הרשימה הרשמית של שמי - ליניארית 2

עמית שמואל

(סיכום זה יכלול חומר רק ממכפלות פנימיות והלאה, בין היתר כי עצלנותי מנעה ממני לכתוב סיכום לצורות קנוניות ואין סיכוי שאני כותב סיכום על ההוכחה של ז'רדון זה יקח 2 ספרים)

תוכן עניינים

חלק I
המכפלה הפנימית וההרמטית

1 מכפלה סקלרית, נורמה ומרחק

1.1 מכפלה סקלרית, הנורמה ותכונותיה

הגדרה 1.1 ב$\mathbb{R}^n$ נסמן **מכפלה סקלרית** (סטנדרטית) בין שני וקטורים v,u להיות $\langle v,u\rangle$ ונגדיר אותה להיות:

$$\langle v,u\rangle = v^t\cdot u = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$$

נוכל עם המכפלה הסקלרית להגדיר נורמה/גודל/מרחק מהראשית של וקטור, את הנורמה נסמן כ$\|v\|$ ונגדיר אותה להיות $\sqrt{\langle v,v\rangle}$

מסקנה 1.2 אם נפשט את $\|v-u\|^2$ נקבל שהוא שווה ל$\|v\|^2+\|u\|^2-2\langle v,u\rangle$ ולכן אנו יודעים ממשפט פיתגורס ההפוך ש$\langle v,u\rangle=0 \iff v\perp u$ (הוקטורים מאונכים). נוכל אפילו להתקדם עם הטענה הזו ולהסתכל על המקרה הרחב יותר של משפט הקוסינוסים ולכן נקבל ש$\langle v,u\rangle = \|v\|\,\|u\|\cos(\alpha)$ כאשר α הזווית בין הוקטורים ולכן נקבל הגדרה ל$\cos$ האומרת ש:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|\,\|u\|}$$

(מכאן גם נובעת איטואיציה גיאומטרית למכפלה הסקלרית אבל אני חסר כישרון ציור אז תצפו בסרטון של 3b1b על זה)

הגדרה 1.3 מעל המרוכבים נגדיר בדומה להגדרה הראשונית $\langle v,u\rangle = v\cdot\overline{u} = \sum_{i=1}^{n} v_i\overline{u_i}$ כאשר $\overline{x}$ הינו הצמוד המרוכב של x. לכן נגדיר גם נורמה להיות $\|z\| = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$.

טענה 1.4 תכונות של נורמה:

- $0\le \|v\|\in\mathbb{R}$
- $\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$
- $\|v+u\|\le\|u\|+\|v\|$ (אי שוויון המשולש)

1.2 מרחק בין וקטורים

הגדרה 1.5 בעזרת הנורמה נוכל להגדיר מרחק בין 2 וקטורים, זוהי נורמת החיסור ולכן נגדיר $\operatorname{dist}(v,u) = \|v-u\|$

טענה 1.6 כמה תכונות מאוד טריוויאליות נובעות מההגדרה:

- $0\le\operatorname{dist}(v,u)\in\mathbb{R}$
- $\operatorname{dist}(v,u)=\operatorname{dist}(u,v)$
- $v=u \iff \operatorname{dist}(u,v)=0$
- $\operatorname{dist}(v,u)\le\operatorname{dist}(v,w)+\operatorname{dist}(w,u)$ (אי שוויון המשולש למרחקים)

2 מכפלה פנימית והרמטית

2.1 הגדרה וקושי שוורץ

הגדרה 2.1 נגדיר מכפלה פנימית/הרמטית להיות הכללה של התכונות של מכפלה סקלרית. בהינתן V מ"ו נגדיר מכפלה פנימית להיות פונקציה מV^2 ל$\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ המקיימת את התכונות הבאות לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ ו$v_1, v_2, u, u \in V$

- ליניאריות לפי הרכיב השמאלי - $\langle \alpha v_1 + \beta v_2, u \rangle = \alpha \langle v_1, u \rangle + \beta \langle v_2, u \rangle$
- הרמטיות (ובממשיים סימטריות) - $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$
- ממשיות חיוביות - $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ ובפרט $\langle v, v \rangle \geq 0$
- אפיון 0 - $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

כאשר אנחנו מדברים על $\mathbb{R}$ נקרא למכפלה **מכפלה פנימית** וכאשר אנחנו מדברים על $\mathbb{C}$ נקרא למכפלה **מכפלה הרמטית/אוניטרית**. למרחב V המצוייד עם מכפלה פנימית/הרמטית כזאת נקרא **מרחב מכפלה פנימית/מרחב אוניטרי**.
ניתן לראות שהמכפלה הסקלרית הסטנדרטית היא מכפלה פנימית והמרוכבים היא הרמטית.

