卡特兰数

涂凯南

2023 年 2 月 15 日

1 折线图

折线图在组合数学中是作为工具的形式存在的，我们有必要对其进行一定的了解。

1.1 定义

在直角坐标系中，设直角坐标系 A 上有 $A_0(a_0,b_0),A_n(a_n,b_n)(a_n > a_0)$ 为两个格点，从 $A_0(a_0,b_0)$ 到 $A_n(a_n,b_n)$ 的连线由最小格点正方形的对角线首尾相连而成，且平行于任何 y 轴的直线与这条直线至多一个交点，则称这条连线为连接 A_0,A_n 的折线，A_0 为起点，A_n 为终点。折线上每个单位正方形的对角线称为这条折线的一节

A_0,A_n 是 XOY 坐标系中的两个点，a_0,a_n 和 b_0,b_n 分别表示其横纵坐标

1.2 定理

$A(a_0,b_0),A_n(a_n,b_n)(a_n > a_0)$ 之间能用折线连接的充要条件是：

$$\begin{cases} |b_n - b_0| \le a_n - a_0 = n \\ 2||b_n - b_0| + a_n - a_0 \end{cases} \tag{1}$$

1.2.1 必要性

$$\begin{aligned} |b_n - b_0| &= |(b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + (b_1 - b_0)| \\ &\le |b_n - b_{n-1}| + \cdots + |b_1 - b_0| = n \end{aligned} \tag{2}$$

设斜向右上的对角线有 x 个，斜向右下的对角线有 y 个，

则有

$$x + y = a_n - a_0 = n, |x - y| = |b_n - b_0| \tag{3}$$

又有 $x + y$ 与 $|x - y|$ 奇偶性相同，所以

$$2|x + y + |x - y| = a_n - a_0 + |b_n - b_0| \tag{4}$$

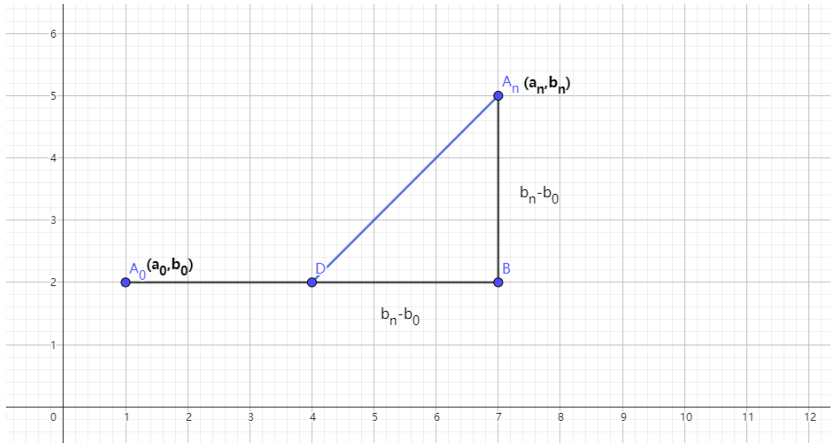

图 1: 折线图的证明

1.2.2 充分性

不妨设 $b_n > b_0$

取 $B(a_n - b_n + b_0, b_0)$ 使得 $BC = AC$

$$x_B - x_A = a_n - b_n + b_0 - a_0 = ((a_n - a_0) - (b_n - b_0)) \equiv 0(mod)2 \tag{5}$$

所以 $A_0 => B$ 可用 $\frac{1}{2}(a_n - b_n + b_0 - a_0)$ 个斜向右上的直线和 $\frac{1}{2}(a_n - b_n + b_0 - a_0)$ 个斜向右下的直线连接

1.3 折线条数

连接格点 $A_0(a_0, b_0), A_n(a_n, b_n)$ 的折线有多少条

设斜向右上的对角线有 x 个，斜向右下的对角线有 y 个，则

$$\begin{cases} x + y = n \\ x - y = b_n - b_0 \end{cases} \tag{6}$$

我们可以推出

$$\begin{cases} x = \dfrac{n + b_n - b_0}{2} \\ y = \dfrac{n - b_n + b_0}{2} \end{cases} \tag{7}$$

