Можно ли замостить плоскость копиями
одного и того же треугольника?
«Замостить» означает «полностью покрыть».

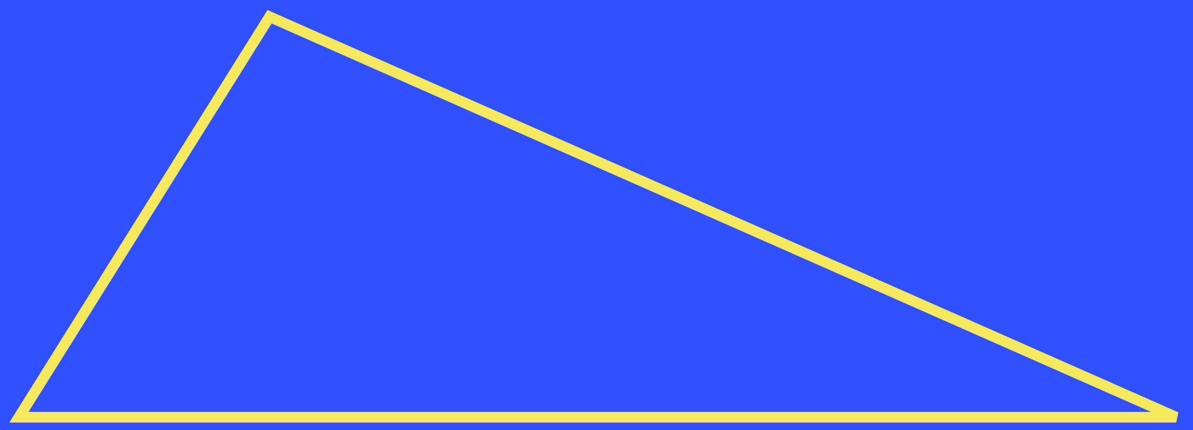
треугольники

Понятно, что равносторонним, наверное, можно.
Правда можно:

(здесь красивая быстрая визуализация
того, как равносторонние треугольники
замощают всё, включая лектора)

А что, если треугольник совсем любой?

Можно ли замостить плоскость копиями
одного и того же треугольника?
«Замостить» означает «полностью покрыть».



ещё
треугольник

правильный ответ:

Конечно, можно: достраиваем треугольник до параллелограмма.
Одинаковыми параллелограммами плоскость замощается с очевидностью.

примечания:

Школьнику предоставляется интерактивная среда
с кнопочкой «ещё треугольник»
и с возможностью вращать каждый из треугольников за его углы.

Хорошо, с треугольниками разобрались.
Можно ли замостить плоскость
копиями одного и того же четырёхугольника?

Мы уже поняли, что параллелограммами можно,
а к параллелограммам, между прочим,
относятся
квадрат, прямоугольник и ромб. :)

И всеми равнобедренными трапециями можно
(из двух равнобедренных трапеций
легко получается параллелограмм)

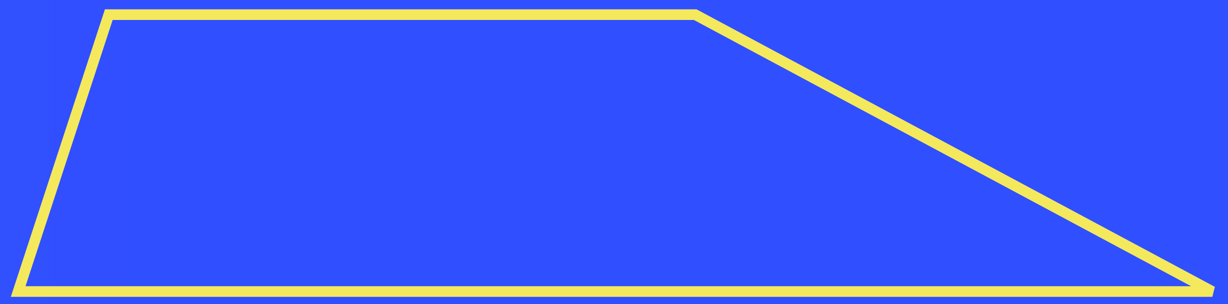
Сразу, естественно, возникают вопросы:

а произвольной трапецией можно?

