2 章

Exercise 2.5.

($\Rightarrow$) $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ に対応する流れをそれぞれ φ_t, ψ_t とする．流れの定義より，

$$\dot{\varphi}_t(\boldsymbol{x}) = \mathbf{X}(\varphi_t(\boldsymbol{x})), \quad \dot{\psi}_t(\boldsymbol{x}) = \mathbf{Y}(\psi_t(\boldsymbol{x})) \tag{1}$$

を満たす．微分同相写像 $\mathbf{\Phi}$ についてこれらの流れが共役，つまり $\mathbf{\Phi} \circ \varphi_t(\boldsymbol{x}) = \psi_t \circ \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})$ と仮定する．この式の両辺を t で微分すると，

$$\begin{aligned} [\mathrm{D}\mathbf{\Phi}(\varphi_t(\boldsymbol{x}))]\, \dot{\varphi}_t(\boldsymbol{x}) &= \dot{\psi}_t \circ \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}) \\ \Leftrightarrow [\mathrm{D}\mathbf{\Phi}(\varphi_t(\boldsymbol{x}))]\, \mathbf{X}(\varphi_t(\boldsymbol{x})) &= \mathbf{Y}(\psi_t \circ \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})) \end{aligned} \tag{2}$$

$t = 0$ を代入すると，φ_0, ψ_0 は恒等写像なので，

$$\mathrm{D}_x\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{X}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{Y}(\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})) \tag{3}$$

($\Leftarrow$) 式 (3) を満たす微分同相写像について，$\boldsymbol{y}(t) = \mathbf{\Phi} \circ \varphi_t(\boldsymbol{x})$ とする．このとき

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{y}}(t) = D\mathbf{\Phi}(\varphi_t(\boldsymbol{x}))\mathbf{X}(\varphi_t(\boldsymbol{x})) &= \mathbf{Y} \circ \mathbf{\Phi} \circ \varphi_t(\boldsymbol{x}) \quad (\because \text{ eq. } (3)) \\ &= \mathbf{Y}(\boldsymbol{y}(t)) \end{aligned} \tag{4}$$

したがって $\boldsymbol{y}(t)$ は $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})$ を初期条件とし，$\mathbf{Y}$ をベクトル場とする微分方程式の時刻 t における解である．つまり $\boldsymbol{y}(t) = \psi_t \circ \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})$ である．