

Министерство цифрового развития ФГБОУ ВО “СибГУТИ”

Основы систем мобильной связи

Отчет

Практическое занятие 1

Вариант 1

Временная и частотная формы сигналов.
Преобразования Фурье. Дискретизация
сигналов.

Выполнил студент группы ИА-231
Готфрид Матвей

г. Новосибирск

1. Цель занятия

Получить представление о формах радиосигналов, их частотном и временном представлении, а также о преобразованиях Фурье и аналогоцифровых преобразованиях сигналов, частоте дискретизации сигналов

2. Краткие теоретические сведения

Системы мобильной связи представляют собой сети связи, которые обеспечивают передачу голосовой информации, текстовых сообщений, данных

и других типов информации между мобильными устройствами, такими как

смартфоны, планшеты и ноутбуки, и сетью оператора связи. Эти системы

позволяют пользователям оставаться подключенными к сети и обмениваться

информацией в движении, находясь в различных местах.

Ключевыми устройствами, взаимодействующими между собой на радиоинтерфейсе, являются базовые станции (БС) и мобильные абонентские

терминалы (АТ), представляющие собой совокупность приемопередающего

оборудования, а также специализированного программного обеспечения (ПО).

Важным аспектом при взаимодействии этих устройств между собой является необходимость формирования, передачи и приема радиосигналов –

электромагнитных колебаний. Антенны – это устройства, которые непосредственно преобразуют электрическую энергию в электромагнитные

колебания или радиосигналы.

В рамках данного занятия студентам предстоит разобраться в следующих

аспектах:

- что такое радиосигналы;
- частотное и временное представление сигналов и как помогают преобразования Фурье переходить из одной области в другую;
- как аналоговые сигналы записываются и обрабатываются цифровыми устройствами связи или что такое АЦП (ADC);
- что такое частота дискретизации сигналов (sample rate);
- что такое отсчет сигнала (sample);
- минимальный набор математического аппарата, необходимый для

выполнения преобразований Фурье;

- что такое спектр радиосигналов и пр.

Начнем с радиосигналов. Сигнал – это некоторый физический процесс,

несущий в себе информацию. На рисунке 1 показан пример зависимости

амплитуды (напряжения) радиосигнала от времени – непрерывный, аналоговый

сигнал. Вся современная техника радиосвязи, особенно мобильной, начиная со

2-го поколения – цифровая. Это значит, что элементы памяти таких устройств

состоят из триггеров, которые могут принимать лишь 2 состояния – 0 или 1.

Эти триггеры группируются в регистры, обычно по 8 бит (именно поэтому на

2

языке C/C++ нельзя создать переменную меньше 8 бит, так как это минимальный объем памяти, который можно выделить под хранение переменных или данных).

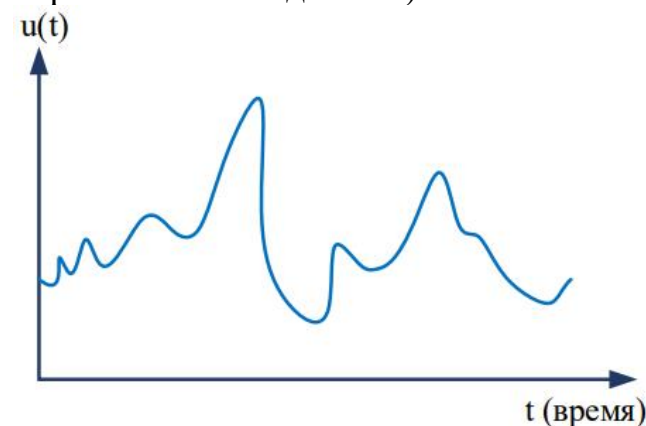


Рис. 1. Пример зависимости амплитуды (напряжения) радиосигнала от времени

Закономерен вопрос, а как работать цифровому устройству с сигналом, представленным на рисунке 1? Как разложить его по ячейкам памяти для последующей обработки и извлечения из него информации?

Ответом на данный вопрос является процедура оцифровки аналогового сигнала или Аналого-цифровое преобразование (АЦП) – это элемент приемника радиосигнала, на вход которого поступает входное напряжение (например, как на рисунке 1), а на выходе – временные отсчеты данного сигнала – цифровые значения дискретизированной амплитуды сигнала, которые уже можно «сложить» в регистры памяти, например, в виде `int16` или `float` значений, как показано на рисунке 2. То есть задача АЦП – превратить аналоговый сигнал в цифровой для последующей обработки цифровым устройством с целью извлечения из него данных.

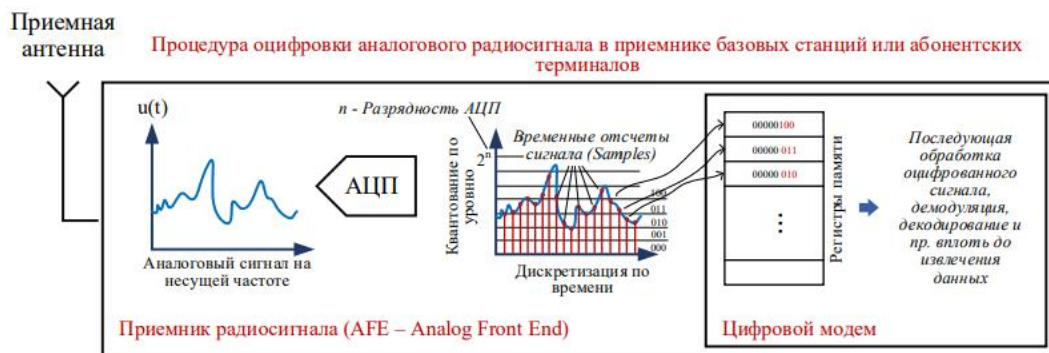


Рис. 2. Аналого-цифровое преобразование радиосигнала.

Таким образом, АЦП выполняют несколько функций: временная дискретизация («временная нарезка сигнала»), квантование по уровню (представление сигнала конечным числом уровней, округление его точных значений), кодирование (упаковка выхода АЦП с заданной разрядностью в выделенные ячейки памяти, размер которых кратен восьми). АЦП характеризуется следующими параметрами:

- разрядность АЦП – число бит, которым кодируется напряжение сигнала;
- частота дискретизации, задаваемая опорным генератором (скорость «нарезки» сигнала);
- диапазон входного сигнала – минимальные и максимальные значения напряжения сигнала на входе АЦП, при котором АЦП работает корректно;
- передаточная характеристика – зависимость числового эквивалента выходного двоичного кода от величины аналогового сигнала, имеет вид ступенчатой функцией.

АЦП может вносить искажения в сигнал в случае нелинейности его передаточной характеристики. Кроме того, стабильность опорного генератора, отвечающего за «нарезку» (дискретизацию) сигнала в строго определенные моменты времени, тоже порой может вызывать нарекания и приводить к тому, что отсчеты будут брать не совсем в предполагаемые моменты времени. Это вызывает джиттер – фазовый шум. Такой шум оказывает существенное влияние на быстро изменяющийся сигнал (с высокой частотой дискретизации, в широкой полосе частот).

Цифро-аналоговое преобразование (ЦАП) решает обратную задачу: на вход устройства подаются цифровые отсчеты, которые затем преобразуются в напряжение. Таким образом формируется ступенчатый и непрерывный сигнал, который затем может быть сглажен фильтром нижних частот.

Математические основы ЦОС

Дельта-функция

Основополагающим понятием в цифровой обработке сигналов (ЦОС) является дельта-функция, изображенная на рисунке 3, интегрируя которую на бесконечности, можно получить 1 (1.1). Рассмотрим некоторые полезные для дальнейших вычислений свойства этой функции. Во-первых, сдвиг функции по времени – рисунок 1 и выражение (1.2), а также стоит обратить внимание на произведение двух дельта-функций в 0 и в каком-то другом моменте времени, интеграл которого будет равен 0 (1.3).

