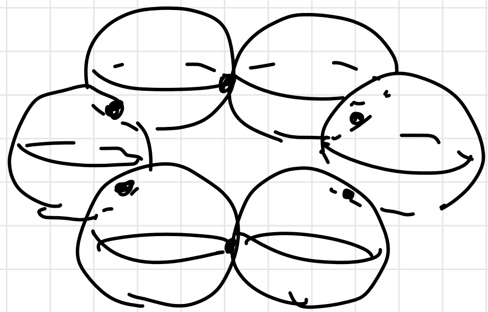
東工大 2023 [4]

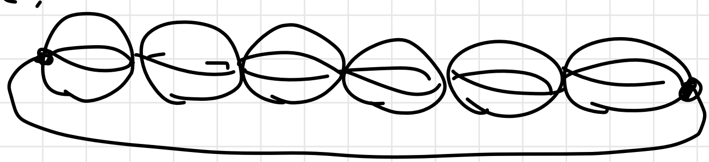
(1) 各S_jは、S_{j-1}, S_{j+1}（ただし$S_6=S_0$, $S_{-1}=S_5$とする）と1点でつながっている

X



変形して、

$X \simeq$ ホモトピー同値



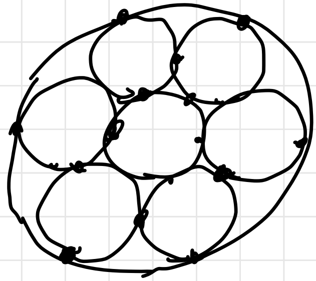
$\simeq S^1 \vee \underbrace{S^2 \vee \cdots \vee S^2}_{6個}$ （1点和）

となる。よって、$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}^6 & (n=6) \\ \mathbb{Z} & (n=0,1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

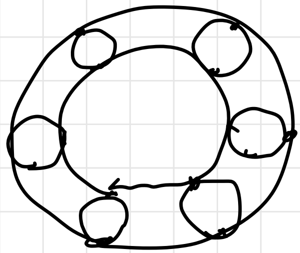
である。

(2) 各 $-1 \leq z \leq 1$ で Y を切ったときの断面を見て，Y がどのようになるかを調べる.

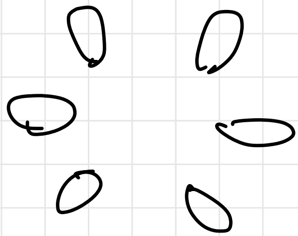
$z=0$ のとき



$0<z<1$ のとき



このようにして. $X \cap T$ は 6 個の S^1 の非交和である.



また $T \simeq S^1 \times S^1$ より，

$$H_n(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0,2) \\ \mathbb{Z}^2 & (n=1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である. X, T に関して Mayer–Vietoris 完全系列を考える，

$$\cdots \to H_3(Y) \xrightarrow{\partial_3} \underset{0}{H_2(X\cap T)} \xrightarrow{\alpha_2} \underset{\mathbb{Z}^7}{H_2(X)\oplus H_2(T)}$$

$$\xrightarrow{\beta_2} H_2(Y) \xrightarrow{\partial_2} \underset{\mathbb{Z}^6}{H_1(X\cap T)} \xrightarrow{\alpha_1} \underset{\mathbb{Z}^3}{H_1(X)\oplus H_1(T)}$$

$$\xrightarrow{\beta_1} H_1(Y) \xrightarrow{\partial_1} \underset{\mathbb{Z}^6}{H_0(X\cap T)} \xrightarrow{\alpha_0} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_0(X)\oplus H_0(T)}$$

$$\xrightarrow{\beta_0} H_0(Y) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

まずYは連結なので$H_0(Y)\cong\mathbb{Z}$.

- α_0をしらべる. $(n_1, n_2, \cdots, n_6)$
  $\mapsto n_1+n_2+\cdots+n_6$というふうになるので,
  $\mathrm{Ker}\,\alpha_0\cong\mathbb{Z}^5$, $\mathrm{Im}\,\alpha_0\cong\mathbb{Z}$.

- α_1をしらべる. $H_1(X\cap T)$の各生成元は
  $H_1(T)$の生成元のうち決まった1つのみに
  移る. $H_1(X)$の生成元には移らない. よって,
  $(n_1, n_2, \cdots, n_6)\mapsto(n_1+n_2+\cdots+n_6, 0, 0)$
  というふうになる. よって $\mathrm{Ker}\,\alpha_1\cong\mathbb{Z}^5$, $\mathrm{Im}\,\alpha_1\cong\mathbb{Z}$

・α_2, β_2, ∂_2 の付近を見る.

$\mathrm{Im}\,\partial_2 = \mathrm{Ker}\,\alpha_1 \cong \mathbb{Z}^5$ より. 短完全列

$$0 \to \mathbb{Z}^7 \to H_2(Y) \to \mathbb{Z}^5 \to 0$$

が従う. いま $\mathbb{Z}^5$ は自由加群なので,
短完全列は分裂して $H_2(Y) \cong \mathbb{Z}^5 \oplus \mathbb{Z}^7 \cong \mathbb{Z}^{12}$.

・α_1, β_1, ∂_1 の付近を見る.

$\mathrm{Im}\,\partial_1 = \mathrm{Ker}\,\alpha_0 \cong \mathbb{Z}^5$ と, 準同型定理
より $\mathrm{Im}\,\beta_1 \cong \mathbb{Z}^3/\mathrm{Ker}\,\beta_1 \cong \mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}\,\alpha_1 \cong \mathbb{Z}^2$
である. よって短完全列

$$0 \to \mathbb{Z}^2 \to H_1(Y) \to \mathbb{Z}^5 \to 0$$

が成り立ち, 同じく分裂して
$H_1(Y) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^5 \cong \mathbb{Z}^7$ となる.

以上より
$$H_n(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{12} & (n=2) \\ \mathbb{Z}^7 & (n=1) \\ \mathbb{Z} & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$