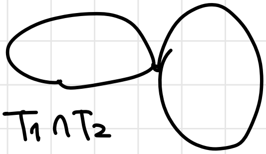
# 東工大 2015 [4]

(1)



$T_1 \cap T_2$

$\simeq S^1 \vee S^1$ (一点和)

である.

$T_1 \cap T_2$ は連結だから, $H_0(T_1 \cap T_2) \cong \mathbb{Z}$

また, $H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0,1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ より,

$$H_n(T_1 \cap T_2) = H_n(S^1) \oplus H_n(S^1)$$

$$= \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (n=1) \\ 0 & (n \geq 2) \end{cases} \qquad (n \geq 1 \text{ について})$$

よって
$$H_n(T_1 \cap T_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (n=1) \\ \mathbb{Z} & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) $T_1, T_2$ に対して Mayer-Vietoris 完全系列を考える. $H_n(T_1) = H_n(T_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=2) \\ \mathbb{Z}^2 & (n=1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ に注意.

$$\cdots \to \underset{0}{H_3(T_1) \oplus H_3(T_2)} \to H_3(T_1 \cup T_2) \xrightarrow{\partial_3} \underset{0}{H_2(T_1 \cap T_2)}$$

$$\xrightarrow{\alpha_2} \underset{0}{H_2(T_1) \oplus H_2(T_2)} \xrightarrow{\beta_2} H_2(T_1 \cup T_2) \xrightarrow{\partial_2} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_1(T_1 \cap T_2)}$$

$$\xrightarrow{\alpha_1} \underset{\mathbb{Z}^4}{H_1(T_1) \oplus H_1(T_2)} \xrightarrow{\beta_1} H_1(T_1 \cup T_2) \xrightarrow{\partial_1} \underset{\mathbb{Z}}{H_0(T_1 \cap T_2)}$$

$$\xrightarrow{\alpha_0} H_0(T_1) \oplus H_0(T_2) \xrightarrow{\beta_0} H_0(T_1 \cup T_2) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$\mathbb{Z}^2$

・まず $T_1 \cup T_2$ は連結なので $H_0(T_1 \cup T_2) \cong \mathbb{Z}$.

そして $n \geq 3$ では $H_3(T_1 \cup T_2) = 0$ が分かる.

・$\alpha_1$ をしらべる. $H_1(T_1 \cap T_2) \cong \mathbb{Z}^2$ は $S_1, S_2$ から生成される. これらを $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ と表す.

$H_1(T_1) \oplus H_2(T_2) \cong \mathbb{Z}^4$ において,

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

と対応する. よって $\mathrm{Ker}\,\alpha_1 = 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_1 \cong \mathbb{Z}^2$.

よって $\mathrm{Ker}\,\alpha_1 = \mathrm{Im}\,\partial_2 = 0$.

したがって完全列 $0 \to H_2(T_1 \cup T_2) \to \mathbb{Z}^2 \to 0$

を従い, $H_2(T_1 \cup T_2) \cong \mathbb{Z}^2$ となる.

・$\alpha_0$ をしらべる $\alpha_0$ は $n \mapsto (n, n)$ となるから $\mathrm{Ker}\,\alpha_0 = 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_0 \cong \mathbb{Z}$.

いま $\mathrm{Im}\,\partial_1 = \mathrm{Ker}\,\alpha_0 = 0$.

また群準同型定理より $\mathrm{Im}\,\beta_1 = \mathbb{Z}^4 / \mathrm{Ker}\,\beta_1$

$\cong \mathbb{Z}^4 / \mathrm{Im}\,\alpha_1 \cong \mathbb{Z}^2$. よって完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow H_1(T_1 \cup T_2) \longrightarrow 0$$

と従い、 $H_1(T_1 \cup T_2) \cong \mathbb{Z}^2$ が分かる。

以上より、

$$H_n(T_1 \cup T_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (n = 1, 2) \\ \mathbb{Z} & (n = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$