Привет!
В математике, да и в жизни вообще,
очень распространено такое понятие, как график функции.

Поясню, что это такое.

график функции

Ну то есть, я должен объяснить два непонятных слова —
слово «график» и слово «функции».

график **функции**

Окей,
функцией называется запись вида y = f(x),
где f(x) — некоторое алгебраическое выражение.
Например,

$$y = x^2 + 2x - 6$$

$$y = 1/x$$

$$y = |x-4|$$

$$y = sqrt(x+2)$$

график функции

Обратим внимание на важнейшую деталь,
которая и является сутью определения функции:
каждому x соответствует только одно значение y.
Не может быть такого, чтобы значение какой-то функции,
например, в точке 2 ($x=2$) было равно
и шести и восьми одновременно ($y=6$, $y=8$).

Определив функцию так, как мы определили,
мы запретили такое.

Температура за окном не может быть одновременно
равна +20 и −30, правда?..
Всегда какое-то одно число.

график функции

f: X -> Y

область определения функции

область значений функции

А теперь версия
для совсем продвинутых мальчиков и девочек:
функцией f называется отображение
из пространства X в пространство Y,
заданное для всех элементов пространства X.

Пространство X тогда называется
областью определения функции,
пространство Y — областью значений функции.

график функции

А теперь я должен объяснить слово «график».

А объяснение простое:
любую функцию можно нарисовать.
(три изображения мелькают перед вами)

$$y = x - 3$$

Нарисовать любую функцию очень легко.
И делается это по точкам.

Сейчас для того, чтобы всё стало понятно,
мы нарисуем по точкам функцию
$y = x - 3$.

(дальше большой вопрос к самому себе —
а как они её будут рисовать, на бумажке
или в нашей интерактивной среде?)

Теперь мы будем рисовать по точкам много функций.

$y = x + 2$
$y = 4 - x$
$y = 2x$
$y = (1/4)*x$
$y = 2x + 3$
$y = -2x - 5$
$y = x^2$
$y = x^2 + 3$
$y = x^2 - 4$
$y = -x^2$
$y = x^2 - 4x + 3$
$y = x^3$
$y = sqrt(x)$
$y = |x|$

$y = |x+2|$
$y = |x| + 2$
$y = |x-2|$
$y = |x| - 2$
$y = sqrt(x+2)$
$y = sqrt(x)+2$
$y = sqrt(x-2)$
$y = sqrt(x)-2$
$y = (x+2)^2$
$y = x^2 + 2$
$y = (x-2)^2$
$y = x^2 - 2$
$y = 1/x$
$y = 1/(x+2)$

Какие ещё можно придумать функции?

Да, в общем-то, какие угодно!

Ты можешь придумать какую угодно фигню,
например,
такую, такую или такую
(три удачных примера мелькают на экране)
и сам(а) по точкам её нарисовать!
Просто подставляешь разные иксы, смотришь,
какие игреки получаются, и ставишь точки!

Например, есть Heart Curve и Batman Curve,
и задаются они вот такими вот уравнениями.
Но такое придумать вряд ли легко :D

Итак, мы научились строить
графики функций.
Если нам дадут функцию, мы, не приходя в сознание,
не включая голову совершенно,
возьмём и построим её график по точкам.

А теперь перейдём на следующий уровень джедайства:
научимся «чувствовать» разные функции
и сразу по внешнему виду ставить диагноз.

Вот, например, ты рисовал(а)

$$y = x + 2$$

$$y = 4 - x$$

$$y = 2x$$

$$y = (1/4)\,x$$

$$y = 2x + 3$$

$$y = -2x - 5$$

Какой геометрической фигурой является каждый из этих графиков?

Потом, ты рисовал(а) графики таких функций:

$$y = x^2$$

$$y = x^2 + 3$$

$$y = x^2 - 4$$

$$y = -x^2$$

$$y = x^2 - 4x + 3$$

Не правда ли, все эти графики выглядят…

примерно одинаково?

Все эти графики называются параболами.

$$y = x^2$$

$$y = x^2 + 3$$

$$y = x^2 - 4$$

$$y = -x^2$$

$$y = x^2 - 4x + 3$$

Простейший пример параболы как раз

$$y = x^2$$

А вообще, параболой выглядит любая функция вида

$$y = ax^2 + bx + c$$

где a,b,c — какие-то числа.

Например, $-5x^2 + 11x - 11/3$

Едем дальше. Ты строил

$$y = x - 3$$

$$y = x + 2$$

Чем отличаются эти два графика?

А графики

$$y = 2x$$

$$y = 2x + 3$$

которые ты тоже строил?