טענה 2.2 לכל מכפלה פנימית/הרמטית יתקיים אי שוויון קושי שוורץ, זאת אומרת שלכל v, u יתקיים:

$$|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\|$$

והשווין מתקיים אמ"ם v, u פרופורציונלים ($\exists \lambda . v = \lambda u$).

משפט 2.3 עוד תכונות של מכפלה פנימית והרמטית:

- $\langle v, 0 \rangle = 0$
- $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$
- $\langle v, \alpha u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle$
- $\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i b_i \langle v_i, u_i \rangle$

2.2 מטריצת הרמטיות ומטריצת גרהאם

הגדרה 2.4 בהינתן A מטריצה נסמן $A^* = \overline{A^t}$. נשתמש במטריצה הזאת בשביל להגדר מכפלות פנימיות על פי מטריצות כאלו.
בהינתן A מרוכבת נגדיר עבור z, w מרוכבים:

$$\langle z, w \rangle_A = w^* A z$$

עכשיו נובעת השאלה, מתי זוהי מכפלה הרמטית?

משפט 2.5 המכפלה $\langle z, w \rangle_A$ הרמטית אמ"ם המטריצה A היא הרמטית ($A^* = A$) וחיובית לחלוטין ($\forall z \neq 0 . \langle z, z \rangle_A > 0$). משפט זה חל בפרט על הממשיים מכיוון ומטריצה הרמטית בממשיים היא פשוט סימטרית.

הגדרה 2.6 (כנראה לא שימושית) בהינתן n וקטורים נגדיר את מטריצת גרהאם שלהם להיות $(G(v_1, \ldots, v_n))_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$.

טענה 2.7 התכונות הבאות מתקיימות לגבי מטריצת גרהאם (אשר נסמן בG):

- G מטריצה הרמטית ($G^* = G$) וחיובית לחלוטין ($\forall v \neq 0. \langle v, v \rangle_G > 0$) ולכן מגדירה מכפלה סקלרית.
- בהינתן בסיס B אז לכל x, y וקטורים מתקיים ש$\langle x, y \rangle = \langle [x]_B, [y]_B \rangle_G$.
- אם נהפוך את הוקטורים $v_{1 \leq i \leq n}$ למטריצה A אז יתקיים ש$G = A^t \overline{A}$.

חלק II

אורתוגונליות והטלות וגראם שמידט

3 סדרות אורתוגונליות ואורתונורמליות

הגדרה 3.1 בהינתן סדרה של וקטורים $v_{1 \leq i \leq k}$ בV ממ"פ/אוניטרי, נקרא לסדרה אורתוגונלית אמ"ם לכל $i \neq j$ מתקיים ש$v_i \perp v_j$ (ובאופן שקול $\langle v_i, v_j \rangle = 0$).

לכל וקטור מתקיים ש$v \perp 0$ אז נוכל להוסיף 0 לסדרה אורתוגונלית והיא תישאר כך.

משפט 3.2 סדרה אורתוגונלית ללא 0 היא בת"ל.

הגדרה 3.3 נקרא לוקטור v וקטור יחידה אם $\|v\| = 1$. נוכל בקלות להפוך וקטור לוקטור יחידה על ידי הכפלה של הוקטור ב$\frac{1}{\|v\|}$. לסדרה שהיא אורתוגונלית וכל הוקטורים בה הינם וקטורי יחידה נקרא סדרה אורתונורמלית.

