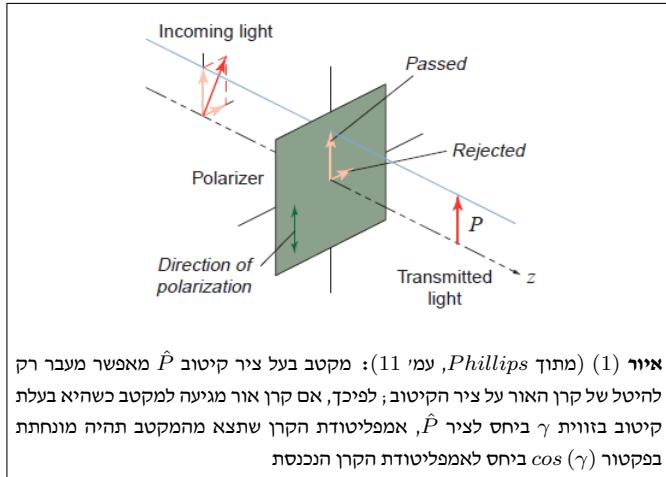


פוטואלסטיות: תבניות איזוכרומטיות, איזוקליניות, וקווי לחץ פנימיים

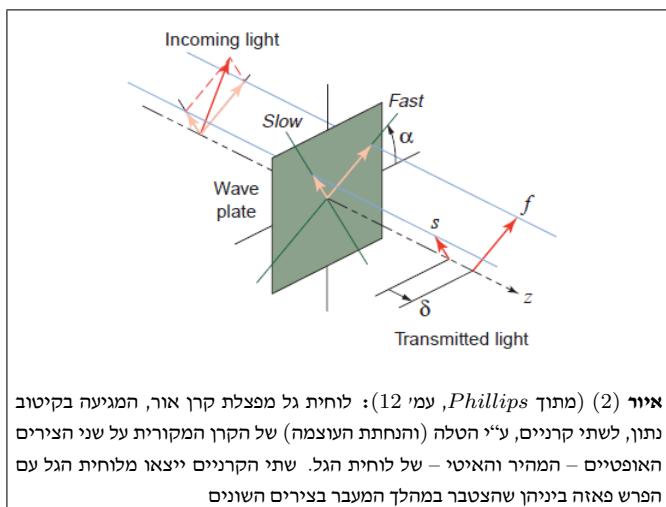
גיא אפרסי ושלמה דנציגר

מדריכה: גבי עדי רותם



2. לוחית גל ותופעת השבירה הפולוה (Birefringence)

לוחית גל היא חומר מעביר-גלים שיש לו מקדמי שבירה שונים בשני ציריים שונים – הציר המהיר (Fast axis) והציר האיטי (Slow axis): (Slow axis) – לשתי הרים הולו בשקרן אוור מגיעה אל לוחית הגל, הקרן מוטלת על הציריים הללו ובכך למעשה מתפצלת לשתיים: רכיבי הקרן המקורית שהיו מוקטבים בכיווני הциיריים השונים מתקדמים עתה בתווים בציריים אלו במחירות שונות וכאן וכך נוצר הפרש פאזה בין שתי הקרןויות, כמוואר באирו (2):



כלל, מהירות v_i של קרן אוור העוברת דרך תוווק בעובי h עם מקדם שבירה n_i הינה הנחתה בפקטור n_i של מהירות האור בריק (v), לפי המשוואה $v_i = v / n_i$. אם נסמן ב- t_i את זמן מעבר הקרן דרך התוווק וב- $v_i t_i$ את מהירות הקרן בתוווק, נקבל ש- $v_i t_i = h$. לפיכך, בהינתן תוווק (ЛОוחית גל) העשויה מחומר בעלי שני מקדמי שבירה n_1, n_2 בציריים

תקציר
בניסוי זה השתמשנו בתיאוריה של מקטבים ולוחיות גל כדי לאפיין דיפרמאנציה בחומרים בעלי שני מקדמי שבירה. הראיינו כיצד תבנית האור המתתקבלת על פני דיסקה הנמצאת בין שני מקטבים – משטנה, כתלות ביחס המופעל על הדיסקה וכתלות באוריינטציה הזוויתית של הדיסקה ביחס למקטבים. באמצעות ניסויים אלו ניתן ללמוד על המבנה הפנימי של גופים פולריים שקובעים מתרחשת תופעה של שבירה כפולה, ובפרט ניתן לשרטט מפה של קווי לחץ הפנימיים של גופים כאלה.

1. רקע תאורטי: מקטב, לוחית גל, חומר פוטואלסטי

1.1 מקטב

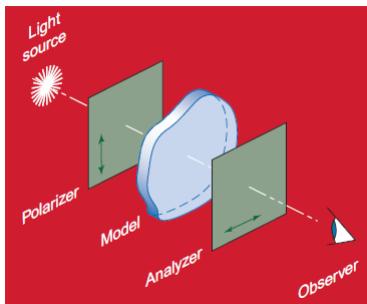
לכל גל וקטוריו המתקדם במרחב תלת-ממדי בכיוון מסויים (שנסמננו כציר \hat{x}) יש קיטוב במישור הניצב לציר ההתקדמות \hat{x} (בහינת ציריים \hat{y}, \hat{z} הניצבים לציר ההתקדמות \hat{x} וניצבים זה זה), רכיב הקיטוב על הגל בכל אחד מהциיריים הוא ההיטל של הכיוון הכללי של הקיטוב על הциיר. **מקטב** הוא אביזר אופטי שבו ניתן גל שפוגע בו מאפשר מעבר רק לרכיב של הגל שמקביל לציר קיטוב ספציפי. כך, קרן אוור שעוברת דרך מקטב יוצאת ממנו כשהיא בעלת קיטוב זהה לזה של המקטב אך עם **אמפליטודה** שmonicת בפקטור $(\gamma) \cos$ (כאשר γ היא ההפרש שבין זווית הקיטוב של הקרן הנכנסת לבין זווית הקיטוב של המקטב) ביחס לאmplיפילודת המקורית שלה; לפיכך, בהתאם לחוק מאלו, **עוצמת** האור שייצאת מומקטב תהיה מונחתת בפקטור $(\gamma) \cos^2$ ביחס לעוצמת האור של הקרן שנכנסה למקטב, כמוואר באירו (1):

2. מבנה מערכת הניסויים ומשוואת העוצמה בנקודה

מערכת הניסוי שלנו כוללת את הרכיבים הבאים:

- מקור אור המסוגל לפולוט קרני או בשולשה אורכי גל שונים אדום עם $\lambda_r = 530nm$, ירוק עם $\lambda_g = 530nm$, כחול עם $\lambda_b = 453nm$
- דיסקה צילינדרית עגולה בעובי h , עשוייה מ-Polycarbonate.
- מכש ידני שבאמצעותו הנסיניים יכולים להפעיל לחץ משתנה על הדיסקה, מלמטה ולמעלה, במיקום של המגרעות בדיסקה (נשים לב שהלחץ שפעילים הנסיניים מתרוכז בנקודות של המגרעות ומשם מתפזר לתוך פנים השטח הדיסקה)
- מערכת שמודדת את הלחץ המופעל על ידי הנסיניים ומיצגה את הלחץ בצורה של מתח חשמלי (כasher הלחץ המופעל P מקיים יחס ליניארי ישיר עם המתח הנמדד)
- שני מקטבים (שיינוו משני צידי הדיסקה כאשר צירי קיטוב שלהם ניצבים זה לזו, כמפורט באירור (4))

סדר את המערכת באופן הבא (איור (4)):



איור (4) (מתוך Phillips, עמ' 17): מבנה המערכת: לאחר מקור האור ראשון מציבים את אחד המקטבים (שייקרא Polarizer); לאחריו מונחים את המכבש עם הדיסקה; לאחריו מונחים את המქטב השני (שייקרא Analyzer) (כשציר הקיטוב שלו ניצב לזו של-Polarizer; Polarizer-Analyzer). מנגנון זה, שבאמצעותו הנסיניים מצלמים את תבנית האור המתתקבלת לאחר מעבר דרך כל התוכים הללו

