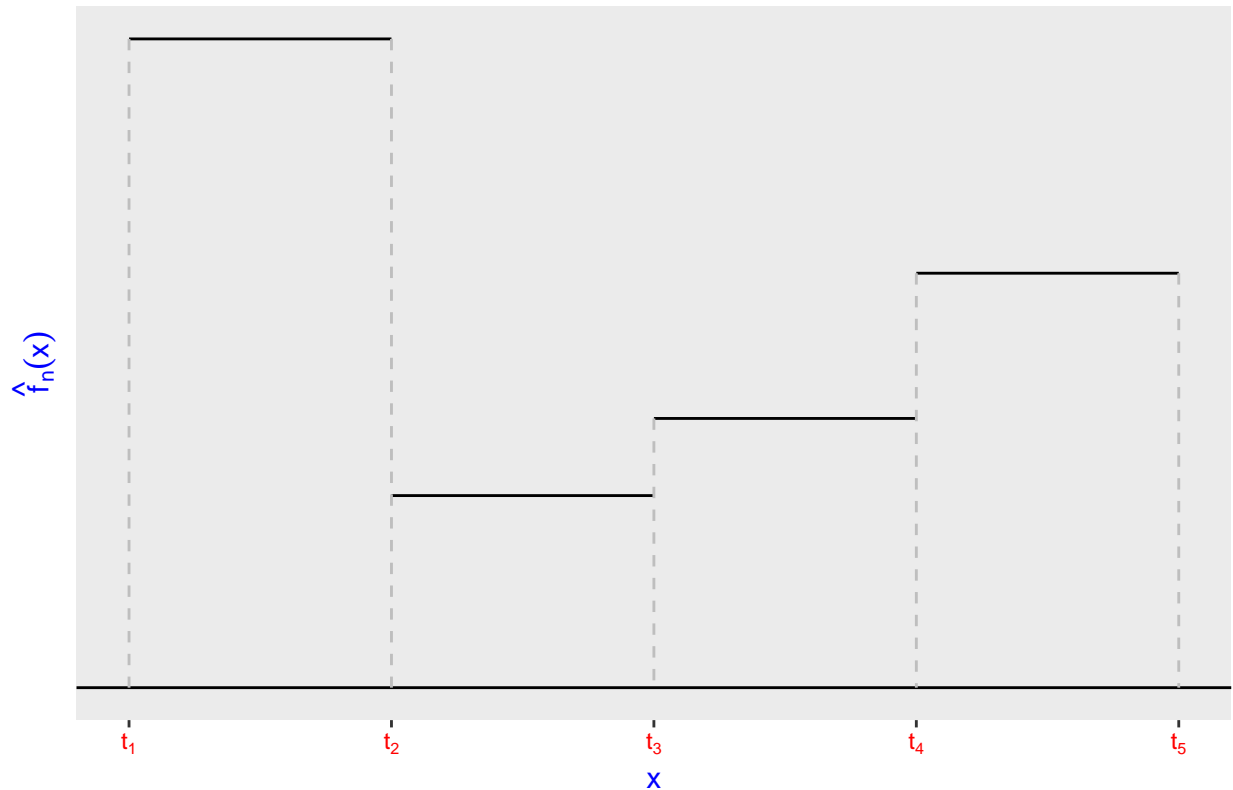
$$\hat{p}_k = \frac{n_k}{n}, \text{ где } n_k \text{ — число элементов выборки, попавших в } [t_k; t_{k+1}), k = \overline{0, l}$$

Заметим, что  $\hat{p}_0 = \hat{p}_l = 0$ .

### 6.14 Определение 10

*Гистограммой* называется функция:

$$\hat{f}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (t_0; t_1) \cup [t_l; t_{l+1}), \\ \hat{p}_k, & x \in (t_k; t_{k+1}), k = \overline{1, l - 1} \end{cases}$$



### Замечание

Если плотность вероятности  $f_X(x)$  непрерывна и ограничена, а число разрядов гистограммы  $l_n$  удовлетворяет условию:  $l_n \rightarrow +\infty, \frac{n}{l_n} \rightarrow +\infty$ , то

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{P} f_X(x)$$

Т.е. гистограмма является статистической аппроксимацией функции плотности вероятности.

## Выборочные моменты

### 6.15 Определение 1

*Выборочным начальным и центральным моментами* называется соответственно статистики:

$$\hat{\nu}_r(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^r$$

И

$$\hat{\mu}_r(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \hat{\nu}_1(n))^r$$

### 6.16 Определение 2

*Выборочным средним и выборочной дисперсией* называются соответственно статистики:

$$\bar{X}_n = \hat{\nu}_1(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

И

$$\hat{d}_X(n) = \hat{S}^2(n) = \hat{\mu}_2(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2$$

### 6.17 Определение 3

Пусть  $Z_n = (X_1, \dots, X_n)^T$  и  $V_n = (Y_1, \dots, Y_n)^T$  — выборки, порожденные распределениями  $F_X$  и  $F_Y$  соответственно. Тогда *выборочным коэффициентом корреляции* называется:

$$\hat{r}_{XY} = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)(Y_k - \bar{Y}_n)}{n\sqrt{\hat{d}_X \cdot \hat{d}_Y}}$$

### 6.18 Свойства выборочных моментов

$$1. \quad \boxed{M[\hat{\nu}_r(n)] = \nu_r, r \in \mathbb{N}}$$

#### Доказательство

$$M[\hat{\nu}_r(n)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M[X_k^r] = \frac{1}{n} n \nu_r. \quad \blacksquare$$

$$2. \quad \boxed{\text{Если } M[X^r] < \infty, \text{ то } \hat{\nu}_r(n) \xrightarrow{\text{п.н.}} \nu_r}$$

#### Доказательство

$$3. \quad \boxed{\text{Если } M[X^r] < \infty, \text{ то } \hat{\mu}_r(n) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu_r}$$

#### Доказательство

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_r(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^r = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^r C_r^i X_k^i (-\hat{X}_n)^{r-i} = \sum_{i=0}^r C_r^i (-\hat{X}_n)^{r-i} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^i \right) = \\ &= \sum_{i=0}^r C_r^i (-\hat{X}_n)^{r-i} \hat{\nu}_i(n) \xrightarrow[\text{СВ-ВО (2)}]{\text{п.н.}} \sum_{i=0}^r C_r^i (-\nu_1)^{r-i} \nu_i = \dots = \mu_r. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$4. \quad \boxed{D[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} D[X]}$$

Доказательство

С учетом независимости  $X_1, \dots, X_n$

$$D[X\bar{X}_n] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D[X_k] = \frac{nD[X]}{n^2}. \quad \blacksquare$$

$$5. \quad \boxed{M[\hat{d}_X(n)] = \frac{n-1}{n} D[X]}$$

Доказательство

$$\begin{aligned} M[\hat{d}_X(n)] &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n n M[(X_k - \bar{X}_n)^2] = M[(X_1 - \bar{X}_n)^2] = D[X_1 - \bar{X}_n]^2 = D\left[\frac{n-1}{n} X_1 - \right. \\ &\left. \sum_{k=2}^n \frac{1}{n} \bar{X}_k\right]^2 \stackrel{\text{H/3}}{=} \frac{n-1}{n} D[X_1] + \frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^n D[X_k] = D[X] \frac{n^2 - 2n + 1 + n - 1}{n^2} = D[X] \cdot \frac{n-1}{n}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$6. \quad \boxed{\frac{\bar{X}_n - m_X}{\sigma_X} \sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0; 1)}$$

Доказательство

Т.к.  $X_1, \dots, X_n$  независимые,  $M[X_k] = m_k$ ,  $D[X_k] = \sigma_X^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то в силу [Теоремы 5.1](#):

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm_X}{\sigma_X \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} N(0; 1)$$

■

$$7. \quad \boxed{\frac{\hat{d}_X(n) - \sigma_X^2}{\sqrt{\mu_4 - \mu_2^2}} \sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0; 1)}$$

## 7 Основные распределения в статистике

### Точечные оценки

#### 7.1 Определение 1

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — независимые с.в.