Правильно. На примере
последних двух графиков
видно, что
добавление тройки просто поднимает
весь график на 3.

$$y = 2x$$

$$y = 2x + 3$$

А если бы мы хотели нарисовать

$y = 2x - 3$

то нужно было бы просто опустить $y = 2x$ на три.

$$y = 2x$$

$$y = 2x + 3$$

А если если бы мы хотели нарисовать

$y = 2x - 7$

— опустить на семь.

$$y = 2x$$

$$y = 2x + 3$$

Договорились:
добавление какого-то числа
означает, что просто нужно всю картинку сдвинуть вверх
на это число;

вычитание —
что нужно всю картинку сдвинуть вниз на это число.

$$y = 2x$$

$$y = 2x + 3$$

Теперь почти последнее, что мы сейчас обсудим до смешной задачи:

$y = |x+2|$ $\quad$ $y = \mathrm{sqrt}(x+2)$ $\quad$ $y = (x+2)^2$

$y = |x-2|$ $\quad$ $y = \mathrm{sqrt}(x-2)$ $\quad$ $y = (x-2)^2$

Не правда ли, каждая из этих картинок оказалась просто сдвинутым графиком

$y = |x|$ $\quad$ $y = \mathrm{sqrt}(x)$ $\quad$ $y = x^2$

Получилось, что замена x

на $x+2$ (или $x-2$)

просто дала сдвиг графика по оси x.

Это общее правило:
если взять какую-нибудь страшную функцию,
например,
$y = x*\mathrm{sqrt}(x) + 2/(1 + \mathrm{sqrt}[3](x) - x^6)$
и построить по точкам её график,
то график функции
$y = (x-4)\ \mathrm{sqrt}(x-4) + 2/(1 + \mathrm{sqrt}[3](x-4) - (x-4)^6)$
не будет отличаться вообще ничем,
кроме того, что будет сдвинут на 4.

Ну хорошо, а какие ещё
принципиально новые функции бывают?

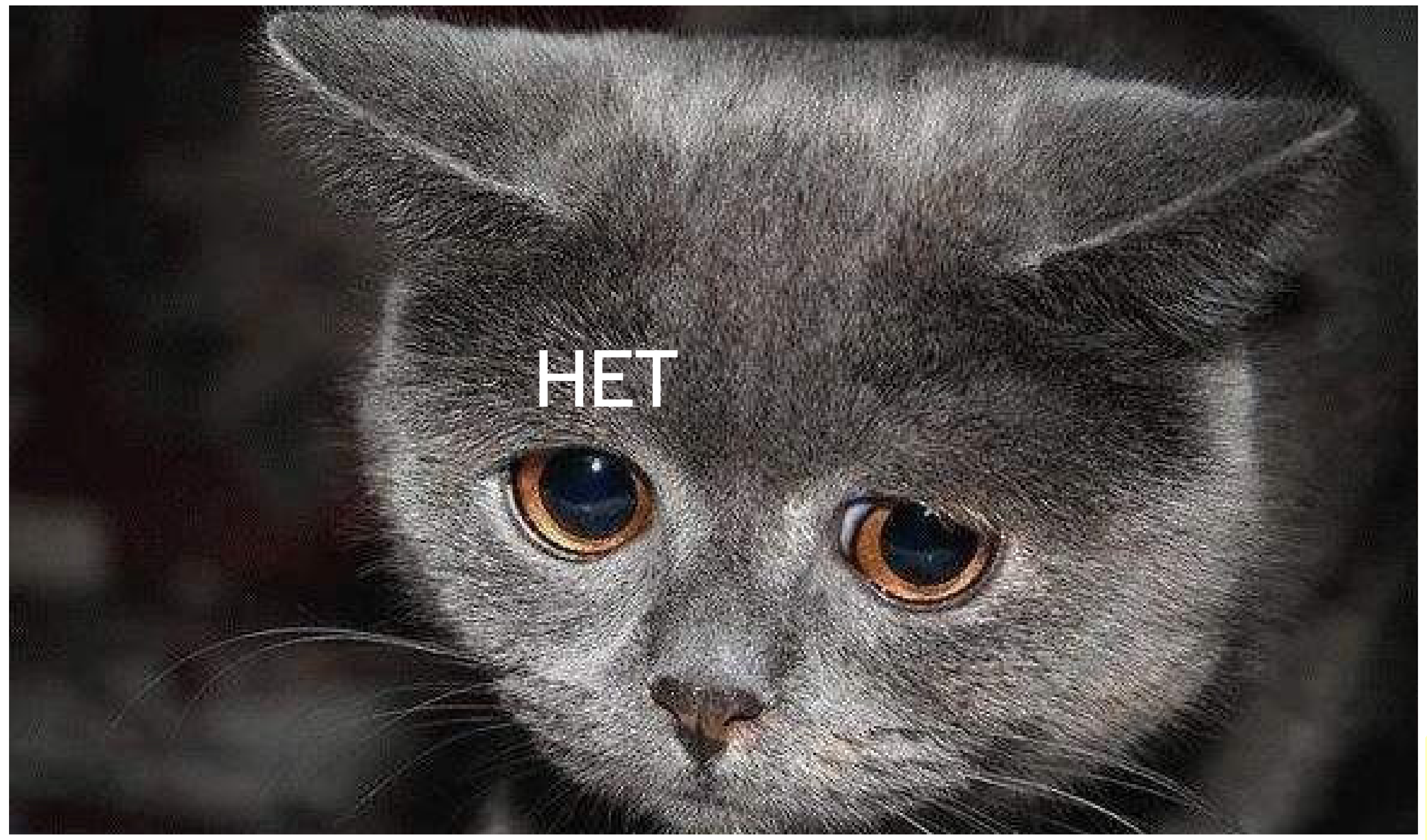
Давай нарисуем $y = 2^x$.
Вроде бы такого мы ещё не рисовали.
По крайней мере, для положительных x очень легко
рисовать по точкам: 2, 4, 8...

