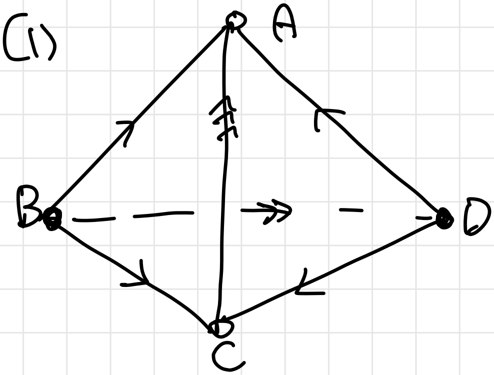
東工大 2016 [6]

(1)



胞体分割を行う.

e^3: 四面体全体

e^2_1: 面 ABC, (A→B→C→A)

e^2_2: 面 ABD. (A→B→D→A)

e^1_1: 辺 BA (B→A)

e^1_2: 辺 BD (B→D)

e^1_3: 辺 CA (C→A)

e^0_1: 点 B, e^0_2: 点 D

とおく. 鎖複体 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_0} 0$

を得る. まず ∂_3 は 0 写像だから,

$\mathrm{Ker}\,\partial_3 \cong \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\,\partial_3 \cong 0$.

∂_2 は $(n_1, n_2) \mapsto (0, n_2, n_1)$ より

$\mathrm{Ker}\,\partial_2 \cong 0$, $\mathrm{Im}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z}^2$.

∂_1 は $(n_1, n_2, n_3) \mapsto (-n_1, n_1)$ より

$\mathrm{Ker}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}$.

∂_0 は $\mathrm{Ker}\,\partial_0 \cong \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{Im}\,\partial_0 \cong 0$.

以上より $H_3(X) \cong \ker\partial_3 \cong \mathbb{Z}$

$$H_2(X) \cong \ker\partial_2 / \mathrm{Im}\,\partial_3 \cong 0$$

$$H_1(X) \cong \ker\partial_1 / \mathrm{Im}\,\partial_2 \cong 0$$

$$H_0(X) \cong \ker\partial_0 / \mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}$$ より

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0,3) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

(2) Yは先ほどの胞体分割から2-胞体以上を除いたものである。これにより、

$$H_1(Y) \cong \ker\partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$$

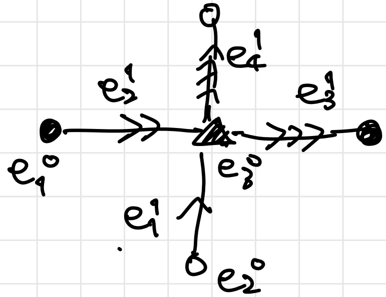
$$H_0(Y) \cong \ker\partial_0 / \mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}$$

となって $H_n(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (n=1) \\ \mathbb{Z} & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

である

(3) $X \setminus Y$について、四面体の内部を1点につぶすとともに、各面を1点につぶすこと

ができる．よって，

$X \setminus Y \simeq$ 

ホモトピー同値

このようになる．上のように胞体分割し，

鎖複体 $0 \longrightarrow \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_0} 0$ を得る．

∂_1 は $(n_1, n_2, n_3, n_4) \mapsto (-n_2+n_3, -n_1+n_4, n_1+n_2-n_3-n_4)$

である．$\mathrm{Ker}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$　$\mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$ がわかる．

∂_0 は 0 写像より $\mathrm{Ker}\,\partial_0 \cong \mathbb{Z}^3$，$\mathrm{Im}\,\partial_0 \cong 0$．

いま $H_1(X \setminus Y) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$

$H_0(X \setminus Y) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_0 / \mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}$

より．

$$H_n(X \setminus Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=1) \\ \mathbb{Z}^2 & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$