Тогда

$$Y = \sum_{k=1}^n X_k^2 \sim \chi^2(n)$$

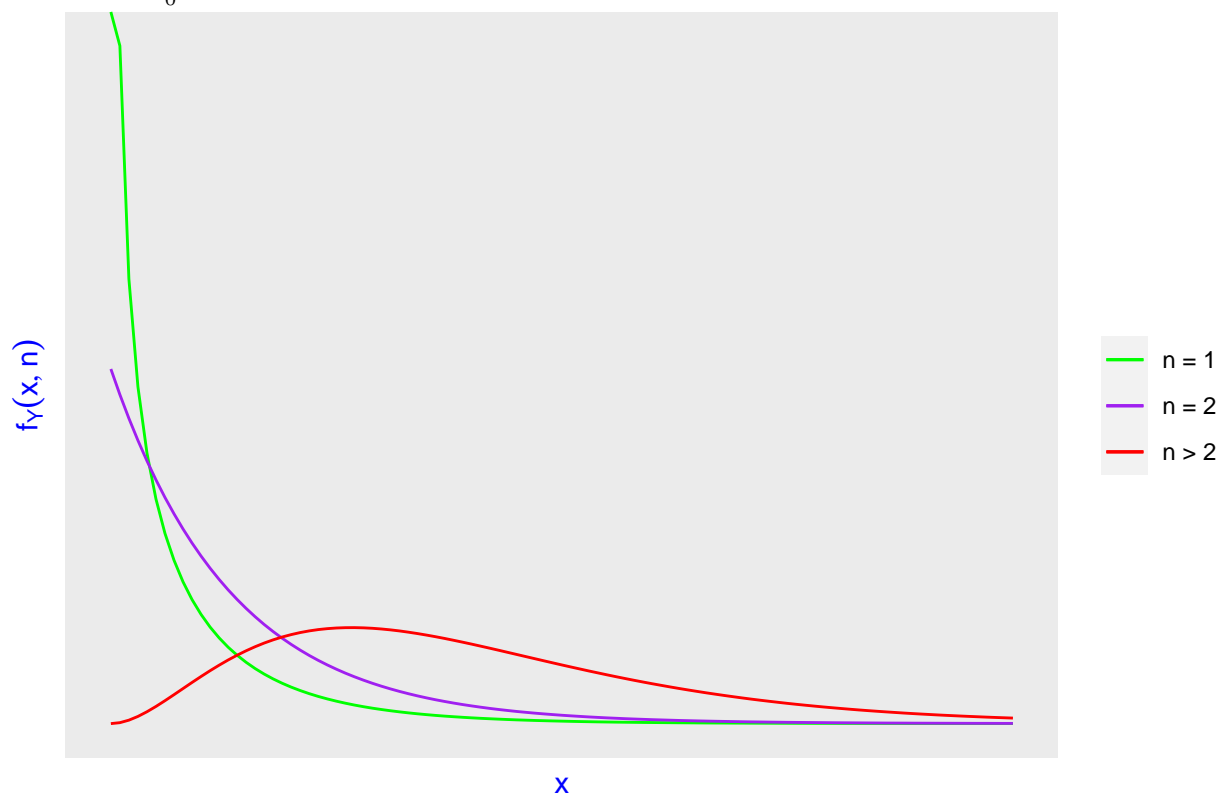
имеет **распределение хи-квадрат** с  $n$  степенями свободы.

#### 7.2 Свойства распределения $\chi^2(n)$

1.  $Y$  имеет плотность вероятности

$$f_Y(x; n) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

где  $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} y^{z-1} e^{-y} dy$  — гамма-функция.



2.  $Y$  имеет характеристическую функцию

$$\psi_Y(\lambda) = (1 - 2\lambda i)^{-\frac{n}{2}}$$

3.  $Y \sim \chi^2(n)$ ,  $M[Y] = n$ ,  $D[Y] = 2n$

4. Пусть  $n \geq 3$   $Y_1 \sim \chi^2(n_1), \dots, Y_k \sim \chi^2(n_k)$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n Y_i \sim \chi^2\left(\sum_{k=1}^n n_i\right)$$

5.

$$\frac{Y - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} N(0; 1)$$

6. Пусть  $Z_n$  порождена распределением  $N(m_X, \sigma_X^2)$ . Тогда если

$$\hat{d}_X = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2,$$

$$\text{то } \frac{n\hat{d}_X}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(n-1).$$

(Доказательство приведено далее в теореме Фишера)

### 7.3 Определение 2

Пусть  $X_0, X_1, \dots, X_n \sim N(0; 1)$  — независимые с.в.. Тогда с.в.

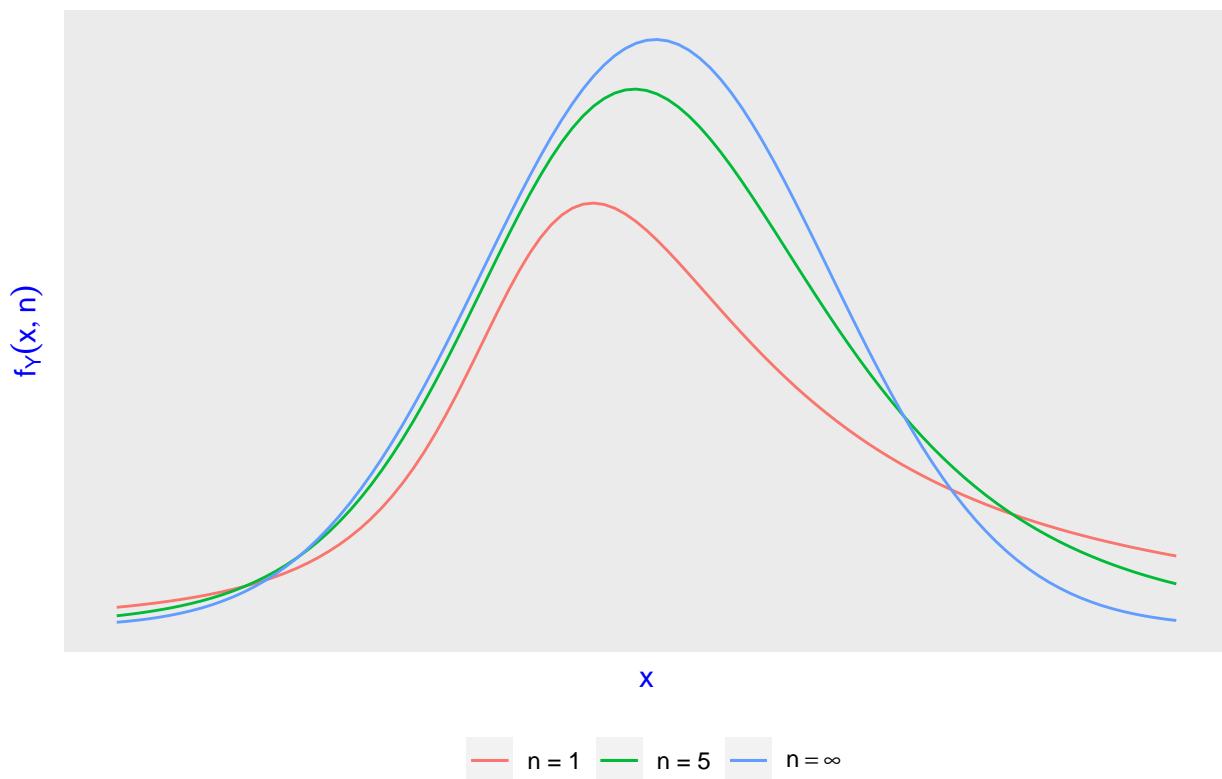
$$Y = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2}} \sim t(n)$$

имеем **распределение Стьюдента** с  $n$  степенями свободы.

### 7.4 Свойства распределения $t(n)$

1.  $Y$  имеет плотность вероятности

$$f_{x;n} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$



2.  $Y \sim t(n), M[Y] = 0, n \geq 2$

$$D[Y] = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

3.  $t(1) = C$  — *распределение Коши*

4.  $Y \sim t(n), Y \xrightarrow{d} N(0; 1)$

5. Пусть  $Z_n$  порождена распределением  $N(m_X; \sigma_X^2)$ . Тогда

$$\frac{\bar{X}_n - m_X}{\sqrt{\hat{d}_X}} \cdot \sqrt{n-1} \sim t(n-1)$$

(Доказательство приведено далее в теореме Фишера)

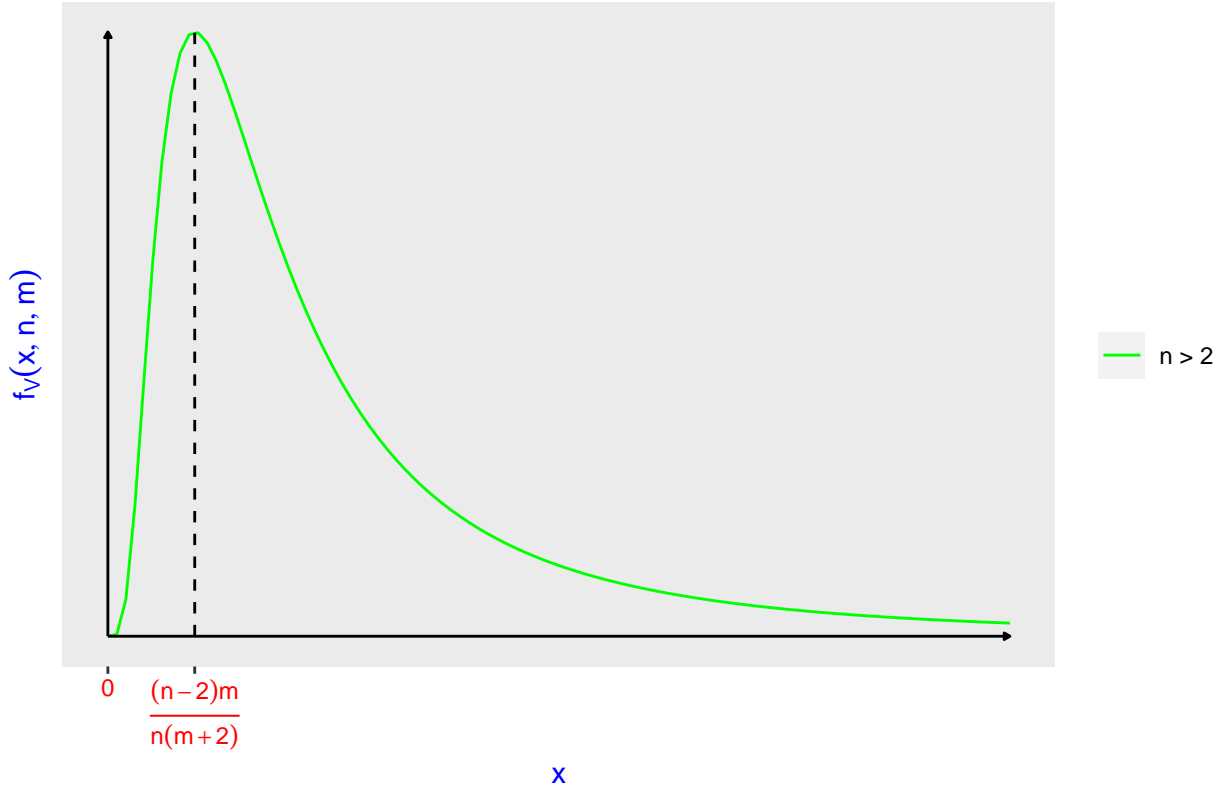
### 7.5 Определение 3

Пусть  $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$  — независимые с.в. Тогда с.в.  $V = \frac{Xm}{Yn} \sim F(n; m)$  имеет *Распределение Фишера* с  $n$  и  $m$  степенями свободы.