Мы видим, что она быстро растёт. Как какая-нибудь $y=x^4$.

Ммм, а кто же быстрее — $y=x^4$ или $y=2^x$? Кто кого обгонит?
А $y=x^{1000}$ или $y=2^x$?
А $y=x^{1000}$ или $y=1.00001^x$?

Теперь та самая смешная задача, которую я обещал.
Я обещал смешную задачу — будет смешная задача.

Смотри, встретились два путника.



Один другому делает такое предложение: в первый день я тебе даю 100000 рублей, а ты мне — 1 копейку. Во второй день я тебе даю 100000 рублей, а ты мне — 2 копейки.
В третий день — 4 копейки.
И так месяц.

Вот согласишься ли
ТЫ
на такое?

Ну а теперь давай попробуем посчитать.
Когда тебе кто-то предлагает какие-то
офигительные сделки,
всегда лучше сначала посчитать,
кому это выгодно, правда? :)

день	дань
1	1 копейка
2	2 копейки
3	4 копейки
4	8 копеек
5	16 копеек
...	...
11	1024 копеек; для простоты 10 рублей
12	20 рублей
13	40 рублей
...	...
21	10240 рублей; для простоты 10000 рублей
...	...
31	1000*10000 = 10 миллионов рублей
30	5 миллионов рублей

30 * 100 000 = 3000 000 = 3 миллиона рублей

А сколько мы получим от предлагающего такую игру?
Каждый день мы будем получать по 100 тысяч,
т.е. за 30 дней мы получим 30*100 тысяч,
то есть 3 миллиона рублей.

Получается, мы только за 30-й день
отдадим больше, чем весь наш заработок.

То есть функция

$y = 2^x$

обогнала функцию

$y = 10000000 + 10000000*x$

на 30-й день.

(здесь я учёл, что

сто тысяч рублей — это десять миллионов копеек)

Нарисовать график
и сказать, что вы сами можете такой построить
по точкам в
Wolfram Mathematica или Excel.

Сказать про легенду о создании шахмат
и про то, что
лист бумаги, сложенный в 48 раз, достаёт до Луны

Ну хорошо, $y = 2^x$ —
тут всё-таки понятно,
что 2, 4, 8, 16 слишком быстро растёт.

Что насчёт основания поменьше?
Вот, например,
$y = 1.1^x$

1.1, 1.21, 1.331, …
Вроде бы растёт медленно, нет?

Сейчас мы решим задачу,
о которой мне рассказал мой друг.

Это даже не задача,
а невыдуманная история, о которой невозможно молчать.

Смотри.

Ехал, в общем, мой друг в метро и наткнулся
на объявление:
банк даёт деньги в кредит под 2% в день.

Вообще, как бы сразу вопрос к вам, на общую эрудицию:
2% в день — это выгодный кредит или нет,
обычно выше процент, ниже?

Да, конечно.
Это совершенно ужасный процент,
обычно кредитные ставки находятся на уровне где-то
16—20% в год,
т.е. если ты берёшь 1000 рублей,
то тебе придётся вернуть

[кстати, сколько тебе придётся вернуть?]

Так вот, допустим, мы в таком банке
— который даёт деньги в кредит под 2% в день —
взяли 1000 рублей.

Если мы на первый день вернём, придётся брать 1020.

А сколько придётся вернуть на второй день?

Например, 1040.20

(Переход к следующему слайду происходит
при любом из ответов
«1040» или «1040.40» или «1040.4»)

На самом деле ответ может быть разный
в зависимости от того, простой процент или сложный.

Тут надо рассказать, что такое простой и сложный процент.