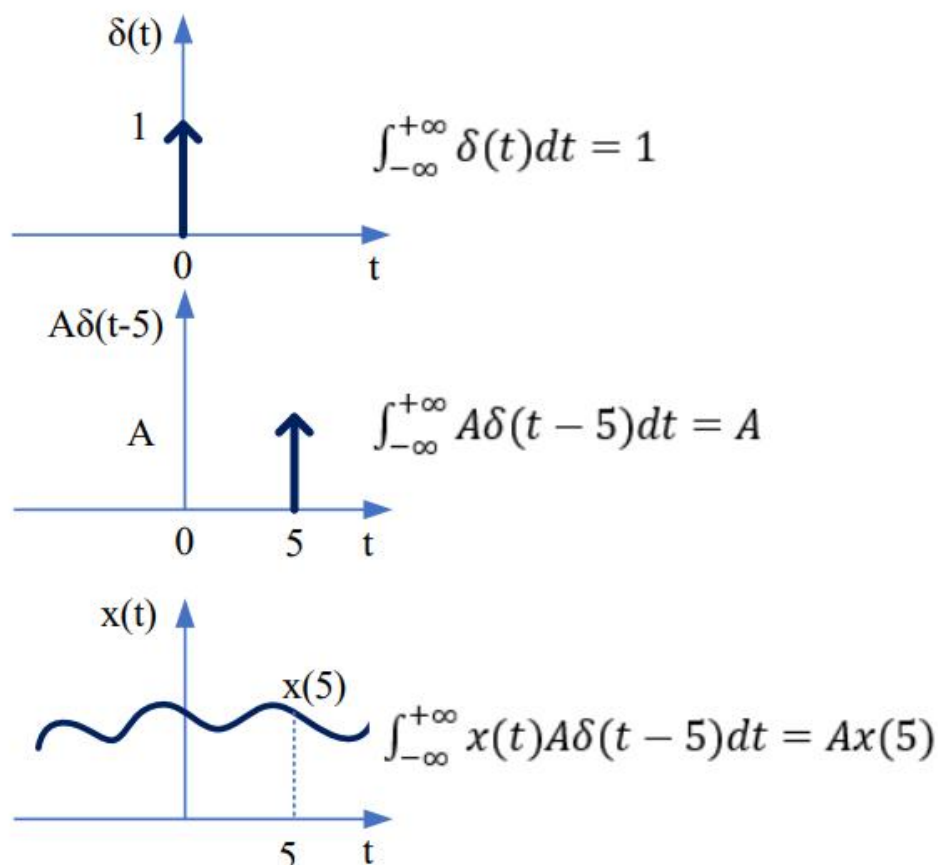


Рис. 3. Дельта-функция.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \quad (1.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\delta(t-5)dt = A \quad (1.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\delta(t)\delta(t-5)dt = 0 \quad (1.3)$$

Если взять интеграл произведения непрерывной функции $x(t)$ и дельта-функции, например в точке $t=5$, то он будет равен произведению значения функции $x(t)$ в $t=5$ на множитель, стоящий перед дельта-функцией (1.4).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)A\delta(t-5)dt = A \cdot x(5) \quad (1.4)$$

Это становится очевидным, если взглянуть на рисунок 3. Функция $A\delta(t-5)$ принимает ненулевое значение лишь в $t=5$. То есть при перемножении ее на $x(t)$, получится $A \cdot x(5)$.

Сумма дельта-функций (1.5) показана на рисунке 4:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT). \quad (1.5)$$

И еще один важный нюанс, касающийся дельта-функций – результат преобразования Фурье (позже рассмотрим подробнее) суммы дельта-функций – это также сумма дельта-функций (1.6). Прямое преобразование Фурье используется для перехода от временной к частотной форме сигнала.

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \overset{\text{ПФФ}}{\longleftrightarrow} P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad (1.6)$$

где ω_s – это частота дискретизации, равная $\frac{2\pi}{T}$.

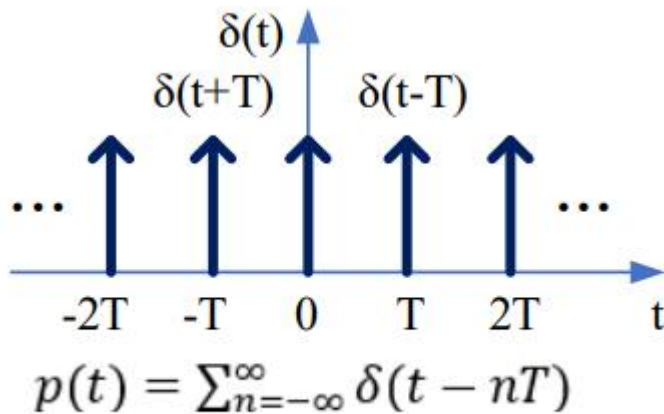


Рис. 4. Сумма дельта-функций.

В данном разделе столь пристальное внимание уделяется дельтафункциям, так как они используются в процессе оцифровки аналоговых сигналов в ходе временной дискретизации сигналов (выборка отсчетов сигналов). На рисунке 5 представлена процедура временной дискретизации аналогового сигнала в ходе АЦП. $x(t)$ – это непрерывный аналоговый сигнал, который требуется записать в цифровое устройство для последующей обработки. Для этого $x(t)$ перемножается с дельта-функциями, равномерно распределенными по оси времени и расстояние между которыми зависит от частоты дискретизации (или $= 1/(2 \cdot f_s)$).

На рисунке 5 для примера частота дискретизации выбрана равной 20 отсчетам в секунду ($1/T = 1/0.05 = 20$ Гц). Отсчеты отстоят друг от друга на величину $T=0.05$ секунд. Это означает, что чтобы сохранить/записать одну секунду такого сигнала нам потребуется выделить $20 \cdot$ (количество байт, занимаемых одним отсчетом) байт памяти. И речь не просто про память цифровых устройств, но и про требования к скорости обработки таких массивов данных, ведь одно дело, когда на обработку поступает 20 байт в секунду, а другое – 1 гигабайт. Разумеется, разработчики таких систем и ПО для них заинтересованы сохранять минимальное необходимое количество отсчетов для последующей обработки.

Прежде всего непрерывный сигнал нужно дискретизировать по времени – разбить ось времени на промежутки равной длины и сохранить значения амплитуд в эти моменты времени. Но закономерен вопрос – а как часто нужно брать эти отсчеты, чтобы не потерять данные, содержащиеся в этом сигнале при его дальнейшем восстановлении, какой должна быть частота дискретизации (количество отсчетов в секунду). Ответом на этот вопрос является теорема Котельникова (или Найквиста): непрерывный сигнал с ограниченным спектром можно точно восстановить по его дискретным отсчетам, если они были взяты с частотой дискретизации, превышающей максимальную частоту сигнала минимум в два раза.