### 7.6 Свойства распределения $F(n; m)$

1.  $V$  имеет плотность вероятности

$$f_V(x, n, m) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot \Gamma(\frac{m}{2})} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(m+nx)^{\frac{n+m}{2}}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



2.  $V \sim F(n; m), M[V] = \frac{m}{m-2}, m > 2,$

$$D[V] = \frac{2m^2(m+n-2)}{n(m-2)^2(m-4)}, m > 4$$

3. Пусть  $Z_n = (X_1, \dots, X_n)^T$  и  $W_m = (Y_1, \dots, Y_m)^T$  — однородные выборки, порожденные распределениями  $N(m_X; \sigma^2)$  и  $N(m_Y; \sigma^2)$ .

Тогда если  $Z_n$  и  $W_m$  **независимы**,

$$V = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n n(X_k - \bar{X}_n)^2}{\frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m n(Y_k - \bar{Y}_m)^2} \sim F(n-1; m-1)$$

(Данный факт следует из свойства 6 распределения  $\chi^2(n)$ )

## 7.7 Определение 4

**Параметром**  $\theta \in \mathbb{R}^n$  **распределения** с.в.  $X$  называется любая числовая характеристика, входящая в  $F_x(x, \theta)$  явно.

### 7.8 Определение 5

*Точечной оценкой* неизвестного параметра  $\theta$  называется произвольная статистика  $\hat{\theta}(Z_n)$ .

#### Замечание

Оценка  $\hat{\theta}(Z_n)$  является с.в.

На практике используется ее реализация.

### 7.9 Определение 6

Оценка  $\hat{\theta}(Z_n)$  называется *несмещенной*, если

$$M[\hat{\theta}] = \theta$$

### 7.10 Определение 7

Оценка  $\hat{\theta}(Z_n)$  называется *состоятельной*, если

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$$

### 7.11 Определение 8

Оценка  $\hat{\theta}(Z_n)$  называется *сильно состоятельной*, если

$$\hat{\theta} \xrightarrow{\text{п.п.}} \theta$$

### 7.12 Определение 9

Оценка  $\hat{\theta}(Z_n)$  называется *с.к. состоятельной*, если

$$\hat{\theta} \xrightarrow{\text{с.к.}} \theta$$

#### Замечание

1. Из свойств  $\bar{X}_n$  следует, что  $\bar{X}_n$  — **несмещенная** и **сильносостоятельная** оценка  $m_X$ .
2. Из свойств  $\hat{d}_X$  следует, что  $\hat{d}_X$  — **смещенная** и **сильносостоятельная** оценка  $m_X$ .

### 7.13 Определение 10

Несмещенная оценка  $\hat{\theta}^*(Z_n)$  называется **эффективной**, если  $\forall \hat{\theta}(Z_n)$  — *несмещенной* оценки верно, что

$$D[\hat{\theta}^*(Z_n)] \leq D[\hat{\theta}(Z_n)]$$

### 7.14 Пример

Пусть  $M[\bar{X}] < \infty$ . Тогда  $\bar{X}$  — *сильно состоятельная* оценка  $m_X$ . Если  $D[\bar{X}] < \infty$ , то  $\bar{X}$  — *с.к.-состоятельная* оценка  $m_X$

(Доказательство следует из ЗБЧ)



**7.15 Теорема 1**

Пусть  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ , — с.к.-оптимальные оценки параметра  $\theta$ . Тогда

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$$

**Доказательство**

Т.к.  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  **оптимальны**, то  $D[\hat{\theta}_1] = D[\hat{\theta}_2] = d$ .

Пусть  $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{2}(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)$ . Тогда

$$D[\hat{\theta}_3] = \frac{1}{4}D[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2] = \frac{1}{4}(D[\hat{\theta}_1] + D[\hat{\theta}_2] + 2\text{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)) = \frac{1}{2}(d + \text{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)) \leq \frac{1}{2}(d + |\text{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)|) \leq \frac{1}{2}(d + \sqrt{D[\hat{\theta}_1] \cdot D[\hat{\theta}_2]}) = d$$

Тогда в силу оптимальности  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$

$$D[\hat{\theta}_3] = d$$

$$d = D[\hat{\theta}_3] = \frac{1}{2}(d + \text{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)), \quad \text{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = d = \sqrt{D[\hat{\theta}_1] \cdot D[\hat{\theta}_2]},$$

т.е. в неравенстве Коши-Буняковского достигается равенство. Следовательно,

$$\hat{\theta}_1 = \alpha \hat{\theta}_2 + \beta, \alpha > 0$$

$$\begin{cases} M[\hat{\theta}_1] = \alpha M[\hat{\theta}_2] + \beta \\ D[\hat{\theta}_1] = \alpha^2 D[\hat{\theta}_2] \end{cases} \implies \begin{cases} \theta = \alpha \theta + \beta \\ d = \alpha^2 d \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Окончательно,  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$ . ■

## 8 Эффективные оценки

Обозначим через  $f(x; \theta)$  плотность вероятности с.в.  $X$ , порождающей **выборку** в *абсолютно непрерывном случае* или **функцию** в *дискретном случае*. В силу критерия независимости функция

$$L(z_n; \theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k; \theta)$$

является *плотностью вероятности* с.в.  $Z_n$ .

### 8.1 Определение 1

$L(z_n; \theta)$  при фиксированном  $z_n \in S$  и переменной  $\theta$  называется **функцией правдоподобия**.

#### Замечание

Далее будем полагать, что  $\theta \in \mathbb{R}^1$ .

### 8.2 Определение 2

Распределение с.в.  $X$  называется **регулярным**, если

1.  $\sqrt{f(x; \theta)}$  — дифференцируема по  $\theta$  почти для всех  $x$ .
2.  $i(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) dx$  конечна, непрерывна по  $\theta$  и положительна.

#### Замечание

Далее будем предполагать, что выборка  $Z_n$  порождена *регулярным распределением*.

### 8.3 Определение 3

Случайная величина

$$U(Z_n; \theta) = \frac{\partial \ln L(Z_n; \theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta}$$

называется **вкладом выборки**  $Z_n$

### 8.4 Лемма 1

Пусть распределение *регулярное*. Тогда

$$M[U(Z_n; \theta)] = 0$$

**Доказательство**

В силу условия нормировки

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(z_n; \theta) d_{X_1}, \dots, d_{X_n} = 1$$

С учетом условий регулярности

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}^n} L(z_n; \theta) d_{X_1}, \dots, d_{X_n} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial L(z_n; \theta)}{\partial \theta} d_{X_1}, \dots, d_{X_n} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \ln L(z_n; \theta)}{\partial \theta} L(z_n; \theta) d_{X_1}, \dots, d_{X_n} = M[U(Z_n; \theta)]. \blacksquare$$

**8.5 Определение 4**

**Информацией Фишера** о параметре  $\theta$ , содержащейся в выборке  $Z_n$ , называют

$$I_n(\theta) = D[U(Z_n; \theta)] \stackrel{\text{регул.}}{=} M[U^2(Z_n; \theta)]$$

$i(\theta) = M[(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta})^2]$  называется **количеством информации Фишера, содержащимся в одном наблюдении**.

**Замечание**

Из определения  $U(Z_n; \theta)$  и независимости элементов выборки следует, что  $I_n(\theta) = n \cdot i(\theta)$ , т.е. количество информации **вырастает пропорционально объему выборки**.

**8.6 Лемма 2**

Пусть  $f(x; \theta)$  дважды непрерывно дифференцируема по  $\theta$ . Тогда

$$i(\theta) = -M[\frac{\partial^2 \ln f(X_1; \theta)}{\partial \theta^2}]$$

**Доказательство**

$$U(X_1; \theta) = \frac{\partial \ln f(X_1; \theta)}{\partial \theta}. \text{ С учетом Леммы 1}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \theta} M[U(X_1; \theta)] = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} f(x; \theta) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta^2} f(x; \theta) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \cdot \\ &\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta^2} f(x; \theta) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta})^2 f(x; \theta) dx = M[\frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta^2}] + i(\theta). \blacksquare \end{aligned}$$

**8.7 Пример 1**

Пусть  $X \sim N(\theta; \sigma^2)$ .

