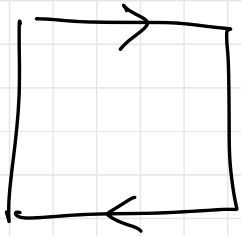
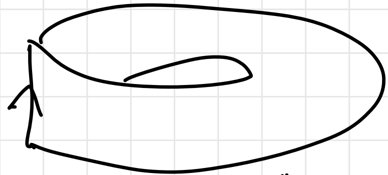
東工大 2016 [5]

(1)



A

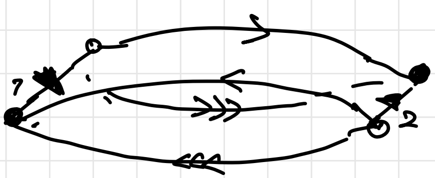
$\simeq$ ホモトピー同値



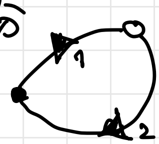
メビウスの帯 $\simeq S^1$

よって. $$H_n(A) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0,1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) $A\times\{0\}=U$, $A\times\{1\}=V$ とおき Mayer-Vietoris 完全列を適用する. $U\cap V$ は S^1 となる.



$\longrightarrow$ 共通部分



$\simeq S^1$.

また $A\times\{0\} \simeq A\times\{1\} \simeq A$ である. さて, Mayer-Vietoris 列を

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H_2(U)\oplus H_2(V)}_{0} \xrightarrow{\beta_2} H_2(B) \xrightarrow{\partial_2} \underbrace{H_1(U\cap V)}_{\mathbb{Z}}$$

$$\xrightarrow{\alpha_1} \underbrace{H_1(U)\oplus H_1(V)}_{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow{\beta_1} H_1(B) \xrightarrow{\partial_1} \underbrace{H_0(U\cap V)}_{\mathbb{Z}}$$

$$\xrightarrow{\alpha_0} \underbrace{H_0(U)\oplus H_0(V)}_{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow{\beta_0} H_0(B) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

としよう. α_1 は各メビウスの帯を2周ずつする. よって. α_1 を表す写像 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ は

$$n \mapsto (2n, 2n)$$

となる. $\operatorname{Ker}\alpha_1 \cong 0$

$\operatorname{Im}\alpha_1 \cong 2\mathbb{Z}$ である.

いま $\operatorname{Im}\partial_2 = \operatorname{Ker}\alpha_1 \cong 0$ ということで,

$0 \to H_2(B) \to 0$ という完全列が従う.

よって $H_2(B) \cong 0$

α_0 を見ると. $n \mapsto (n, n)$ となるから

$$\operatorname{Ker}\alpha_0 = 0$$

$$\operatorname{Im}\alpha_0 \cong \mathbb{Z}.$$

$\operatorname{Im}\partial_1 = \operatorname{Ker}\alpha_0 \cong 0$ である. また.

$\operatorname{Ker}\beta_1 = \operatorname{Im}\alpha_1 = 2\mathbb{Z}$ と準同型定理より.

$\operatorname{Im}\beta_1 = \mathbb{Z}^2/\operatorname{Ker}\beta_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. したがって.

完全列 $0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to H_1(B) \to 0$

が従う. よって $H_1(B) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
が分かった. 最後に, Bは連結であるから,
$H_0(B) = \mathbb{Z}$ である. 以上により

$$H_n(B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (n=1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases},$$