Лекции

по курсу *"Математическая Статистика"*

Ибрагимов Д. Н.

Contents

Источники

- Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. “Математическая статистика”, изд. “Высшая школа”, 1984
- Кибзун А. И., Наумов А. В., Горяинова Е. Р. “Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами”, изд “ФИЗМАТЛИТ”, 2013
- Панков А. Р., Платонов Е. Н. “Практикум по математической статистике”, изд. “МАИ”, 2006

1 Многомерное нормальное распределение

Замечание

Вектор $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ называется ***случайным***, если $X_1, \dots, X_n$ — *случайные величины (далее **с.в**)*, определенные на одном вероятностном пространстве.

Через $M[X] = m_X$ обозначим ***вектор математического ожидания***:

$$M[X] = m_X = \begin{pmatrix} M[X_1] \\ \vdots \\ M[X_n] \end{pmatrix}$$

Через K_x обозначим *ковариационную матрицу* с.в X:

$$K_X = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \dots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \dots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

1.1 Лемма 1

Пусть $K_X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — ковариационная матрица с.в X. Тогда:

1. $K_X \geqslant 0$, т.е. $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, x^T K_X x \geqslant 0$;
2. $K_X^T = K_X$

1.2 Определение 1

Случайный вектор $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ называется ***невырожденным нормальным вектором***:

$$X \sim N(m_X, K_X)$$

если совместная плотность вероятности имеет вид:

$$f_X(x) = ((2\pi)^n \det K_X)^{\frac{-1}{2}} \exp\{\frac{-1}{2}(x - m_X)^T K_X^{-1}(x - m_X)\}$$

где $m_X \in \mathbb{R}^n, K_X \in \mathbb{R}^{n \times n}, K_X > 0, K_x^T = K_X$

1.3 Лемма 2

Пусть X — невырожденный нормальный вектор с параметрами m_X и K_X.
Тогда $M[X] = m_X$, а K_X — корвариационная матрица X.
Рассмотрим основные свойства многомерного нормального распределения.

1.4 Лемма 3

Пусть $X \sim N(m_X, K_X), A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$.
Тогда:

$$\begin{aligned} Y = AX + b \sim N(m_Y, K_Y), \\ m_Y = Am_X + b, \\ K_Y = AK_XA^T. \end{aligned}$$

1.5 Лемма 4

Пусть $X \sim N(m_X, K_X)$.
Тогда компоненты вектора X ***независимы*** тогда и только тогда, когда они *некоррелированы.*

note

Доказательство данных утверждений при помощи аппарата функций распределения и плотности довольно сложно. Поэтому рассмотрим аппарат характеристических функций.

1.6 Определение 2

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)^T -$ случайный вектор.
Тогда ***характеристической функцией*** называется:

$$\psi_X(\lambda) = M[e^{i\lambda^T X}] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda^T X} dF_X(x)$$

Замечание

Характеристическая функция определена для любого случайного вектора или с.в.
Если с.в **дискретная**, то:

$$\psi_X(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\lambda X_k} p_k$$

Если с.в **абсолютно непрерывная**, то

$$\psi_X(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda X} f_X(x) dx$$

В этом случае $\psi_X(\lambda)$ является ***преобразованием Фурье*** f_X.
Поскольку преобразование Фурье взаимно однозначно, а f_X однозначно определяет распределение, то характеристическая функция $\psi_X(x)$ также однозначно определяет распределение с.в X.