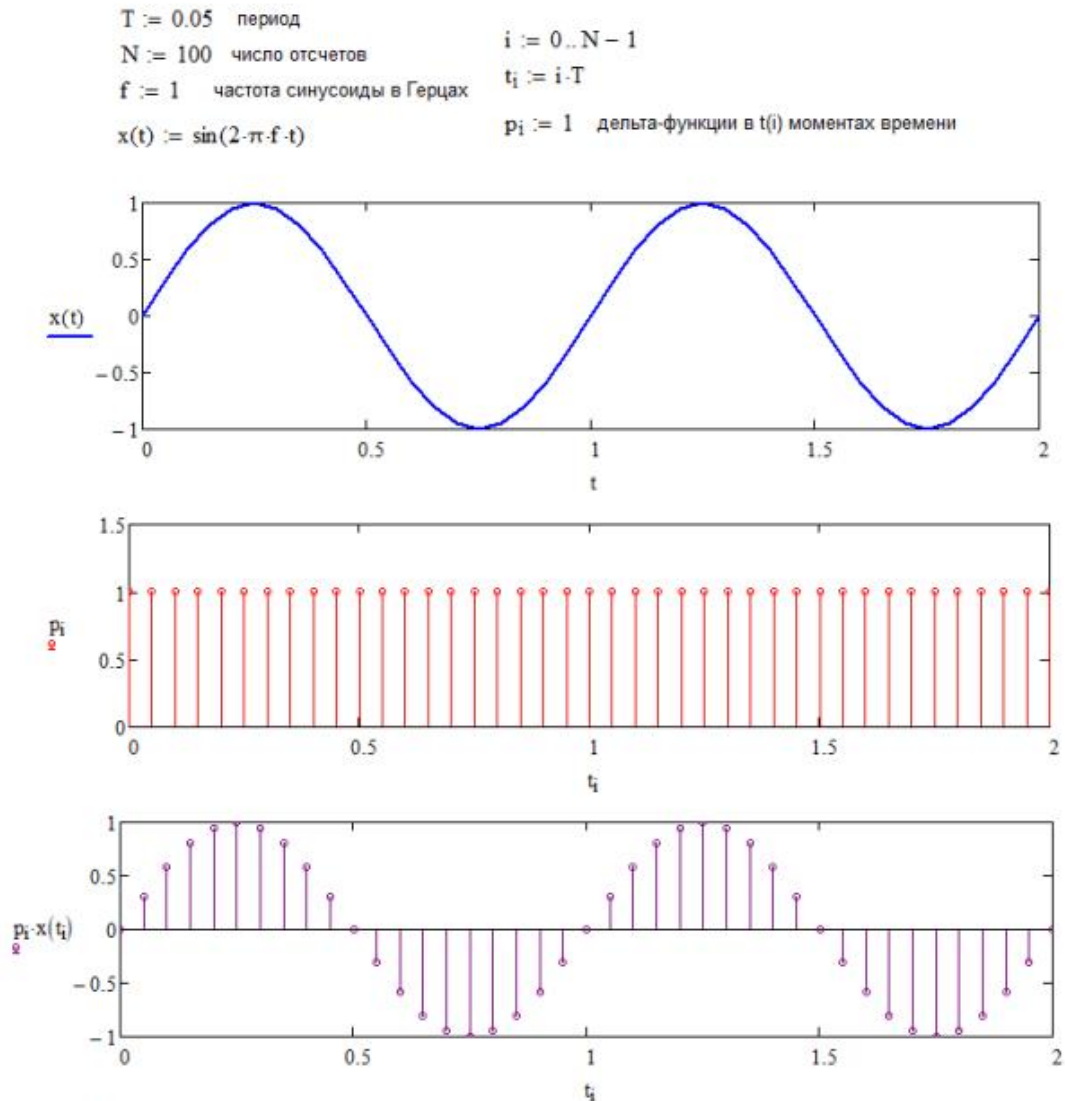


Рис. 5. Процедура временной дискретизации аналогового сигнала в ходе АЦП.

Рассмотрим на примере, что произойдет, если частота дискретизации $\omega_s = 2\pi/T$ будет выбрана меньшей, чем требуется в соответствии с теоремой Котельникова (рисунок 6). Справа показаны спектры временных сигналов, полученные путем выполнения прямого преобразования Фурье (ППФ) над временными отсчетами.

Видно, что, если дискретизация выполняется недостаточно быстро, результирующая форма сигнала существенно искажается в частотной области, и соответственно во временной. Такой сигнал будет невозможно корректно восстановить.

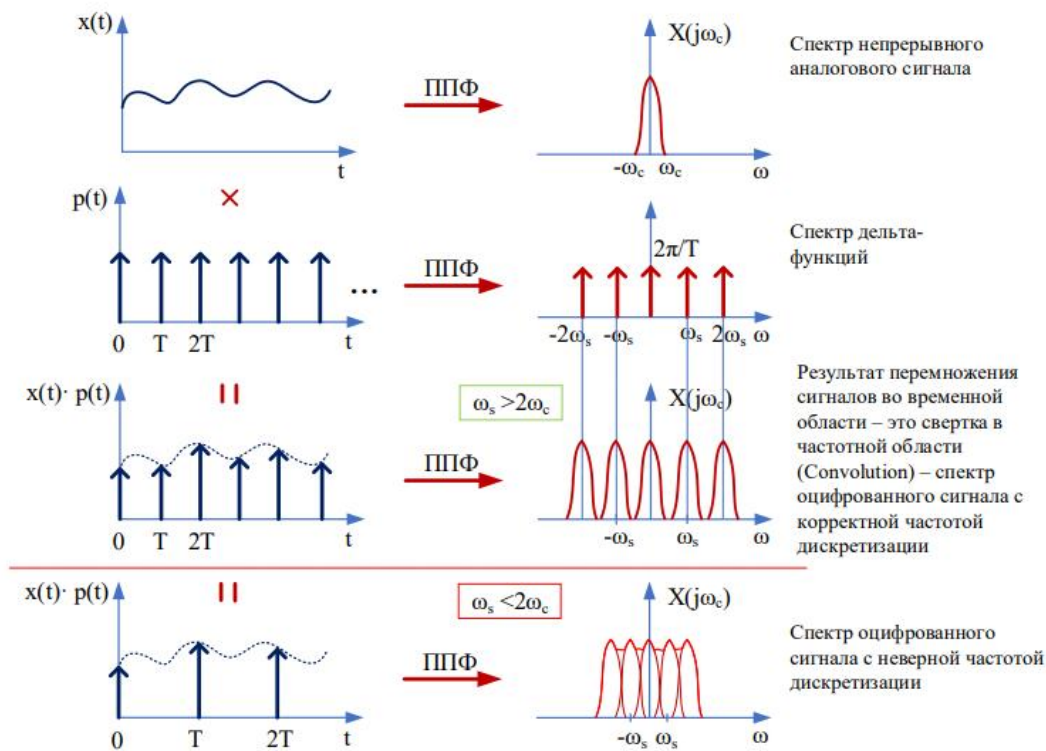


Рис. 6. Процедура временной дискретизации аналогового сигнала в ходе АЦП.

Итак, в результате был получен дискретный сигнал (1.7):

$$x[n] = x(t)|_{t=nT} = x(nT), \quad (1.7)$$

где n – номер дискретного отсчета.

Преобразования Фурье

Важнейшим утверждением для цифровой обработки сигналов стало утверждение математика Ж.Б.Фурье о том, что любой сколь угодно сложный сигнал можно представить в виде суммы простых сигналов, например, синусоид. В самом деле, если нажать на клавишу фортепиано, мы услышим какой-то простой звук, на определенной частоте, но при одновременном нажатии нескольких клавиш, звуки суммируются и получается более сложное звучание. Такая же логика применима к сигналам, используемым в радиосвязи, достаточно сложным, но все же поддающимся декомпозиции на сумму простых колебаний.

Основываясь на этой логике, математические преобразования Фурье позволяют переключаться между различными эквивалентными представлениями сигналов – временным и частотным. Однако, для простых сигналов не составляет труда перейти от временной к частотной форме. Рассмотрим для примера периодические функции синуса и косинуса и их частотное представление. Для начала вспомним, что данные функции можно записать в комплексном виде следующим образом (тождества Эйлера):

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}); \sin(x) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}), \quad (1.8)$$

Если мы заменим аргумент x на $2\pi f t$, то получим:

$$\cos(2\pi f t) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f t} + e^{-j2\pi f t}); \sin(2\pi f t) = \frac{1}{2j}(e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t}), \quad (1.9)$$

Также можно заметить, что

$$\frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}j = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (1.10)$$

Данные преобразования (1.8)-(1.10) позволяют увидеть, что функции

синуса и косинуса, состоят их суммы/разности двух радиус-векторов, вращающихся со скоростью/частотой в противоположных направлениях (направление вращения определяется знаком перед частотой сигнала). Попробуем изобразить данные сигналы во временной и частотной областях (рисунок 7).

В частотной области можно отобразить зависимость амплитуды от частоты сигналов. В нашем случае у обоих сигналов есть две компоненты на

частотах f и $-f$, с амплитудами, равными $\left(\frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2}\right) = 1/2$, которые показаны в виде дельта-функций. Если изображать лишь зависимость амплитуды от частоты, то может показаться, что сигналы идентичны, но ведь очевидно, что они отличаются по начальной фазе. Поэтому для корректного представления необходимо дополнять частотное представление еще и зависимостью начальной фазы от частоты (фазовый спектр).

