東工大 2008 [7]

注：この問題は、京大 2015 [4] と同じである。「院試(幾何)」[@28 Vittorio さん] の解法を真似している。

$S^1 \times S^2/\sim$ は $I \times S^2/\sim'$ と同相である。ただし，$I = [0, 1]$ であり，$\sim'$ は次の関係により生成される同値関係である。

$$(1, x) \sim (0, -x).$$

さて

$$U = [1/5, 4/5] \times S^2/\sim'$$
$$V = ([0, 2/5] \cup [3/5, 1]) \times S^2/\sim'$$

とおく。

U, V はともに S^2 とホモトピー同値である（$[a, b]$ は可縮のため）

$$U \cap V = \left([1/5, 2/5] \cup [3/5, 4/5] \right) \times S^2/\sim'$$

より，$U \cap V \simeq S^2 \sqcup S^2$（非交和）である

$$H_n(U) \cong H_n(V) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0,2) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

であり，$H_n(U \cap V) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (n=0,2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

である．$U \cup V \cong M$ より，Mayer-Vietoris 完全列を適用すると，

$$\cdots \to H_4(M) \xrightarrow{\partial_4} \underset{0}{H_3(U \cap V)} \xrightarrow{\alpha_3} \underset{0}{H_3(U) \oplus H_3(V)}$$

$$\xrightarrow{\beta_3} H_3(M) \xrightarrow{\partial_3} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_2(U \cap V)} \xrightarrow{\alpha_2} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_2(U) \oplus H_2(V)}$$

$$\xrightarrow{\beta_2} H_2(M) \xrightarrow{\partial_2} \underset{0}{H_1(U \cap V)} \xrightarrow{\alpha_1} \underset{0}{H_1(U) \oplus H_1(V)}$$

$$\xrightarrow{\beta_1} H_1(M) \xrightarrow{\partial_1} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_0(U \cap V)} \xrightarrow{\alpha_0} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_0(U) \oplus H_0(V)}$$

$$\xrightarrow{\beta_0} H_0(M) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

まず M は連結より、$H_0(M) \cong \mathbb{Z}$.

α_0 を調べると、α_0 の表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、$\ker \alpha_0 \cong \mathbb{Z}$、$\operatorname{Im} \alpha_0 \cong \mathbb{Z}$ が分かる。

ここから、$\operatorname{Im} \partial_1 \cong \ker \alpha_0 \cong \mathbb{Z}$ より完全列 $0 \to H_1(M) \to \mathbb{Z} \to 0$ が従い $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$.

α_2 を調べると、$H_2(U \cap V)$ の一方の生成元は、$H_2(U)$ と $H_2(V)$ で送り先が反対になる。よって表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。これは基本変形により

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となるから、$\ker \alpha_2 \cong 0$、$\operatorname{Im} \alpha_2 \cong \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$.

$H_3(M)$ について $\mathrm{Im}\,\alpha_3 \cong \mathrm{Ker}\,\alpha_2 = 0$

より. $H_3(M) \cong 0$.

$H_2(M)$ について. 準同型定理より

$$\mathrm{Im}\,\beta_2 \cong \mathbb{Z}^2/\mathrm{Ker}\,\beta_2$$
$$\cong \mathbb{Z}^2/\mathrm{Im}\,\alpha_2$$
$$\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となり, 完全列 $0 \to H_2(M) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$

を従う. よって $H_2(M) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

以上より

$$H_n(M) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0,1) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (n=2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$