所以最终的折线条数就是 $C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)}$。

2 卡特兰数

2.1 引例

1. 姐姐和妹妹一起洗 5 个碗，姐姐洗好一个碗一个一个往上摞，妹妹再从最上面一个一个拿走放入碗柜，姐姐一边洗，妹妹一边拿，那么妹妹摞好的碗有几种不同的摆法？

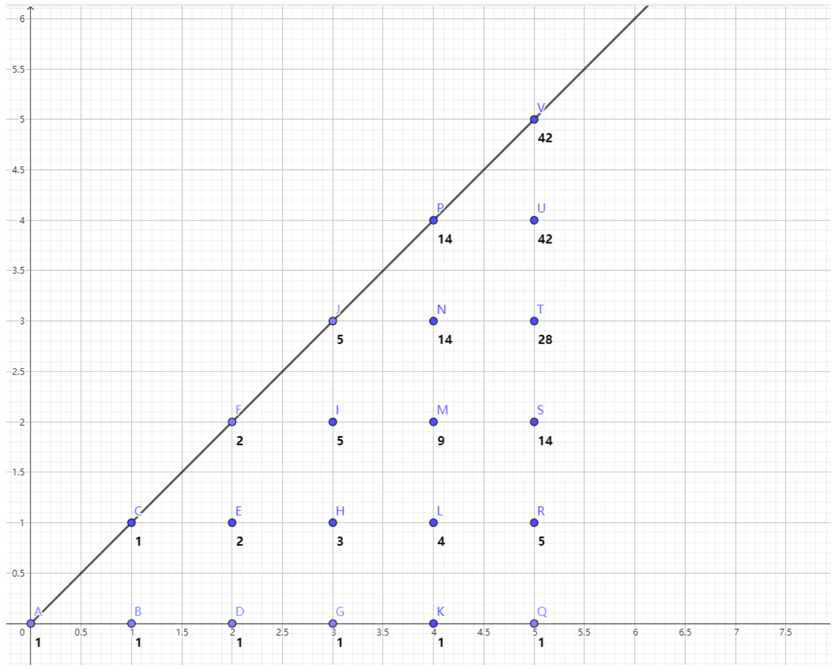

图 2: witworth 线

我们可以通过画 Whitworth 线的方式来模拟姐妹洗碗和摞碗的过程，在 x 轴正方向上向右走一步表示姐姐洗一个碗，在 y 轴正方向上向上走一步表示妹妹拿一个碗，其只能向右走或者向上走，从 $(0,0)$ 开始走到 $(5,5)$ 的一条路即表示一种洗碗和拿碗的方式，因为妹妹拿碗的速度不能超过姐姐洗碗的速度，所以一条合法路径不会穿过 $y=x$ 这条直线，我们需要找出从 $(0,0)$ 走到 $(5,5)$ 的所有合法路径。

我们可以根据加法原理找到所有从 $(0,0)$ 走到 $(5,5)$ 的路径，其中 A,C,F,J,P,V 的下标组成的数列 $1,1,2,5,14,42$ 就是我们在本章中要研究的卡特兰数列。

2. 以 $1,2,3,\cdots,n$ 的顺序进栈，那么出栈顺序一共有多少种？

3. 公园售票处有 $2n$ 个人排队买票，每张票的价格 5 元，其中有 n 人各持一张 5 元的纸币，另外 n 人各持一张 10 元的纸币，售票处没有零钱找补，问：使大家都能顺利买票，不至于发生找补零钱困难的排队方法有多少种？

抽象得到，由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 组成的序列 $x_1,x_2,...,x_{2n}$ 中，满足 $x_1+x_2+...+x_k \geq 0, \forall k \in \{1,2,3,\cdots,2n\}$ 的序列数目。

此例就是上述引例的共同背景。

2.2 对引例分析，理解卡特兰数列

2.2.1 分析 1——构造双射求非法序列数量

存在

$$\exists k, x_1+x_2+\cdots+x_k<0 \tag{8}$$

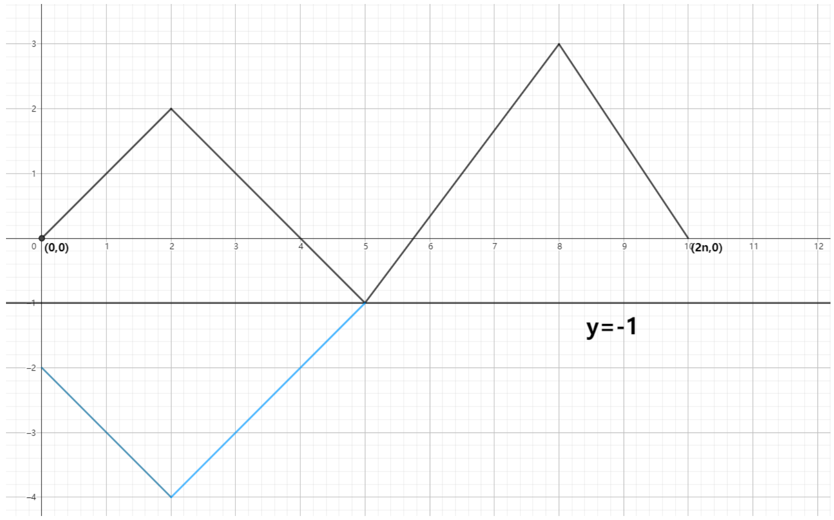

图 3: 折线图

1. 第一个 k_0 必然出现在一个奇数位，即到该位有 $m+1$ 个 -1 和 m 个 $+1$，即 $k_0=2m+1$，之后还有 $2n-2m-1$ 位，则还剩下 $n-m$ 个 $+1$ 和 $n-m-1$ 个 -1，我们通过将后半序列的 $+1,-1$ 进行对调，则一个非法序列对应的由 $n-1$ 个 $+1$ 和 $n+1$ 个 -1 构成的序列。