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$U(X_1; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(x - \theta)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{X - \theta}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

С учетом [Леммы 2](#)

$$i(\theta) = -M\left[-\frac{1}{\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2}$$

## 8.8 Пример 2

Рассмотрим нерегулярную модель.

$$X \sim R(0; \theta)$$

Здесь из множества  $\int_0^\theta \frac{1}{\theta} dx = 1$  не следует, что  $\int_0^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\theta}\right) dx = 0$ , т.к. при дифференцировании по  $\theta$  появляется еще одно слагаемое:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\theta \frac{1}{\theta} dx = \frac{1}{\theta} + \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\theta}\right) dx$$

## 8.9 Теорема 1 (Неравенство Рао-Крамера)

Пусть распределение  $F(x; \theta)$ , порождающее выборку  $Z_n$  *регулярно*. Тогда для любой несмещенной оценки  $\hat{\theta}$  верно неравенство:

$$D[\hat{\theta}(Z_n)] \geq \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{1}{ni(\theta)}$$

При этом равенство достигается лишь в том случае, если  $\hat{\theta}(Z_n) - \theta = a(\theta) \cdot U(Z_n; \theta)$ , где  $a(\theta)$  — некоторая функция от  $\theta$

### Доказательство

В силу несмещенности  $\hat{\theta}$

$$M[\hat{\theta}] = \int_{\mathbb{R}^n} (z_n) L(z_n; \theta) dx_1, \dots, dx_n = \theta$$

В силу *регулярности* и [Леммы 1](#)

$$1 = \frac{\partial}{\partial \theta}(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} M[\hat{\theta}] = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(z_n) \frac{\partial L(z_n; \theta)}{\partial \theta} dx_1, \dots, dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(z_n) \frac{\partial \ln L(z_n; \theta)}{\partial \theta} \cdot L(z_n; \theta) dx_1, \dots, dx_n =$$

$$M[\hat{\theta} U(Z_n; \theta)] = M[(\hat{\theta} - \theta)(U(Z_n; \theta) - \theta)] + \theta \cdot M[U(Z_n; \theta)] = \text{cov}(\hat{\theta}, U(Z_n; \theta))$$

Откуда с учетом *неравенства Коши-Буняковского*

$$1^2 \leq D[\hat{\theta}] \cdot D[U(Z_n; \theta)] = D[\hat{\theta}] \cdot I_n(\theta)$$

Причем *равенство достигается* в том и только том случае, когда  $\hat{\theta} = a(\theta)U(Z_n; \theta) + b(\theta)$   
Но с учетом [Леммы 1](#)  $b(\theta) = 0$ .

## 8.10 Определение 5

Оценка  $\hat{\theta}^*(Z_n)$ , для которой достигается равенство в неравенстве Рао-Крамера называется **эффективной**

**Замечание**

В силу [Теоремы 1](#) эффективная оценка является *оптимальной*. А с учетом [Теоремы 7.1](#) эффективная оценка **единственна**

**8.11 Пример 3**

Пусть  $X \sim N(\theta; \sigma^2)$

$$U(Z_n; \theta) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \ln f(X_k; \theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^n \frac{X_k - \theta}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} (\bar{X}_n - \theta)$$

Т.о.  $a(\theta) = \frac{\sigma^2}{n}$ . Тогда  $a(\theta)U(Z_n; \theta) = \bar{X}_n - \theta$ , откуда следует, что  $\bar{X}_n$  — *эффективная оценка*.

## 9 Методы построения точечных оценок

### Метод максимального правдоподобия

#### 9.1 Определение 1

*Оценкой максимального правдоподобия  $\theta$  называют*

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(Z_n; \theta)$$

#### Замечание

1. В силу *монотонности* функции  $\ln x$  справедливо представление:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(Z_n; \theta) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \ln L(Z_n; \theta)$$

2. Если  $L(Z_n; \theta)$  — **гладкая** и **максимум** по  $\theta$  достигается **внутри множества** возможных значений  $\theta$ , то  $\theta$  можно вычислить из *уравнения правдоподобия*

$$U(Z_n; \theta) = \frac{\partial \ln L(z_n; \theta)}{\partial \theta} = 0$$

3. Из [Теоремы 8.1](#) следует, что  $\hat{\theta}$  **будет также эффективной оценкой**.

#### 9.2 Пример 1

Рассмотрим случайную величину  $X \sim N(m; \sigma^2)$  с неизвестными  $m$  и  $\sigma^2$ :

$$\theta = (m; \sigma^2)^T$$

$$L(Z_n; \theta) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{-\frac{(X_k - \theta_1)^2}{2\theta_2}}$$

$$\ln L(Z_k; \theta) = \sum_{k=1}^n n \left( -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \theta_2 - \frac{(X_k - \theta_1)^2}{2\theta_2} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(Z_n; \theta)}{\partial \theta_1} = \sum_{k=1}^n \frac{(X_k - \theta_1)}{\theta_2} = \frac{1}{\theta_2} (n\bar{X}_n - n\theta_1) = 0 \\ \frac{\partial \ln L(Z_n; \theta)}{\partial \theta_2} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{(X_k - \theta_1)^2}{2\theta_2^2} - \frac{1}{2\theta_2} \right) = \frac{1}{2\theta_2} (n\hat{d}_X(n) - n\theta_2) = 0 \\ \hat{\theta}_1 = \bar{X}_n \\ \hat{\theta}_2 = \hat{d}_X(n) \end{cases}$$

### 9.3 Пример 2

Пусть  $X \sim R(\theta_1; \theta_2)$ . В этом случае  $L(Z_n; \theta)$  **не является** непрерывной:

$$L(Z_n; \theta) = \prod_{k=1}^n f_X(X_k; \theta) = \begin{cases} 0, & \exists k = \overline{1, n} : X_k \notin [\theta_1; \theta_2] \\ \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, & \forall k = \overline{1, n} : X_k \in [\theta_1; \theta_2] \end{cases}$$

Тогда оценка максимального правдоподобия **не может быть вычислена из уравнений правдоподобия**. Хотя  $\hat{\theta}$  существует:

$$L(Z_n; \theta) = \begin{cases} 0, & \min_{k=\overline{1, n}} X_k < \theta_1 \text{ или } \max_{k=\overline{1, n}} X_k > \theta_2 \\ \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, & \theta_1 \leq \min_{k=\overline{1, n}} X_k \leq \max_{k=\overline{1, n}} X_k \leq \theta_2 \end{cases}$$

Откуда  $L(Z_n; \theta)$  *возрастает* по  $\theta_1$  и *убывает* по  $\theta_2$

Тогда  $\hat{\theta}_1 = \min_{k=\overline{1, n}} X_k = X^{(1)}$ ,  $\hat{\theta}_2 = \max_{k=\overline{1, n}} X_k = X^{(n)}$

### Замечание

Для МП-оценок выполняется **принцип инвариантности**:

Пусть  $g(\theta)$  — *биективное* отображение.

Тогда МП-оценка  $\hat{g}(Z_n) = g(\hat{\theta}(Z_n))$ .

Действительно,

$$\sup_{\theta} L(Z_n; \theta) = \sup_g L(Z_n; g^{-1}(g))$$

Тогда  $g^{-1}(\hat{g}) = \hat{\theta}$ , т.е.  $\hat{g} = g(\hat{\theta})$

### 9.4 Пример 3

Пусть  $X \sim N(\theta_1; \theta_2)$ . Требуется оценить  $F_X(x_0) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x_0 - \theta_1}{\theta_2}\right)$ . Рассмотрим *биективное отображение*

$$g(\theta_1; \theta_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x_0 - \theta_1}{\theta_2}\right) \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\hat{g}(Z_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x_0 - \bar{X}_n}{\sqrt{\hat{d}_X(n)}}\right) \\ \sqrt{\hat{d}_X(n)} \end{pmatrix}$$

$X_0 \in \mathbb{R}$

### Замечание

Для решения уравнений правдоподобия часто используются *численные методы*

### 9.5 Теорема 1

Пусть распределение с.в.  $X$ , порождающей выборку  $Z_n$ , *регулярно*.

Функция правдоподобия  $L(z_n; \theta)$  имеет единственный достижимый максимум по  $\theta \forall z_n \in S, n \in \mathbb{N}$ . Тогда

1. МП-оценка  $\hat{\theta}$  *состоятельна*;

2. Если  $|\frac{\partial^k f(x; \theta)}{\partial \theta^k}| \leq g_k(x), \forall \theta$ , где

$\int_{\mathbb{R}} g_1(x) dx < \infty, \int_{\mathbb{R}} g_2(x) dx < \infty, \int_{\mathbb{R}} g_3(x) f(x; \theta) dx \leq C \leq \infty$ , а функция  $i(\theta) = \int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta})^2 f(x; \theta) dx$  конечна и положительна  $\forall \theta$ , то

2.1  $M[\hat{\theta}] \rightarrow \theta$  (*асимптотически несмещенность*)

2.2  $\hat{\theta}$  *сильно состоятельна*;

2.3  $\sqrt{ni(\theta)}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0; 1)$

*Асимптотическая нормальная*

### Метод моментов

#### 9.6 Определение 2

Пусть  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$ , а для распределения  $F_X(x; \theta)$ , порождающего выборку  $Z_n, M[X^r] < \infty$

Тогда

$$\begin{cases} \nu_1(\theta) = \hat{\nu}_1(n) \\ \vdots \\ \nu_r(\theta) = \hat{\nu}_r(n) \end{cases}$$

называется *системой метода моментов*.

#### 9.7 Определение 3

Решение системы метода моментов

$$\hat{\theta}_i = \varphi_i(\hat{\nu}_1(n), \dots, \hat{\nu}_r(n)), i = \overline{1, r}$$

называется *оценкой метода моментов*.

#### 9.8 Теорема 2

Пусть функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ , определяющие оценку метода моментов *непрерывные и биективные*. Тогда оценка метода моментов *состоятельна*.

### Доказательство

Доказательство следует из **состоятельности** статистик  $\hat{\nu}_i(n)$ .

#### 9.9 Пример 1

$X \sim N(\theta_1; \theta_2)$ . Тогда  $\hat{\theta}_1 = \bar{X}_n, \hat{\theta}_2 = \hat{d}_X(n)$



**9.10 Пример 2**

$X \sim R(\theta_1; \theta_2)$ . Тогда

$$\begin{cases} \bar{X}_n = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\ \hat{d}_X(n) = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 2\bar{X}_n \\ \theta_2 - \theta_1 = 2\sqrt{\hat{d}_X(n)}\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_1 = \bar{X}_n - \sqrt{3\hat{d}_X(n)} \\ \theta_2 = \bar{X}_n + \sqrt{3\hat{d}_X(n)} \end{cases}$$

**Замечание**

Метод моментов **трудноприменим**, если *теоретические моменты не удается вычислить явно*.

