Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Робототехника и комплексная автоматизация
КАФЕДРА Системы автоматизированного проектирования (САПР)

@Название работы часть 1@
@Название работы часть 2 (опционально)@

Студент:	Дунайцев Александр Иванович
Группа:	РК6-54Б
Тип задания:	@Тип документа@
Тема:	@Тема работы@

Студент ____________ Дунайцев А. И
подпись, дата

Преподаватель ____________ ____________
подпись, дата Фамилия, И. О.

Москва, 2021

Содержание

1 Тригонометрические ряды Фурье.

1.1 Определение ряда Фурье.

Ряд вида:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k cos(kx) + b_k sin(kx) \quad (a_k, b_k \in R),$$

где $f \in L_2[-\pi, \pi]$ называется тригонометрическим рядом Фурье.

Коэфициенты ряда Фурье находятся по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(kx) dx,$$

Тригонометрический ряд Фурье можно записать в виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k cos(kx) + b_k sin(kx) \quad (a_k, b_k \in R),$$

где $f \in L_2[-\pi, \pi]$. Такая форма записи позволяет увидеть, что коэфициент b_0 может быть произвольным, так как $sin0 = 0$. Эта форма записи окажется удобной при выводе экспоненциальной формы ряда Фурье.

1.2 Комплексная форма записи ряда Фурье.

Представить ряд Фурье можно в комплексной форме. Вывод данной формы необходимо начать с рассмотрения формулы Эйлера:

$$e^{ikx} = cos(kx) + isin(kx).$$

Домножим эту формулу на комплексный коэфициент $\hat{a}_k \in C$.

$$\hat{a}_k e^{ikx} = \hat{a}_k cos(kx) + i\hat{a}_k sin(kx).$$

Разложим, в правой части равенства, комплексный коэфициент $\hat{a}_k$ на вещественную $Re(\hat{a}_k)$ и мнимую $Im(\hat{a}_k)$ части, получим:

$$\hat{a}_k e^{ikx} = Re(\hat{a}_k)cos(kx) + iIm(\hat{a}_k)cos(kx) + iRe(\hat{a}_k)sin(kx) - Im(\hat{a}_k)sin(kx).$$

Теперь, прибавив к обеим частям равенства комплексно сопряженное число $\hat{a}_k^*$, в правой части, по свойству сложения комплексно-сопряженных чисел, сократятся все слагаемые, содержащие i, а остальные слагаеме удвоятся.

$$\hat{a}_k e^{ikx} + \hat{a}_k^* e^{ikx} = 2Re(\hat{a}_k)cos(kx) - 2Im(\hat{a}_k)sin(kx).$$

Суммирование обеих частей равенства по $k = 0, ..., n$, приводит к следующему выражению:

$$\sum_{k=0}^{n}(\hat{a}_k e^{ikx} + \hat{a}_k^* e^{ikx}) = \sum_{k=0}^{n}[2Re(\hat{a}_k)cos(kx) - 2Im(\hat{a}_k)sin(kx)].$$

Если записать $\hat{a}_{-k} = \hat{a}_k^*$, то можно перейти к выражению предыдущего равенства к виду куда более похожему на тригонометрический ряд:

$$\sum_{k=-n}^{n}\hat{a}_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}[2Re(\hat{a}_k)cos(kx) - 2Im(\hat{a}_k)sin(kx)]. \qquad (1)$$

Очевидна теперь и связь коэфициентов a_k и b_k.

$$a_k = 2Re(\hat{a}_k),$$

$$b_k = -2Im(\hat{a}_k),$$

где $k = 0, ..., n$.

Тригонометрический ряд игногда называют тригономитрическим полиномом. Это название мотивировано экспоненциальной формой записи. Действительно, если записать $e^{ikx} = z^k$, тогда можно перейти к форме полинома.

$$\sum_{k=-n}^{n}\hat{a}_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\hat{a}_k z^k.$$

2 Дискретное преобразование Фурье.

Тригонометрическими полиномами можно приближать как непрерывные, так и дискретные данные.

2.1 Лемма о сумме триногометрического ряда.

3 Литература