произвольным выпуклым 4-угольником?

произвольным невыпуклым 4-угольником?

Ну да, можно ли замостить плоскость копиями одной и той же произвольной трапеции?



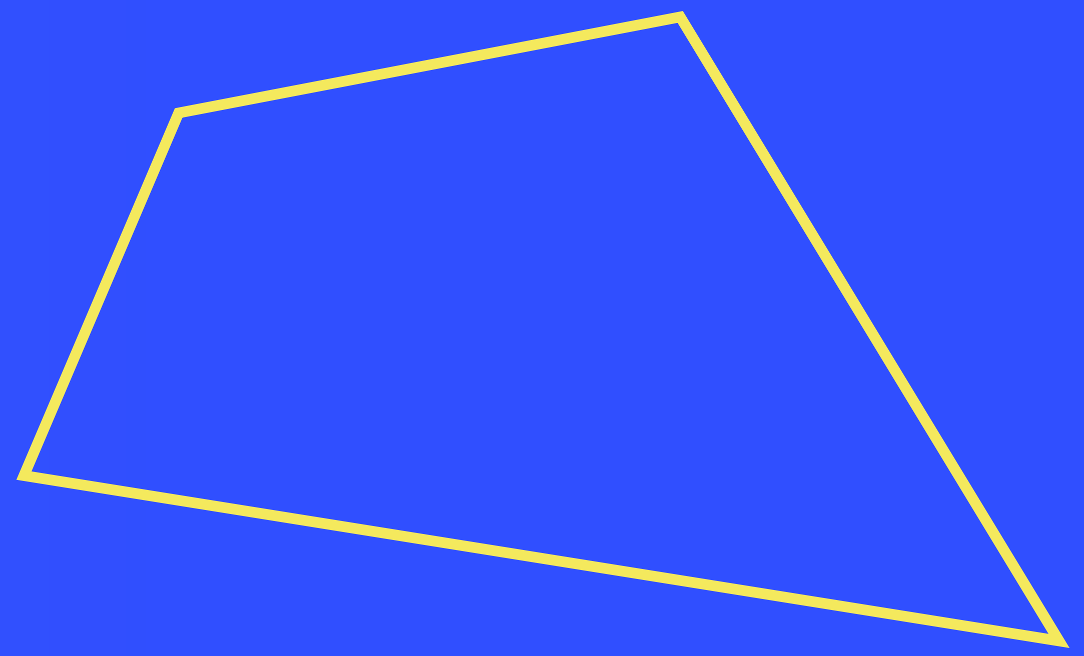
ещё трапеция

правильный ответ:

примечания:

Как и в задаче с треугольником,
школьнику предоставляется интерактивная среда
с кнопочкой «ещё трапеция»
и с возможностью вращать каждую из трапеций за её углы.

Можно ли замостить плоскость копиями
одного и того же произвольного выпуклого четырёхугольника?