באמצעות המערכת נוכל לנתח את התבנית שיראו הצופים כתוצאה ממקור אור שיוצאה מהמקור, עוברת ב-Polarizer, בדיסקה, וב-Analyzer. פיתוח אנלטי (Phillips, עמ' 20) מראה כי עוצמת האור שתיראה בנקודה נתונה על פני הדיסקה היא

$$I = a^2 \sin^2(2\alpha) \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right) \quad (0.4)$$

כasher:

- a^2 היא אמפליטודת קרן האור המקורית היוצאת ממוקור האור
- α היא הזווית שבין ציר הקיטוב של-Analyzer לבין הציר האופטי המהיר בנקודה נתונה
- Δ הוא הפרש הפאזה שנוסף לקרן הנעה בציר האופטי האיטי בנקודה, ביחס לזו הנעה בציר המהיר (עפ"י משוואת (0.3))

שונים, נקבל לאחר פיתוח את הפרש הדריכים δ בין המסלולים שעברו הקרניים בשני הциרים, המהיר והאטוי:

$$\delta = h(n_2 - n_1) \quad (0.1)$$

הרכיב המרחבי בפונקציה גל הוא e^{ikz} (כasher z הוא קו אוריינטיה מרוחבית על ציר החתקזמות \hat{z} של גל, $-k$ הוא מספר הגל). נטנו ב- Δ את הפרש הפאזה kz ; משווה (0.1) נובע שהפרש הפאזה שנצבר במהלך הפרש הדריכים $\delta = z$ הוא $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (כasher λ הוא אורך הגל):

$$\Delta = kz = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad (0.2)$$

בעת מעבר של קרן או דרך תוויך בעל שבירה כפולה, הפרש הפאזה Δ יגרום להתאבכות בונה או הורשת או מצב ביןימים התאכotti כלשהו.

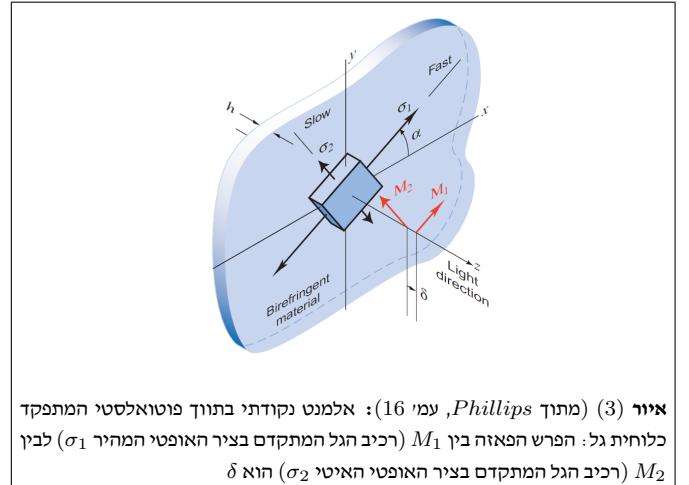
3. תוויך פוטואלסטי כאוסף לוחיות גל

חומרים פוטואלסטיים הם חומרים בעלי שבירה כפולה: בכל נקודה ונקודה בתווך, האוריינטציה הזוויתית של הציר המהיר והציר האיטי משתנה כתלות בכיווני הלחץ באותה נקודה. כמו כן, ההפרש בין מקדמי השבירה בциרים המהיר והאטוי הוא פרופורציונילי להפרש הלחצים בциרי הלחץ השונים (Phillips, עמ' 15):

$$n_2 - n_1 = c(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (0.3)$$

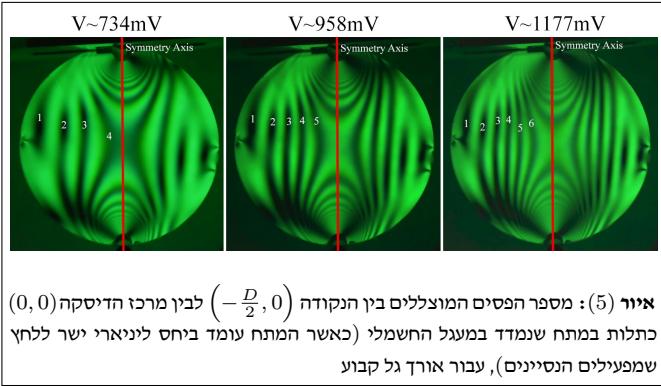
c נקרא "מקדם הלחץ האופטי היחסי". (געיר שלל אף שנחוג במחקר להתייחס ל- c כל קבוע של החומר שאינו תלוי באורך הגל (Phillips, עמ' 15), מחוקרים מראים שלפעה אכן ישנו שינוי קטן קטנים ב- c כפונקציה של אורך הגל (Vasudevan & Krishnan 1972); בהמשך המאמר ננסה לחלץ בעצמו את c מתוך המדידות).

לאור התכונות של חומרים פוטואלסטיים, ניתן להתייחס לתוויך פוטואלסטי כאל גוף המורכב מוסף צפוף של לוחיות גל נקודתיות: בהינתן נקודה מסוימת בתווך עם לחץ σ_1 בכיוון הציר האופטי המהיר ולחץ σ_2 בכיוון הציר האופטי האיטי בנקודה, קרן אוור העוברת בנקודה מולטת על שני הциרים הללו ומתקדמת בהם בפרד בשתי קרניות, שיוצאות מהתוויך עם הפרש פאזה שהצטבר בעת המעבר בциרים השונים (איור (3)):



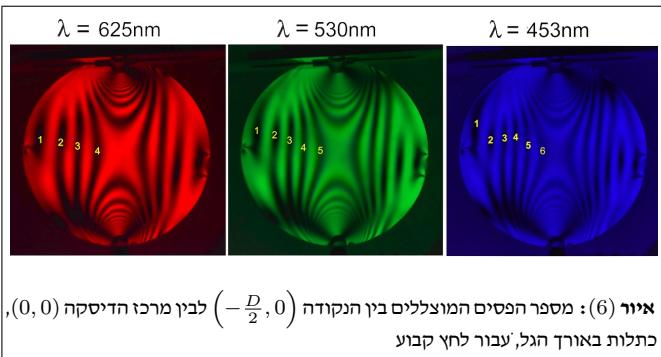
איור (3) (מתוך Phillips, עמ' 16): אלמנט נקודתי בתווך פוטואלסטי המתקדם כלוחתי גל: הפרש הפאזה בין M_1 (רכיב הגל המתකם בציר האופטי המהיר σ_1) לבין רכיב הגל המתකם בציר האופטי האיטי σ_2 (0.3) הוא δ

לבחירת העניין נדגים באופן אינטוי (איור (5)) את ההבדלים בתבנית המתקבלת על הדיסקה כתוצאה משינויו של לחץ שפעיליים הנסיינים עברו שלושה לחצים שונים, ובתנאים של אורך גל קבוע ($\lambda = 530nm$, אורך גל קבוע) :



maiior (5) ניתן לראות מיד שככל שהלחץ שפעיליים הנסיינים גדול יותר, כך מספר הפסים המוצללים בין הנקודה $(-\frac{D}{2}, 0)$ לבין מרכזו הדיסקה $(0,0)$ גדול יותר.

באופן דומה, נדגים את ההבדלים בתבנית המתקבלת על הדיסקה כתולות באורך הגל עבו שלושה אורכי גל שונים, בתנאים של לחץ קבוע (המתאים למתח של $V=1177mV$) (איור (6)) :



maiior (6) עליה ככל שאורך הגל קטן יותר כך מספר הפסים המוצללים בין $(0,0)$ לבין $(-\frac{D}{2}, 0)$ (לבחון $(0,0)$ אכן גדול יותר, בהלימה לתיאוריה).

