

応数Ⅰ（フーリエ） 課題3

H30 年度 番号 4J42

関数の直交関係

例題 8-1～8-10 を参考にし、章末問題の[演習 1] (1)～(7)を行う。

（計算過程が分かっているならば計算過程の記入はシンプルでよい）

(1)

$$\begin{aligned}\langle \sin 3\omega_0 t, \sin \omega_0 t \rangle &= \frac{1}{\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega_0 t \cdot \sin 2\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (\cos 3\omega_0 t + \cos \omega_0 t) = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{1}{3}\right) \sin 3\omega_0 t \right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} [\sin \omega_0 t]_0^{\frac{T}{2}} = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\langle \cos 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos 2\omega_0 t \cdot \cos 3\omega_0 t \, dt = \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos 5\omega_0 t + \cos \omega_0 t) \, dt \\ &= \frac{1}{T} \left[-\frac{1}{5\omega_0} \sin 5\omega_0 t - \frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{T} (0 - 0) = 0\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\langle \sin \omega_0 t, \cos 3\omega_0 t \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega_0 t \cdot 3\cos \omega_0 t \, dt = \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sin 4\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t) \, dt \\ \sin 4\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t &\text{ は偶関数より、与式} = 0\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\langle \sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 t \, dt = \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin 2\omega_0 t + \sin(0 \cdot t) \, dt \\ \sin 2\omega_0 t, \sin(0 \cdot t) &\text{ は偶関数より、与式} = 0\end{aligned}$$

(5)

$$\langle 1, \sin \omega_0 t \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \sin \omega_0 t \, dt \quad \sin \omega_0 t \text{ は偶関数より、与式} = 0$$

(6)

$$\langle 1, \cos \omega_0 t \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \sin \omega_0 t \, dt = \frac{2}{T} \left[\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right]_0^T = 0 - 0 = 0$$

応数Ⅰ（フーリエ） 課題3

H30 年度 番号 4J42

(7)

$$\begin{aligned} ||\sin\omega_0 t||^2 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\omega_0 t \cdot \sin\omega_0 t \, dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \omega_0 t \, dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 - 2\cos 2\omega_0 t}{2} \, dt \\ &= \frac{1}{2T} [t - \sin 2\omega_0 t]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2T} \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} - 0 + 0 \right) = \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2} \\ ||\sin\omega_0 t|| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

合成波のグラフ化と実フーリエ級数と係数の計算

例題 8-12～8-14 を参考にし，章末問題の[演習 2]を行う．

[演習 2]

(1)

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + 2 \sin t + \frac{2}{3} \sin 3t + \frac{2}{5} \sin 5t$$