Причем:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda^T X} \psi_X(x) d\lambda$$

1.7 Лемма 5

Пусть X — случайный вектор, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$.
Тогда:

1. для $Y = AX + b$
$$\psi_Y(\lambda) = e^{i\lambda^T b} \psi_X(A^T \lambda)$$
2. компоненты вектора X ***независимы*** тогда и только тогда, когда
$$\psi_Y(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(\lambda_k)$$

Доказательство

1. $\psi_Y(\lambda) = M[e^{i\lambda^T Y}] = M[e^{i\lambda^T AX} e^{i\lambda^T b}] = e^{i\lambda^T b} M[e^{i(A^T\lambda)^T X}] = e^{i\lambda^T b} \psi_X(A^T\lambda)$
2. $\psi_X(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n =$ {н/з} $= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_1 x_1} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n x_n} \cdot$ $f_{X_1}(x) \cdot \dots \cdot f_{X_n} dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_1 x_1} f_{x_1}(x_1) dx_1 \cdot \dots \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_n x_n} f_{x_n}(x_n) dx_n = \prod_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(\lambda_k)$

■

Замечание

При помощи характеристической функции можно дать другое определение нормального распределения. В том числе для вырожденного K_X.

1.8 Определение 3

Случайный вектор X называется ***нормальным***: $X \sim N(m_X, K_X)$, если:

$$\psi_X(\lambda) = \exp\{i\lambda^T m_X - \frac{1}{2}\lambda^T K_X \lambda\}$$

1.8.1 Доказательство леммы 3

В силу Леммы 5, п.1

$$\psi_Y(\lambda) = e^{i\lambda^T b} \psi_X(A^T\lambda) = e^{i\lambda^T b} \exp\{i\lambda^T A m_x - \frac{1}{2}\lambda^T A K_X A^T \lambda\} =$$
$$= \exp\{i\lambda^T (A m_x + b) - \frac{1}{2}\lambda^T (A K_x A^T)\lambda\}$$

■

1.8.2 Доказательство леммы 4

Пусть $X_i, \dots, X_n$ *попарно некоррелированы.* Тогда $cov(X_i, X_j) = 0, i \neq 0$, т.е. :

$$K_x = diag(\sigma^2_{X_1}, \dots, \sigma^2_{X_n}) =$$
$$= \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma^2_{X_n} \end{pmatrix}$$

$\psi_X(\lambda) = \exp\{i\lambda_1 m_{X_1} + \dots + i\lambda_n m_{X_n} - \frac{1}{2}\lambda^T K_X \lambda\} = \exp\{i\lambda_1 m_{X_1} + \dots + i\lambda_n m_{X_n} - \frac{1}{2}(\lambda_1^2\sigma^2_{X_1} + \dots + \lambda_n^2\sigma^2_{X_n})\} = \prod\limits_{k=1}^{n} \exp\{i\lambda_n m_{X_n} - \frac{1}{2}\lambda_k^2\sigma^2_{K_n}\} = \prod\limits_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(\lambda_k)$.

Откуда с учетом Леммы 5, п.1 $X_1, \dots, X_n$ — н/з.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — н/з. Тогда $X_1, \dots, X_n$ *попарно некоррелированы.* ■

Замечание

Поскольку K_X — невырожденная, симметричная и положительноопределенная, то существует $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — *ортогональная* (т. е. $S^T = S^{-1}$) такая, что:

$$S^T K_X S = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

где $\lambda_i > 0, i = \overline{1, n}$

Определим матрицу $\Lambda^{-\frac{1}{2}} = diag(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}})$.

Рассмотрим вектор

$$Y = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T (X - m_X)$$

Тогда $A = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T, b = -\Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T m_X$.

В силу Леммы 3:

$$m_Y = Am_X + b = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T - \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T m_X = 0,$$
$$K_Y = AK_X A^T = \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^T K_X S \Lambda^{-\frac{1}{2}} = I,$$

т. е. $Y \sim N(0, I)$.

При помощи невырожденного линейного преобразования с.в. X может быть преобразован в стандартный нормальный вектор.

Верно и обратное:

$$X = m_X + S\Lambda^{\frac{1}{2}} Y,$$

откуда следует Лемма 2

2 Теорема о нормальной корреляции

2.1 Определение 1

Условным математическим ожиданием абсолютно непрерывного случайного вектора X относительно абсолютно непрерывного случайного вектора Y называется:

$$M[X \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid Y) dx,$$

где $f_{X|Y}(x \mid Y) = \frac{f_z(x,Y)}{f_y(Y)}, z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

2.2 Основные свойства условного М. О.