על אף שניתן לספר במדויק את המספר השלים של הפסים (מבחינה מתמטית זהו $\lfloor N \rfloor$, החלק השלם של N), אלו מעוניינים למצוא את הקשר הפונקציונלי בין הלחץ המופעל על הדיסקה לבין N , ולשם כך יש צורך בחילוץ הערך המדוייק של ה- N -ים השונים מຕוך המדידות; עשינו זאת בשיטה המתוארת בסוף (1), וכל אורך גל מצאנו התאמה בין הלחץ (שליניארי עם המתח V שמראה מכשיר המדידה) לבין N . הממצאים מופיעים בגרף (1) :

הביטוי לעוצמת האור במשווה (0.4) מאפשר להבחן בין שני סוגי מקרים שבהם תוצאה המאפשרת של עצמת האור I (מה שיגרום להופעת איוריים מוצללים על הדיסקה) : הסוג הראשון של מקרים הוא כאשר שביהם מתקיים $0 = \sin^2(\frac{\Delta}{2})$; תבניות החצלה הנוצרות במקרים אלו נקראות **מבנה איזוקרומטיות**. הסוג השני של מקרים הוא כאשר שביהם מתקיים $0 = \sin^2(2\alpha)$; תבניות החצלה הנוצרות במקרים אלו נקראות **מבנה איזוקליניות** (או בקיצור "איזוקלינות").

3. מבניות איזוקרומטיות

3.1 ריק תיאורתי: מספר הפסים המוצללים כתלות בלחץ ובאורך הגל N , נובע שמספר המחזורים של השלים, של הפרש הפaza Δ שנוצר בנקודת מסויימת (x,y) בדיסקה הוא :

$$N_{(x,y)} = \frac{\Delta}{2\pi} = \frac{hc(\sigma_1 - \sigma_2)}{\lambda} \quad (0.5)$$

מהפיתוח האנליטי (MOVIA בעמ' 28 במאמר של Phillips, 1991) נובע שמספר המחזורים של הפרש הפaza שנוצר בנקודת המרכז (0,0) של הדיסקה הוא :

$$N := N_{(0,0)} = \frac{c}{\lambda} \frac{8}{\pi D} P \quad (0.6)$$

כאשר D הוא קוטר הדיסקה ו- P הוא הלחץ המופעל ע"י הנסיינים בציר \hat{y} .

כמו"כ, מתנאי השפה, בנקודות על שפת הדיסקה בציר \hat{x} (כלומר ב- (Phillips, 1991) מתקיים $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) ($-\frac{D}{2}, 0$), ($\frac{D}{2}, 0$), ($0,0$) מתקיים $N_{(-\frac{D}{2}, 0)} = N_{(\frac{D}{2}, 0)} = 0$. לפיכך, אם נציג מסלול ישר מהנקודה $(0,0)$ ועד לנקודת $(-\frac{D}{2}, 0)$ שעלה שפת הדיסקה ועד לנקודת $(0,0)$ במרוואה, נקבל שמספר המחזורים $N_{(x,0)}$ של הפרש הפaza בנקודת הכללית $(x,0)$ במסלול – הולך ועולה כל שטחים למרכזו, מ- $0 = N_{(-\frac{D}{2}, 0)}$ ועד $-N = N_{(0,0)}$; ומכיון שההשתנות של $N_{(x,0)}$ היא רציפה על פני הישר המחבר בין הנקודות $(0,0)$ ו- $(-\frac{D}{2}, 0)$ (שהרי N היא פונקציה של הפרש ומכפלה של c, σ_1, σ_2 , שהיא רציפים/קבועים על פני הישר), נקבע שיופיעו סה"כ N אזורים מוצללים (שהרי מהרציפות נובע שלכל מספר שלם $i \in \{1, \dots, N\}$ בהכרח קיימת נקודת $(x,0)$ במסלול שבה $i = N_{(x,0)}$ כך שמתארחת שם התאבכות הורסתה).

נשים לב שלפי התיאוריה, בהינתן אורך גל λ קבוע (שאו גם c קבוע) מותקיים $N \propto P$ (נובע ישירות ממשואה (0.6)).

3. הניסוי

בניסוי בחנו את התוצאות התיאורטיות הזו, באופן הבא: הפעלו לחץ ארכני ב-6 עצומות שונות על הדיסקה, וצילמו בצלמה דיגיטלית (SKUVAEA למקומות) את התבנית החתrica על הדיסקה, כפי שזו נראהית מבعد-ל-Analyzer; ביצעו זאת עבור שלושה אורכי גל שונים, עברו כל אחד מהלחצים (סה"כ קיבלו 18 תמונות). לאחר מכן ספרנו את מספר הפסים המוצללים המופיעים בין הנקודה $(0,0)$ לבין מרכזו הדיסקה (0,0), עברו כל אחד מהתנאים, והשוינו את הממצאים עם התוצאות התיאורטיות בצדדים בצדדים. ביצעו זאת עבור כל אחד מאורכי הגל. זאת עבור כל אחד מאורכי הגל.

ובע מכך שבמערכת הניסוי צרי הקיטוב של שני המקבטים ניצבים זה זהה: עבור כל נקודה בדיסקה, קרן האור שנכנסת אליה מגיעה עם קיטוב כשל-h-Polarizer, והוא מותפצלת (ומונחתת) בין הציר האופטי המהיר בנקודה לבין הציר האופטי האיטי בה, לפי ההיתל שלו על כל אחד מהצרים. לפיכך:

בנוקודה על הדיסקה שבה הציר האופטי המהיר הוא בזווית $\alpha = 0$ ביחס לציר הקיטוב של-h-Polarizer, הציר האופטי האיטי בנקודה (הניתב לציר האופטי המהיר) יהיה מקביל לציר הקיטוב של-h-Polarizer. במקרה זה, קרן האור – הנכנסת לדיסקה כשהיא מוקובבת בכיוון הציר האופטי האיטי – תעבור כולה דרך ציר זה ותגיע ל-Analyzer כשהיא מוקובבת בניצב לציר הקיטוב שלו, ותיחסם לפיכך כולה בעת הכניסה אליו; לפיכך נקודה זו תיראה חשוכה לצופה שמסתכל על הדיסקה מעבר ל-Analyzer.

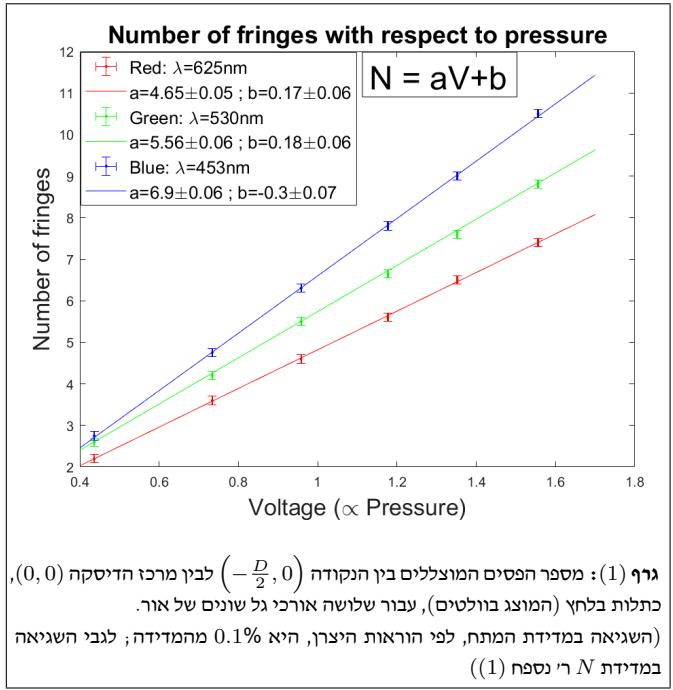
באופן דומה, בנוקודה על הדיסקה שבה הציר האופטי המהיר הוא בזווית $\frac{\pi}{2} = \alpha$ ביחס לציר הקיטוב של-h-Polarizer (כלומר: ניצב לו), הוא (הציר האופטי המהיר) יהיה מקביל לציר הקיטוב של-h-Polarizer. במקרה זה, קרן האור, הנכנסת לדיסקה כשהיא מוקובבת בכיוון הציר האופטי המהיר, תעבור כולה דרך ציר זה ותגיע ל-Analyzer כשהיא מוקובבת, שוב, בניצב לציר הקיטוב שלו ותיחסם כולה בעת הכניסה אליו; כך שגם נקודה זו תיראה חשוכה לצופה שמסתכל על הדיסקה מעבר ל-Analyzer.