## 10 Интервальные оценки

### 10.1 Определение 1

Пусть выполнено условие:

$$P(\hat{\theta}_1(Z_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_2(Z_n)) = 1 - \alpha$$

для некоторого распределения параметром  $F_x(x; \theta)$ . Тогда интервал  $[\hat{\theta}_1(Z_n); \hat{\theta}_2(Z_n)]$  — называется **доверительным интервалом** или **интервальной оценкой** параметра  $\theta$  уровня надежности  $1 - \alpha$ .

### 10.2 Определение 2

Доверительный интервал называется **центральный**, если верно условие:

$$P(\theta \leq \hat{\theta}_1(Z_n)) = P(\theta \geq \hat{\theta}_2(Z_n)) = \frac{\alpha}{2}$$

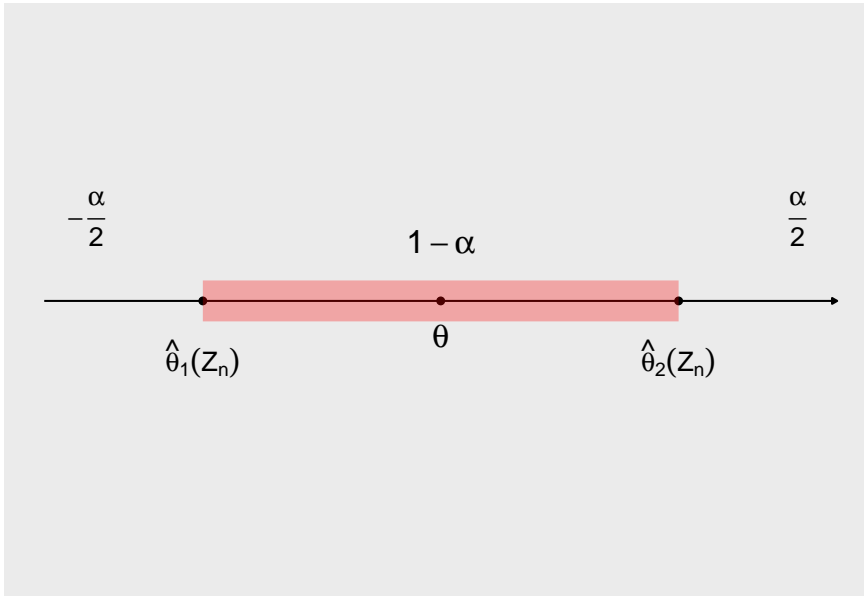
### 10.3 Определение 3

Доверительный интервал называется **правосторонним** или **левосторонним**, если выполнено условие:

$$P(\theta \geq \hat{\theta}_2(Z_n)) = \alpha \text{ или } P(\theta \leq \hat{\theta}_1(Z_n)) = \alpha$$

#### Замечание

1. Можно визуализировать интервальную оценку следующим образом:



2. Интервальную оценку можно рассматривать в качестве оценки погрешности точечной оценки  $\hat{\theta}(Z_n)$ , если строить доверительный интервал в форме:

$$[\hat{\theta}(Z_n) - \varepsilon_1; \hat{\theta}(Z_n) + \varepsilon_2]$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ .

## Построение доверительного интервала на основе центральной статистики

### 10.4 Определение 4

Статистика  $G(Z_n; \theta)$  называется **центральной**, если  $G$  непрерывна и строго монотонна по  $\theta$ ,  $\forall z_n \in S$ , а ее распределение **не зависит** от  $\theta$ .

Если распределение  $F_G(Z_n; \theta)$  известно, то можно подобрать числа  $g_1, g_2$  такие, что  $P(g_1 \leq G(Z_n; \theta) \leq g_2) = 1 - \alpha$ .

Например, для центрального доверительного интервала  $g_1 = G_{\frac{\alpha}{2}}, g_2 = G_{1-\frac{\alpha}{2}}$  — квантили уровней  $\frac{\alpha}{2}$  и  $1 - \frac{\alpha}{2}$ .

Если  $G(Z_n; \theta)$  монотонно возрастает по  $\theta$ , то можно перейти к эквивалентному неравенству:

$$P(G^{-1}(Z_n; g_1) \leq \theta \leq G^{-1}(Z_n; g_2)) = 1 - \alpha$$

Тогда границы интервальной оценки имеют вид:

$$\hat{\theta}_1(Z_n) = G^{-1}(Z_n; g_1), \hat{\theta}_2(Z_n) = G^{-1}(Z_n; g_2)$$

### Замечание

Построение центральных статистик довольно сложно. В связи с чем зачастую используют **асимптотические распределения**, которые в силу ЦПТ тесно связаны с нормальным распределением.

### 10.5 Определение 5

Матрица  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется **ортогональной**, если  $C^T = C^{-1}$ .

### 10.6 Лемма 1

Пусть  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — ортогональная матрица,  $C_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}, j = \overline{1, n}$ . Тогда

1.  $\sum_{k=1}^n C_{jk} \cdot C_{ik} = 0, j \neq i; i, j = \overline{1, n}$
2.  $\sum_{k=1}^n C_{ik}^2 = 1, i = \overline{1, n}$
3. Если  $y = Cx$ , то  $\|y\| = \|x\|$
4.  $\sum_{k=1}^n C_{ik} = 0, i = \overline{2, n}$

### Доказательство

Пункты 1 и 2 следуют из тождества

$$C^T \cdot C = I$$

$$3. \|y\|^2 = (y, y) = (Cx, Cx) = (x, C^T Cx) = (x, x) = \|x\|^2$$

4. Рассмотрим свойство 1 для  $i = 1$ . Тогда

$$0 = \sum_{k=1}^n C_{1k} \cdot C_{ik} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} C_{ik} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n C_{ik}$$

■

## 10.7 Теорема 1 (ФИШЕРА)

Пусть  $Z_n$  — однородная выборка, порожденная распределением  $N(m_X; \sigma_X^2)$ . Тогда

1.  $\frac{\bar{X}_n - m_X}{\sigma_X} \sqrt{n} \sim N(0; 1)$
2.  $\frac{n\hat{d}_X(n)}{\sigma_X^2} \sim \chi(n-1)$
3.  $\frac{\bar{X}_n - m_X}{\sqrt{\hat{d}_X(n)}} \sqrt{n-1} \sim t(n-1)$
4.  $\bar{X}_n$  и  $\hat{d}_X(n)$  независимы

### Доказательство

$$1) \frac{\bar{X}_n - m_X}{\sigma_X} \sqrt{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_X \sqrt{n}} X_k - \frac{m_X \sqrt{n}}{\sigma_X} = \left( \frac{1}{\sigma_X \sqrt{n}} + \frac{1}{\sigma_X \sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sigma_X \sqrt{n}} \right) \cdot Z_n - \frac{m_X \sqrt{n}}{\sigma_X}.$$

Т.к.  $Z_n \sim N\left(\begin{pmatrix} m_X \\ \vdots \\ m_X \end{pmatrix}; \sigma_X^2 I\right)$ , то в силу [Леммы 1.3](#)

$$\frac{\bar{X}_n - m_X}{\sigma_X} \sqrt{n} \sim N(m; \sigma^2), \text{ где } m = \left( \frac{1}{\sigma_X \sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sigma_X \sqrt{n}} \right) \begin{pmatrix} m_X \\ \vdots \\ m_X \end{pmatrix} - \frac{m_X \sqrt{n}}{\sigma_X} = 0$$

$$\sigma^2 = \left( \frac{1}{\sigma_X \sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sigma_X \sqrt{n}} \right) \sigma^2 I \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_X \sqrt{n}} \end{pmatrix} = 1$$

2) Построим матрицу  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  так, чтобы  $C_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}, j = \overline{1, n}$ ; остальные строки выберем так, чтобы векторы  $\begin{pmatrix} C_{11} \\ \vdots \\ C_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{21} \\ \vdots \\ C_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} C_{n1} \\ \vdots \\ C_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

образовывали ортонормированный базис, что возможно, т.к. вектор  $\begin{pmatrix} C_{11} \\ \vdots \\ C_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$

всегда можно дополнить до ортонормированного базиса.

Тогда  $C$  удовлетворяет условиям [Леммы 1](#).

Рассмотрим  $Y = \frac{1}{\sigma_X} C Z_n$ . Тогда  $Y \sim N(m_Y; K_Y)$ , где в силу [Леммы 1.3](#) и [Леммы 1, п.4](#):

$$m_Y = \frac{1}{\sigma_X} C (\sigma_X^2 I) \frac{1}{\sigma_X} C^T = C I C^T = C C^T = I$$

Т.о.  $Y_1, \dots, Y_n$  — некоррелированные нормальные с.в.