2.2.1 Свойство 1

$\boxed{M[C \mid Y] = C}$

Доказательство

$M[C \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C f_{X|Y}(x \mid Y) dx = \frac{C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_z(x,Y) dx}{f_Y(Y)} = C \frac{f_Y(Y)}{f_Y(Y)} = C.$ ■

2.2.2 Свойство 2

$\boxed{M[X\phi(Y)|Y] = \phi(Y) M[X \mid Y]}$

Доказательство

$M[\phi(Y) X \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(Y) X f_{X|Y}(x \mid Y) dx = \phi(Y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid Y) dx =$
$= \phi(Y) M[X \mid Y].$ ■

2.2.3 Свойство 3

$\boxed{M[\alpha X_1 + \beta X_2 \mid Y] = \alpha M[X_1 \mid Y] + \beta M[X_2 \mid Y]}$

2.2.4 Свойство 4

Пусть X, Y − *независимые*. Тогда $\boxed{M[X \mid Y] = M[X]}$

Доказательство

$M[X \mid Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid Y) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_z(x,Y)}{f_Y(Y)} dx = \int\limits_{-\infty} +\infty x \frac{f_X(x) f_Y(Y)}{f_Y(Y)} dx = M[X].$ ■

2.2.5 Свойство 5

$\boxed{M[M[X \mid Y]] = M[X]}$ ***(формула повторного М. О.)***

Доказательство

$M[M[X \mid Y]] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} M[X \mid Y] f_Y(y) dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid y) dx dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_Y(y) f_z(x,y)}{f_Y(y)} dy dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_z(x,y) dy dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = M[X]$. ■

2.3 Лемма 1

Пусть X, Y — случайные векторы с конечными вторыми моментами. Тогда:
$M[(X - \hat{X})\phi(Y)^T] = 0$
где $\hat{X} = M[X \mid Y]$

Доказательство

$M[(X - \hat{X})\phi(Y)^T] = M[X\phi(Y)^T] - M[M[X \mid Y]\phi(Y)^T] =$
= по Свойству 2 $= M[X\phi(Y)^T] - M[M[X\phi(Y)^T \mid Y]] =$ по Свойству 5 $= M[X\phi(Y)^T] - M[X\phi(Y)^T] = 0$. ■

Замечание

Если рассмотреть евклидово пространство $\mathbb{L}_2(\Omega)$ со скалярным произведением:

$$(X, Y) = M[X \cdot Y]$$

то *условное* М. О. — ***оператор ортогонального проектирования*** X на подпространство, порождаемое Y.

2.4 Определение 2

Оценкой X ***по наблюдениям*** Y называется любая измеримая функция $\phi(Y)$.

2.5 Определение 3

Оценка $\hat{X}$ ***называется с.к.-оптимальной оценкой*** X, если для любой другой оценки $\tilde{X}$ верно

$$M[|\tilde{X} - \hat{X}|^2] \leqslant M[|X - \tilde{X}|^2]$$

2.6 Теорема 1

$M[X \mid Y]$ — ***с.к.-оптимальная оценка*** X ***по наблюдениям*** Y.

Доказательство

$M[|X-\tilde{X}|^2] = M[|X-\hat{X}+\hat{X}-\tilde{X}|^2] = M[|X-\hat{X}|^2]+2M[(X-\hat{X})^T(\hat{X}-\tilde{X})]+M[|\hat{X}-\tilde{X}|^2] \overset{*}{=}$

Поскольку по определению $\tilde{X}-\hat{X} = \phi(Y)$, то в силу Леммы 2.1 $M[(X-\hat{X})^T(\tilde{X}-\hat{X})] = 0$.