סה"כ, בכל מקרה שבו הציר האופטי המהיר בנוקודה נתונה מקיים ציר הקיטוב של אחד המקבטים – נקלח החושך באותה נקודה. לעומת זאת, עבור נקודה שבה זווית α אינה כפולה שלמה של $\frac{\pi}{2}$, האור שנכנס לדיסקה בנוקודה – עם קיטוב כשל-h-Polarizer – יתפצל (וינוחת) בין הציר המהיר והאיטי בנוקודה; ואח"כ, ככל אחת מהקרניים תעבור ל-Analyzer – תהיה הנחתה נוספת, כאשר רק היתיל של כל אחד מהקרניים על ציר הקיטוב של-h-Polarizer הוא מה שיעבור לצד השני שלו; אולם סוף כל סוף כן יעבור שם או בעוצמה כלשהי שאינה אפס, וכך אותה נקודה לא תיראה לצופה חשוכה לגמרי.

כך, בנוסף לתבניות הצללים האיזוכורומטיות מהחלק הקודם, מתאפשרות גם **מבנהוות הצללים הנקראות "אייזוקלינות"**; מיקומי הצללים על הדיסקה אינם תלויים באורך הגל של האור הנכנס, אלא ביחס בין צירי הקיטוב של המקבטים לבין האוריינטציה הזוויתית של ציר הלחץ בכל נקודה על פני הדיסקה.

4.2 הניסוי

בhinintן לחץ קבוע על הדיסקה, האוריינטציות של הציר המהיר והאיטי בכל נקודה בדיסקה הינה קבועות, ביחס לאוריינטציות בשאר הנקודות בדיסקה; בחנו, לפיכך, את **מבנהוות האיזוקלינות** על פני הדיסקה כפונקציה של האוריינטציה הזוויתית הכללית של הדיסקה כולה, ביחס לצירי הקיטוב של שני המקבטים. בעיקרונו, ניתן לשנות את האוריינטציה של הדיסקה ע"י סיבוב של המכਬש האוחז בדיסקה בزواיות שונות ביחס למקבטים. עם זאת, בגלל הקשי הטכני הכרוך בכך, פעלנו הפק – שינוי את האוריינטציה הזוויתית של שני המקבטים בדף (יחד) ביחס לדיסקה: סובבנו את שני המקבטים בزواית של 5° בכל פעם, כאשר המכਬש עם הדיסקה נותר קבוע במקומו (ניסי נבש שהאור



గורף (1): מספר הפסים המוצללים בין הנקודה $(0,0)$ (– $\left(\frac{D}{2},\frac{D}{2}\right)$ לערך מרכז הדיסקה) כתלות בלחץ (המוחז בולטמים), עבור שלושה אורכי גל שונים של אור. (השגיאה במידת המוחזת, לפי הוראות היצר, היא 0.1% ממהדידה; לגבי השגיאה במידת N ר' נספח (1))

עבור כל אורך גל מצאנו התאמה של יחס ליניארי ישיר בין הלחץ שמשמעותו הניסיונים בין מספר הפסים המוצללים, כפי שמנבנתה התיאורית. התאמה שמצאנו טוביה: כל הנקודות נמצאות בטוויה השגיאה, והשגיאה של המקדם הליניארי a היא בסדר גודל של $\frac{a}{100}$, עבור כל אורכי הגל (לנитוח נוסף של הגף ושל השגיאות של הפרמטרים שהתקבלו בהתאם ר' נספח (1)).

נחשב עתה את מקדם הלחץ האופטי היחסי c : מנוסחה (6) נובע ש- $c = N \frac{\lambda \pi D}{8P}$ (בפרט: c תלוי, לכארה, באורך הגל). אמם איננו יודעים את העוצמה P ביחידות Newton, אך נוכל לסמן $V = qP$ כאשר $V = qC$ (C כאשר $q = const$ ונטוא את c בעורמת, $q = qc$) (באשר $C = 70 \pm 0.03 mm$ הוא): ע"י חישוב עם התקדמות הדיסקה D הוא $c = \frac{\lambda}{c_\lambda} \cdot f_\sigma$ (f_σ – רכיב ביחס לאורך גל נתון).

שגיאות נקבל:

$$\begin{cases} \tilde{c}_r \approx 8.3 \times 10^{-8} \pm 0.2 \times 10^{-8} \frac{m \cdot s^2}{kg} \\ \tilde{c}_g \approx 8.3 \times 10^{-8} \pm 0.2 \times 10^{-8} \frac{m \cdot s^2}{kg} \\ \tilde{c}_b \approx 8.2 \times 10^{-8} \pm 0.2 \times 10^{-8} \frac{m \cdot s^2}{kg} \end{cases}$$

קיבלו שעבור אורכי גל שונים מתאפשרות תוצאות דומות למדי; אכן, במאמרם של Vasudevan & Krishnan (1972) נטען כי ככל V הוא קבוע, מלבד עבור ספקטרום ספציפי צר של אורכי גל (וכתולות ברוחם). ע"י מיציאת המקדם q בקשר $V = qP$ אפשר היה למדוד את f_σ במידוק; כמו"כ, ניתן לקבל את ה- f_σ , fringe constant, המשוון שהוא "constant" רק ביחס לאורך גל נתון, ע"י $f_\sigma = \frac{\lambda}{c_\lambda}$.

4. תבניות אייזוקליניות

4.1 רקע תיאורטי

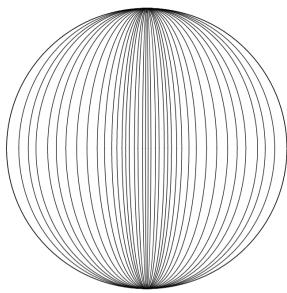
המקרה השני שבו משוואות העוצמה (0.4) מתקיימות בנוקודה מסוימת הוא כאשר α (הזווית בין ציר הקיטוב של-h-Polarizer לבין הцיר האופטי המהיר בנוקודה הנתונה) היא כפולה שלמה של $\frac{\pi}{2}$. דבר זה

(נוצר שמהעירות הפזרות בספרות נראית לכיוון שהביעה של מפת כיווני הלחץ בדיסקה צוֹן כבר נפתרה באופן אנלטי, אולם לא הצלחנו למצוא בספרות פתרון צזה באופן מפורש.)

4.3 מציאת מפת קווי הלחץ המלאה באמצעות סימולציה

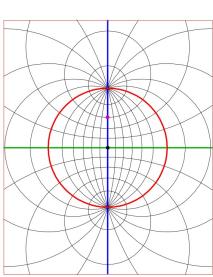
נרצה עתה למצוא פתרון מלא יותר, באמצעות הממצאים שיש בידינו, עבור מפת קווי הלחץ בדיסקה. נצא מtówן הנחה שהთיאוריה הפוטואלסטית נכונה, ונציג שני מודלים אנלטיים עבור מפת קווי הלחץ בדיסקה; מודלים אלו נבחרו עקב הדמיון הרב – לפחות במבט ראשון – ביןם לבין המפה הסכמתית שנבנתה עפ"י ממצאי הניסוי. על כל מודל שנציג נבצע סימולציה של הופעת האיזוקלייניות לפי זווית סיבוב של המקבטים, ונראה אם הסימולציה מתиישבת עם כל הממצאים מהדgesיות של האיזוקלייניות:

א. מודל האליפסות: לפי מודל זה, מפת קווי הלחץ בדיסקה דומה לסדרה צפופה של אליפסות שהציר הארוך שלהם מונח על ציר \hat{y} , וشمתחילות במ审核 המתלכד עם שפת הדיסקה והולכות ונעות צרות יותר ויותר (ניתן להשלים את המודל ע"י שרוטט עוקמות אופקיות שניצבות לכל אחת מהאליפסות; עם זאת, כדי ליצור מפת קווי לחץ של ציר הלחץ האיטיים כמו שמופיע באירוע (7) – הדבר אכן נכון, והעקרונות האנרגטיים מספקות)



