בס"ד

קורס תכנות אלגוריתמים מחקריים

סיכום מאמר הקצאות בורדה פרופורציונליות (Proportional Borda allocations)

מחברי המאמר: Andreas Darmann, Christian Klamler
מחבר הסיכום: שלמה גליק

מבוא ועבודות קודמות בתחום:

המאמר חוקר הקצאת פריטים בלתי ניתנים לחלוקה, בעיות מסוג זה נפוצים בתחומים של מדעי המחשב וכלכלה ועוד..
לדוגמא:

חלוקת רכוש בין זוג שהתגרש, חלוקת משאבים שלא ניתנים לחלוקה בין תהליכים שונים במחשב, הקצאות קורסים לסטודנטים שונים.

בספרות יש התייחסויות רבות לבעיות מסוג זה, כאשר קיימת הפרדה בין שני סוגים של פתרונות הוגנים:

- **חלוקה ללא קנאה** - כאשר בחלוקה זאת אין אף משתתף שבעיניו משתתף אחר קיבל יותר ממנו.
- **חלוקה פרופורצינלית** - כאשר בחלוקה זאת כל משתתף מאמין שהוא קיבל לפחות $\frac{S}{n}$ כאשר S זה השווי הכולל של הפריט שאותו מחלקים וn זה מספר הממשתתפים בחלוקה.

המאמר הזה מתייחס לפתרון בעזרת חלוקה פרופורציונלית.

המאמר משתמש בשיטת Bordaשיטת בחירות ידועה אשר נותנת דירוג לכל מועמד(במקרה שלנו פריט מתוך פריטי החלוקה).

סוג אחד של פתרונות קודמים בתחום:

קיימים פתרונות שממקסמים את הדרגה המינימלית של התת קבוצות שהוקצו בהעדפות המשתתפים

החסרונות בפתרונות אלו:

הסיבוכיות בשביל פתרון כזה היא גבוהה מאוד מכיוון שנצטרך שכל משתתף ידרג את כל התתי קבוצות האפשריים של פרטיי החלוקה, אבל יש 2^n כאלה כאשר n הוא כמות הפריטים.

מה יקרה אם יהיו לנו למשל 64 חלקים? ניתן למשתתף לדרג 2^{64} תתי קבוצות? כנראה שהוא לא יסיים לעולם.

סוג נוסף של פתרונות קודמים בתחום:

מאמר זה מתייחס ספיציפית לחלוקת פריטים שכל פריט בפני עצמו לא ניתן לחלוקה.

פריטים שניתנים לחלוקה, זאת בעיה שעבורה כבר יש פתרונות נפוצים רבים.

קיימים פתרונות כגון "המפחית האחרון" "אבן פז" ועוד..

החסרונות בפתרונות אלו:

לרוב הם מוגבלים לכמות מסויימת של משתתפים, בנוסף הם פותרים את הבעיה רק כשאפשר לחלק את הפריטים עצמם.
אבל מה יקרה לדוגמא במשחק קלפים נביא לשחקן חצי קלף?

הפתרון במאמר זה הוא לדרג רק את החלקים עצמם ואז הדירוג של תת קבוצה הוא סכום הדירוגים של חלקייה.

חיסרון אחד בפתרונות מהצורה שמציג המאמר הוא שהפתרונות האלו מונעים תלות בין החלקים.

למשל, אם רוצים לחלק בית עם רהיטיו למספר יורשים. ברור לנו שאם מישהו מקבל את הסלון, אז כנראה שהערך של הספות יהיה גבוה בעיניו, כי הוא ירצה ספות לסלון. אבל אם הוא יקבל את המטבח, כנראה שלמקרר יהיה יותר ערך בעיניו. ולכן פתרון שמנתק את התלות בין החלקים הוא כנראה לא יהיה הפתרון המיטבי. מגבלה נוספת בפתרון של המאמר היא שחובה שמספר החלקים יהיה כפולה של מספר המשתתפים.