Обратите еще раз внимание на наличие отрицательных частот в спектрах сигнала. Отрицательная частота не имеет физического смысла, лишь математический – показывает на направление вращения вектора по часовой стрелке (отрицательное приращение угла).

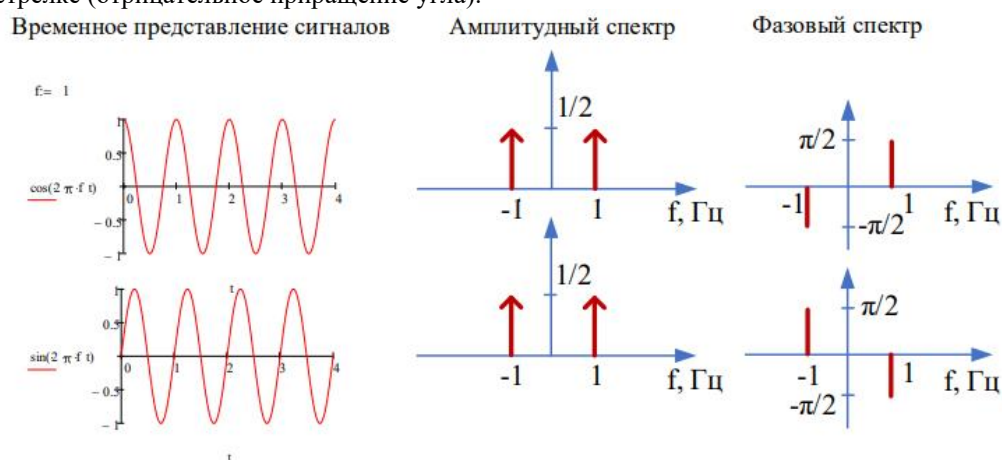


Рис. 7. Временное и частотное представление периодических сигналов $\cos(2\pi ft)$ и $\sin(2\pi ft)$.

Если сравнить спектры периодических сигналов на рисунке 7 со спектрами реальных сигналов на рисунке 6, то можно сделать предположение, что просуммировав некоторое число синусоид с различными параметрами (частотами, амплитудами и фазами) можно получить любой сколь угодно сложный сигнал. Именно на этой идее и построены преобразования Фурье, которые будут рассмотрены ниже.

Задача прямого преобразования Фурье (ППФ) – получить частотное представление радиосигнала, имея его временные значения. И наоборот – обратное преобразование Фурье (ОПФ), зная частотную характеристику сигнала, восстанавливает его временной вид. Познакомиться более детально с преобразованиями Фурье можно и нужно в [1-3].

Существуют разновидности преобразования Фурье, называемые быстрым прямым преобразованием Фурье (БППФ или FFT) и обратным быстрым преобразованием Фурье (ОБПФ или IFFT), которые, как правило, чаще используются в цифровой обработке сигналов, благодаря меньшим вычислительным затратам на их осуществление. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье основываются на том, что в вычислениях есть много периодически повторяющихся значений (в силу периодичности функций синуса и косинуса). БПФ группирует слагаемые с одинаковыми множителями, существенно уменьшая число умножений за счет исключения повторных вычислений. В результате быстрое действие БПФ может в сотни раз превосходить быстрое действие стандартного алгоритма.

БПФ и ОБПФ, используемые в модемах мобильных устройств, это прежде всего преобразования дискретного во времени сигнала, базирующиеся на алгоритме Кули-Тьюки, при котором время вычисления для N отсчетов будет порядка $N \log_2 N$. Количество элементов (отсчетов временного сигнала, например), подаваемое на вход такой функции, должно быть равно $N=2^k$, где $k=0,1,\dots,\infty$.

Уравнение для ППФ имеет вид (1.8):

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi \left(x \frac{n}{N}\right)}, \quad (1.8)$$

где N – размерность преобразования Фурье, $F(x)$ – сигнал в частотной области и $f(n)$ – дискретизированный сигнал во временной области.

ОПФ имеет вид (1.9):

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x) e^{j2\pi \left(x \frac{n}{N}\right)}. \quad (1.9)$$

И еще один немаловажный факт, можно обратить внимание на то, что на вход преобразования Фурье могут идти временные отсчеты в комплексной форме и не всегда понятно, откуда появились комплексные числа, если временной сигнал выглядит как что-то вещественное. Если вкратце, то перед АЦП может стоять квадратурный демодулятор, домножающий вещественный входной сигнал на функции синуса и косинуса и выдавая на вход АЦП мнимую и реальную составляющую сигналов, с которыми и работает АЦП. Подробнее это рассматривается в курсе «Математические основы цифровой обработки сигналов» и в статьях [4-5], обязательных к прочтению для выполнения задания.

Выполнение работы.

Исходная функция:

$$y(t) = 2 \sin \left(2\pi f t + \frac{\pi}{6} \right),$$

$f = 5$

Запишем ее в матлаб

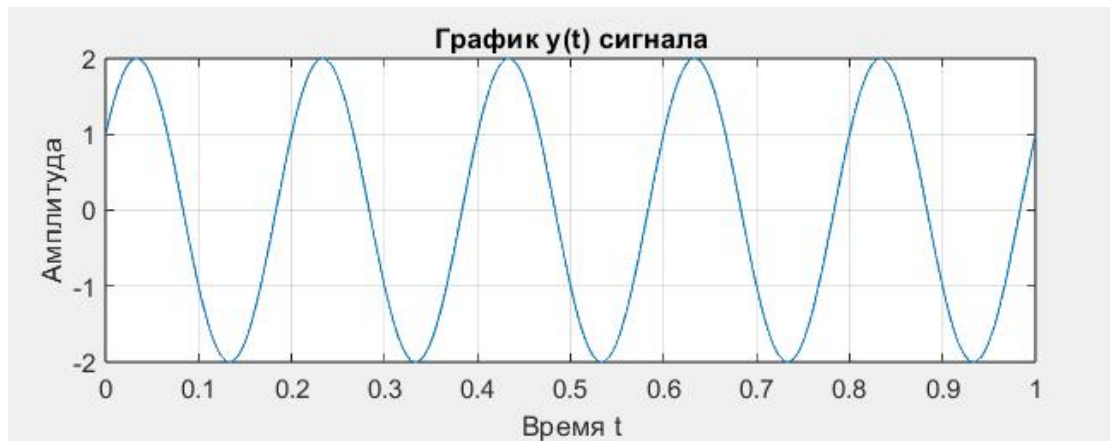
```
fs = 1000;
f = 5;
t = 0:1/fs:1;

y = @(t) 2 * sin(2 * pi * f * t + (pi / 6));

%% График сигнала
subplot(2, 1, 1);
plot(t, y(t));
xlabel("Время t");
ylabel("Амплитуда");
grid on;
title("График y(t) сигнала");
```

Определим временной массив t от 0 до 1 с шагом 0.001 (1000 точек)

Построим график функцией `plot`



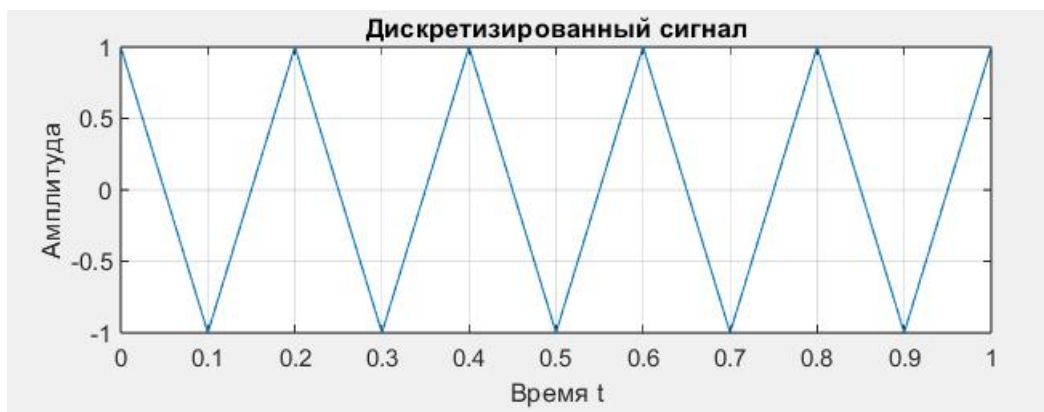
Далее определим максимальную частоту и минимальную необходимую частоту дискретизации по теореме Котельникова. Так как частота синусоиды равна 5 Гц, максимальная частота в спектре сигнала тоже будет равна 5 Гц. Согласно теореме Котельникова, для корректной оцифровки сигнала необходимо, чтобы частота дискретизации была в два раза больше максимальной частоты спектра. Таким образом, минимальная частота дискретизации составила $2 * 5 = 10$ Гц