Простой процент — это когда процент
каждый раз
берётся от первоначальной суммы.

Сложный процент — это когда процент
каждый раз
берётся не от первоначальной суммы долга,
а от текущей суммы долга.

Посчитаем для нашего примера.
Простой процент — это когда процент
каждый раз
берётся от первоначальной суммы
т.е. 2% в день каждый раз
берутся от 1000 рублей,
т.е. плюс 20 рублей долга ежедневно.

То есть долг выглядит как
1000, 1020, 1040, 1060...

Сложный процент — это когда процент
каждый раз
берётся от текущей суммы долга.

Т.е. после первого дня долг стал равен 1020,
по итогам второго дня — 1020 + 2% от 1020
(заметь, не от тысячи уже берётся процент,
а от 1020!)
и т.д.

$1000,\ 1.02*1000,\ (1.02)^2*1000,\ ,\ (1.02)^3*1000,\ \ldots$

Понятно, что сложный процент даёт бОльшие числа,
потому что процент каждый раз начисляется
на бОльшую сумму, чем в случае простого процента.

Но насколько бОльшие?

Можешь ли ты мне сказать, сколько придётся
выплатить через полгода
в случае сложного процента?

А в случае простого?

А через год? :D

Запишем явную формулу для случая простого процента.

$$S = 1000 + 20t$$

Это линейная зависимость.

Запишем явную формулу для случая простого процента.

$$S = 1000 * (1{,}02)^t$$

Это нелинейная зависимость.

Сложные задачи на рисование функций

Определить области определения
и области значения функций:

$y = x^2/(1+x)$

$y = sqrt(3x - x^3)$

$y = (x-2)*sqrt((1+x)/(1-x))$

$y = sqrt(2 + x - x^2)$

Построить графики:

$y = 2$

$y = 2 - 0.1\ x$

$y = 2x^2$

$y = (1/2)\ x^2$

$y = 8x - 2x^2$

$y = (x^2 + 4x + 3)/(x+1)$

$y = x^3 + 1$

Построить графики:

$y = x^3$

$y = x^5$

$y = x^4$

$y = x^6$

$y = (1 - x^2)(2 + x)$

$y = x^2 - x^4$

$y = sqrt[3](x)$

$y = sqrt[5](x)$

$y = sqrt[4](x)$

$y = sqrt[6](x)$

$y = (1-x)/(1+x)$

$y = (3x+2)/(2x-3)$

$y = x^2 + 1/x$

$y = 1/(1+x^2)$

$y = 2x/(1+x^2)$

$y = 1 + 2^{-x}\ (x - 1)$

Функция, график которой выглядит как прямая, называется линейной.

Все остальные функции называются нелинейными.

Такой вопрос:

а вот такая функция (график кусочно-линейной функции)

— линейная или нелинейная?

На каждом своём участке она — линейная,
но в целом линейной как бы не является, да?

Такие функции называют кусочно-линейными.

Кусочно-линейные функции возникают,
когда скорость какого-то процесса
меняется скачком с постоянной на постоянную.

Например, заполнение ванны:
понятно, что пока ты не трогаешь кран,
она заполняется равномерно,
т.е. за равные промежутки времени
прибывает одинаковое количество воды.
Когда ты резко уменьшил толщину струи воды,
ванна тоже заполняется равномерно,
просто медленнее.

На самом деле,
ранее нам уже встречалась кусочно-линейная функция.
Это функция

$$y = |x|$$

$y = |x|$

Действительно, это ведь то же самое, что

$y = x$ для $x >= 0$
$y = -x$ для $x < 0$

На каждом из этих кусков,
на каждом из этих промежутков
функция является линейной.

Хороший пример кусочно-линейной функции —
функция под названием «целая часть»

$$y = [x]$$

(да, вот так она записывается, такими скобочками)

$$y = [x]$$

Определение. Целой частью числа x называется
наибольшее целое число,
не превосходящее x.

График у неё вот такой:

Ещё есть функция «дробная часть»

$$y = \{x\}$$

тоже кусочно-линейная

(вот так записывается)

Ещё есть функция «дробная часть»

$$y = \{x\}$$

Примеры для интуиции:

$\{3.756\} = 0.756$; $\{14\} = 0$; $\{-5.2\} = 0.8$

Ещё есть функция «дробная часть»

$$y = \{x\}$$

Определение. Дробной частью числа x называется разность между числом x и его целой частью:

$\{x\} = x - [x]$.

Её график попробуй построить самостоятельно.

Построй график функции $y = \{x\}$

Более того, функция вообще может быть кусочно-заданная.

$y =$

$10/(x^2 + 1)$, если $x <= -1$

$x^2 + 4$, если $-1 <= x <= 3$

$16 - x$, если $x > 3$