$\overset{*}{=} M[|X-\hat{X}|^2] + M[|\hat{X}-\tilde{X}|^2] \geqslant M[|X-\hat{X}|^2]$. ■

2.7 Теорема 2 (О нормальной корреляции)

Пусть

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K_X & K_{XY} \\ K_{XY}^T & K_Y \end{pmatrix}\right)$$

Тогда

1. $Law(X \mid Y) = N(\mu(Y), \Delta)$,

где

$$\mu(Y) = M[X \mid Y] = m_X + K_{XY}K_Y^{-1}(Y-m_Y)$$

$$\Delta = K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{YX}$$

2. $M[|X-\mu(Y)|^2] = tr(K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{YX})$

Доказательство

Рассмотрим линейное преобразование Y:

$$\mu(Y) = m_X + K_{XY}K_Y^{-1}(Y-m_Y)$$

В силу Леммы 1.3

$X-\mu(Y) = (I - K_{XY}K_Y^{-1})\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - m_X + K_{XY}K_Y^{-1}m_Y \sim N(\mu, K)$

$\mu = (I - K_{XY}K_Y^{-1})\begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix} - m_X + K_{XY}K_Y^{-1}m_Y = 0$

$K = (I - K_{XY}K_Y^{-1})\begin{pmatrix} K_X & K_{XY} \\ K_{XY}^T & K_Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ -(K_{XY}K_Y^{-1})^T \end{pmatrix} =$

$= (K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{XY}^T \quad K_{XY} - K_{XY}K_Y^{-1}K_Y)\begin{pmatrix} I \\ K_Y^{-1}K_{XY}^T \end{pmatrix} =$

$= K_X - K_{XY}K_Y^{-1}K_{XY}^{-1} = \Delta$

$cov(X-\mu(Y), Y) = cov(X,Y) - cov(\mu(Y),Y) = cov(X,Y) - cov(K_{XY}K_Y^{-1}Y + m_X - K_{XY}K_Y^{-1}m_Y, Y) = cov(X,Y) - K_{XY}K_Y^{-1}cov(Y,Y) = K_{XY} - K_{XY}K_Y^{-2}K_Y = 0$

т.е. $X-\mu(Y)$ и Y **некорреливаны**.

Тогда в силу Леммы 1.5, п.2 $X - \mu(Y)$ и Y **независимы**. Построим характеристическую функцию условного распределения X относительно Y:

$\psi_{X|Y}(\lambda \mid Y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda^T X} f_{X|Y}(x \mid Y)dx = M[e^{i\lambda^T X} \mid Y] = M[e^{i\lambda^T (X-\mu(Y))} e^{i\lambda^T \mu(Y)} \mid Y] \overset{*}{=}$

в силу Леммы 1.2 и *независимости* $X - \mu(Y)$ и Y

$\overset{*}{=} M[e^{i\lambda^T (X-\mu(Y))} \mid Y] \cdot M[e^{i\lambda^T \mu(Y)} \mid Y] = M[e^{i\lambda^T (X-\mu(Y))}] e^{i\lambda^T \mu(Y)} = \psi_{X-\mu(Y)}(\lambda) e^{i\lambda^T \mu(Y)} = \exp\{-\frac{1}{2}\lambda^T \Delta \lambda\} \cdot \exp\{i\lambda^T \mu(Y) - \frac{1}{2}\lambda^T \Delta \lambda\}$

т.е. Условное распределение ***нормальное***:

$$X(Y \sim N(\mu(Y), \Delta)$$

Вычислим с.к. ошибку:

$M[|X - \mu(Y)|^2] = M[\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 + \dots + \Delta X_n^2] = \sum\limits_{k=1}^{n} M[\Delta X_k^2] = \sum\limits_{k=1}^{n} D[\Delta X_k] = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{kk} = tr \Delta$. ■

Замечание

1. Из Теоремы о нормальной корреляции следует, что в *гауссовском* случае с.к.-оптимальная оценка является ***линейной***.
2. Если X и Y — *независимы*, то с.к.-оптимальная оценка — m_X.
3. С.к.-оптимальная оценка ***несмещенная***, т.к. $M[X - \mu(Y)] = 0$.

3 Виды сходимости последовательностей случайных величин

3.1 Определение 1

Говорят, что $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует ***последовательность случайных величин***, если $\forall N \in \mathbb{N}$ X_n определены на одном вероятностном пространстве.