בס"ד

הגדרות:

- n - מספר המשתתפים
- $N = \{1, 2, ... n\}$ - קבוצת המשתתפים
- $k = \varphi \cdot n$ - מספר החלקים (מספר החלקים הוא כפולה של מספר המשתתפים)
- $X = \{x_1, x_2, ... x_k\}$ - קבוצת כל החלקים
- $>_i$ - סידור מדורג של חלקי X לפי העדפת המשתתף ה- i
- $\pi(i)$ - קבוצת החלקים שקיבל המשתתף ה- i
- $w_i(a)$ - הציון שנותן המשתתף ה- i לחלק a
- $\omega_i(\pi) = \Sigma_{a \in \pi(i)} w_i(a)$ - סך הציון שנותן השחקן i לכל החלקים שקיבל
- $b_i(a)$ - הציון שנותן המשתתף ה- i לחלק a ע"פ דירוג בורדה
- $b_i(\pi) = \Sigma_{a \in \pi(i)} b_i(a)$ - סך הציון (ע"פ בורדה) שנותן השחקן i לכל החלקים שקיבל.
- s - רצף של כל הסוכנים באורך כמות החלקים k (סדר בחירת החלקים)
- $V_{w_i}(k) = \Sigma_{j \le k} \omega^{(j)}$ - סכום הציונים שנתן המשתתף ה- i לכל החלקים
- חלוקה פרופורציונלית - $\forall i \ \frac{\omega_i(\pi)}{n} \ge V_{w_i}(k)$ במילים אחרות אם בסופו של דבר כל שחקן קיבל בעיני עצמו לפחות סכום הציונים הכולל חלקי כמות השחקנים

<u>הערות:</u>

1. $\pi(i) \cap \pi(j) = \varnothing \ and \ |\pi(i)| \equiv |\pi(j)| \ and \ \bigcup_{i \in N} \pi(i) = X$
   במילים אחרות:
   א. כל שחקנים מקבלים כמות שווה של חלקים.
   ב. אין שני שחקנים שמקבלים את אותו חלק
   ג. כל השחקנים יחד מקבלים את כל החלקים
2. בבעיה שלנו אנחנו מקבלים כקלט את קבוצת החלקים, קבוצת המשתתפים ווקטור הדורגים של כל משתתף
   קלט: N,X , $(>_1, >_2, ... >_n)$
   פלט: האם קיימת חלוקה פרופורציונלית ואם כן מחזיר גם את החלוקה עצמה

בס"ד

אלגוריתמים:

טענה 1:

חלוקה היא פרופורציונלית עבור ציוני Borda אם ורק אם היא פרופורציונלית עבור כל טרנספורמציה לינארית של ציוני Borda.

הוכחת טענה 1:

נגדיר t להיות טרנספורמציה לינארית של ציוני בורדה $t_i(a) := \alpha \cdot b_i(a) + \beta$

$t_i(\pi) := \Sigma_{a\in\pi(i)} t_i(a)$ (הסכום של כל חלקים של המשתתף ה- i ע"פ הטרנספורמציה t)

$V_t(k)$ סכום הציונים שנתן המשתתף ה- i i לכל החלקים ע"פ הטרנפורמציה t

$$V_t(k) = \Sigma_{a\in X} t_i(a) = \Sigma_{a\in X}(\alpha b_i(a) + \beta) = k\cdot\beta + \alpha\Sigma_{a\in X} b_i(a) = \alpha V_b(k) + k\beta$$

חלוקה פורפורציונלית תחייב כל משתתף לקבל לפחות

$$\frac{V_t(k)}{n} = \alpha\frac{V_b(k)}{n} + \frac{k}{n}\beta$$

מכיוון שכל משתתף מקבל בדיוק $\frac{k}{n}$ חלקים

$$t_i(\pi) := \Sigma_{a\in\pi(i)} t_i(a) = \Sigma_{a\in\pi(i)}\alpha b_i(a) + \beta = \alpha\Sigma_{a\in\pi(i)} b_i(a) + \frac{k}{n}\beta = \alpha b_i(\pi) + \frac{k}{n}\beta$$

מסקנה:

