המדריך הקאז'ואלי לתבניות ביליניאריות

עמית שמואל

הרגשתי שאני לא מבין את החומר בתבניות ביליניאריות אז הנה מדריך קאז'ואלי.

תבניות בליניאריות כלליות

הגדרה 1.0 **תבנית בליניארית** היא העתקה $f : V \times W \to \mathbb{F}$ שהיא ליניארית בשני רכיביה (ולכן היא **בי** ליניארית). ז"א:

$$f(\alpha a + \beta b, w) = \alpha f(a, w) + \beta f(b, w)$$
$$f(v, \alpha a + \beta b) = \alpha f(v, a) + \beta f(v, b)$$

לדוגמה פונקציית ה0 ומכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ הן תבניות ביליניאריות. סכום וכפל תבניות ביל' זה גם תבנית ביל'. נסמן את המרחב הוקטורי של כל התבניות הביליניאריות כ

משפט 2.0 נגדיר **מטריצה מייצגת של תבנית בליניארית** $f : V \times W \to \mathbb{F}$ להיות $A = [f]_C^B$ (כאשר B, C בסיסים של V, W בהתאם) ונגדיר $A_{i,j} = f(b_i, c_j)$. ההגדרה הזאת נחמדה כי אז מתקיים תמיד:

$$f(v, w) = f\left(\sum \alpha_i b_i, \sum \beta_j c_j\right) = \sum \sum \alpha_i f(b_i, c_j) \beta_j$$
$$= \sum \sum \alpha_i A_{i,j} \beta_j = ([v]_B)^t A [w]_C$$

בנוסף לכך המטריצה המייצגת היא היחידה המקיימת $f(v, w) = ([v]_B)^t A [w]_C$. סכום וכפל של מטריצה מייצגת של תבנית ביל' זה גם מטריצה מייצגת של תבנית ביל'. מכך גם נובע ש:

$$\dim \mathrm{Bil}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$$
$$\dim \mathrm{Bil}(V, V) = (\dim V)^2$$

הגדרה 3.0 נגיד ששני מטריצות A, B **שקולות** (לא בהכרח ריבועיות) אם קיימות P, Q הפיכות כך ש$A = P^t B Q$ והן יקראו **חופפות** אם קיימת P כך ש$A = P^t B P$. מתקיים ששני מטריצות שקולות (ובפרט חופפות) אם ורק אם הן מייצגות אותה העתקה מכיוון ו:

$$
\begin{aligned}
f(v,w) &= \left([v]_B\right)^t A\,[w]_C = \left([Id]_{B'}^{B}\,[v]_B\right)^t A\,[Id]_{C'}^{C}\,[w]_C \\
&= [v]_B^t \left([Id]_{B'}^{B}\right)^t A\,[Id]_{C'}^{C}\,[w]_C
\end{aligned}
$$

ולכן $\left([Id]_{B'}^{B}\right)^t A\,[Id]_{C'}^{C} = B$ והן מייצגות אותה העתקה. שני מטריצות שקולות אמ"ם שיש להן אותה דרגה. בניגוד לכך אם שני מטריצות חופפות אז יש להן אותה דרגה (לא אמ"ם), גם אם A, B חופפות אז $\det A = c^2 \det B$. לכן להגדיר $\mathrm{rk} f = \mathrm{rk}\,[f]_B$ זה מוגדר טוב כי לכל המטריצות

תבניות בליניאריות סימטריות (וריבועיות)

הגדרה 4.0 נקרא לתבנית ביליניארית מ$\mathrm{Bil}(V,V)$ סימטרית אם לכל $v, w \in V$ מתקיים $f(v,w) = f(w,v)$. תבנית היא סימטרית אמ"ם המטריצה שלה סימטרית (קל לראות כי אז היא סימטרית על איברי הבסיס ובפרט על כל האיברים).

הסתייגות אל תוך תבניות ריבועיות

הגדרה 5.0 נקרא לפונקציה $q : V \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אם קיימת $f \in \mathrm{Bil}(V,V)$ כך ש$q(v) = f(v,v)$. בהינתן תבנית ריבועית קיימת תבנית סימטרית יחידה כך ש$q(v) = f(v,v)$, נוכל למצוא אותה ע"פ הנוסחה הבאה:

$$
2f(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)
$$

למה 6.0 אם $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq 2$ ו$f \neq 0$ סימטרית אז קיים u כך ש$f(u,u) \neq 0$. נשתמש בה במשפט הבא.

משפט 7.0 אחד מהדברים היותר מעניינים בתבניות סימטריות זה הצורה האלכסונית שלהן. ואכן כל תבנית סימטרית בשדה ממציין השונה מ2 ניתן ללכסן על ידי בסיס אורתוגונלי (אין לי כוח לכתוב את ההוכחה המלאה אבל עושים באינדוקציה על ידי זה שבוחרים u כך ש$f(u,u) \neq 0$ כאיבר בבסיס, מראים ש$V = \mathrm{sp}(u) \oplus \{v \in V \mid f(u,v) = 0\}$ וממשיכים באינדוקציה). **חשוב לשים לב שהלכסון הוא על ידי חפיפה ולא על ידי יחס הדמיון.**

מסקנה 8.0 מהמשפט הקודם נובע שניתן לחפוף כל תבנית סימטרית f **(מעל $\mathbb{C}$)** עם מטריצה מהצורה $\mathrm{Diag}\left(\overbrace{1,\ldots,1}^{\mathrm{rk} f},0,\ldots,0\right)$ על ידי סידור הבסיס הנתון מהמשפט מחדש לצורה שבה כל האפסים בצד ימין ואז לנרמל ($u \to \frac{1}{\sqrt{c}}u$ כאשר c זה הערך על האלכסון) את הוקטורים השונים מ0 כך שיצאו 1.

טענה 9.0 המסקנה עובדת רק מעל $\mathbb{C}$ כאשר ניתן לקחת שורש של כל מספר, מעל $\mathbb{R}$ נוכל להביא כל מטריצה לצורה $D'_{p,q} = \mathrm{Diag}\left(\overbrace{1,\ldots,1}^{p},\overbrace{-1,\ldots,-1}^{q},0,\ldots,0\right)$ ומתקיים

שלכל תבנית הp,q יחידים. נקרא ל$p-q$ $\sigma\left(A\right)=p-q$ הסיגנטורה של A. אם לA,B אותה דרגה וסיגנטורה אז הן חופפות.

משפט 10.0 בשביל למצוא את הסיגנטורה נצטרך למצוא צורה קנונית למטריצה. נגדיר את A_i להיות התת מטריצה מגודל $i\times i$ ומתקיים שq היא מספר החלפות הסימן בסדרה $1,\det A_1,\det A_2,\ldots,\det A_n$ ו$p=r-q$.

משפט 11.0 משפט "הכל שקול תהנו" על מטריצות סימטריות:

- f חיובית גמורה ($f\left(v,v\right)\neq0$ לכל $v\neq0$)
- $\left[f\right]$ חופפת למטריצה אלכסונית אשר כל איברי האלכסון שלה חיוביים
- $\left[f\right]$ חופפת לI
- $\left[f\right]=P^tP$ לP הפיכה כלשהי
- $\sigma\left(A\right)=n$
- f מכפלה פנימית
- כל השורשים של הפולינום האופייני של f מעל $\mathbb{C}$ ממשיים חיוביים