Тогда в силу [Леммы 1.4](#)  $Y_1, \dots, Y_n$  *независимы*

$$\frac{n\hat{d}_X(n)}{\sigma_X^2} = \frac{1}{\sigma_X^2} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{\sigma_X^2} \sum_{k=1}^n (X_k^2 - 2X_k\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) = \frac{1}{\sigma_X^2} \left( \sum_{k=1}^n X_k^2 - 2n\bar{X}_n \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) + n\bar{X}_n^2 \right) = \frac{1}{\sigma_X^2} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n}{\sigma_X^2} \bar{X}_n^2 =$$

$$Y_1 = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{n}} (X_1 + \dots + X_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_X} \bar{X}_n. \text{ Тогда с учетом } \textcolor{blue}{\text{Леммы 1}}$$

$$= \frac{1}{\sigma_X^2} \|Z_n\|^2 - Y_1^2 = \frac{1}{\sigma_X^2} \|CZ_n\|^2 - Y_1^2 = \left\| \frac{1}{\sigma_X} Z_n \right\|^2 - Y_1^2 = \|Y\|^2 - Y_1^2 = \sum_{k=1}^n Y_k^2 - Y_1^2 = \sum_{k=2}^n Y_k^2, \text{ где}$$

$Y_k \sim N(0; 1), k = \overline{2, n}$ . Тогда по определению

$$\frac{n\hat{d}_X(n)}{\sigma_X^2} = \sum_{k=2}^n Y_k^2 \sim \chi^2(n-1)$$

.4) Заметим, что  $\bar{X}_n = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Y_1 = \varphi(Y_1)$ , где  $Y_1$  и  $(Y_2, \dots, Y_n)^T$  **независимы**. Тогда **независимы** также  $\varphi(Y_1)$  и  $\psi(Y_2, \dots, Y_n)$ , т.е.  $\bar{X}_n$  и  $\hat{d}_X(n)$

$$.3) \frac{\bar{X}_n - m_X}{\sqrt{\hat{d}_X(n)}} \sqrt{n-1} = \frac{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Y_1 - m_X}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} \sum_{k=2}^n Y_k^2}} \sqrt{n-1} = \frac{Y_1 - \frac{m_X \sqrt{n}}{\sigma_X}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n Y_k^2}} \sim t(n-1), \text{ т.к.}$$

$Y_1 - \frac{m_X \sqrt{n}}{\sigma_X} \sim N(0; 1)$  и  $Y_1, (Y_2, \dots, Y_n)^T$  **независимы**. ■

### 10.8 Пример 3

Построить интервальную оценку  $\theta$  по однородной выборке  $Z_n$ , порожденной распределением  $N(\theta; \sigma_X^2)$ , если  $\sigma_X^2$  *неизвестна*, уровня надежности  $1 - \alpha$

В силу [Теоремы Фишера](#)

$$G(Z_n; \theta) = \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\hat{d}_X(n)}} \sqrt{n-1} \sim (n-1)$$

Тогда

$$1 - \alpha = P\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\hat{d}_X(n)}} \sqrt{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = P\left(\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\hat{d}_X(n)}{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq \theta \leq \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\hat{d}_X(n)}{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

Тогда интервальная оценка имеет вид:

$$\left[ \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\hat{d}_X(n)}{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\hat{d}_X(n)}{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right]$$

Заметим, что  $\bar{X}_n$  — *точечная оценка*  $\theta$  — лежит в середине интервала. При этом длина интервала  $2\sqrt{\frac{\hat{d}_X(n)}{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$  **возрастает** по  $\sigma_X^2$  и **убывает** по  $\alpha$  и  $n$ .

### 10.9 Пример 4

Пусть выборка  $Z_n$  порождена распределением  $R(0; \theta)$ . Пусть

$$G(Z_n; \theta) = \left( \frac{X^{(n)}}{\theta} \right)^n$$

$$F_G(x) = P\left(\left(\frac{X^{(n)}}{\theta}\right)^n \leq x\right) = P(X^{(n)} \leq \theta \sqrt[n]{x}) = F_{(n)}(\theta \sqrt[n]{x}) =$$

в силу [Следствия 6.1](#)

$$^* (F_X(\theta \sqrt[n]{x}))^n = \begin{cases} 1^n, & \theta \sqrt[n]{x} \geq \theta, \\ 0^n, & 0 \leq 0, \\ -(\frac{\theta \sqrt[n]{x}-0}{\theta-0})^n, & 0 \leq (0; \theta) \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases} \implies G(Z_n; \theta) \sim R(0; 1)$$

Тогда  $G_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha}{2}, G_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1 - \frac{\alpha}{2},$

$$1 - \alpha = P\left(\frac{\alpha}{2} \leq \left(\frac{X^{(n)}}{\theta}\right)^n \leq 1 - \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(X^{(n)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n}} \leq \theta \leq X^{(n)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}\right)$$

Интервальная оценка имеет вид:

$$\left[X^{(n)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}; X^{(n)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}\right]$$

Заметим, что точечная МП-оценка  $\hat{\theta}(Z_n) = X^{(n)}$  **не лежит внутри** интервала.

## 11 Проверка статистических гипотез

### 11.1 Определение 1

*Статистической гипотезой*  $H$  называется любое предположение относительно закона распределения с.в.  $X$ , порождающей выборку  $Z_n$ .

### 11.2 Определение 2

Проверяемая гипотеза  $H_0$  называется *основной*. Конкурирующая с  $H_0$  гипотеза  $H_1$  называется *альтернативой*.

### 11.3 Определение 3

*Статистическим критерием* или *критерием согласия* называется правило, в соответствии с которым по реализации выборки  $z_n = Z_n(\omega)$  принимается или отвергается гипотеза  $H_0$ .

### 11.4 Примеры

#### Гипотеза о виде распределения

Пусть  $F_X$  — распределение, порождающее выборку  $Z_n$ ,  $F$  — некоторая заданная функция распределения,  $\mathbb{F}$  — некоторый заданный класс функций распределения.

Например,  $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x-1)$ ,  $\mathbb{F} = \{F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-m}{\sigma}) : m \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$

Тогда можно рассмотреть

$H_0 : F_X(x) = F(x), x \in \mathbb{R}$  или  $H_0 : F_X \in \mathbb{F}$

#### Гипотеза однородности

Пусть задано  $k$  выборок  $Z_{n_1}^1, \dots, Z_{n_k}^k$ .

Требуется определить, образуют ли они единую однородную выборку.

Если  $F_i(x)$  — функция распределения, порождающая выборку  $Z_{n_i}^i$ , то

$$H_0 : F_1(x) = \dots = F_k(x)$$

#### Гипотеза независимости

Пусть  $Z_n^1, Z_n^2$  — *однородные* выборки, порождаемые с.в.  $X$  и  $Y$  соответственно с функциями распределения  $F_X$  и  $F_Y$ .

Через  $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y); x, y \in \mathbb{R}$

### Замечание

Для проверки гипотезы  $H_0$  используются специальные статистики  $T(Z_n)$ , характеризующие отклонение наблюдения от теоретического предположения.

### 11.5 Определение 4

Обозначим через  $G$  *множество всех возможных значений статистики*  $T$ :

$$G = \{t : t = T(z_n), z_n \in S\}$$

**11.6 Определение 5**

Построим разбиение  $G$  на *доверительную область*  $G_{\circ\alpha}$  и *критическую область*  $G_{|\alpha}$  так, чтобы

$$G_{\circ\alpha} \cup G_{|\alpha} = G$$

$$G_{\circ\alpha} \cap G_{|\alpha} = \emptyset$$

$P(T(z_n) \in G_{|\alpha} | H_0) \leq \alpha, P(T(Z_n) \in G_{\circ\alpha} | H_0) \geq 1 - \alpha$  для некоторого  $\alpha \in (0; 1)$ .

Если  $H_0$  принимается в случае, когда  $T(Z_n) \in G_{|\alpha}$ , то  $\alpha$  называется *уровнем значимости критерия*.

**11.7 Определение 6**

*Ошибкой первого рода* называется событие, когда  $H_0$  верна, но она отвергается  $T(z_n) \in G_{|\alpha}, H_0$  верно.

**11.8 Определение 7**

*Ошибкой второго рода* называется событие, когда  $H_0$  неверно, но она принимается  $T(z_n) \in G_{\circ\alpha}, H_0$  неверно.

**Замечание**

1. Если  $H_0$  принимается, то это не значит, что  $H_0$  верно. Это значит, что наблюдения  $z_n = Z_n(\omega)$  *согласуется* с гипотезой  $H_0$ .
2. Для построения доверительной и критической областей необходимо знать

$$Law(T(Z_n) | H_0)$$

а также задать уровень значимости  $\alpha$

3. Структура критической области  $G_{|\alpha}$  определяется альтернативой  $H_1$

**11.9 Определение 8**

Пусть  $\mathbb{F}$  — множество всех распределений  $T(Z_n)$ , удовлетворяющих альтернативе  $H_1$ . Тогда *функцией мощности критерия*  $W : \mathbb{F} \rightarrow [0; 1]$  называется

$$W(F) = P(T(Z_n) \in G_{|\alpha} | Law(T(Z_n)) = F)$$

Значение  $W(F)$  называется *мощностью критерия при альтернативе  $F$* .

**11.10 Определение 9**

Критерий называется *несмещенным*, если  $W(F) > \alpha, \forall F \in \mathbb{F}$ .



**Замечание**

1. Для построения  $W(F)$  необходимо знать  $Law(T(Z_n)|F)$ , что не всегда доступно.
2. Качество критерия определяется функцией мощности: чем выше мощность, тем чаще критерий отвергает  $H_0$ , если она *неверна*.

**Критерий согласия Колмогорова**

$$H_0 : F_X(x) = F(x), x \in \mathbb{R}$$

$$H_1 : F_X(x_0) \neq F(x_0) \text{ для некоторого } x_0 \in \mathbb{R}$$

$$T(Z_n) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$$

Данный критерий применяется для *непрерывных*  $F(x)$ .