1. $V_t(k) = \alpha V_b(k) + k\beta$

2. $\frac{V_t(k)}{n} = \alpha\frac{V_b(k)}{n} + \frac{k}{n}\beta$

ע"פ 1+2 מתקיים $t_i(\pi) \geqslant \frac{V_t(k)}{n} \leftrightarrow b_i(\pi) \geqslant \frac{V_b(k)}{n}$

שכן:

$$b_i(\pi) \geqslant \frac{V_b(k)}{n} \rightarrow t_i(\pi) = \alpha b_i(\pi) + \frac{k}{n}\beta \geqslant \alpha\frac{V_b(k)}{n} + \frac{k}{n}\beta = \frac{1}{n}\cdot\alpha V_b(k) + k\beta = \frac{1}{n}\cdot V_t(k)$$
$$\rightarrow t_i(\pi) \geqslant \frac{V_t(k)}{n}$$

ומצד שני:

$$b_i(\pi) < \frac{V_b(k)}{n} \rightarrow t_i(\pi) = \alpha b_i(\pi) + \frac{k}{n}\beta < \alpha\frac{V_b(k)}{n} + \frac{k}{n}\beta = \frac{1}{n}\cdot\alpha V_b(k) + k\beta = \frac{1}{n}\cdot V_t(k)$$
$$\rightarrow t_i(\pi) < \frac{V_t(k)}{n}$$

מש"ל טענה 1.

<u>טענה 2:</u>

במקרה ש $k = n$ אנחנו יכולים לבדוק האם קיימת חלוקה פרופורציונלית ובמקרה שהיא אכן קיימת, למצוא אותה.

בזמן פולינומי.

<u>הוכחת טענה 2:</u>

$$V_b(k) = \Sigma_{a\in X} b_i(a) = sum(0,1,\ldots k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\rightarrow \frac{V_b(k)}{n} = \frac{V_b(k)}{k} = \frac{\frac{k(k-1)}{2}}{k} = \frac{k(k-1)}{k2} = \frac{k-1}{2}$$

מכאן שחלוקה פרופורציונלית אם"ם

$$\forall i \;\; b_i(a) \geqslant \frac{k-1}{2}$$

עכשיו כדיי למצוא חלוקה כזאת נבצע רדוקציה מהבעיה שלנו לבעיה של מציאת שידוך מושלם בגרף הדו-צדדי שאותה אנחנו יודעים שאפשר לפתור בסיבוכיות פולינומית.

נגדיר:

$$G = (V,\, E) \quad ,\, V = N \cup X\,, \quad E = \left\{ \{i,\, a\} \,|\, i \in N,\, a \in X,\, b_i(a) \geq \frac{k-1}{2} \right\}$$

נכונות הרדוקציה:

- הגרף הוא דו-צדדי מכיוון שאין צלע בין שני משתתפים ואין צלע בין שני פריטים
- אם קיים שידוך מושלם זה אומר שבהכרח לכל משתתף יש צלע לפריט אחד שזה אומר שכל משתתף מאמין שקיבל יותר מ $\frac{k-1}{2}$ ולכן החלוקה פרופורציונלית.
- אם לא קיים שידוך מושלם זאת אומרת שקיים משתתף שאין בינו לבין פריט צלע ולכן הוא לא מאמין שקיבל יותר מ $\frac{k-1}{2}$ ולכן החלוקה לא פרופורציונלית

למרות שבגלל המגבלה ש $k = n$ אנחנו יכולים בקלות לבדוק האם קיימת כזאת חלוקה צריך לזכור שלא תמיד היא קיימת למשל בדוגמה הבאה שבה יש שני אנשים ושני חלקים ושניהם מדרגים באותו הסדר $(a > b)$ אז יהיה כך

ללא הגבלת הכלליות

$$\pi(1) = \{a\},\ \pi(2) = \{b\} \rightarrow b_2(\pi) = 0 < \frac{V_b(2)}{2} = \frac{1}{2}$$

באופן כללי ניתן להבין שהמקרה הבעייתי ביותר הוא מקרה שלכל המשתתפים יש העדפות זהות.