Оцифруем сигнал с полученной частотой дискретизации

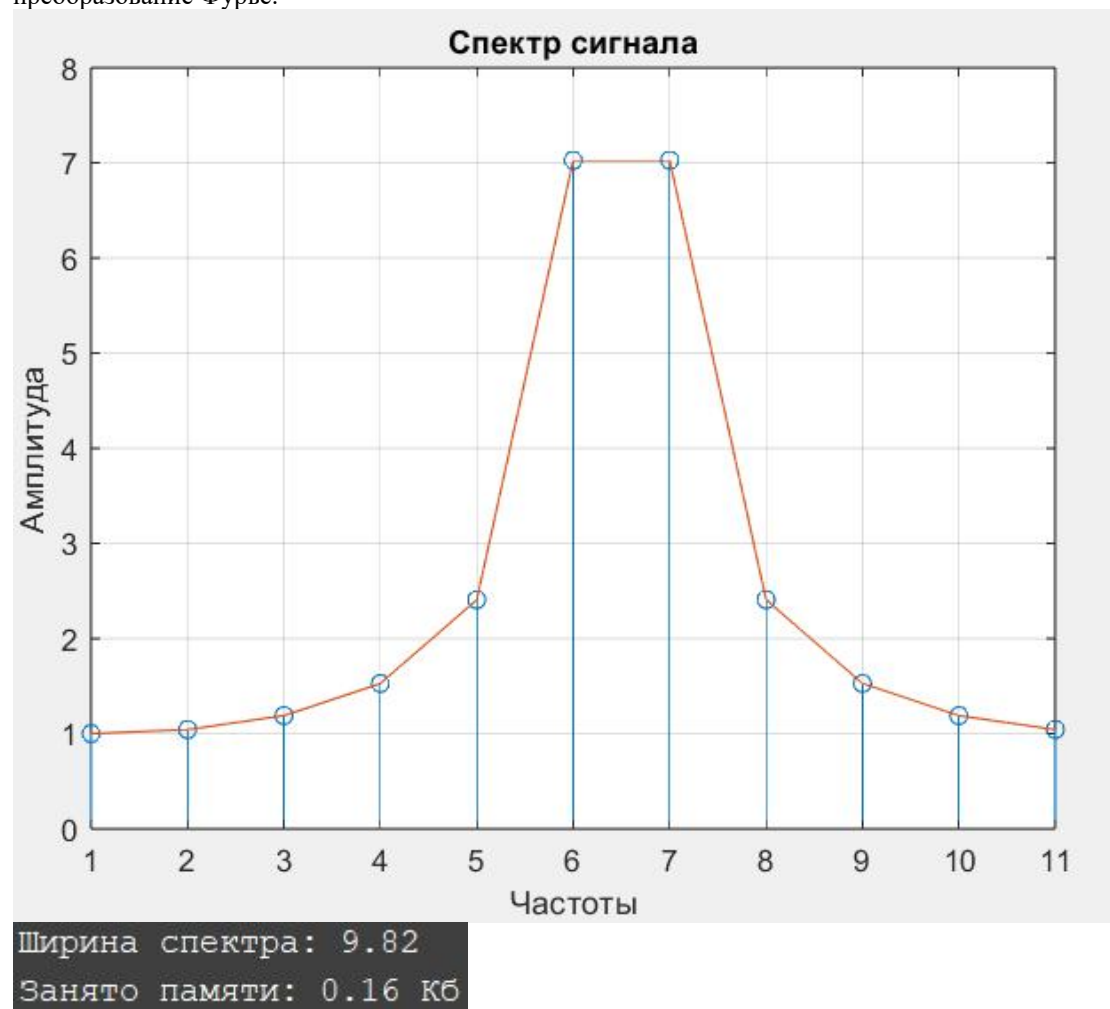
```
%% Минимальная частота дискретизации по теореме Котельникова
Fs = 2 * f;
t = 0:1/Fs:1;

%% График дискретизированного сигнала
samples = y(t);
subplot(2, 1, 2);
plot(t, samples);
xlabel("Время t");
ylabel("Амплитуда");
xticks(t);
grid on;
title("Дискретизированный сигнал");
uiwait;
```

Оцифровка проводилась с частотой 10 Гц, которая была выбрана по теореме Котельникова. Полученный дискретный сигнал был визуализирован на графике.



Для анализа ширины спектра оцифрованного сигнала было выполнено дискретное преобразование Фурье.

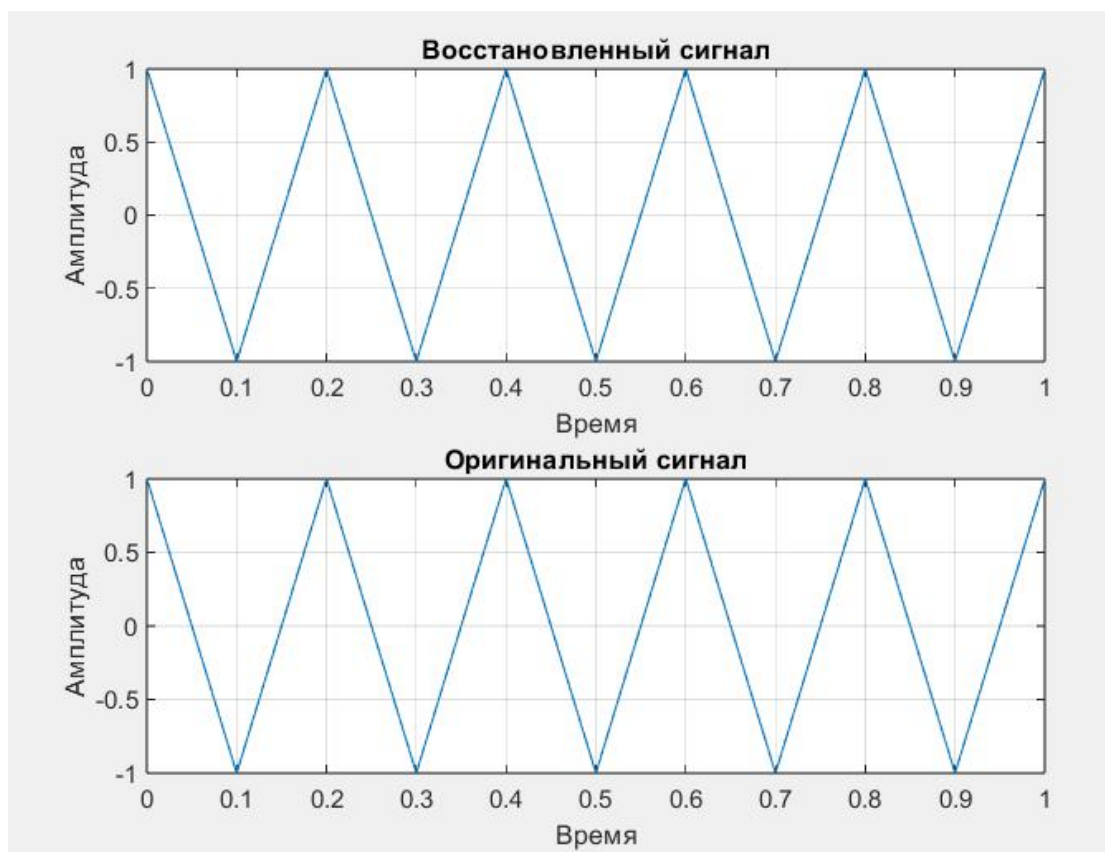


Восстановление аналогового сигнала из дискретных точек было выполнено методом обратного преобразования Фурье

```

%% Восстановленный сигнал
restored_F = ifft(F);
subplot(2, 1, 1);
plot(t, restored_F);
xlabel('Время');
ylabel('Амплитуда');
title('Восстановленный сигнал');
grid on;
subplot(2, 1, 2);
plot(t, samples);
xlabel('Время');
ylabel('Амплитуда');
title('Оригинальный сигнал');
grid on;
uiwait;