אירוע (8) : מודל האליפסות, המורכב מסדרה צפופה של אליפסות שהציר הארוך שלהם מונח על ציר \hat{y} , וشمתחילות במ审核 המתלכד עם שפת הדיסקה והולכות ונעות צרות יותר ויותר (ניתן להשלים את המודל ע"י שרוטט עוקמות אופקיות שניצבות לכל אחת מהאליפסות; עם זאת, כדי ליצור מפת קווי לחץ של ציר הלחץ האיטיים כמו שמופיע באירוע (7) – הדבר אכן נכון, והעקרונות האנרגטיים מספקות)

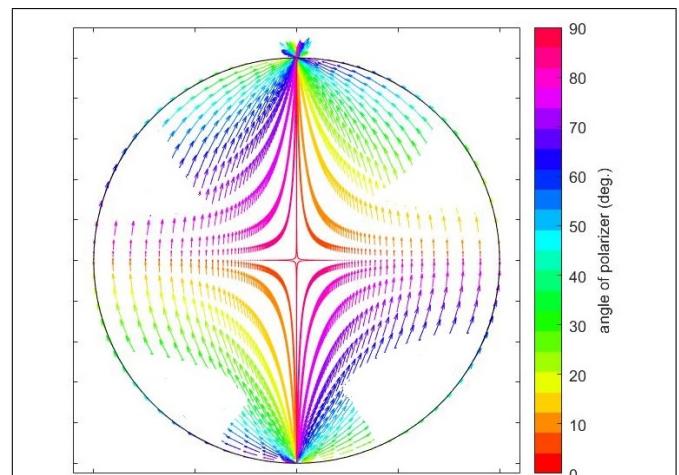
ב. מודל $Wulff$ net : לפי מודל זה, מפת קווי הלחץ בדיסקה דומה לרשת מסוג $Wulff$ net : רשת צזו (שהנה שימוש בכדי ליצור הטלות סטראוגרפיות) נוצרת ע"י שרוטט סדרת מעגלים שעוביים דרך שתי הנקודות שבחן אנו מפעילים לחץ על הדיסקה (אירוע (9)):



אירוע (9) : מודל הנוצרת ע"י סדרת מעגלים שעוביים דרך שתי הנקודות שבחן אנו מפעילים לחץ על הדיסקה (אלו הן נקודות החיתוך של ציר \hat{y} עם שפת הדיסקה) (מtower ויקיפדיה, CC BY-SA 4.0. Ag2gaeh)

שנכנס ל-*Polarizer* נכנס ללא קיטוב, ולכן סיבוב צזה לא משנה את עצמת האור שעובר דרך *Polarizer*; מבחינה אפקטיבית, לפיכך, סיבוב שני המקבטים ביחס לדיסקה שקול לסיבוב הדיסקה ביחס לשני המקבטים). השתדלנו להקפיד כמה שאפשר שבל פעם שני המקבטים יסובבו אותה זווית בדיק (הסיבוב נעשה באופן יידי באמצעות ידיית קצת מגושמת ולכן דרישת זו הייתה אתגר מסוים). צילמנו במקלמה דיגיטלית את תבנית האיזוקלייניות שתקבלה עבור כל זווית שבה סובבנו את שני המקבטים (להלן: האוריינטציה של המקבטים). צילמנו את התבנית המתקבלת עבור יתר-18° או יותר, כאשר סיבוב מושך מהסיבוב 19°, כשוות הסיבוב היא ° 90 או יותר, התבניות חוזרות על עצמן (כפי שמנבאת התיאוריה), כך שבסך הכל כיסינו מחרוז שלם של איזוקלייניות. את התוצאות הגולמיות של המדידות ניתן לראות בספח (2), כאשר המחזוריות לאחר סיבוב בזווית של 90° נראית בבירור; ניתן לראות סרוטן מהזורי שהורכב מכל התבוננות הלו בקובץ [video_appendix](#) המצורף למאמר זה, בשקף (1) (ניתן לראות שם, מהו הדרישה הדיסקה, את אחד המקבטים "נע" בין האוריינטציות השונות). נשים לב שבניגוד למה שעשויים לחוש בתבילה, הצלויות דמיות-השבשות אין קוויים ישרים הפונים לכיוונים מסוימים, אלא: בהינתן אוריינטציה זוויתית כלשהו של המקבטים ביחס לזוויות ייחוס התחלתיות שלהם (שנקבעה כך שהצלויות נראהות כמתלכדות עם ציר \hat{y}), הצלויות המתקבלות הין אוסף הנקודות בדיסקה שבחן הזווית בין אחד הצירים האופטיים לבין הכוון החובי של ציר \hat{x} שווה לזוויות של המקבטים, ביחס לזוויות היחסות התחלתיות שלהם.

ע"י התבוננות במיקומי הופעת האיזוקלייניות כפונקציה של האוריינטציות הזוויתיות השונות של המקבטים ניתן לבנות מפה סכמתית של קווי הלחץ על פני הדיסקה (אירוע (7)):

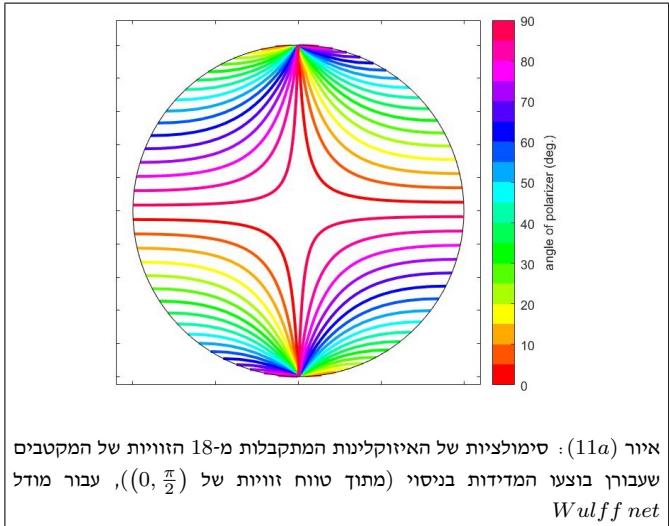


אירוע (7) : מפה סכמתית (איוכתית) של כיווני הלחץ בנקודות שונות על פני הדיסקה, לפי האיזוקלייניות השונות שנמדדו (ישנו נקודות בדיסקה שלא נכללו באך את מ-18° האיזוקלייניות שנדגמו). כל איזוקליניה מתאימה לשתי זווית בטוחות של $(\pi, 0)$ (שההפרש ביניהן הוא $\frac{\pi}{2}$), כשאחת הזווית היא הכוון של ציר הלחץ המהיר בנקודה והשנייה של ציר הלחץ האיטי בה; במפה זו החצים מצביעים לכיוון ציר הלחץ האיטי בכל נקודת (חכוון של $\pi/2$, לפי Phillips, 1952, עמ' 28). הזווית של כל חץ ביחס לכיוון החובי של ציר \hat{x} מודולו $\frac{\pi}{2}$ הוא האוריינטציה הזוויתית של המקבטים, ביחס לזוויות ייחוס התחלתיות של הנקודות (המודולו $\frac{\pi}{2}$) נדרש בכדי להציג את כיווני ציר הלחץ האיטי בנקודות בכל שלם (הרביעון "רביעוני" שעלה לפני הדיסקה, ולא רק בربיעון השני והרביעי).