במאמר זה מתמקדים במצב שבו יש $k > n$ או יותר נכון $k = \varphi \cdot n$ כך ש $1 < \varphi$

בס"ד

טענה 3:

אם $k = \varphi \cdot n$ ומתקיים φ זוגי

אזיי תמיד קיימת חלוקה פרופורציונלית וניתן למצוא אותה בזמן פולינומי

הוכחת טענה 3:

נגדיר s_1 וקטור באורך n כך שכל משתתף יופיע בו בדיוק פעם אחת.

$s = s_1 \cdot s_1^{Reverse}$ זאת אומרת שאם $s_1 = \{1, 2... n\}$ אזיי $s = \{1, 2... n,\ n,\ n-1, ...1\}$

כעת נגדיר את סדר הבחירה p כחזרה על s במשך $\frac{\varphi}{2}$ סיבובים.

במקרה גרוע ביותר שבו לכולם יש העדפות זהות צ"ל

$$b_m(\pi) \geq \frac{V(k)}{n} = \frac{(\varphi n - 1)\varphi n}{2n} = \frac{(\varphi n - 1)\varphi}{2}$$

נשים לב שבסיבוב הi

השחקן הראשון יבחר בהתחלה את ה $(\varphi - 2i)n - 1$ ואז יישאר לנו רק את $(\varphi - 2(i+1))n$

באופן כללי עבור הבוחר הm נקבל שבכל סיבוב יבחר את $(\varphi - 2i)n - m$ ואת $(\varphi - 2(i+1))n + m - 1$

סה"כ נרוץ מסיבוב מספר 0 עד סיבוב $\frac{\varphi}{2} - 1$ ובכל סיבוב הנקודות שלו יהיה לפחות

$$(\varphi - 2(i+1))n + m - 1 + (\varphi - 2i)n - m = (\varphi - 2(i+1))n + (\varphi - 2i)n - 1$$

ואז מתקבל

$$b_m(\pi) = \sum_{i=0}^{\frac{\varphi}{2}-1} (\varphi - 2(i+1))n + (\varphi - 2i)n - 1 = \sum_{i=0}^{\frac{\varphi}{2}-1} (\varphi - 2(i+1))n + (\varphi - 2i)n - \sum_{i=0}^{\frac{\varphi}{2}-1} 1$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{\varphi}{2}-1} (\varphi - 2(i+1))n + (\varphi - 2i)n - \frac{\varphi}{2} = -\frac{\varphi}{2} + \sum_{i=0}^{\frac{\varphi}{2}-1} (\varphi - 2(i+1))n + (\varphi - 2i)n = -\frac{\varphi}{2} + n\sum_{i=0}^{\frac{\varphi}{2}-1} (\varphi - 2(i+1)) + (\varphi - 2i)$$

$$= -\frac{\varphi}{2} + n\sum_{i=0}^{\frac{\varphi}{2}-1} \varphi - 2i - 2 + \varphi - 2i = -\frac{\varphi}{2} + 2n\sum_{i=0}^{\frac{\varphi}{2}-1} \varphi - 2i - 1 = -\frac{\varphi}{2} + 2n\sum_{i=1}^{\frac{\varphi}{2}} (\varphi - 1) + 2n\sum_{i=0}^{\frac{\varphi}{2}-1} -2i$$

$$= -\frac{\varphi}{2} + 2n\frac{\varphi}{2}(\varphi - 1) - 2n\sum_{i=0}^{\frac{\varphi}{2}-1} 2i = -\frac{\varphi}{2} + n\varphi(\varphi - 1) - 4n\sum_{i=1}^{\frac{\varphi}{2}-1} i = -\frac{\varphi}{2} + n\varphi(\varphi - 1) - 4n\frac{\left(\frac{\varphi-2}{2}\right) * \left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2}$$

$$= -\frac{\varphi}{2} + n\varphi(\varphi - 1) - 2n\left(\frac{\varphi - 2}{2}\right)\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{\varphi}{2} + n\varphi(\varphi - 1) - n\varphi\left(\frac{\varphi}{2} - 1\right) = -\frac{\varphi}{2} + n\varphi\left(\varphi - 1 - \frac{\varphi}{2} + 1\right)$$