$Law(T(Z_n)|H_0)$  известно. Для *малых*  $n \in \mathbb{N}$  соответствующие квантили берутся из таблиц. При больших  $n \in \mathbb{N}$  используют *асимптотическую аппроксимацию*:

$$F_{\sqrt{n}T(Z_n)|H_0}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K(x) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$K(x)$  — *функция распределения Колмогорова*

**Критерий согласия хи-квадрат Пирсона**

Пусть для выборки  $Z_n$  построено разбиение  $\mathbb{R}$ :

$-\infty = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l < t_{l+1} = +\infty$ , где

$t_1 \leq X^{(1)}, t_l > X^{(n)}$ .

На построенном разбиении построим гистограмму:

$$\hat{f}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (t_0, t_1) \cup [t_l, t_{l+1}), \\ \hat{p}_k, & x \in [t_k, t_{k+1}), k = \overline{1, l-1} \end{cases}$$

Пусть  $p_k = P(X \in [t_k, t_{k+1})|H_0) = F(t_{k+1}) - F(t_k), k = \overline{0, l}$ .

*Статистика критерия Пирсона* имеет вид:

$$T_{\chi^2}(Z_n) = n \cdot \sum_{k=0}^l \frac{(\hat{p}_k - p_k)^2}{p_k}$$

где  $\hat{p}_0 = \hat{p}_l = 0$ .

**11.11 Теорема 1**

Пусть  $p_k \in (0; 1), k = \overline{0, l}$ .

Тогда

$$Law(T_{\chi^2}(Z_n)|H_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^2(l)$$

**Замечание**

1. **Высокая точность** приближения законом  $\chi^2(l)$  достигается при  $l \geq 5$  и  $n \geq 50$ .
2. Если у  $F(x; \theta_1, \dots, \theta_5)$  теоретической функции распределения есть  $s$  неизвестных параметров, то

$$Law(T_{\chi^2}(Z_n)|H_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^2(l-s)$$

**Проверка гипотезы о значении параметра**

Рассматривается выборка  $Z_n$ , порожденная распределением  $N(m_X; \sigma_X^2)$

Рассмотрим  $H_0 : m_X = m_0$  против

$H_1 : m_X \neq m_0, H_2 : m_X > m_0, H_3 : m_X < m_0$

**1 случай:  $G_X^2$  известна**

$$T(Z_n) = \frac{(\bar{X}_n - m_0)}{\sigma_X} \sqrt{n}, Law(T(Z_n)|H_0) = N(0; 1)$$

$$G_{1\alpha} = (-\infty; u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$$

$$G_{2\alpha} = (u_{1-\alpha}; +\infty), G_{3\alpha} = (-\infty; U_{\alpha})$$

**2 случай:  $G_X^2$  неизвестна**

$$T(Z_n) = \frac{(\bar{X}_n - m_0)}{\sqrt{\hat{d}_X(n)}} \sqrt{n-1}, Law(T(Z_n)|H_0) = t(n-1)$$

$$G_{1\alpha} = (-\infty; t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); +\infty)$$

$$G_{2\alpha} = (t_{1-\alpha}(n-1); +\infty), G_{3\alpha} = (-\infty; t_{\alpha}(n-1))$$

Рассмотрим  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_0^2$  против

$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_0^2$

**1 случай:  $m_X$  известна**

$$T(Z_n) = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - m_X)}{\sigma_0^2}, Law(T(Z_n)|H_0) = \chi^2(n)$$

**2 случай:  $m_X$  неизвестна**

$$T(Z_n) = \frac{n\hat{d}_X(n)}{\sigma_0^2}, Law(T(Z_n)|H_0) = \chi^2(n-1)$$

## 12 Метод наименьших квадратов

В рамках регрессионного анализа рассматривается задача восстановления зависимости  $Y = \varphi(x)$  по набору наблюдений  $Y_1, \dots, Y_n$ , которые предполагаются **защищенными**.

### 12.1 Определение 1

**Линейной регрессионной моделью** называется класс линейных по набору неизвестных параметров  $\theta \in \mathbb{R}^s$  функций:

$$\varphi(x; \theta) = \theta_1 \varphi_1(x) + \dots + \theta_s \varphi_s(x)$$

### 12.2 Определение 2

**Схемой Гаусса-Маркова** называется модель наблюдения линейной регрессионной модели при наличии случайных ошибок наблюдения:

$$Y_k = \theta_1 \varphi_1(x_k) + \dots + \theta_s \varphi_s(x_k) + \varepsilon_k, k = \overline{1, n}$$

ИЛИ

$$Y = X\theta + E, \text{ где } X = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_s(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_s(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times s}$$

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)^T \in \mathbb{R}^s, Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$$E = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

где  $X$  называется **регрессионной матрицей**. Предполагается, что

$$M[E] = 0, K_E = \sigma^2 \cdot I$$

### 12.3 Определение 3

**МНК-оценкой вектора  $\theta$**  называется

$$\hat{\theta}(Y) = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{k=1}^n (Y_k - \theta_1 \varphi_1(x_k) - \dots - \theta_s \varphi_s(x_k))^2 \right)$$

### 12.4 Теорема 1 (Гаусса-Маркова)

Пусть матрица  $X \in \mathbb{R}^{n \times s}$  такая, что  $\det(X^T X) \neq 0$

Тогда

1. МНК-оценка  $\hat{\theta}(Y)$  существует, **единственна** и определяется соотношением:

$$\hat{\theta}(Y) = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

2. МНК-оценка  $\hat{\theta}(Y)$  **несмещенная** обладает **наименьшей дисперсией** в классе линейных по  $Y$  и **несмещенных** оценок по координатам.

3. Ковариационная матрица  $\hat{\theta}$  имеет вид

$$K_{\hat{\theta}} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

**Доказательство**

1.

$$J(\theta) = (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) = Y^T Y - 2Y^T X\theta + \theta^T X^T X\theta \rightarrow \min_{\theta}$$

$J(\theta)$  — квадратичная функция. При этом  $H_J = 2X^T X$  — матрица Гессе невырождена и положительно определена:

Пусть  $x \in \mathbb{R}^s \setminus \{0\}$ . Тогда  $x^T (2X^T X)x = 2(Xx, Xx) > 0$ .

Т.о.  $J(\theta)$  имеем единственный экстремум — точку минимума, которая может быть найдена из необходимых условий:

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = -(2Y^T X)^T + 2X^T \cdot X\theta = 0$$

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$2. M[\hat{\theta}] = M[(X^T X)^{-1} X^T Y] = (X^T X)^{-1} X^T M[X\theta + E] = (X^T X)^{-1} X^T X\theta + (X^T X)^{-1} X^T M[E] = \theta$$

Рассмотрим произвольную несмещенную линейную оценку  $\tilde{\theta} = AY$ , где  $A \in \mathbb{R}^{s \times n}$   
Тогда  $\forall \theta \in \mathbb{R}^s$

$$\theta = M[\tilde{\theta}] = M[AX\theta + AE] = AX\theta + AM[E] = AX\theta$$

Откуда  $AX = I$

$$K_{\hat{\theta}} = M[(\tilde{\theta} - \theta)(\tilde{\theta} - \theta)^T] = M[(AY - \theta)(AY - \theta)^T] = [(AX\theta - AX - \theta)(AX\theta - AE - \theta)^T] \stackrel{AX=I}{=} M[AEE^T A^T] = AK_E A^T = \sigma^2 AA^T \quad (*)$$

$$\begin{aligned} AA^T &= (A - ((X^T X)^{-1} X^T) + ((X^T X)^{-1} X^T))(A - (X^T X)^{-1} X^T + (X^T X)^{-1} X^T)^T = \\ &= (A - (X^T X)^{-1} X^T)(A - (X^T X)^{-1} X^T)^T + (A - (X^T X)^{-1} X^T)X(X^T X)^{-1} + (X^T X)^{-1} X^T (A - \\ &= (X^T X)^{-1} X^T)^T + (X^T X)^{-1} X^T X(X^T X)^{-1} = (A - (X^T X)^{-1} X^T)(A - (X^T X)^{-1} X^T)^T + \\ &+ AX(X^T X)^{-1} - (X^T X)^{-1} X^T X(X^T X)^{-1} + (X^T X)^{-1} X^T A^T - (X^T X)^{-1} X^T X(X^T X)^{-1} + \\ &+ (X^T X)^{-1} \stackrel{AX=I}{=} (A - (X^T X)^{-1} X^T)(A - (X^T X)^{-1} X^T)^T + (X^T X)^{-1} \end{aligned}$$

т.к.  $(A - (X^T X)^{-1} X^T)(A - (X^T X)^{-1} X^T)^T \geq 0$ , то все ее диагональные элементы, которые и определяют  $D[\theta_k], k = \overline{1, s}$ , неотрицательны. Тогда минимальное значение  $D[\theta_k], \forall k = \overline{1, s}$  достигается, если

$$(A - (X^T X)^{-1} X^T)(A - (X^T X)^{-1} X^T)^T = 0, \text{ т.е.}$$

$$A = (X^T X)^{-1} X^T$$

ИЛИ

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}$$

3. Если положить  $A = (X^T X)^{-1} X^T$  то из (\*) следует, что

$$K_{\hat{\theta}} = \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}. \blacksquare$$

**Замечание**

[Теорема 1](#) гарантирует свойства МНК-оценки для любых коррелированных шумов.

**Нормальная регрессия****12.5 Определение 4**

Схема Гаусса-Маркова называется *нормальной регрессией*, если  $E \sim N(0; \sigma^2 I)$ .