2. 反之，一个由 $n-1$ 个 $+1$ 和 $n+1$ 个 -1 构成的序列会对应一个由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 构成的非法序列，因为 -1 比 $+1$ 多两个，则一定有某个奇数位 k_0 使 $x_1+x_2+\cdots+x_{k_0}<0$ 将这一位后面的 $+1$ 和 -1 对调，则得到一个由 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 构成的非法序列。

   则非法序列的数量 $=C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}$。

   非法序列指 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 存在前缀 $x_1+x_2+\cdots+x_k=-1<0,k<n$。

2.2.2 分析 2——数形结合求非法序列数量

利用折线图3，分析抽象出来的题。

我们可以假设，从 $(0,0)$ 开始，向右上方走一格表示 $+1$，向右下方走一格表示 -1，则由于一共有 $2n$ 个 $+1$ 和 -1，则其一定会沿着 x 轴向右走 $2n$ 步，而 $+1$ 和 -1 的数量是相等的，所以从起点走向终点的过程中向上走的步数等于向下走的步数，所以起点和终点相对 y 轴的位置没有发生变化。由此我们可以知道，无论路径是否合法，该过程的终点一定是 $(2n,0)$。

而我们知道，路径非法，则表示存在某个 $x_1+x_2+\cdots+x_k<0,k<n$ 在折线图上呈现出来就是其某条路径一定会碰到 $y=-1$ 这条直线，我们将非法路径从起点到碰到 $y=-1$ 的之间的折线关于 $y=-1$ 翻折，我们可以发现，每一条非法路径都恰好对应着一条从 $(0,-2)$ 到 $(2n,0)$ 的折线，通过折线条数的计算公式，则

非法折线的数量是：$C_{2n}^{n}-C_{2n}^{\frac{1}{2}(2n+0-(-2))}=\dfrac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$

Whitworth 线也同样可以做。

2.2.3 对 3 的分析

利用递推解决问题。

令 $f(n)$ 为 n 个数字出栈的方法数，设在出栈序列中，1 在第 k 个位置出栈，则之前有 $k-1$ 个数字已经出栈，之后还有 $n-k$ 个数字等待出栈，故这种情况下出栈序列方法数 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k-1)f(n-k)$，其中 $f(0)=1, f(1)=1$

2.3 例题

2.3.1 一般题目

1. n 个非叶节点的二叉树有多少种形态

   如果设二叉树的左子树有 k 个非叶子节点，那么右子树有 $N-(k-1)$ 个非叶子节点。我们把 N 个非叶子节点的二叉树可能的个数表示成 S(N)，则 $S(N)=\sum_{k=0}^{N-1}S(k)*S(N-(k-1))$

2. $n+1$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 的乘积，依据乘法结合律，不改变数的顺序，只用括号表示乘积的优先级，问有多少种不同的乘法方案?

3. 求圆周上 $2n$ 个点连成互不相交的 n 条弦的方法数。

   设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为圆周上顺时针排列的 $2n$ 个点，我们假设存在 $2x$ 个点的一个圆周可以有 $f(x)$ 种分法，若 A_1 与 A_k 相连，且能把其他点按题目要求连接起来，则 $k=2m$，则 A_1, A_k 把圆周分成两个部分，其中一个部分上的点为 $A_2, A_3, \cdots, A_{2m-1}$，这部分有 $f(m-1)$ 种分发，另一部分上的点为 $A_{2m+1}, A_{2m+2}, \cdots, A_{2n}$，这部分有 $f(n-m)$ 种分发，则由于 m 可以取遍 $1-n$ 所以 $f(n)=\sum_{m=1}^{n}f(m-1)f(n-m)$ 其中 $f(0)=1, f(1)=1$

4. 凸 $(n+2)$ 边形用其 $(n-1)$ 条对角线剖分成互不重叠的 n 个三角形的方法数（对边进行编号）

2.4 通项公式

$$H_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} \tag{9}$$

$$H_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n} \tag{10}$$

$$H_n = \frac{4n-2}{n+1}H_{n-1} \tag{11}$$

H_n 表示卡特兰数列的第 n 项，C_a^b 表示从 a 个东西中挑 b 个东西的方案数。

2.4.1 洛谷例题

https://www.luogu.com.cn/problem/P2532

- 题目描述

  暑假期间，小龙报名了一个模拟野外生存作战训练班。训练的第一个晚上，教官就给他们出了个难题。由于地上露营湿气重，必须选择在高处的树屋露营。小龙分配的树屋建立在一颗高度为 $N+1$ 尺的大树上，正当他发愁怎么爬上去的时候，发现旁边堆满了一些空心四方钢材。经过观察和测量，这些钢材截面的宽和高大小不一，但都是 1 尺的整数倍，教官命令队员们每人选取 N 个空心钢材来搭建一个总高度为 N 尺的阶梯来进入树屋，该阶梯每一

步台阶的高度为 1 尺，宽度也为 1 尺。如果这些钢材有各种尺寸，且每种尺寸数量充足，那么小龙可以有多少种搭建方法？

- 样例

  输入

  3

  输出

  5

2.5 总结

- 画图分析
- 递归分析