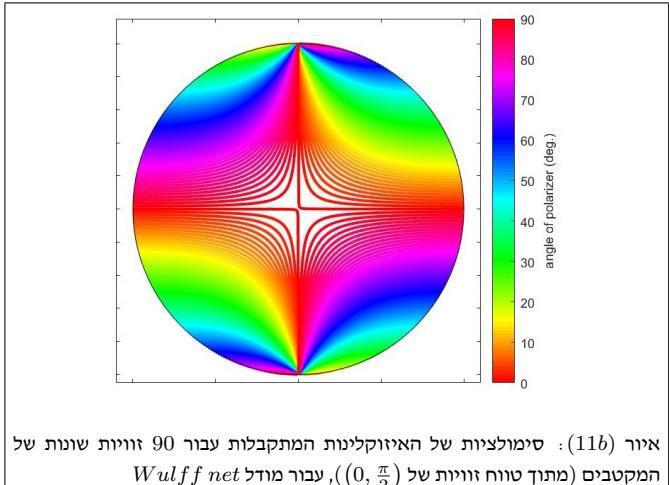
בפרט, ניתן לראות סמוך לנקודות שבחן מופעל על הדיסקה לחץ את צורות השבשבות שנראות היטב בסרטון של המדידות האמיתיות.

ב. סימולציה של האיזוקליניות עבוֹר מודל Wulff net : סרטון עם סימולציה של שינוי תבנית האיזוקליניות לפי זווית המקטבים, עפ"י מודל זה, ניתן למצואו בשקף(3) Video(3) شبוקבץ `video_appendix.pptx`, המצויר למאמר זה. גם בסרטון זהה דינמיות השינויים בתבניות האיזוקליניות נראית דומה למדי, מבחינה אינטואיטיבית, לזו שבסרטון המורכב מצילומי האיזוקליניות בדיסקה האמיתית.

מבט בו-זמני על סימולציות של האיזוקליניות המתקבלות מ-18 האוריינטציות של המקטבים שעבורן בוצעו המדידות בניסוי נראה כך (איור (11a)):



סימולציה של האיזוקליניות המתקבלות עבוֹר 90 זווית שונות של המקטבים (מתוך טוח זווית של $(0, \frac{\pi}{2})$) נראה כך (איור (11b)):



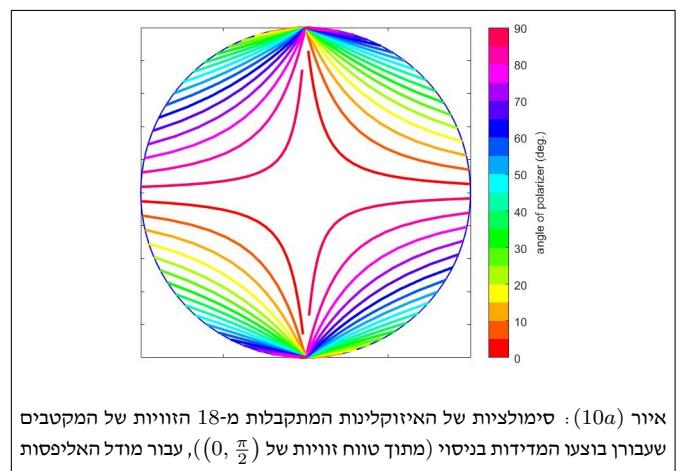
גם בתמונה זו – המרחביה ביופיה, אם יורשה לנו להעיר – ניתן לראות את צורות השבשבות המדוברות).

מצפיה בסרטוני הסימולציות של דינמיות השינוי של האיזוקליניות בצד לסרטון המורכב מתמונות של המדידות האמיתיות במעבדה לא מותאפשר, במבט ראשון, להכריע איזה מהמודלים קרוב יותר

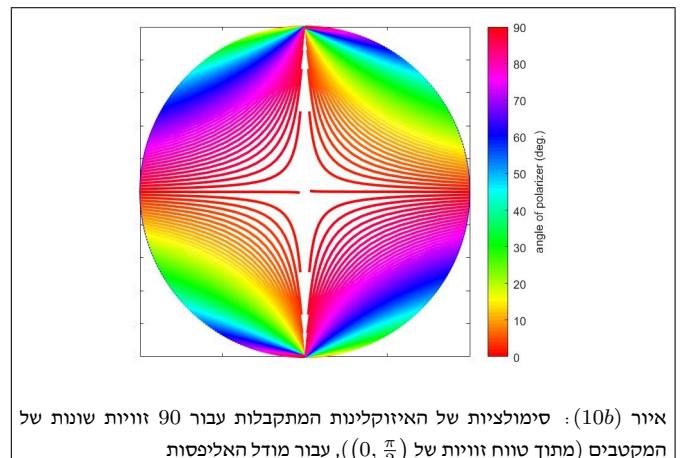
עבור כל מודל של קווי לחץ יצrhoו סימולציה של מפת האיזוקליניות, באופן הבא: תחילת חישבו באופן אנלטי את השיפועים של קווי הלחץ באוסף נקודות מוגדרות על פני הדיסקה. השיפוע של קו הלחץ בנקודה שווה \tan של ההזווית בין הכוון החיבוי של ציר \hat{x} לבין המשיק לקו הלחץ באותה נקודה; לפיכך, בהינתן זווית α בין צירי המקטבים, סימנו כל הנקודות בדיסקה שהבן $\tan(\alpha)$ שווה לשיפוע של קו הלחץ נתן את האיזוקלינה המתאימה לזוית α (רי נספח (3) לחישוב מפורש של הקואורדינטות של הנקודות הנמצאות על איזוקלינה, בהינתן זווית α):

א. סימולציה של האיזוקליניות עבוֹר מודל האליפסות

סרטון עם סימולציה של שינוי תבנית האיזוקליניות לפי זווית המקטבים, עפ"י מודל זה, ניתן למצואו בשקף(2) Video(2) شبוקבץ `video_appendix.pptx`, המצויר למאמר זה (בشكף מופיע גם דינמיות השינויים בתבניות האיזוקליניות בסרטון אשר לאופן יצירת הסימולציה). דינמיות השינויים בתבניות האיזוקליניות בעבורן נראית דומה למדי, מבחינה אינטואיטיבית, לזו שבסרטון המורכב מצילומי האיזוקליניות בדיסקה האמיתית. מבט בו-זמני על סימולציות של האיזוקליניות המתקבלות מ-18 הזווית (اورיאנטציות) של המקטבים שעבורן בוצעו המדידות בניסוי נראה כך (איור (10a)):



כל צבע מסמן כיוון שונה של ציר הלחץ האיטי בנקודה. ניתן, כאמור, לראות דמיון בין אוסף זה לבין תבניות האיזוקליניות שהתקבלו בניסוי. סימולציה של האיזוקליניות המתקבלות עבוֹר 90 זווית שונות של המקטבים (מתוך טוח זווית של $(0, \frac{\pi}{2})$) נותנת תמונה שנראית כקרובה-ל-”גבול הרצף” של אוסף האיזוקליניות בדיסקה (איור (10b)):



של מפת קווי הלחץ הפנימיים, ניתן לנתח את התבניות האיזוקליניות ולהזותר כך את הכוונים של צירי הלחץ השונים בנקודות שונות בגוף (באופן ציורי אפשר לומר שהtabניות האיזוקליניות מתפקדות כמו צילום רנטגן של המבנה הפנימי של הגוף).