$$= -\frac{\varphi}{2} + n\varphi\left(\varphi - \frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{\varphi}{2} + \frac{n\varphi\varphi}{2} = \frac{n\varphi\varphi - \varphi}{2} = \frac{\varphi(n\varphi - 1)}{2} \rightarrow b_m(\pi) = \frac{\varphi(n\varphi - 1)}{2} = \frac{(n\varphi - 1)n\varphi}{2n} = \frac{V_b(k)}{n}$$

$$\rightarrow b_m(\pi) = \frac{V_b(k)}{n} \rightarrow \text{מש"ל}$$

בס"ד

<u>משפט 1:</u>

עבור מספר אי זוגי n של סוכנים יש תמיד חלוקה פרופורציונלית
וניתן למצוא אותה בזמן פולינומי.

<u>הוכחת משפט 1:</u>

ניח n מספר אי-זוגי,

מקרה ראשון: k זוגי אז גם $\frac{k}{n}$ זוגי חייב להיות זוגי וע"פ טענה 3 כבר קיימת חלוקה פרופורציונלית.

מקרה שני: k אי-זוגי $\leftarrow \frac{k}{n}$ אי-זוגי

$$1 < \frac{k}{n} \rightarrow \frac{k}{n} \geq 3$$

נגדיר φ זוגי או 0 כך שמתקיים $\frac{k}{n} = \varphi + 3 \leftarrow$ $k = (\varphi + 3)n$

נגדיר סדר בחירה r אשר מורכב מהרצפים q,s בצורה הבאה:

עבור 3 הסיבובים הראשונים סדר הבחירה יהיה q כך ש -

$$q := (1,..., n, n, n-2, n-4,..., 1, n-1, n-3, n-5,..., 2, n-1, n-3, n-5,..., 2, n, n-2, n-4,..., 1)$$

ה φ הנוספים סדר הבחירה יהיה כמו בהוכחת טענה 3. $s = (1, 2, 3,..., n, n, n-1,..., 2, 1)$

ונרוץ על s $\frac{\varphi}{2}$ פעמיים.

נגדיר $b_i(q)$ סכום הנקודות בורדה שקיבל השחקן i בשלושת סבבי החלוקה של q

<u>מקרה ראשון i זוגי:</u>

החלק הראשון שלוקח השחקן i הוא לפחות בשווי של $k - i$

החלק השני שהוא לוקח זה כבר אחרי שנבחרו n חלקים בסיבוב הראשון וכל האי-זוגיים $(\frac{n+1}{2})$ לקחו

בסיבוב
השני
וכל מי שגדול ממנו מהזוגיים גם כבר לקח ולכן סה"כ השווי בסיבוב השני יהיה לפחות

$$k - \left(n + \frac{n+1}{2} + \frac{n-1-i}{2}\right) - 1$$

את החלק השלישי הוא יקח אחרי $2n + \frac{n-1-i}{2}$ בחירות ולכן שוויו יהיה לפחות

$$k - \left(2n + \frac{n-1-i}{2}\right) - 1$$

סה"כ אחרי בחירת שלושה חלקים:

$$b_i(q) \geq k - i + k - \left(n + \frac{n+1}{2} + \frac{n-1-i}{2}\right) - 1 + k - \left(2n + \frac{n-1-i}{2}\right) - 1$$

$$3k - 2 - i - n - (n-1-i) - 2n - n - \frac{n+1}{2} = 3k - \frac{8n+n+1}{2} - 1$$

$$= 3k - \frac{9n+1}{2} - 1$$

<u>מקרה שני i אי-זוגי</u>

$$b_i(q) \geq k - i + k - \left(n + \frac{n-i}{2}\right) - 1 + k - \left(2n + \frac{n-1}{2} + \frac{n-i}{2}\right) - 1$$

$$= 3k - 2 - i - n - (n-i) - 2n - \frac{n-1}{2}$$

$$= 3k - \frac{9n-1}{2} - 2 = 3k - \left(\frac{9n-1}{2} + \frac{2}{2}\right) - 1 = 3k - \frac{9n+1}{2} - 1$$

