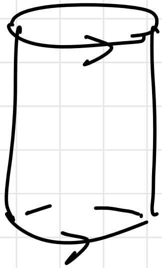
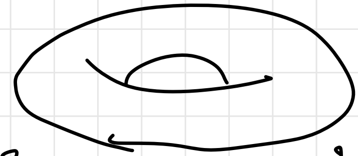
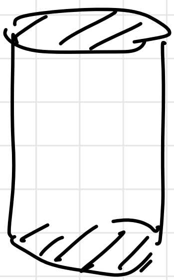
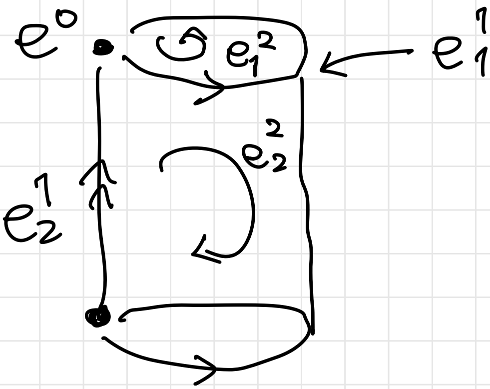
東工大2012[6]

(1) $X =$  $\simeq$ ホモトピー同値  $S^1 \times S^1$

によって. $H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0,2) \\ \mathbb{Z}^2 & (n=1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

(2) Y  を胞体分割して.

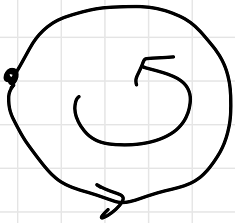


$\{e^0, e_1^1, e_2^1, e_1^2, e_2^2\}$ を Y の胞体分割とする. 完全列

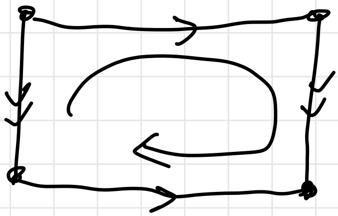
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

を導く.

• $\partial_2 : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ について



e^2_1 は e^1_2 に対応する.

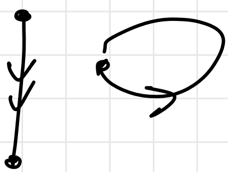


e^2_2 は 0 に対応する.

よって ∂_2 は $(n_1, n_2) \mapsto (n_1, 0)$

より $\mathrm{Ker}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z}$.

• $\partial_1 : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ について



e^1_1, e^1_2 いずれも 0 に対応する. よって.

∂_1 は $(n_1, n_2) \mapsto 0$. よって

$\mathrm{Ker}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$. $\mathrm{Im}\,\partial_1 \cong 0$.

• 以上より $H_2(Y) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z}$.

$H_1(Y) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_1 / \mathrm{Im}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z}$.

$H_0(Y) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_0 / \mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}$.

より $H_n(Y) = \{ \mathbb{Z}\ (n = 0, 1, 2),\ 0\ (\text{otherwise})$