# 東工大 2021【4】

$$A \simeq S^1 \times S^1$$

$$B \simeq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

$$\simeq \{1点\}$$

(ホモトピー同値) に注意する. また, $A \cap B$ は

$$A \cap B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$x_3^2 + x_4^2 = 1,\ x_1 = x_3,\ x_2 = x_4\}$$

$$= \{(x_1, x_2, x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

$$\simeq \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

$$\simeq S^1$$

に注意する. A, B について Mayer-Vietoris 完全系列を考えると.

$$\cdots \to H_3(X) \xrightarrow{\partial_3} \underset{0}{H_2(A \cap B)} \xrightarrow{\alpha_2} \underset{\mathbb{Z}}{H_2(A) \oplus H_2(B)}$$

$$\xrightarrow{\beta_2} H_2(X) \xrightarrow{\partial_2} \underset{\mathbb{Z}}{H_1(A \cap B)} \xrightarrow{\alpha_1} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_1(A) \oplus H_1(B)}$$

$$\xrightarrow{\beta_1} H_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \underset{\mathbb{Z}}{H_0(A \cap B)} \xrightarrow{\alpha_0} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_0(A) \oplus H_0(B)}$$

$$\xrightarrow{\beta_0} H_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

このようになる.

- まず, A, B はそれぞれ連結であり, $A \cap B \neq \phi$ なので, X は連結. よって $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

- $\alpha_1$ を調べる. $\alpha_1$ は, $H_1(A \cap B)$ の生成元(円周)が, $H_1(A)$ の各生成元(円周2つ)を1周ずつするので, $n \mapsto (n, n)$ と対応する. よって $\mathrm{Ker}\,\alpha_1 \cong 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_1 \cong \mathbb{Z}$.

- $\mathrm{Im}\,\partial_2 \cong \mathrm{Ker}\,\alpha_1 \cong 0$ より, 完全列 $0 \to \mathbb{Z} \to H_2(X) \to 0$ が導く. よって $H_2(X) \cong \mathbb{Z}$.

- $\alpha_0$ を調べる. これは $n \mapsto (n, n)$ となるので $\mathrm{Ker}\,\alpha_0 \cong 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_0 \cong \mathbb{Z}$ である.

- 準同型定理より, $\mathrm{Im}\,\beta_1 \cong \mathbb{Z}^2 / \mathrm{Ker}\,\beta_1 \cong \mathbb{Z}^2 / \mathrm{Im}\,\alpha_1 \cong \mathbb{Z}$. さらに, $\mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathrm{Ker}\,\alpha_0 \cong 0$.

よって, $\beta_1$, $\partial_1$, $\alpha_0$ の付近の関係から, 完全列 $0 \to \mathbb{Z} \to H_1(X) \to 0$ が従う.

よって $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$.

以上より $H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 1, 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$