ראינו שלכל i מתקיים $b_i(q) \geq 3k - \frac{9n+1}{2} - 1$

אנחנו כבר יודעים מהוכחת טענה 3 שעבור ה φn חלקים האחרונים כל שחקן יקבל לפחות $\frac{\varphi(n\varphi-1)}{2}$

ולכן מתקיים:

$$b_i(\pi) \geq 3k - \frac{9n+1}{2} - 1 + \frac{\varphi(n\varphi-1)}{2} = \frac{6k}{2} - \frac{9n+1}{2} - \frac{2}{2} + \frac{\varphi(n\varphi-1)}{2}$$

$$= \frac{6k - 9n - 1 - 2 + \varphi(n\varphi-1)}{2} = \frac{6(\varphi+3)n - 9n - 3 + \varphi(n\varphi-1)}{2}$$

$$= \frac{6\varphi n + 18n - 9n - 3 + \varphi(n\varphi-1)}{2} = \frac{\varphi^2 n + 6\varphi n + 9n - 3 - \varphi}{2} = \frac{n\left(\varphi^2 + 6\varphi + 9\right) - 3 - \varphi}{2}$$

$$= \frac{n(\varphi+3)^2 - (3+\varphi)}{2} = \frac{(\varphi+3)[n(\varphi+3)-1]}{2} = \frac{\frac{k}{n}(k-1)}{2} = \frac{\frac{(k-1)k}{2}}{n} = \frac{V(k)}{n} \rightarrow b_i(\pi) \geq \frac{V(k)}{n}$$

מש"ל

בס"ד

משפט 2:

אם $k = \varphi n$ ו φ אי-זוגי אז אם n זוגי וכולם בחרו דירוג זהה אזיי בהכרח אין חלוקה פרופורציונלית

הוכחת משפט 2:

בשביל שתהיה חלוקה פרופורציונלית כל משתתף צריך לקבל לפחות

$$\frac{V(k)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\varphi n(\varphi n-1)}{2} = \frac{\varphi(\varphi n-1)}{2}$$

$(\varphi n-1)$ הוא מספר אי-זוגי $\leftarrow$ $\varphi(\varphi n-1)$ הוא מספר אי-זוגי $\leftarrow$

אם הסכום הוא שלם ולפחות $\frac{\varphi(\varphi n-1)}{2}$ אזיי הוא גם לפחות $\frac{\varphi(\varphi n-1)}{2}+\frac{1}{2}$

$$\frac{V(k)}{n} \geq \frac{\varphi(\varphi n-1)}{2}+\frac{1}{2} > \frac{\varphi(\varphi n-1)}{2} = \frac{V(k)}{n} \rightarrow \frac{V(k)}{n} > \frac{V(k)}{n} \rightarrow$$ סתירה

מסקנה:

לא קיימת חלוקה פרופורציונלית במקרה זה.

משפט 3:

תמיד במסגרות המגבלות שלנו תהיה חלוקה קרובה לפרופורציונלית כך שכל שחקן יקבל לפחות $\left\lfloor \frac{V(k)}{n} \right\rfloor$

וניתן יהיה למצוא אותה בסיבוכיות פולינומית

הוכחת משפט 3:

צ"ל $b_i(\pi) \geq \left\lfloor \frac{V(k)}{n} \right\rfloor$

אם מספר המשתתפים אי-זוגי אז ע"פ משפט 1 כבר מתקיים ואם $\frac{k}{n}$ זוגי אזיי ע"פ טענה 3 מתקיים.

אם $\frac{k}{n}$ זוגי אזיי ע"פ טענה 3 מתקיים.

