東工大 2019 [4]

Mayer-Vietoris 完全列を2回使う.

A, B に関して. $A \cap B = \{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = x_4 = 0\}$
$\simeq S^1$.

$A \simeq S^3$, $B \simeq \{1点\}$. $Y := A \cup B$ とおくと,
Mayer-Vietoris 完全系列は

$$\cdots \to H_5(Y) \to \underset{0}{H_4(A\cap B)} \to \underset{0}{H_4(A)\oplus H_4(B)} \to H_4(Y) \to \underset{0}{H_3(A\cap B)}$$

$$\to \underset{\mathbb{Z}}{H_3(A)\oplus H_3(B)} \to H_3(Y) \to \underset{0}{H_2(A\cap B)} \to \underset{0}{H_2(A)\oplus H_2(B)}$$

$$\to H_2(Y) \to \underset{\mathbb{Z}}{H_1(A\cap B)} \to \underset{0}{H_1(A)\oplus H_1(B)} \to H_1(Y) \to \underset{\mathbb{Z}}{H_0(A\cap B)}$$

$$\xrightarrow{\alpha_0} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_0(A)\oplus H_0(B)} \to H_0(Y) \to 0$$

となる. α_0 は単射より完全列 $0 \to H_1(Y) \to 0$
が導き. $H_1(Y) \cong 0$ となる. いま Y は連結より,
$H_0(Y) \cong \mathbb{Z}$. 完全列をぬき出せば
$H_2(Y) \cong \mathbb{Z}$, $H_3(Y) \cong \mathbb{Z}$, $H_n(Y) \cong 0$ $(n \geq 4)$
も分かる. よって.

$$H_n(A\cup B)=\begin{cases}\mathbb{Z} & (n=0,2,3)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}.$$

さて. $A\cup B$, C について Mayer-Vietoris 完全列を考える. $C\cong\{1点\}$, $X=A\cup B\cup C$.

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap C &= (A\cap C)\cup(B\cup C)\\ &=\{x_3^2+x_4^2=1,\ x_1=x_2=0\}\\ &\quad\cup\{0\}.\end{aligned}$$

となる. これは disjoint で, 2つの連結成分に別れる.

$Z=(A\cup B)\cap C$ とおくと. $H_n(Z)=\begin{cases}\mathbb{Z} & (n=1)\\ \mathbb{Z}^2 & (n=0)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}.$

である. 改めて Mayer-Vietoris 完全列は,

$$\cdots\to H_4(X)\to \underset{0}{H_3(Z)}\to \underset{\mathbb{Z}}{H_3(Y)\oplus H_3(C)}\to H_3(X)\to \underset{0}{H_2(Z)}$$

$$\to \underset{\mathbb{Z}}{H_2(Y)\oplus H_2(C)}\to H_2(X)\to \underset{\mathbb{Z}}{H_1(Z)}\to \underset{0}{H_1(Y)\oplus H_1(C)}$$

$$\to H_1(X)\to \underset{\mathbb{Z}^2}{H_0(Z)}\xrightarrow{\alpha} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_0(Y)\oplus H_0(C)}\to H_0(X)\to 0$$

となる. まず X は連結なので $H_0(X)\cong\mathbb{Z}$.

完全列 $0 \to \mathbb{Z} \to H_3(X) \to 0$ より、
$H_3(X) \cong \mathbb{Z}$. 短完全列 $0 \to \mathbb{Z} \to H_2(X) \to \mathbb{Z} \to 0$
が導くが、$\mathbb{Z}$は自由加群より $H_2(X) \cong \mathbb{Z}^2$.
写像 $\alpha : H_0(Z) \to H_0(Y) \oplus H_0(C)$ に
注目すると、$(n_1, n_2) \mapsto (n_1+n_2, n_1+n_2)$ と同型
な写像より $\ker\alpha \cong \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\,\alpha \cong \mathbb{Z}$ となる.
よって 完全列 $0 \to H_1(X) \to \mathbb{Z} \to 0$ が
導き $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$ が従う.
以上より

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 1, 3) \\ \mathbb{Z}^2 & (n = 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$