**12.6 Лемма 1**

В нормальной регрессии

$$\hat{\theta} \sim N(\theta; \sigma^2 (X^T X)^{-1})$$

**Доказательство**

Доказательство следует из [Леммы 1.3](#) и [Теоремы 1 п.2, п.3](#). ■

**12.7 Лемма 2**

В нормальной регрессии МНК-оценка и МП-оценка *совпадают*

**Доказательство**

В силу [Леммы 1.3](#)  $Y \sim N(X\theta; \sigma^2 I)$

Тогда функция правдоподобия по определению имеет вид

$$L(y; \theta) = f_Y(y; \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\sigma^2 I)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\theta)^T (y - X\theta)\right\}$$

откуда  $\underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(Y; \theta) = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) = \hat{\theta}$ . ■

**12.8 Следствие 1**

В нормальной регрессии МНК-оценка  $\hat{\theta}$  *эффективна*, т.е. *оптимальна* в классе всех *несмещенных* оценок.

**Доказательство**

Доказательство следует из [Леммы 2](#) и [Теоремы 8.1](#). ■

**12.9 Лемма 3**

В нормальной регрессии МП-оценка  $\sigma^2$  имеет вид

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \|Y - X\hat{\theta}\|^2$$

**Доказательство**

$$\ln L(Y; \theta; \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{(Y-X\theta)^T(Y-X\theta)}{2\sigma^2},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(Y; \theta; \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{(Y-X\theta)^T(Y-X\theta)}{2(\sigma^2)^2} = 0, \\ \nabla_{\theta} \ln L(Y; \theta; \sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X^T Y + 2X^T X\theta) = 0 \end{cases}$$

Откуда  $\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$  — МНК-оценка,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (Y - X\hat{\theta})^T (Y - X\hat{\theta})$$

■

**12.10 Определение 5**

*Вектором остатков* называется

$$\hat{E} = Y - X\hat{\theta}$$

**12.11 Лемма 4**

В нормальной регрессии  $\hat{E} \sim N(0; \sigma^2(I - X(X^T X)^{-1} X^T))$

**Доказательство**

$$\hat{E} = Y - X\hat{\theta} = X\theta + E - X(X^T X)^{-1} X^T (X\theta + E) = X\theta + E - X(X^T X)^{-1} X^T X\theta - X(X^T X)^{-1} X^T E = (I - X(X^T X)^{-1} X^T) E.$$

Тогда в силу [Леммы 1.3](#)  $m_{\hat{E}} = 0$

$$K_{\hat{E}} = (I - X(X^T X)^{-1} X^T) \sigma^2 I (I - X(X^T X)^{-1} X^T)^T = \sigma^2 (I - 2X(X^T X)^{-1} X^T + X(X^T X)^{-1} X^T X(X^T X)^{-1} X^T) = \sigma^2 (I - (X(X^T X)^{-1} X^T)). \blacksquare$$

**12.12 Лемма 5**

В нормальной регрессии  $\hat{\theta}$  и  $\hat{E}$  **независимы**

**Доказательство**

В силу [Леммы 1.4](#) достаточно показать, что  $\hat{\theta}$  и  $\hat{E}$  *некоррелированы*.

$$K_{\hat{\theta}\hat{E}} = \text{cov}(\hat{\theta}, Y - X\hat{\theta}) = \text{cov}(\hat{\theta}, Y) - \text{cov}(\hat{\theta}, \hat{\theta}) \cdot X^T \stackrel{*}{=}$$

с учетом [Леммы 1](#) и [Теоремы 1](#)

$$\stackrel{*}{=} \text{cov}((X^T X)^{-1} X^T Y, Y) - \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T = (X^T X)^{-1} X^T \text{cov}(X\theta + E, X\theta + E) - \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T = (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 I - \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T = 0. \blacksquare$$

**12.13 Лемма 6**

В нормальной регрессии

$$\frac{\|\hat{E}\|^2}{\sigma^2} = n \cdot \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-s)$$

**Доказательство**

Пусть  $E_0 = \frac{E}{\sigma}$  Тогда  $E_0 \sim N(0; I)$

$$\frac{\|\hat{E}\|^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \|Y - X(X^T X)^{-1} X^T Y\|^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|X\theta + E - X(X^T X)^{-1} X^T X\theta - X(X^T X)^{-1} X^T E\|^2 =$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \|(I - X(X^T X)^{-1} X^T)E\|^2 = E_0^T A E_0, \text{ где}$$

$$A = (I - X(X^T X)^{-1} X^T)^T (I - X(X^T X)^{-1} X^T) = I - 2X(X^T X)^{-1} X^T + X(X^T X)^{-1} X^T X(X^T X)^{-1} X^T =$$

$$I - X(X^T X)^{-1} X^T. \text{ Откуда следует, что } A^2 = A.$$

Т.к.  $A^T = A$  и  $A \geq 0$ , то все собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  неотрицательны, а переход в нормальный жорданов базис описывается ортогональным преобразованием  $C$ :

$$C^T = C^{-1}, A = C^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) C$$

Тогда

$$A^2 = C^T \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) C$$

Из  $A^2 = A$  следует, что  $\lambda_i = \lambda_i^2, i = \overline{1, n}$ , т.е.  $\lambda_i \in \{0; 1\}$

Тогда

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

где  $m = \text{rg} A$

$$\frac{\|\hat{E}\|^2}{\sigma^2} = E_0^T C^T \cdot \Lambda C E_0 = \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i^2, \text{ где с учетом Леммы 1.3}$$

$$C E_0 = (\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_n) \sim N(0, C I C^T) = N(0; I)$$

Т.о. по определению  $\frac{\|\hat{E}\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m)$

Т.к.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \forall A, B^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , то

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(C^T \Lambda C) = \text{tr}(C C^T \Lambda) = \text{tr}(\Lambda) = m = \text{rg} A$$

$$m = \text{tr}(I - X(X^T X)^{-1} X^T) = n - \text{tr}(X(X^T X)^{-1} X^T) = n - \text{tr}(X^T X (X^T X)^{-1}) = n - \text{tr} \begin{pmatrix} I \\ s \times s \end{pmatrix} =$$

$n - s$ . ■

**12.14 Лемма 7**

В нормальной регрессии

$$\frac{\hat{\theta}_k - \theta_k}{\|\hat{E}\| \sqrt{\alpha_k}} \cdot \sqrt{n - s} \sim t(n - s)$$

где  $\alpha_k$  — элемент на главной диагонали матрицы  $(X^T X)^{-1}$

**Доказательство**

Из Леммы 1 следует, что  $\hat{\theta}_k \sim N(\theta_k, \sigma^2 \alpha_k)$

Тогда

$$\frac{\hat{\theta}_k - \theta_k}{\sigma \sqrt{\alpha_k}} \sim N(0; 1)$$

С учетом определения распределения Стюдента и Леммы 5, и Леммы 6

$$\frac{\hat{\theta}_k - \theta_k}{\|\hat{E}\| \sqrt{\alpha_k}} \cdot \sqrt{n - s} = \frac{\frac{\hat{\theta}_k - \theta_k}{\sigma \sqrt{\alpha_k}}}{\sqrt{\frac{1}{n-s} \frac{\|\hat{E}\|^2}{\sigma^2}}} \sim t(n - s). \quad \blacksquare$$

### 12.15 Лемма 8

В нормальной регрессии

$$\frac{\varphi(x; \hat{\theta}_k) - \varphi(x; \theta_k)}{\|E\| \sqrt{\alpha_k}} \cdot \sqrt{n-s} \sim t(n-s), \text{ где}$$

$$\alpha(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_s(x))(X^T X)^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_s(x) \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$$

#### Доказательство

Из [Леммы 1](#) следует, что

$$\varphi(x; \hat{\theta}) = \hat{\theta}_1 \varphi_1(x) + \dots + \hat{\theta}_s \varphi_s(x) \sim N(\varphi(x; \theta); \alpha(x) \sigma^2)$$

Тогда

$$\frac{\varphi(x; \hat{\theta}_k) - \varphi(x; \theta_k)}{\sigma \sqrt{\alpha_k}} \sim N(0; 1).$$

С учетом лемм 5 и 6, определения Стьюдента

$$\frac{\varphi(x; \hat{\theta}_k) - \varphi(x; \theta_k)}{\|E\| \sqrt{\alpha_k}} = \frac{\frac{\varphi(x; \hat{\theta}_k) - \varphi(x; \theta_k)}{\sigma \sqrt{\alpha_k}}}{\sqrt{\frac{1}{n-s} \frac{\|E\|^2}{\sigma^2}}} \sim t(n-s). \blacksquare$$

#### Замечание

Леммы 6, 7, 8 позволяют построить доверительные интервалы для  $\theta_1, \dots, \theta_s, \sigma^2, \varphi(x; \theta)$ .

Для построения точечной оценки  $\theta_1, \dots, \theta_s$  и  $\varphi(x; \theta)$  используется [Теорема 1](#), для точечной оценки — [Лемма 3](#).

Зачастую в качестве  $\varphi_k(x)$  рассматривают  $\varphi_k(x) = x^{k-1}$ . Однако порядок многочлена  $s$ , как правило, несмещен. Для его определения можно использовать **критерий Фишера**:

#### Критерий Фишера

$$H_0 : \theta_k = 0$$

$$H_1 : \theta_k \neq 0$$

$$T(Y) = \frac{\hat{\theta}_k^2}{\alpha_k \|\hat{E}\|^2} (n-s)$$

где  $\alpha_k$  —  $k$ -й элемент на главной диагонали матрицы  $(X^T X)^{-1}$ .

$$Law(T(Y)|H_0) = F(1, n-s)$$

$$G_{\circ\alpha} = [0; F_{1-\alpha}(1; n-s))$$

$$G_{|\alpha} = [F_{1-\alpha}(1; n-s); +\infty)$$