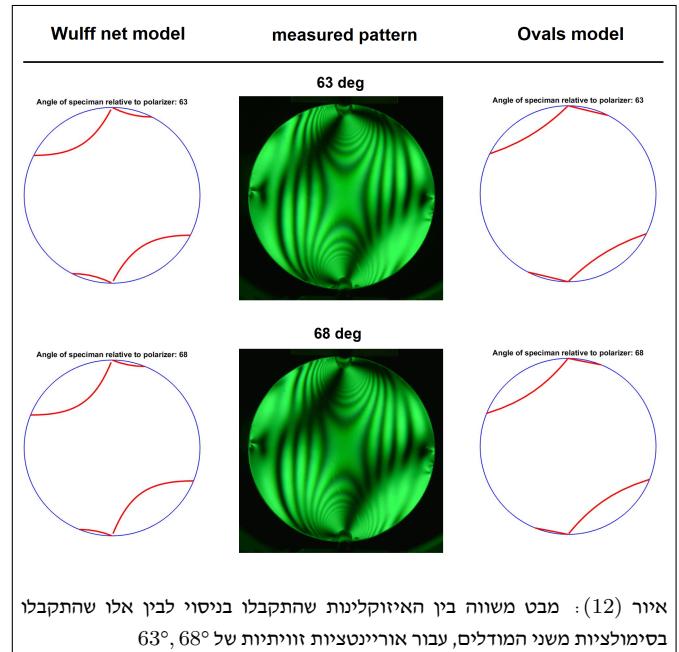
בנוסף, ניסינו באמצעות סימולציות זהות את המבנה המלא של קווי הלחץ בדיסקה. הצענו שני מודלים אפשריים למפת קווי הלחץ, על סמך סימולציות של האיזוקליניות המתකבות מהמודלים הללו, על סמך התיאוריה הפוטואלסטית. קיבלנו מושגים איזוקליניות שנראות קרובות למדי לאלו שהתקבלו במדידות שהתקבלו בניסוי, והצבענו – על סמך בחינת ההבדלים בין הסימולציות השונות – על המודל שהדענו

מתאר באופן מדויק יותר את מפת קווי הלחץ האמתיים בדיסקה. ניתן להציג ניסוי המשך בנווגע לאייזוכרומטיות, שיכלול פיתוח דרך למדוד במדידות את הלחץ P המופעל על ידי הנסיניים; כך יהיה ניתן לגלוות במדידות את מקדם הלחץ האופטי היחסי c , עבור אורכי גל שונים. תופעה ששמנו לב אליה ועשיה לשמש אף היא כńskaה למחקר עתידי: היא – השפעה אפשרית של זווית המקבבים על התבנית האיזוכרומטיות – מתחבוננות במדידות המופיעות בטבלת המדידות שבנספח (2), ובפרט על המדידות המתאימות לזוויות שמ- 48° עד 78° , נראה, לכארה, שניינו זווית הקיטוב גורם לעיוות של הפסים האיזוכרומטיים. תופעה מעוררת תמייה, שכן לפי מושואה (0.4), שניין הזווית α (הזווית שבין ציר הקיטוב של-analyzer לבין ציר הלחץ המהיר בנקודה, שמשתנה עם סיבוב המקבבים) לא אמרור להשפיע על Δ (הפרש הפaza שנוצר בעבור קריי האור בציר האיטי והמהיר בנקודה), האחראי על היוצרות התבנית האיזוכרומטית. יתכן שההעמקות בתיאוריה תמצא הסבר לתופעה, ויתכן שהסביר כזה ידרוש אישוש באמצעות ניסוי.

הפניות

James Phillips, W. "Photoelasticity." *Experimental Stress Analysis*. Urbana (1998).

למציאות. עם זאת, השוואה בין האיזוקליניות המופיעות בתמונה הסטילס המקוריות שהתקבלו בניסוי לבין האיזוקליניות המתקבלות מהסימולציות מעלה שעבור זוויות קיטוב מסוימות, מודל Wulff net נתן תמונה שנראית דומה יותר לו המקורית (איור (12)):



איור (12): מבט משווה בין האיזוקליניות שהתקבלו בניסוי לבין אלו שהתקבלו בסימולציות משני המודלים, עבור אווריינטציות זוויתיות של $63^\circ, 68^\circ$.

בשתי התבניות של המדידות מהניסוי המופיעות באירור (12), האיזוקלינה העליונה ממשאל פונה כלפי מטה בשיפוע חריף יותר מאשר בseriecia של מודל האליפסות (מיימן), בעוד שבקיטוב נקודות הלחץ השיפוע של האיזוקליניות הללו – לפחות חלק שקרוב לנקודות הלחץ העליונה בכיר $\hat{\ell}$ – נראה יחסית דומה למה שופיע במדידה. מכאן ניתן להסיק שמודל Wulff Net מהווה כנראה תיאור טוב יותר של מפת קווי הלחץ האמתי בדיסקה.

5. דיוו

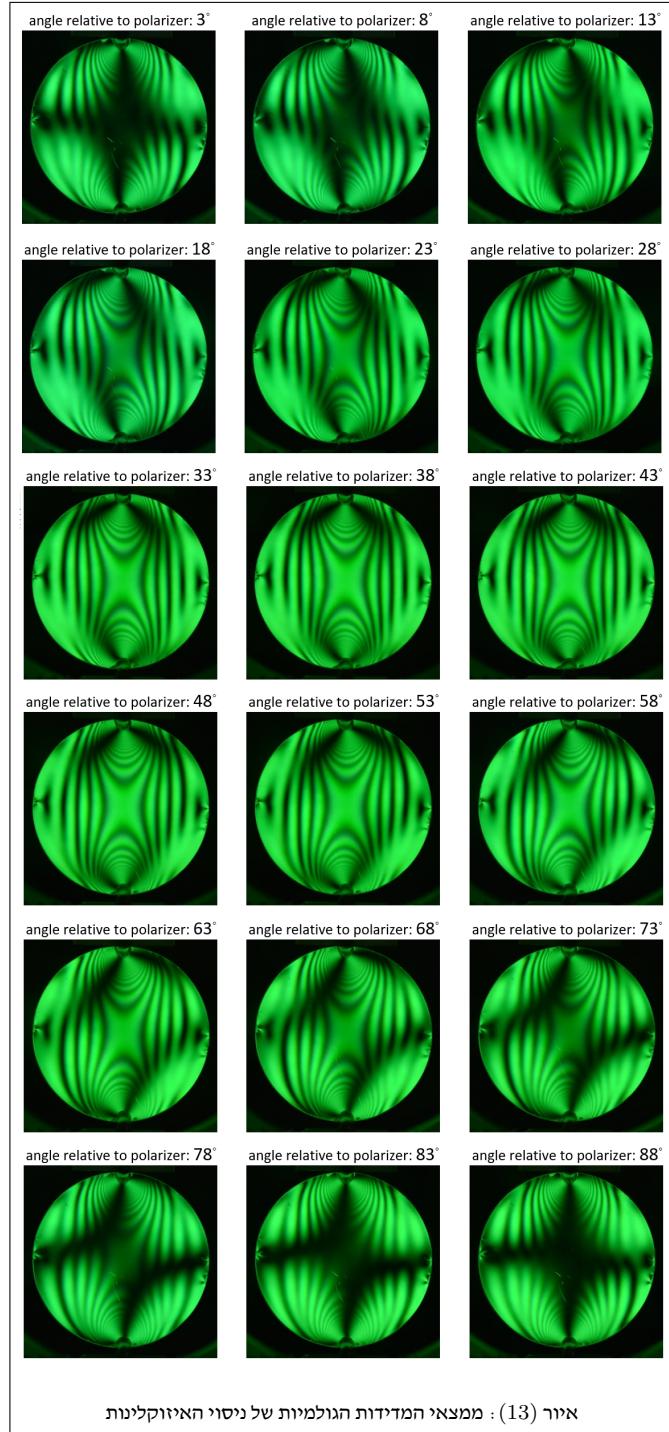
גופים פוטואלסטיים הם בעלי שבירה כפולה, עם מקדמי שבירה וציר לחץ שונים עבור נקודות שונות בגוף; כאשר בנקודות רבות פרמטרים אלו עשויים לעבור שינוי כתוצאה מהשפעות חיצונית (לדוגמה לחץ שמופעל מבחוץ). גופ פוטואלסטי, אם כן, מותפרק כאוסף צפוף של לוחיות גל נקודתיות שונות. באמצעות תיאוריה של קיטוב והתאבכות ניתן את מבניות האור והצל שמתקבלות בעת שליחת קרן אור מוקטבת אל גופים אלה, וראינו כיצד לחצים שונים מבחו וזוויות קיטוב שונות של המקבבים במערכת משפים על תבנית החלים הנראית על פני דיסקה עגולה הנתונה במכבש לחץ. ראיינו שניינו הלחץ גורם לשינוי בתבנית האיזוכרומטית הנקבעת עפ"י המחזוריות של הפרשי הפaza שנוצרו בנקודות השונות על פני הדיסקה; וראינו שניינו זווית המקבבים שביניהם מוקמת הדיסקה גורמת לשינוי בתבנית האיזוקלינית.