```



Для улучшения качества восстановления сигнала частота дискретизации была увеличена в 4 раза, до 40 Гц. Оцифровка с новой частотой позволила получить более точные отсчеты сигнала

```
%% Увеличим частоту дискретизации в 4 раза
```

```
Fs = 4 * 2 * f;
```

```
t = 0:1/Fs:1;
```

```
samples = y(t);
```

```
t_orig = 0:1/fs:1;
```

```
subplot(2, 1, 1);
```

```
plot(t_orig, y(t_orig));
```

```
xlabel("Время t");
```

```
ylabel("Амплитуда");
```

```
grid on;
```

```
title("График  $y(t)$  сигнала");
```

```
subplot(2, 1, 2);
```

```
plot(t, samples);
```

```
xlabel("Время t");
```

```
ylabel("Амплитуда");
```

```
xticks(t);
```

```
grid on;
```

```
title("Дискретизированный сигнал");
```

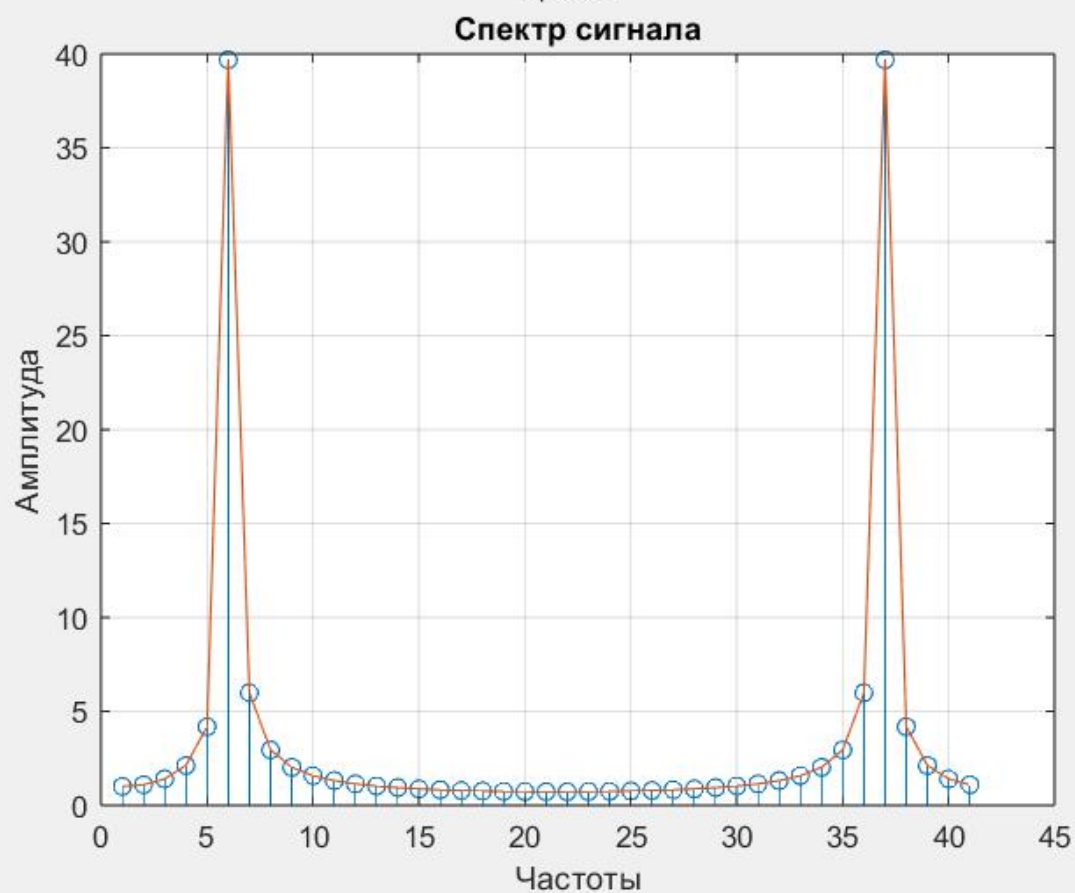
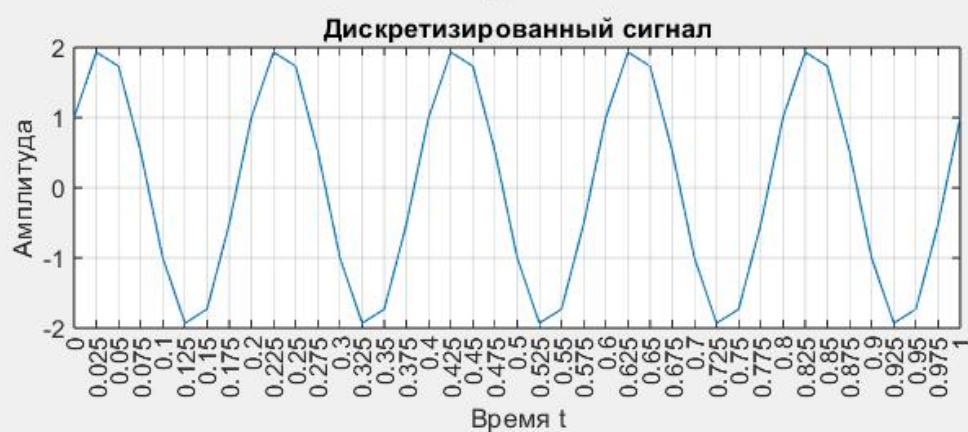
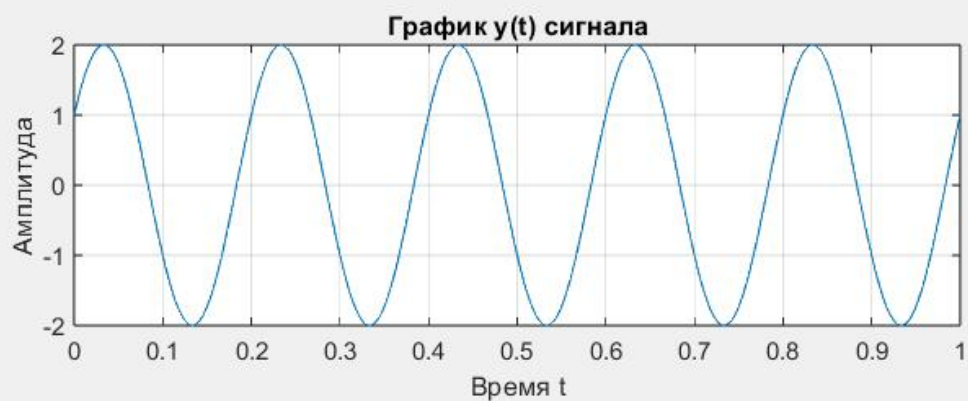
```
uiwait;
```