3.2 Определение 2

Говорят, что последовательность с.в. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***сходится по вероятности*** к с.в. X, если $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leqslant \varepsilon) = 1$$

или

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

3.3 Определение 3

Говорят, что последовательность с.в. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***сходится почти наверное*** к с.в. X, если

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \not\xrightarrow{n\to\infty} X(\omega)\}) = 0$$

или

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} X(\omega)\}) = 1$$

3.4 Определение 4

Говорят, что последовательность с.в. $\{X\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***сходится в среднем квадратическом*** к с.в. X, если

$$M[|X_n - X|^2] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

3.5 Пример 1

Пусть $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — случайная последовательность.

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 - \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

$P(\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq 0\}) = P(\{\omega : \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geqslant N : X_n(\omega) = n\}) = P(\prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) = n\}) \overset{*}{=}$

1. $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) = n\} \subset \sum\limits_{n=N}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) = n\}$

2. $P(\sum\limits_{n=N}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) = n\} \leqslant \sum\limits_{n=N}^{\infty} P(\{\omega : X_n(\omega) = n\}) = \sum\limits_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

Тогда в силу *аксиомы непрерывности* $\overset{*}{=} 0$, т.е. $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$

3.6 Пример 2

Рассмотрим ту же последовательность. Выберем $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - 0| \leqslant \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \geqslant n \\ 1 - \frac{1}{n^2}, & \varepsilon \in (0; n) \end{cases}$$

Тогда $X_n \xrightarrow{P} 0$

3.7 Пример 3

Рассмотрим ту же последовательность:

$M[|X_n - 0|^2] = M[X_n^2] = 0^2(1 - \frac{1}{n^2}) + n^2 \frac{1}{n^2} = 1 \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$

Тогда $X_n \not\xrightarrow{\text{с.к.}} 0$

3.8 Пример 4

Пусть $f_{nk} : [0; 1] \longrightarrow \{0; 1\}, n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, n}$,

$$f_{n,k} = \begin{cases} 0, & t \notin [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}], \\ 1, & t \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]. \end{cases}$$

Пусть $X \sim R(0; 1)$. Рассмотрим последовательность с.в. $X_{nk} = f_{nk}(X)$. $\forall \omega \in \Omega X(\omega) \in [0; 1]$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \exists k = \overline{1, n}$ такое, что $X(\omega) \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]$. Т.е. если $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ найдется $k = \overline{1, n}$ такой, что

$$|f_{nk}(X(\omega)) - 0| > \varepsilon$$

Тогда $X_{nk}(\omega) \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.е.

$$\{\omega : \lim_{n,k\to\infty} X_{nk}(\omega) = 0\} = \emptyset$$

$$X_{nk} \not\xrightarrow{\text{п. н.}} 0$$

При этом $\forall \varepsilon > 0$

$$R(|X_{nk}-0|>\varepsilon)=\begin{cases}0, & \varepsilon\geqslant 1,\\ P(X\in[\frac{k-1}{n}, & \frac{k}{n}]),\varepsilon\in(0;1)\end{cases}=\begin{cases}0, & \varepsilon\geqslant 1,\\ \frac{1}{n}, & \varepsilon\in(0;1)\end{cases}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$X_{nk}\xrightarrow{P}0$$

$M[|X_{nk}-0|^2]=M[X_{nk}]=M[f_{nk}(X)]=\int\limits_0^1 f_{nk}(x)f_x(x)dx=\int\limits_0^1 f_{nk}(x)dx=\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}1dx=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

$$X_{nk}\xrightarrow{\text{с.к}}0$$

3.9 Пример 5

Рассмотрим последовательность с.в. $Y_{n_1k}=nK_{n_1k}$ Тогда $Y_{n_1k}\xrightarrow{\text{п.н.}}0$. $\forall\varepsilon>0$.