נגדיר את סדר הבחירות הבא q' בדומה ל q מהוכחת משפט 1.

$$q' := (1, 2, \ldots, n, n, n-2, n-4, \ldots, 2, n-1, n-3, n-5, \ldots, 1, n-1, n-3, n-5, \ldots, 1, n, n-2, n-4, \ldots, 2)$$

נגדיר את s סדר הבחירות כמו s מהוכחת משפט 1 וגם עליו נחזור $\frac{\varphi}{2}$ פעמיים

$$\frac{V(k)}{n} = \frac{k(k-1)}{2n} = \frac{(\varphi+3)[(\varphi+3)n-1]}{2}$$

$(\varphi+3)[(\varphi+3)n-1]$ אי-זוגי ולכן $\left\lfloor \frac{V(k)}{n} \right\rfloor = \frac{V(k)}{n} - \frac{1}{2}$

<u>מקרה ראשון i זוגי:</u>

באופן זהה להוכחת משפט 1 גם כאן מתקיים

$$b_i(q') \geq k-i + k - \left(n + \frac{n-i}{2}\right) - 1 + k - \left(2n + \frac{n}{2} + \frac{n-i}{2}\right) - 1$$

$$= 3k - i - 3n - (n-i) - \frac{n}{2} - 2 = 3k - \frac{9n}{2} - 2 \rightarrow b_i(\pi) \geq b_i(q') + b_i(s)$$

$$= 3k - \frac{9n}{2} - 2 + \frac{\varphi(\varphi n - 1)}{2} = \frac{6(\varphi+3)n - 9n - 4 + \varphi(n\varphi - 1)}{2} = \frac{\varphi^2 n + 6\varphi n + 9n - 3 - \varphi}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(\varphi+3)[(\varphi+3)n-1]}{2} - \frac{1}{2} = \frac{V(k)}{n} - \frac{1}{2} = \left\lfloor \frac{V(k)}{n} \right\rfloor \rightarrow b_i(\pi) \geq \left\lfloor \frac{V(k)}{n} \right\rfloor \rightarrow \text{מש"ל}$$

<u>מקרה שני i אי-זוגי:</u>

באופן זהה להוכחת משפט 1 גם כאן מתקיים

$$b_i(q') \geq k - i + k - \left(n + \frac{n}{2} + \frac{n-i-1}{2}\right) - 1 + k - \left(2n + \frac{n-i-1}{2}\right) - 1$$

$$= 3k - i - 3n - (n-i-1) - \frac{n}{2} - 2 = 3k - \frac{9n}{2} - 1 = 3k - \frac{9n}{2} - 2 + 1$$

$$\rightarrow b_i(\pi) \geq \left\lfloor \frac{V(k)}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{V(k)}{n} \right\rceil \rightarrow b_i(\pi) \geq \left\lceil \frac{V(k)}{n} \right\rceil \rightarrow \text{מש"ל}$$

הוכחנו שמתקיים $b_i(\pi) \geq \left\lfloor \frac{V(k)}{n} \right\rfloor$ גם עבור i זוגי וגם עבור i אי-זוגי ולכן **מש"ל משפט 3**

בס"ד

__משפט 4:__

$k = \varphi n$ וגם $1 < \varphi$ וגם $n \geq 4$ זוגי וגם קיימת קבוצה $S \subset N$ כך ש$|S| = \frac{n}{2}$ וגם לכל שני משתתפים ששייכים לS הדירוג שלהם שונה וגם קיים $h \geq 1$ וקבוצה $C_h = \{h, h+1, ..., h + n2 - 1\}$ ופונקציה f חח"ע ועל מהמשתתפים שלא בS לC_h $f : N \setminus S \to C_h$
אזיי בהכרח יש חלוקה פרופורציונלית

__משפט 5:__

יהי $\varphi \neq 3$ עבור 2φ פריטים ו2 משתתפים עם דירוגים שונים חלוקה פרופורציונלית תמיד קיימת וניתן למצוא אותה בקלות

__משפט 6:__

עבור 2 משתתפים ו6 פריטים יש בדיוק ארבעה מקרים שבהם לא קיימת חלוקה פרופורציונלית

__הסבר כללי על משפטים 5-6:__

מכיון שמשפטים אלה מדברים על מקרים מאוד ספציפים המאמר מוכיח אותה ע"י חלוקה לכל המקרים האפשריים
כלי נוסף מענין שמופיע בהוכחות אלה הוא השימוש בh (הציון המינימילי כך שהדירוגים בין המשתתפים שונה).