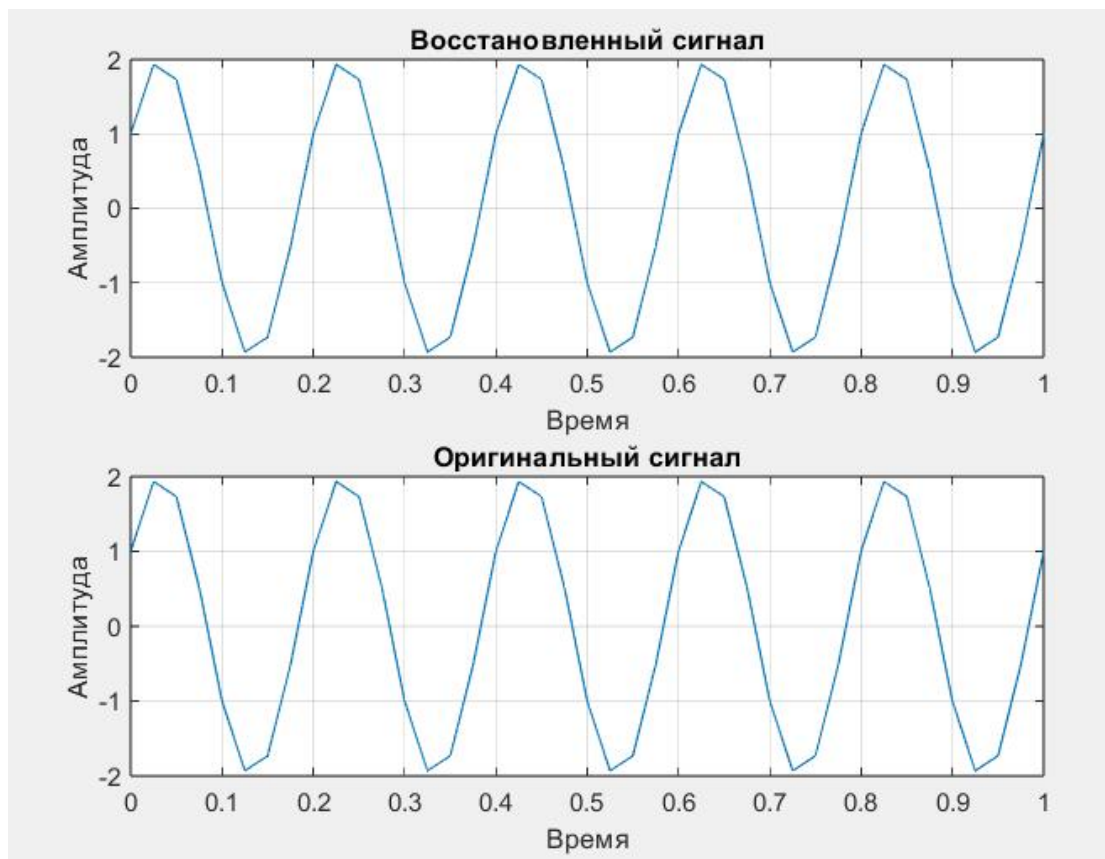


```
F = fft(samples);
stem(abs(F));
hold on;
plot(abs(F));
hold off;
xlabel("Частоты");
ylabel("Амплитуда");
grid on;
title("Спектр сигнала");
uiwait;

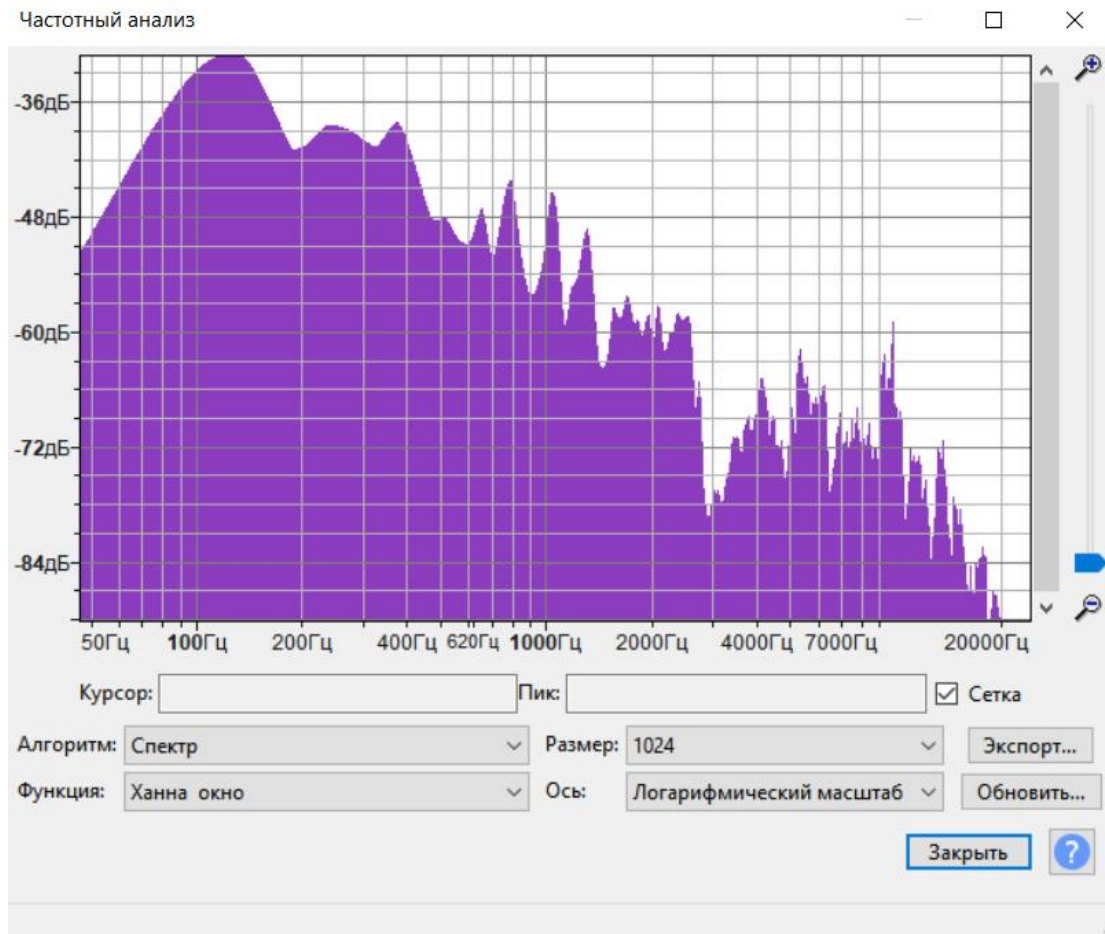
fprintf("Ширина спектра: %.2f\n", max(abs(F(:))));
fprintf("Занято памяти: %.2f Кб\n", whos('F').bytes / 1024);

restored_F = ifft(F);
subplot(2, 1, 1);
plot(t, restored_F);
xlabel('Время');
ylabel('Амплитуда');
title('Восстановленный сигнал');
grid on;
subplot(2, 1, 2);
plot(t, samples);
xlabel('Время');
ylabel('Амплитуда');
title('Оригинальный сигнал');
grid on;
uiwait;
```



