応数Ⅰ（フーリエ）　課題２

H30 年度 番号 4J42

ベクトル（内積・ノルム・直交）の復習
章末問題の[演習 3]～[演習 7]を行う。
[演習 3]

(1) $2 \times 3 + (-2) \times (-4) = 6 + 8 = 14$

(2) $\frac{4}{5} \times (-5) + 3 \times 1 + \left(-\frac{5}{2}\right) \times (-6) = (-4) + 3 + 15 = 14$

(3) $(-2) \times 4 + 3 \times 2 + (-5) \times (-2) + (-4) \times 2 = (-8) + 6 + 10 + (-8) = 0$

[演習 4]

$\mathbb{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbb{x}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$とするときノルム$\|\mathbb{x}_1\|$，$\|\mathbb{x}_2\|$ は以下の式で求められる.

$$\|\mathbb{x}_1\| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$\|\mathbb{x}_2\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 4} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

これを利用して正規化して，正規直交規定を求める.

$\mathbb{u}_1 = \frac{\mathbb{x}_1}{||\mathbb{x}_1||} = \frac{1}{\sqrt{41}}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbb{u}_2 = \frac{\mathbb{x}_2}{||\mathbb{x}_2||} = \frac{2}{\sqrt{41}}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 以上より、$\frac{1}{\sqrt{41}}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$，$\frac{2}{\sqrt{41}}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

[演習 5] $[1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ と 0 を 2 カ所以上入れられるのは 1 つのみとする.

$\mathbb{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$とおいたとき$\mathbb{x}_1$に対して内積が 0 になるように$\mathbb{x}_2, \mathbb{x}_3$の最初の要素を 0 とおく.

$\left(\mathbb{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ * \end{bmatrix}, \mathbb{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ * \end{bmatrix}\right)$　$\mathbb{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$，$\mathbb{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$は直交している．正規直交ベクトルにする.

正規直交ベクトルの組は，$\mathbb{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \mathbb{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ である.

[演習 6]

$$\alpha_1 = g \cdot \mathbb{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 1 - \sqrt{3}, \qquad \alpha_2 = g \cdot \mathbb{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\sqrt{3} - 1$$

[演習 7]

$$\mathbb{g} = \alpha_1 \cdot \mathbb{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbb{u}_2 = (1 - \sqrt{3}) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} + (-\sqrt{3} - 1) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1 - \sqrt{3})}{2} \\ \frac{(\sqrt{3} - 3)}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(3 + \sqrt{3})}{2} \\ \frac{(-\sqrt{3} - 1)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

以上より、再現できた。
[プログラミング演習]

応数Ⅰ（フーリエ）　課題２

H30 年度 番号 4J42

下記それぞれを手計算で行った後，プログラミングで確認しなさい．

・[演習 5]で用意した正規直交なベクトルを利用し，あるベクトルに対応する成分を求めなさい．

手計算：$\mathbb{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \mathbb{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, \mathbb{u}_3 = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$　とし，$\mathbb{x}_\mathrm{N} = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$とすると，

$$\alpha_1 = \mathbb{x}_\mathrm{N}\cdot\mathbb{u}_1 = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 2, \alpha_2 = \mathbb{x}_\mathrm{N}\cdot\mathbb{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = -\sqrt{2}, \alpha_3 = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 0$$

プログラム結果：あるベクトルに対する成分を求めた実行結果は以下である。

```
=====a=====
a0=2.000000
a1=-1.414214
a2=0.000000
```

これは、手計算と一致している。

・正規直交なベクトルと対応する成分を用い，あるベクトルに戻るかを確認しなさい．

手計算：$\mathbb{x}_\mathrm{N} = \alpha_1\cdot\mathbb{u}_1 + \alpha_2\cdot\mathbb{u}_2 + \alpha_3\cdot\mathbb{u}_3 = 2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \left(-\sqrt{2}\right)\cdot\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$

プログラム結果：実行結果は以下の通りである。

```
=====Xn=====
Xn=[  2.000000 -1.000000  1.000000 ]T
```

手計算で求めた結果と一致し、あるベクトルに戻ることが確認できた。

プログラム全体の実行結果を以下に示す。

```
4J 42 廣瀬　翔
=====正規直交基底=====
 1.000000  0.000000  0.000000
 0.000000  0.707107  0.707107
 0.000000 -0.707107  0.707107
=====正規直交基底の確認=====
u1=[  1.000000  0.000000  0.000000 ]T
u2=[  0.000000  0.707107 -0.707107 ]T
u3=[  0.000000  0.707107  0.707107 ]T
<u1・u1> = 1.000000
<u1・u2> = 0.000000
<u2・u2> = 1.000000
<u2・u3> = 0.000000
<u3・u3> = 1.000000
=====あるベクトル Gn=====
g=[  2.000000 -1.000000  1.000000 ]T
=====a=====
a0=2.000000
a1=-1.414214
a2=0.000000
=====Xn=====
Xn=[  2.000000 -1.000000  1.000000 ]T
```