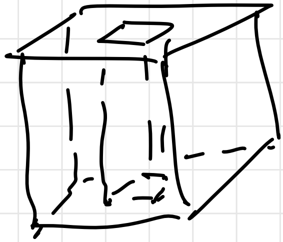
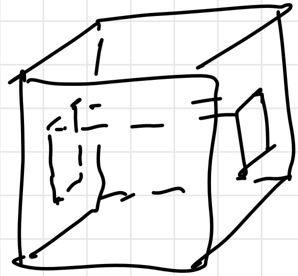
東工大2014 [8]

(1) $A - B$



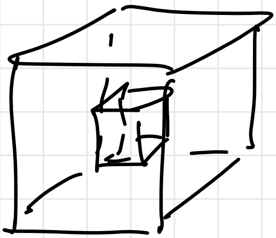
$A - C$



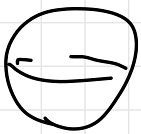
より，$X = A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

はこのようになる：

X



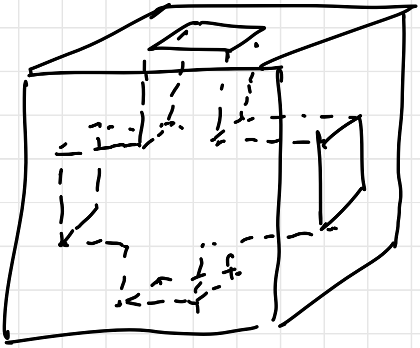
これは S^2

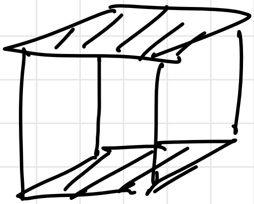
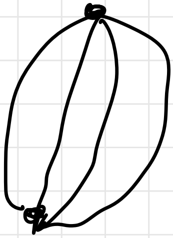


とホモトピー同値だから，

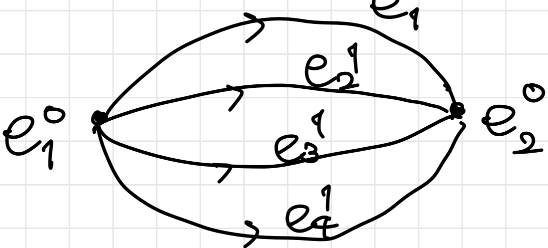
$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) Yは次のようになる:



$Y \simeq$ (ホモトピー同値)  $\simeq$ 

であり、最右のものを次のように胞体分割する。



これは鎖複体 $0 \to \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_0} 0$

を導く。∂_1は

$$(n_1, n_2, n_3, n_4) \mapsto (n_1+n_2+n_3+n_4,\ -n_1-n_2-n_3-n_4)$$

より $\mathrm{Ker}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^3$, $\mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}$.

以上から. $H_1(Y) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^3$

$H_0(Y) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_0 / \mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}$.

よって $H_n(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z}^3 & (n=1) \\ \mathbb{Z} & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$