$P(|Y_{n_1k}-0|>\varepsilon)=\begin{cases}0, & \varepsilon\geqslant n,\\ P(X\in[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}]), & \varepsilon\in(0;n)\end{cases}=\begin{cases}0, & \varepsilon\geqslant n,\\ \frac{1}{n}, & \varepsilon\in(0;n)\end{cases}\xrightarrow{nto\infty}0$

$$Y_{n_1k}\xrightarrow{P}0$$

$M[|Y_{n_1k}-0|^2]=M[n^2X_{nk}^2]=n^2M[X_{nk}]=n\xrightarrow{P}\infty$

$$Y_{n_1k}\not\xrightarrow{\text{с.к}}0$$

Замечание

Согласно определению для исследования на сходимость нужно знать совместное распределение с.в. X_n и X, а для случая *сходимости почти наверное* совместное распределение всей последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и X. Поэтому исследование на сходимость иначе, чем к детерминированной константе, довольно проблематично.

3.10 Лемма 1

Пусть $X_n\xrightarrow{\text{п.н.}}X$. Тогда $X_n\xrightarrow{P}X$.

Доказательство

$0=P(\{\omega:\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega)\neq X(\omega)\})=P(\{\omega:\exists\varepsilon>0\forall N\in\mathbb{N}\exists n\geqslant N:|X_n(\omega)-X(\omega)>\varepsilon\})=P(\sum\limits_{\varepsilon>0)}\prod\limits_{N=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\})\geqslant P(\prod\limits_{N=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon'\})$, $\forall\varepsilon'>0$

Тогда $0=P(\prod\limits_{N=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\})$,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \subset \sum_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

В силу *аксиомы непрерывности*:

$0 = \lim\limits_{N\to\infty} P(\sum\limits_{n=N}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \geqslant \lim\limits_{N\to\infty} P(\{\omega : |X_N(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\})$

$$X_N \xrightarrow{P} X$$

■

3.11 Лемма 2 (Неравенство Маркова)

Пусть $P(X \geqslant 0) = 1$, M[X] < ∞$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$

$$P(X > \varepsilon) = \frac{M[X]}{\varepsilon}$$

Доказательство

$M[X] = \int\limits_{0}^{+\infty} xdF_X(x) \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} xdF_X(x) \geqslant \varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} dF_X(X) = \varepsilon P(X > \varepsilon)$. ■

3.12 Следствие 1

Пусть $M[X^{-k}] < \infty$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$:

$$P(|X| > \varepsilon) \leqslant \frac{M[|X|^k|]}{\varepsilon^k}$$

Доказательство

$P(|X| > \varepsilon) = P(|X|^k > \varepsilon^k) \leqslant \frac{M[|X|^k]}{\varepsilon^k}$. ■

3.13 Следствие 2 (Неравенство Чебышёва)

Пусть $M[X^2] < \infty$. Тогда

$$P(|X - M[X]| > \varepsilon) \leqslant \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$$

Доказательство

$P(|X - M[X]| > \varepsilon) \leqslant \frac{M[|X-M[X]|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$. ■

3.14 Лемма 3

Пусть $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$. Тогда $X_n \xrightarrow{P} X$.

Доказательство

$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant \frac{M[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$ ■

3.15 Теорема 1 (Бореля — Кантелли)

Пусть $A_1, \dots, A_n \subset \Omega, B = \prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n$. Тогда

1. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, то $P(B) = 0$;

2. Если $A_1, \dots, A_n$ **независимы в совокупности** и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, то $P(B) = 1$.

Доказательство

1. $P(B) = P(\prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n) \stackrel{*}{=}$

т.к. $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} A_n \subset \sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n$, то *по аксиоме непрерывности* $\stackrel{*}{=} \lim\limits_{N\to\infty} P(\sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n) \leqslant \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} P(A_n) \xrightarrow{N\to\infty} 0$, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

2. $P(B) = \dots = \lim\limits_{N\to\infty} P(\sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{N\to\infty} (1 - P(\prod\limits_{n=N}^{\infty} \overline{A_n})) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} P(\prod\limits_{M=N}^{\infty} \prod\limits_{n=N}^{M} \overline{A_n}) \stackrel{*}{=}$