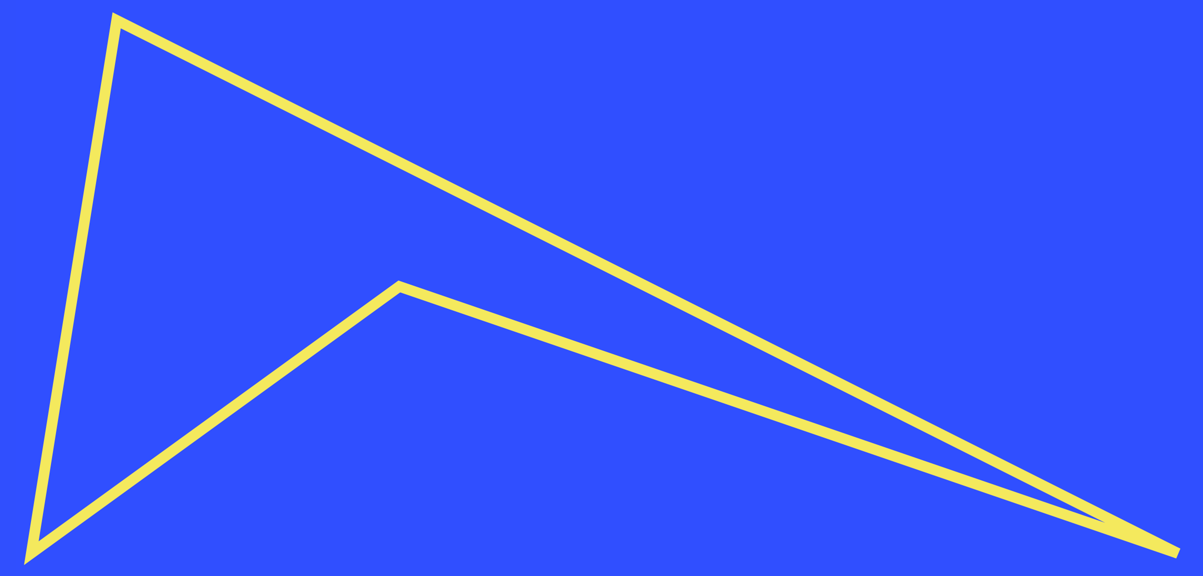
больше
выпуклых
4-угольников

правильный ответ:

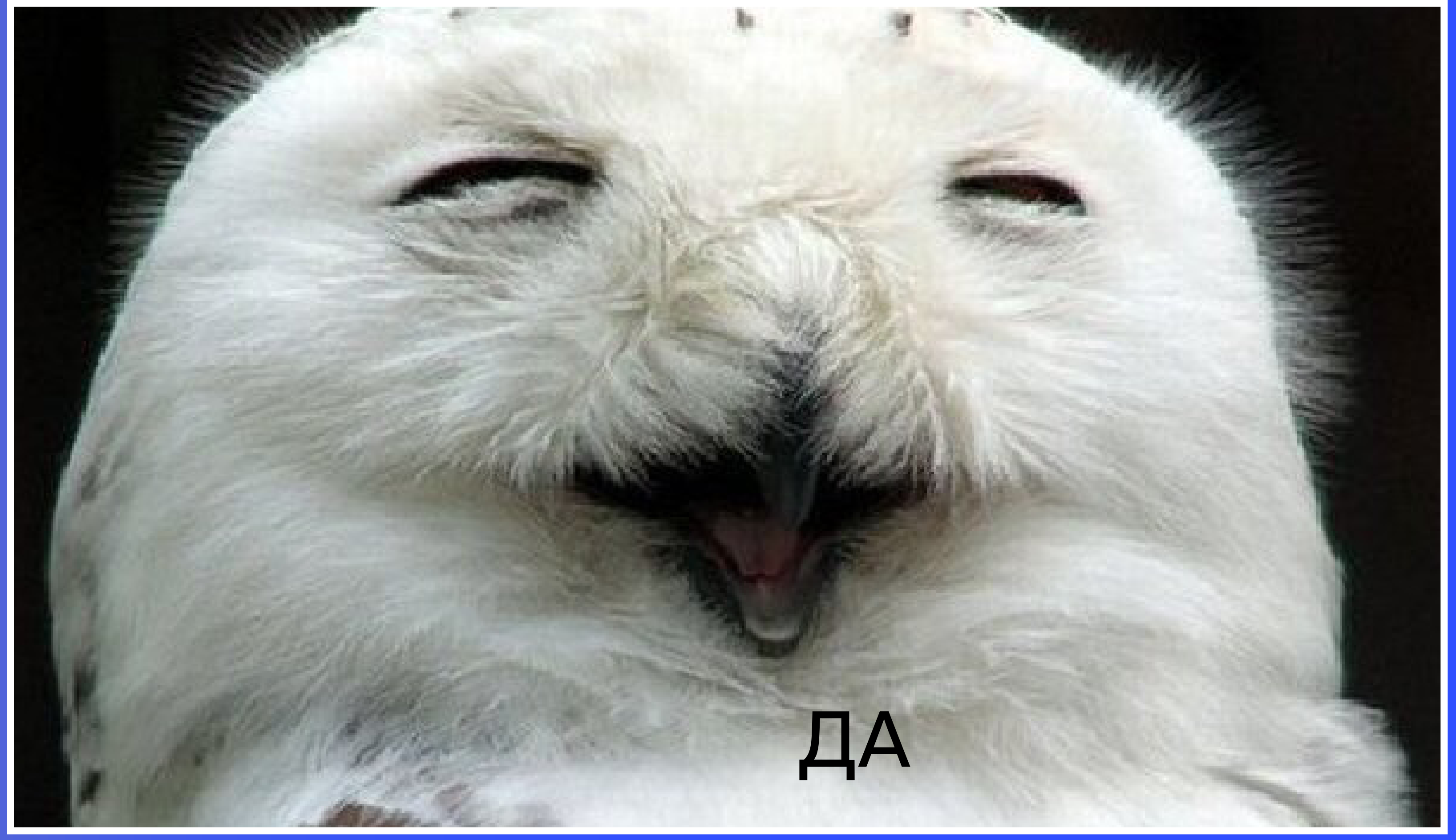
примечания:

Как и в предыдущих задачах,
школьнику предоставляется интерактивная среда
с кнопочкой «больше выпуклых 4-угольников»
и с возможностью вращать каждый из них.

Копиями одного и того же
произвольного невыпуклого четырёхугольника?



больше
невыпуклых
4-угольников



правильный ответ:

примечания:

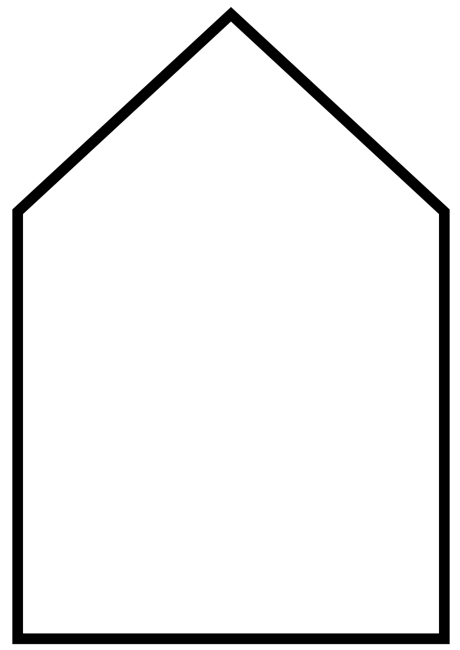
Как и в предыдущих задачах,
школьнику предоставляется интерактивная среда
с кнопочкой «больше невыпуклых 4-угольников»
и с возможностью вращать каждый из них.

И с четырёхугольниками всё ясно!

А что с пятиугольниками?

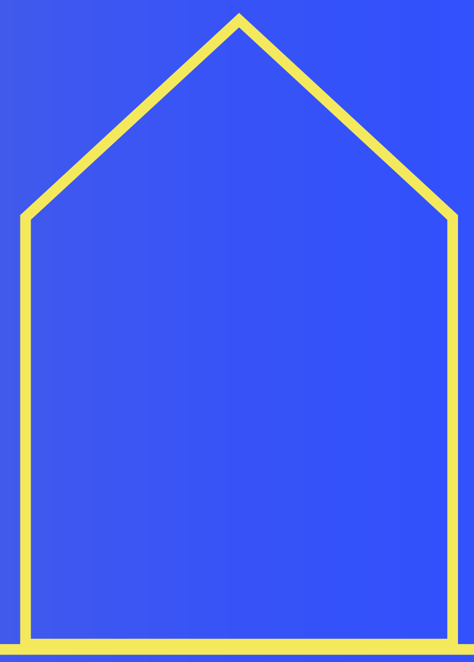
Взять пятиугольник самого общего вида
и пытаться им замостить плоскость
кажется слишком сложной задачей,
задачей, решение которой совершенно непонятно с чего начинать.

Поэтому возьмём вначале какой-нибудь простенький пятиугольник.
Я предлагаю домик.



