

東工大 2018 [5]

(1) \sim の定義に使われた条件

$$((x_1, x_2), t) = ((x_1', x_2'), t')$$

を (A), $\{t, t'\} = \{-1, +1\}$ かつ $(x_1', x_2') = (-x_1, -x_2)$ を (B) とおく。

・反射律については、自身とは (A) が満たされるから成り立つ。

・対称律については、(A) かつ (B) が成り立つか否かが、 $((x_1, x_2), t)$ と $((x_1', x_2'), t')$ を入れ替えても変わらないので成り立つ。

・推移律について、 $a, b, c \in A \times I$ を任意の元として、 $a = ((x_a, y_a), t_a)$

$$b = ((x_b, y_b), t_b)$$

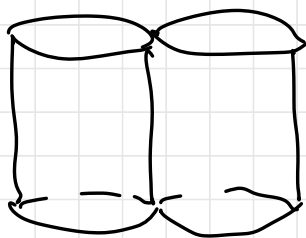
$$c = ((x_c, y_c), t_c)$$

とおく、 $a \sim b$ 、 $b \sim c$ のいずれか (または両方) で (A) が満たされるとき、それぞれ $a = b$ 、 $b = c$ が成り立つので $a \sim c$ である

$a \sim b, b \sim c$ で条件 (B) が"どちらも成り
 立っているときは $x_a = -x_b = x_c,$
 $y_a = -y_b = y_c, t_a = -t_b = t_c$ が導く
 ため、 $a=c$ となり条件 (A) が満たされる。
 よって $a \sim c$ となる。

以上から、 \sim は $A \times I$ の同値関係である。

(2) $A \times I$ は次のようになる:



これは、

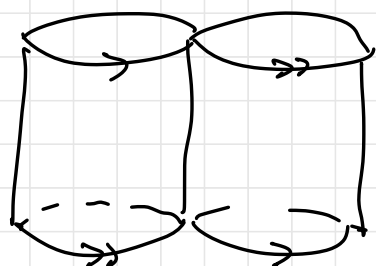
$$\bigcirc \cup \bigcirc \simeq S^1 \vee S^1 \text{ (1点和) と}$$

ホモトピー-同値である。よって

$$H_n(A \times I) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (n=1) \\ \mathbb{Z} & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である。

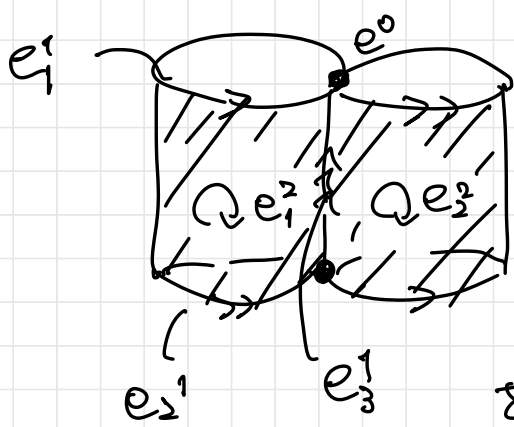
(3) X は、次のようになる。



$$X = A \times \mathbb{I} / \sim$$

ただし、矢印の向きを同一視する。

これを次のように胞体分割する。



$$\{e^0, e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_1^2, e_2^2\}$$

これによって鎖複体

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

を導く。

$\partial_2: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$ については、

e_1^2 は e_2^1 を -1 周, e_1^1 を $+1$ 周

e_2^2 は e_1^1 を -1 周, e_2^1 を $+1$ 周する。

よって ∂_2 は $(n_1, n_2) \mapsto (n_1 - n_2, n_1 + n_2, 0)$

となり $\ker \partial_2 \cong \mathbb{Z}$, $\text{Im } \partial_2 \cong \mathbb{Z}$.

$\partial_1: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ は 0 写像である。よって

$\ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}^3$, $\text{Im } \partial_1 \cong 0$.

1X ⊂ P⁵

$$H_2(X) \cong \ker \partial_2 \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(X) \cong \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 \cong \mathbb{Z}^2$$

$$H_0(X) \cong \ker \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 \cong \mathbb{Z},$$

$$\text{for } H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0, 2) \\ \mathbb{Z}^2 & (n=1) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$