т.к. $\prod\limits_{n=N}^{M+1} \overline{A_n} \subset \prod\limits_{n=N}^{M} \overline{A_n}$, то по *аксиоме непрерывности*

$\stackrel{*}{=} 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} P(\prod\limits_{n=N}^{M} \overline{A_n}) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} \prod\limits_{n=N}^{M} (1 - P(A_n)) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} \prod\limits_{n=N}^{M} e^{\ln(1-P(A_n))} = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} e^{\sum n=N^M \ln(1-P(A_n))} \stackrel{*}{\geqslant}$

т.к. $\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots < -t$, то

$\stackrel{*}{\geqslant} 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} e^{-\sum\limits_{n=N}^{M} P(A_n)} = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 1.$ ■

3.16 Лемма 4

Пусть $X_n \xrightarrow{P} X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$

Тогда $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$

Доказательство

В силу Теоремы 3.1 $\forall \varepsilon > 0$

$$P(\prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$$

Тогда
$P(\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = P(\{\omega : \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geqslant N : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = P(\{\omega : \exists M \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geqslant N : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{M}\}) = P(\sum\limits_{M=1}^{\infty} \prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum\limits_{n=N}^{\infty} \{\omega : |X_n - X| > \frac{1}{M}\}) \leqslant \sum\limits_{M=1}^{\infty} P(\prod\limits_{N=1}^{\infty} \sum n = N^{\infty} \{\omega : |X_n - X| > \frac{1}{M}\}) = 0.$ ■

Замечание

1.

$X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$
ИЛИ
$X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$

2. В силу *теоремы Рисса* (функциональный анализ) если $X_n \xrightarrow{P} X$, то существует *подпоследовательность* $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.н.}} X$

3. В силу *теоремы о мажорирующей сходимости*, если $X_n \xrightarrow{P} X$ и $\exists Y$ – с.в.: $|X_n| \leqslant Y, M[Y^2] < \infty$, то $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$

4. Также из функционального анализа известно, что операция предела (по мере, почти наверное, в средне квадратическом) замкнута относительно линейных операций и непрерывных преобразований.

4 Закон больших чисел

4.1 Определение 1

Выборкой объема n будем называть с.в. $Z_n = (X_1, \dots, X_n)^T$, где $X_1, \dots, X_n$ – *независимые* с.в.

Через $F_k(x)$ обозначим *функцию распределения* k-го элемента выборки.

Если $F_k = F_1, k = \overline{2, n}$, то выборка называется ***однородной***.

4.2 Определение 2

Выборочным средним $\overline{X_n}$ выборки Z_n называется $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$

4.3 Теорема 1 (Закон Больших Чисел Чебышёва)

Пусть Z_n – однородная выборка, $M[X_k^2] < \infty$.

Тогда $\overline{X_n} \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X, \overline{X_n} \xrightarrow{P} m_X$

Доказательство

$$M[|\overline{X_n} - m_X|^2] = M[|\overline{X_n} - M[\overline{X_n}]|^2|^2] = D[\overline{X_n}] = \frac{1}{n^2} D[\sum_{k=1}^{n} X_k] = \frac{nD[X_1]}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Т.е. по определению $\overline{X_n} \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X$.

С учетом Леммы 3.3 $\overline{X_n} \xrightarrow{P} m_X$. ■

4.4 Теорема 2 (Закон Больших Чисел Колмогорова)

Пусть Z_n – *однородная* выборка, $M[X_k] = m_X < \infty$.

Тогда $\overline{X_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} m_X$

Замечание

Т.о. для *однородной* выборки $\overline{X_n}$ сходится **почти наверное** и **по вероятности** к m_X, если оно существует, и **в среднем квадратичном**, если существует дисперсия.

4.5 Теорема 3

Пусть Z_n – *неоднородная* выборка, $M[X_k] = m_X < \infty, D[X_k] = D_k \leqslant D_{max} < \infty$, где $k \in \mathbb{N}$

Тогда $\overline{X_n} \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X, \overline{X_n} \xrightarrow{P} m_X$.