Вот тебе кусочек плоскости. На, замощай его:

ещё
домик



правильный ответ:

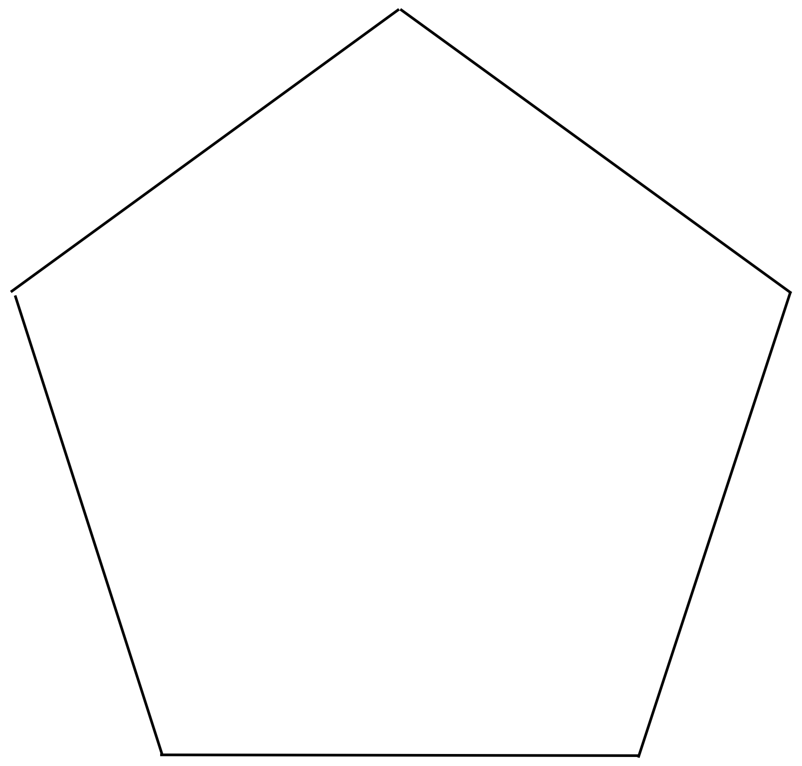
примечания:

Как и в предыдущих задачах,
школьнику предоставляется интерактивная среда
с кнопочкой «больше невыпуклых 4-угольников»
и с возможностью вращать каждый из них.

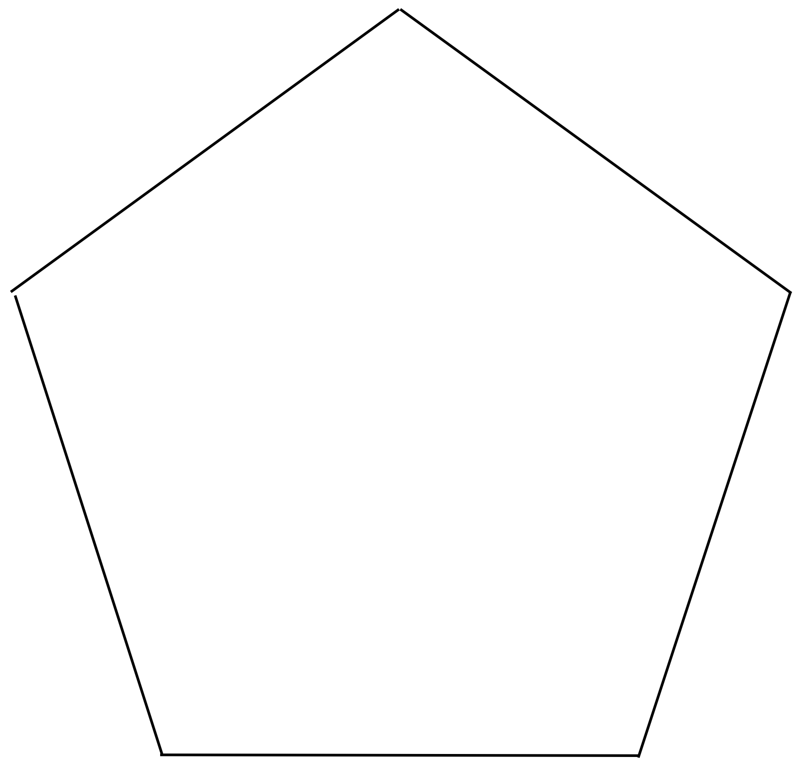
Отлично. Домиками замостили.

Теперь попробуем, вообще говоря,
способ, который первым приходит в голову —
замощение
правильными 5-угольниками.