בפרט, ראיינו שהאיזוקליניות עשויות לשמש לזיהוי מפת קווי הלחץ הפנימיים בדיסקה, ובנינו על פיה מפה סכמטית כזו של קווי הלחץ לשימושו הזה של האיזוקליניות עשויות להיות השלכות מרוחיקות לכת: גם במקרים של גופים גיאומטריים שעבורן לא קיים פתרון אלגברי

נספחים

הتبיר שההתאמות בשיטה זו נותנות שגיאות גדולות הרבה יותר (פי 2, ו-8) מההתאמות בשיטה הידנית; בפרט, מהאנומליה במידידות בשני החלכים הנומוכים נראה שגם השיטה הזו התקשתה באומדן מדויק של החלק השברי של N שמות, ויתכן שאף הייתה שם בעיית כיוול. לפיכך, עשינו לבסוף שימוש בשיטת המדידה המקורית, לפי העין האנושית, תוך שאנו לוקחים בחשבון את השגיאה הכרוכה במידידה כזו.

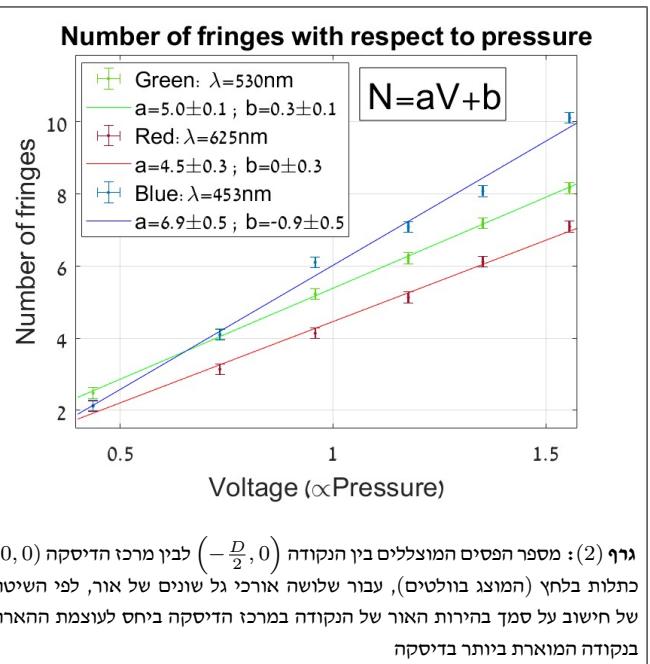
נספח (2): התוצאות הגולמיות של המדידות מניסוי האיזוקליניות
הזרות המסומנת היא ביחס לכיוון החivoוי של ציר \hat{x} , ומתראות אלה זווית הסיבוב של שני המקטבים ביחס לזווית ייחוס התחליתית 0° (איור (13)):



נספח (1): חישוב מספר הפסים האיזוכומטיים וניתוח השגיאה של ההתאמה

את מספר הפסים החשובים השלמים (כלומר את $[N]$) ניתן לספור בעין, ללא קושי מיוחד, עבור סדר הגדל של מספר הפסים בণויו שלנו. לגבי החלק השברי של הפס האחרון נערכו במידע הבא: N שלם מותאים למצב בו הנקודה באמצעות הדיסקה כהה לגמרי; N שהוא "שלם ועד $\frac{1}{2}$ " מותאים למצב בו אמצע הדיסקה מוארת לגמרי. לאור כללי אכבע אלו הערכנו, לגבי החלק השברי של הפס האחרון, עד כמה הוא קרוב לשיא הבירות/ההצללה; הנחנו שגיאת מדידה של ± 0.1 (שהרי לא סביר שהערכתה שלנו תהיה מוטעית ביותר מ-0.3, ולכן לקחנו את 0.3 כיחידת המידה, ו- $0.3 \cdot 0.3 = 0.09$ ויגילנו זאת כלפי מעלה (0.1)).
נעיר שההתאמות שקיבילנו הגרף האדום מותנה באופן קצר שונה מהשנים האחרים: בעוד שבגרף הירוק והכחול ההתאמה מותנת $b = b$ או $b = 0.17$ לפחות הגרים לא נפגשים באותה נקודה ($b = -0.3$ מה שגורם לכך ששלושת הגרים לא נפגשים באותה נקודה בקבוע של כל הגרים). מכאן עליה חשד הראית, עד כדי תיקון של הזזה בקבועה של הגרפים. מכאן עלה חשד שהמדידה בשיטה שתיארנו אינה מדויקת; אכן, עבור חצים נומוכים מספר המחזוריים של הפaza מנקודה $(0,0)$ עד לנקודה $(0, \frac{D}{2})$ הוא קטן (בין 2 ל-3), וכמשמעותו על הפס החלקי האחרון, אזי: עקב מיעוט הנוכחות של פסים אחרים בתמונה – קשה להעריך בעורף העין אם הפס החלקי הזה מוחווה חצי של פס שלם, או רבע, או שלושה רביעים וכו'; קיימים אם כן קושי לחתן אומדן מדויק לחילק השברי של N , עבור חצים נומוכים.

ניסינו לפיקח למדוד את החלק השברי של N בשיטה אחרת, ממוחשבת, שאינה תליה בסובייקטיביות של העין האנושית: חישבנו את היחס בין עצמת האור המתקבלת בנקודה באמצעות הדיסקה לבין הנקודה המוארת בדיסקה, ששימשה כ-*baseline*, בצד ליהבין עד כמה הנקודה במרכז הדיסקה מוארת/מוחצת. ע"י ניתוח זה קיבלנו את ההתאמות הבאות עבור אורכי הגל השונים (גרף (2)):



Wulff net model

Assume the red circle (the disc) is determined by $x^2 + y^2 = R^2$.

Now, let a circle C (here in yellow) be determined by 3 points:

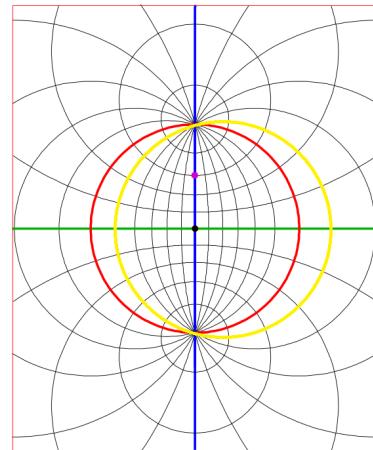
$(0,R), (0,-R), (n,0)$ (s.t. $0 < n < R$). Circle C satisfies:

$$y^2 + (x-n)^2 = r_1^2 = n^2 + R^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{-x^2 + 2xn + R^2}.$$

These are the coordinates (x,y) of the point which (1) is in the 2nd quadrant, (2) is on the circle C, and (3) the slope of circle C's tangent at the point equals $\tan(\alpha)$ (where α is a given angle s.t. $0 < \alpha < 90$):

$$(x,y) = \left(n - \sqrt{(n^2 + R^2) \frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\alpha) + 1}}, \sqrt{-x^2 + 2xn + R^2} \right)$$

This point is on the isoclinic that is in the 2nd quadrant and that corresponds to the angle α (relative to polarizers' main axes).



Ovals model

Let an oval (here in blue) be determined by

$$mx^2 + y^2 = R^2 \text{ (s.t. } m > 0\text{).}$$

These are the coordinates (x,y) of the point which (1) is in the 2nd quadrant, (2) is on the oval, and (3) the slope of oval's tangent at the point equals $\tan(\alpha)$ (where α is a given angle s.t. $0 < \alpha < 90$):

$$(x,y) = \left(-\sqrt{\frac{R^2 \tan^2(\alpha)}{m^2 + m \tan^2(\alpha)}}, \sqrt{R^2 - mx^2} \right)$$

This point is on the isoclinic that is in the 2nd quadrant and that corresponds to the angle α (relative to polarizers' main axes).