Я записал голосовой файл, посмотрим его спектр



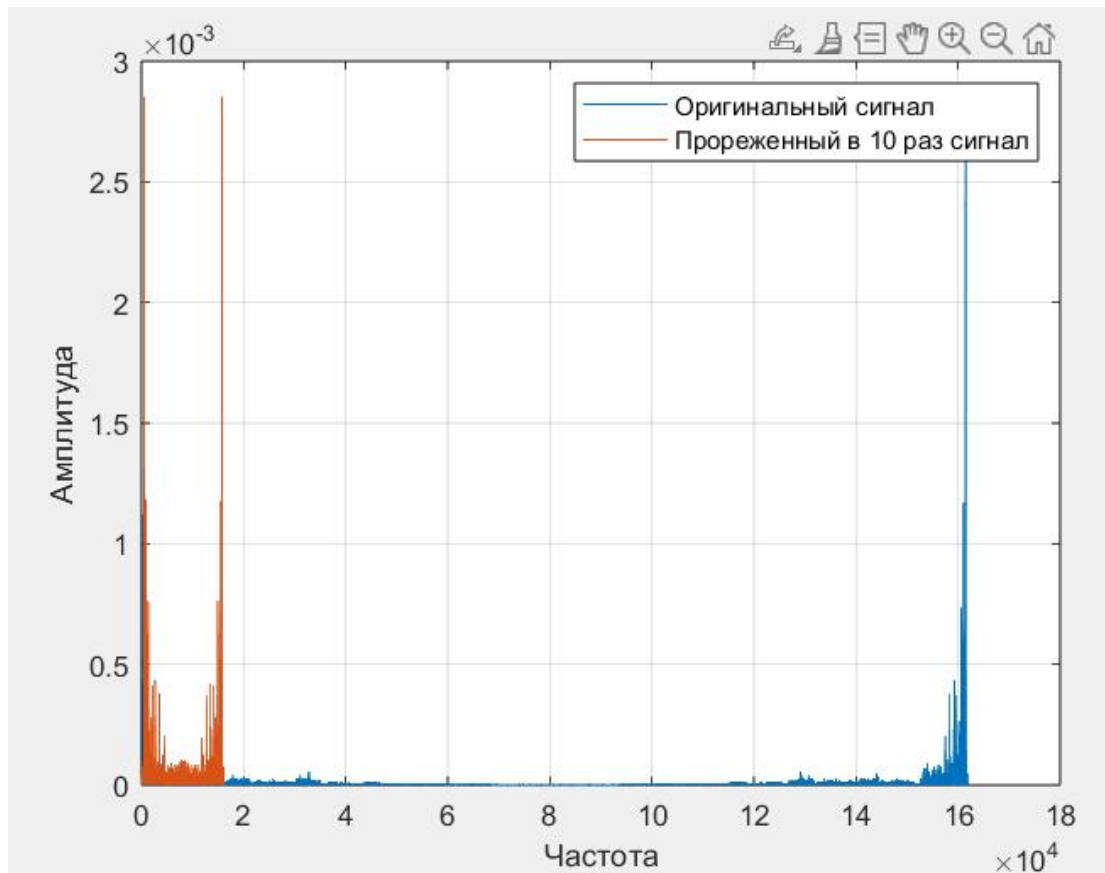
С использованием встроенной функции MATLAB был считан аудиофайл. Частота дискретизации файла составила 48000 Гц.

```
%% Работа с аудиофайлом
[y_sound, Fs] = audioread('voice.mp3');
fprintf('Расчет частоты дискретизации = %.2f\n', length(y_sound) / 3.384);
fprintf('Реальная частота дискретизации = %.2f\n', Fs);
```

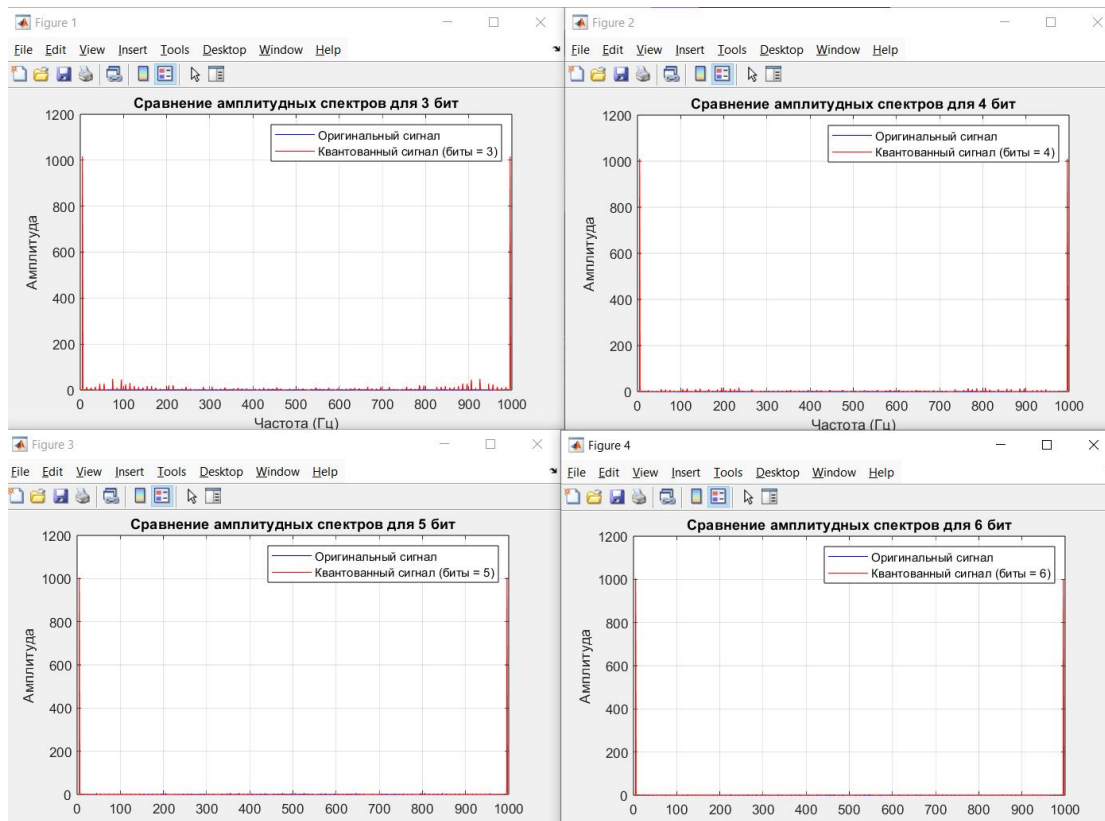
```
Расчет частоты дискретизации = 47843.97
Реальная частота дискретизации = 48000.00
```

Массив аудиофайла был прорежен с использованием функции `downsample`. Полученный сигнал был визуализирован и воспроизведен с меньшей частотой дискретизации. При этом наблюдалось заметное снижение качества звука, что подтверждает важность правильного выбора частоты дискретизации.

Для прореженного сигнала было выполнено дискретное преобразование Фурье, что позволило проанализировать его спектр.



Был проведен анализ влияния разрядности АЦП на спектр сигнала. Для этого значения амплитуд временных отсчетов были квантованы с разными разрядностями: 3, 4, 5 и 6 бит. Результаты показали, что при уменьшении разрядности наблюдается значительное искажение спектра сигнала.



Средняя ошибка квантования для 3 бит: 0.1275
 Средняя ошибка квантования для 4 бит: 0.0617
 Средняя ошибка квантования для 5 бит: 0.0306
 Средняя ошибка квантования для 6 бит: 0.0147

Ответы на контрольные вопросы

1. Прямое и обратное преобразование Фурье используются для анализа и преобразования сигналов между временной и частотной областями. Прямое преобразование Фурье позволяет разложить сигнал на набор синусоидальных компонент, каждая из которых характеризуется частотой, амплитудой и фазой. Обратное преобразование Фурье позволяет восстановить оригинальный сигнал из частотных компонент.
2. Ошибка квантования возникает при округлении аналогового сигнала до ближайшего уровня дискретных значений в процессе оцифровки. Она связана с тем, что бесконечно точный аналоговый сигнал представляется конечным числом битов. Ошибка дискретизации возникает при недостаточной частоте выборки (дискретизации) сигнала. Согласно теореме Котельникова-Шеннона, сигнал должен дискретизироваться с частотой, по крайней мере, вдвое превышающей максимальную частоту сигнала, иначе возникает потеря информации (эффект наложения спектров).
3. Для оцифровки голоса с качеством, приемлемым для передачи речи, требуется 12-битный АЦП, что даёт разрешение в 4096 уровней квантования. Для оцифровки голоса с высоким качеством (например, для музыки) обычно используется 16-битный АЦП (разрешение в 65536 уровней).
4. Математическое получение дискретных отсчётов непрерывного сигнала осуществляется через выборку сигнала в определённые моменты времени, что выражается как:

$$X(n) = x(t)$$

Заключение и выводы

В ходе выполнения работы были решены задачи по генерации, дискретизации, восстановлению и спектральному анализу сигнала. Основные выводы:

Для качественного восстановления сигнала требуется выбор правильной частоты дискретизации, соответствующей теореме Котельникова.

Увеличение частоты дискретизации приводит к улучшению качества восстановленного сигнала.

Качество восстановленного сигнала зависит от используемого метода интерполяции.

Разрядность АЦП существенно влияет на спектральные характеристики сигнала: с уменьшением разрядности увеличиваются искажения сигнала.