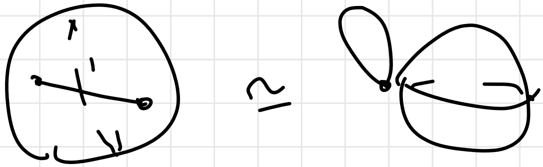
東工大 2017 [6]

(1).



$\simeq S^1 \vee S^2.$

よって $H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0,1,2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

(2) $Z = S_1 \cup S_2$ とすると. $Z \simeq S^2 \vee S^2$ より

$$H_n(Z) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (n=2) \\ \mathbb{Z} & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$Y = Z \cup S_3$ に対して. Mayer-Vietoris 完全系列を適用すると.

$$\underset{0}{H_3(Y)} \xrightarrow{\partial_3} \underset{0}{H_2(Z \cap S_3)} \xrightarrow{\alpha_2} \underset{\mathbb{Z}^3}{H_2(Z) \oplus H_2(S_3)}$$

$$\xrightarrow{\beta_2} H_2(Y) \xrightarrow{\partial_2} \underset{0}{H_1(Z \cap S_3)} \xrightarrow{\alpha_1} \underset{0}{H_1(Z) \oplus H_1(S_3)}$$

$$\xrightarrow{\beta_1} H_1(Y) \xrightarrow{\partial_1} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_0(Z \cap S_3)} \xrightarrow{\alpha_0} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_0(Z) \oplus H_0(S_3)} \xrightarrow{\beta_0} H_0(Y) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

ただし $Z \cap S_3 = \{2点\}$ に注意する.

まず $Z \cup S_3$ は連結より $H_0(Z \cup S_3) \cong \mathbb{Z}$.

また完全列 $0 \to \mathbb{Z}^3 \to H_2(Y) \to 0$ が見えるので, $H_2(Z \cup S_3) \cong \mathbb{Z}^3$.

・α_0 をしらべる. $(n_1, n_2) \mapsto (n_1+n_2, n_1+n_2)$ と同型な写像なので, $\operatorname{Ker} \alpha_0 \cong \mathbb{Z}$, $\operatorname{Im} \alpha_0 \cong \mathbb{Z}$.

いま $\operatorname{Im} \partial_1 = \operatorname{Ker} \alpha_0 \cong \mathbb{Z}$. よって. 完全列 $0 \to H_1(Y) \to \mathbb{Z} \to 0$ が従う. よって. $H_1(Y) \cong \mathbb{Z}$ である.

以上から.

$$H_n(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z}^3 & (n=2) \\ \mathbb{Z} & (n=0,1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$