טענה 3.4 סדרות אורתוגונליות נחמדות והכל אבל למה הן שימושיות? זה כי אם יש לנו בסיס למרחב (או תת מרחב) הנוצר מסדרה אורתוגונלית ללא 0 (ולכן היא בת"ל) אז מתקיימות התכונות הבאות:

- $\left([v]_B\right)_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}$
- $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left([u]_B\right)_i \|b_i\| \left([v]_B\right)_i \|b_i\| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, b_i \rangle \langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}$
- ובפרט מהתכונה הקודמת $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\langle v, b_i \rangle|^2}{\|b_i\|^2}$
- מכאן אפשר גם להסיק נוסחאות על פי הבסיס ל$\cos, \mathrm{dist}$

4 הטלות ומשלים ניצב

טענה 4.1 נגדיר $S \perp v$ כאשר $S \subseteq V$ אם $\forall s \in S. v \perp s$. $v \perp \mathrm{Span}\left(v_1, \ldots, v_k\right)$ אם ורק אם $\forall i. v \perp v_i$.

הגדרה 4.2 יהי V ממ"פ/אוניטרי וU תמ"ו שלו. נניח כי לU קיים בסיס אורתוגונלי $b_{1 \leq i \leq k}$. נגדיר את ההטלה של וקטור v על U להיות:

$$P_U\left(v\right) = \sum_{I=1}^{n} \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2} b_i$$

יש להטלה של וקטור על מרחב תכונות:

- $P_U : V \to U$ כאשר $\forall u \in U. P_U\left(u\right) = u$ ומכך נובע ש$P_U^2 = P_U$.
- p_U העתקה ליניארית ובנוסף לכך $\ker\left(p_U\right) = \{v \in V \mid v \perp U\}$.
- לכל v מתקיים ש$v - P_U\left(v\right) \perp U$

הגדרה 4.3 נגדיר את המשלים הנציב לU להיות:

$$U^{\perp}=\{v\in V\mid v\perp U\}=\ker\left(p_{U}\right)$$

הוא מקיים את התכונות הבאות:

- $U\oplus U^{\perp}=V$
- $U\subseteq\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ ובפרט אם V נוצר סופית מתקיים ש $U=\left(U^{T}\right)^{T}$
- $\left(U+W\right)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}$
- $\left(U\cap W\right)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$
- אם $U\subseteq W$ אז $W^{\perp}\subseteq U^{\perp}$
- $\langle v,u\rangle=\left\langle P_{U}\left(v\right),P_{U}\left(u\right)\right\rangle+\left\langle P_{U^{\perp}}\left(v\right),P_{U^{\perp}}\left(u\right)\right\rangle$

משפט 4.4 נגדיר את המרחק בין וקטור למרחב להיות המרחק בין הוקטור להטלה שלו על המרחב, זאת אומרת ש$\text{dist}\left(v,U\right)=\text{dist}\left(v,P_{U}\left(v\right)\right)$. משפט הקירוב הטוב ביותר אומר שזה המרחק הכי קצר בין הוקטור למרחב, ובכתיב פורמלי:

$$\text{dist}\left(v,U\right)=\inf_{u\in U}\text{dist}\left(v,u\right)=\min_{u\in U}\text{dist}\left(v,u\right)$$

5 אלגוריתם גראס־שמידט

עם אלגוריתם גראס שמידט נרצה לקחת סדרה נתונה ולהפוך אותה לאורתונורמלית מבלי לשנות את פרישתה, נוכל להשתמש באלגוריתם הזה כדי למצוא בסיס אורתונורמלי לכל מימד סופי. בהינתן סדרה $v_{1\leq i\leq k}$ נחזיר סדרה אורתונורמלית פורשת מהצורה $u_{1\leq i\leq k}$, האלגוריתם בצורה רקורסיבית כך:

תנאי ההתחלה: אם $v_1=0$ נעבור לוקטור הבא. אחרת $u_{1}=\frac{1}{\|v_{1}\|}v_{1}$. מתקיים שהסדרה אורתונורמלית ופורשת אותו מרחב, נתקדם לצעד הרקורסיבי.

הצעד הרקורסיבי: נניח שהצלחנו להביא את הסדרה $v_{1\leq i\leq k}$ לסדרה $u_{1\leq i\leq k}$ אורתונורמלית פורשת ונרצה להוסיף עוד וקטור v_{k+1}. נגדיר את הוקטור החדש לסדרה u_{k+1} עם $u'_{k+1}=v_{k+1}-P_{U}\left(v_{k+1}\right)$. כאשר אם הוקטור u'_{k+1} הוא 0 אז נוסיף אותו לסדרה, אחרת ננרמל אותו ואז נוסיף אותו לסדרה.