Доказательство

$$M[|\overline{X_n} - m_X|^2] = M[|\overline{X_n} - M[\overline{X_n}]|^2] = D[X_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D_k \leqslant \frac{nD_{max}}{n^2} = \frac{D_{max}}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Т.о. $\overline{X_n} \xrightarrow{\text{с.к.}} m_X$. Тогда в силу Леммы 3.3 $\overline{X_n} \xrightarrow{P} m_X$. ■

4.6 Следствие 1

Пусть Z_n – *неоднородная* выборка, $D[X_k] = D_k \leqslant D_{max} < \infty, k \in \mathbb{N}$.
Тогда $\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} m_{X_k} \xrightarrow{\text{с.к.}} 0, \overline{X_k} - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} m_{X_k} \xrightarrow{P} 0.$

Доказательство

$\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} m_{X_k} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - m_{X_k}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k,$
где $M[Y_k] = 0, D[Y_k] = D[X_k] =\leqslant D_{max} < \infty$
Тогда $\overline{Y_k}$ удовлетворяет условиям Теоремы 4.3. ■

4.7 Теорема 4

Пусть Z_n – *неоднородная* выборка, $M[X_k] = m_X < \infty, D[X_k] = D_k < \infty,$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{D[X_k]}{k^2} < \infty$$

Тогда

$$\overline{X_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} m_X$$

Замечание

Условие Теоремы 4 более мягкое, чем условие Теоремы 3. Пусть $D[X_k] \leqslant D_{max}, k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{D[X_k]}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{max}}{k^2} = \frac{\pi^2 D_{max}}{\sigma} < \infty$$

4.8 Следствие 2

Пусть $N(A)$ – число появления события A в серии из N *независимых* опытов. Тогда

$$\frac{N(A)}{N} \xrightarrow{\text{п.н.}} P(A), \frac{N(A)}{N} \xrightarrow{\text{с.к.}} P(A)$$

Доказательство

По условию $N(A) \sim Bi(N; P(A))$. Тогда $\exists X_1, \dots, X_n \sim Be(P(A))$ — независимые с.в.
При этом $M[X_1] = P(A), D[X_1] = P(A)(1 - P(A)) \leqslant \frac{1}{4}$.
Тогда в силу Теоремы 4

$$\frac{N(A)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k \xrightarrow{\text{с.к.}} P(A)$$

в силу Теоремы 2

$$\frac{N(A)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k \xrightarrow{\text{п.н.}} P(A)$$

■

5 Центральная предельная теорема (ЦПТ)

Замечание

Сходимости ***с.к.***, ***п.н.*** и P в общем случае исследования предполагают либо знание совместного распределения элементов последовательности, либо наличие точкой функциональной зависимости от $\omega \in \Omega$.

Как правило, в теории вероятностей это неизвестно, а с.в. описываются при помощи их распределений, а не как функции. При этом если у двух величин совпадают распределения, то это вовсе не значит, что они равны.

Поэтому довольно важным является вид сходимости *по распределению*, т.е. в смысле **“описательного инструмента” с.в.

5.1 Определение 1

Говорят, что последовательность с.в. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***сходится по распределению*** к с.в. X, если

$F_{X_n}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x), \forall x -$ точки непрерывности $F_X(x)$.

5.2 Лемма 1

Пусть $X_n \overset{P}{\longrightarrow} X$. Тогда $X_n \overset{d}{\longrightarrow} X$

5.3 Лемма 2

Пусть $X_n \overset{d}{\longrightarrow} X, Y_n \overset{P}{\longrightarrow} C$

Тогда $X_n + Y_n \overset{d}{\longrightarrow} C$

Доказательство

Пусть $C = 0$, $x_0 -$ точка **непрерывности** $F_X(x)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$

$F_{X_n+Y_n}(x_0) = P(X_n + Y_n \leqslant x_0) = P(\{X_n + Y_n \leqslant x_0\}\{|Y_n| > \varepsilon\}) =$