בס"ד

סיכום:

לסיכום ראינו במאמר כיצד ניתן לחלק בצורה פרופורציונלית פריטים בלתי ניתנים לחלוקה.
כדי להגיע לפרופורציונליות המאמר משתמש בדירוג Borda כשיטת הניקוד לפריטים ולקבוצות.
באופן כללי, הבעיה האם יש חלוקה הוגנת כזו שציון בורדו של כל משתתף עולה על הגבול התחתון של הסכום הכולל חלקי מספר המשתתפים, היא בעיה קשה מבחינה חישובית ניתן לראות זאת גם במאמר
[Positional Scoring Rules for the Allocation of Indivisible Goods]
התייחסות נוספת למקרה של העדפות זהות ניתן לראות במאמר
[A General Elicitation-Free Protocol for Allocating Indivisible Goods]
שם מנסים להתמודד בעזרת תכנות דינאמי
בסופו של דבר המגבלה שכמות הפריטים היא כפולה של כמות השחקנים
מבטיח שכמעט תמיד לא רק שקיימת חלוקה פרופורציונלית אלא שגם יחסית לא דורש זמן ריצה ארוך כדיי למצוא אותה. ברוב ההוכחות במאמר התחילו המהמקרה הגרוע שבו כל ההעדפות זהות ומשם המשיכו למקרים נוספים שבהם יש שינויים בין דירוגיי המשתתפים מה שגורם לזה שכמעט בטוח תהיה חלוקה פרופורציונלית מבוססת על ציוני Borda.
אפשר כמובן לטעון שהמגבלה של חלוקה מאוזנות מגבילה מעט כי למעשה במקרים מסויימים של העדפות זהות חלוקה לא מאוזנת יכולה להיות פרופורציונלית.
למרות זאת קיימות 2 טענות בעד המגבלה.
1. טרנספורמציה לינארית של חלוקות מאוזנות שומרות על הפרופורציונליות, לעומת זאת חלוקות לא מאוזנות לא שומרות על פרופורציונליות בטרנספורמציה לינארית.
2. חלוקה מאוזנת היא כלולה בחלוקות הכלליות ולכן אם קיימת חלוקה מאוזנת פרופורציונלית אז גם קיימת חלוקה באופן כללי פרופורציונלית כי נשתמש באותה חלוקה.
אבל לעומת זאת אם קיימת חלוקה לא מאוזנת פרופורציונלית לא נוכל להתשמש בה כשיש לנו את המגבלה שהחלוקה צריכה להיות מאוזנת.
<u>לסיום מספר שאלות שנשארו פתוחות ורעיונות להמשך המחקר:</u>
1. מציאת חלוקה פרופורציונלית בזמן פולינומי במקרה שיש יותר מ2 משתתפים ו$\frac{k}{n}$ אי-זוגי וכולם דירגו באופן זהה את הפריטים.
2. איך לטפל במצבים שבהם מספר הפריטים אינו כפולה של מספר הסוכנים.
לא ברור אם גם במקרה זה ניתן להשתמש בבחירה לפי סדר.
בכל מקרה. סביר להניח שהגבלות תחום מסוימות עדיין יכולות להבטיח פרופורציונליות, אבל אלה עדיין לא נמצאו.
3. מה יקרה כשנשתמש בפונקציות ניקוד אחרות מציוני Borda
הוכח כבר בעבר במאמר [Saari (1995)] שכלל Borda הוא יחודי בתחום זה.
אבל מה יקרה אם נוסיף מגבלות שונות? אולי הם יוכלו לעזור במקרה של דירוג בשיטה אחרת
4. מעניין יהיה למצוא פתרון לבעיות חלוקה עם מאפיינים שונים של הוגנות למשל "חלוקה ללא קנאה"