Вот такими штуками:



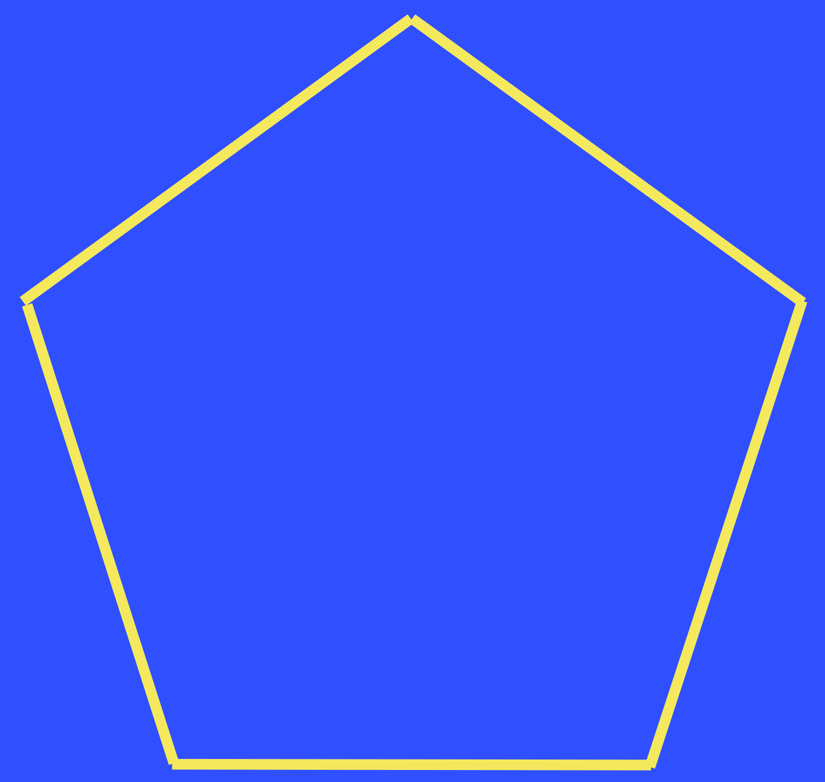
пятиугольники



Они все такие из себя правильные,
все такие равносторонние,
углы все у них равны, мммм.

Вот тебе вся плоскость. Замощай её полностью:

ещё
правильный
5-угольник

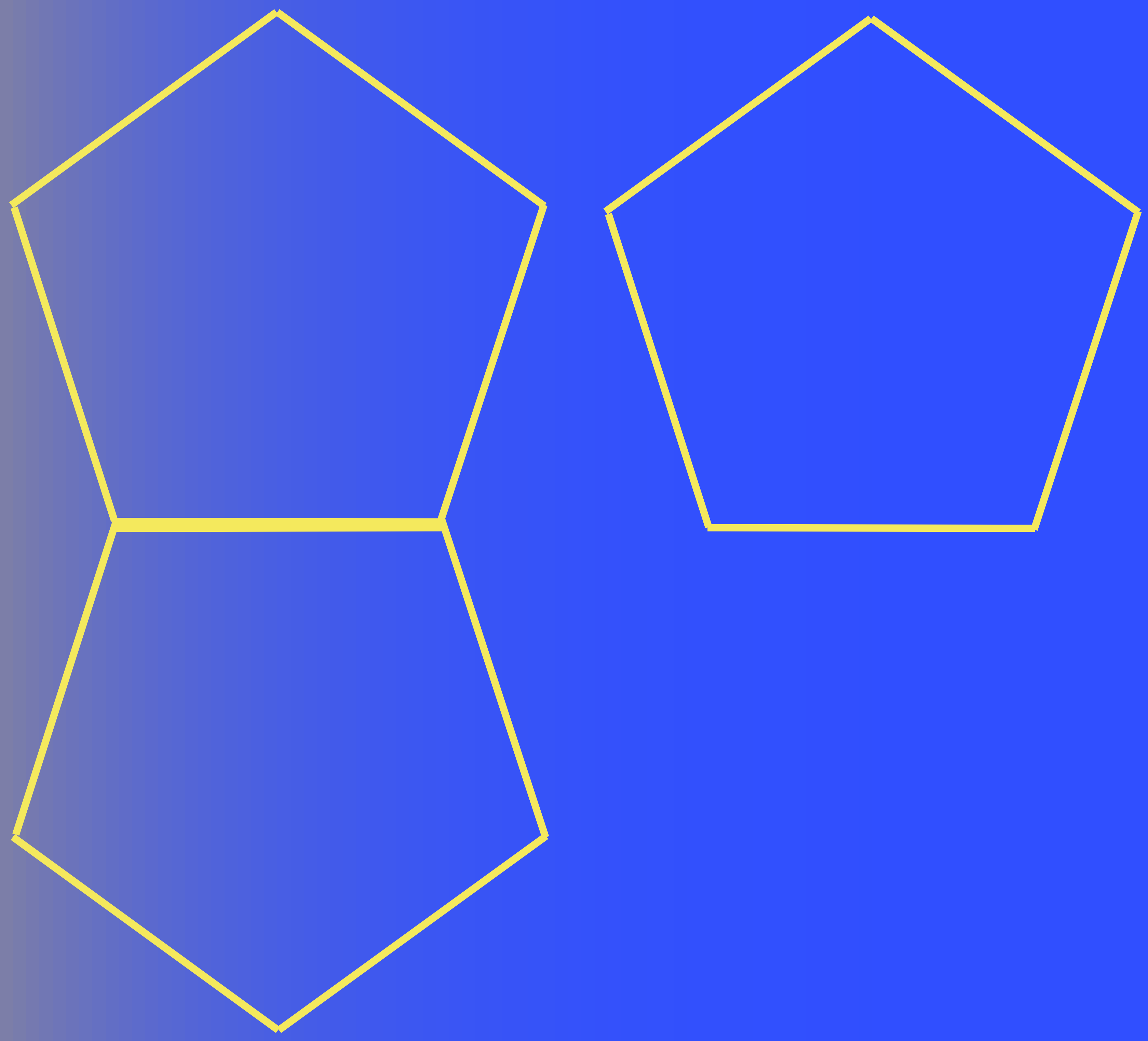


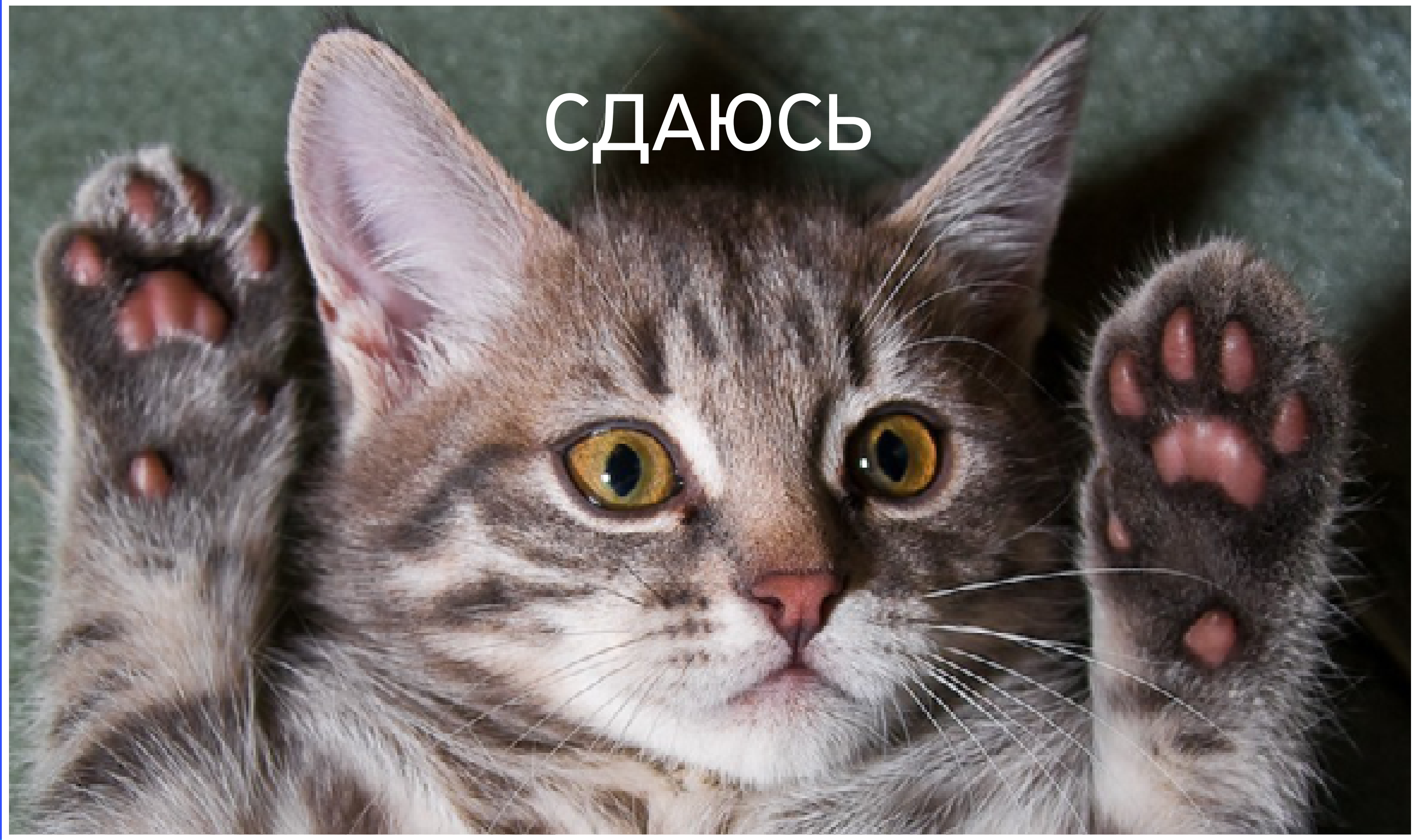
примечания:

Невозможно замостить плоскость правильными пятиугольниками.
Поэтому после того, как школьник чуть-чуть повозится,
следует перейти на следующий разворот.

Вот тебе вся плоскость. Замощай её полностью:

ещё
правильный
5-угольник





примечания:

Невозможно замостить плоскость правильными пятиугольниками.
Поэтому после того, как школьник нажимает на кнопку «сдаюсь»,
переходим на следующий разворот, где объясняются причины.

Дело в том, что правильным пятиугольником
нельзя замостить плоскость. Никак. Совершенно.
Поэтому на кнопку «сдаюсь» ты нажал(а) совершенно правильно.

А нельзя вот почему
(на самом деле объяснение достаточно простое).

Углы правильного n-угольника
равны $180^\circ * (n-2)/n$.

Если в одной точке плоскости
сходятся m одинаковых
правильных n-угольников,
то должно выполняться равенство

$$m * 180^\circ * (n-2)/n = 360^\circ$$

Отсюда
$m = 2n/(n-2)$
Для пятиугольника ($n=5$), $m = 2*5/3$

Отсюда же видно,
что правильным 6-угольником
замостить плоскость можно
(пчёлы, соты).
А вот 5-угольником —
видите, нельзя.

При $n>6$
$2n/(n-2)$
не может быть целым числом
(это не очень легко
доказать, но и
не слишком трудно).
Поэтому правильный
шестиугольник — последний
правильный многоугольник,
которым можно замостить
плоскость.

пятиугольники

То есть получается, что
можно придумать пятиугольник,
которым можно замостить плоскость
(домик),
и пятиугольник,
которым нельзя замостить плоскость
(правильный).

Есть задача «описать все пятиугольники, которыми можно замостить плоскость».
Их сейчас известно 18 типов и не доказано, что это все.

Пока что рассматривались
только периодические паркеты.

(Да, замощения плоскости
ещё называют паркетами.)

Но, оказывается,
можно придумать и непериодические.

Существует непериодический паркет

всего из двух элементов.

Придумал его Пенроуз.

Вот какой он, этот паркет:

Не доказано и не опровергнуто,
бывают ли непериодические паркеты
из одного элемента или нет.

При всей непериодичности,
большие куски могут повторяться
(как в числе Пи).

Если птица будет летать над планетой,
замощённой таким образом,
и увидит кусок, похожий на тот,
в котором она родилась и выросла,
она не сможет отличить старый от нового.

Поиграй в iOrnament! Доступно в AppStore.