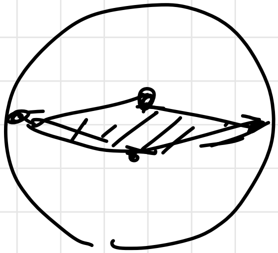
東工大 2013 [4]



A, B について Mayer-Vietoris 完全系列を考える.

$A \simeq S^2$ により,

$$H_n(A) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0,2) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

$B \simeq \{1点\}$ により $H_n(B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

$A \cap B \simeq \{4点\}$ により $H_n(A\cap B) = \begin{cases} \mathbb{Z}^4 & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

である. 改めて Mayer-Vietoris 完全列は

$$\cdots \to H_3(A\cup B) \xrightarrow{\partial_3} \underset{0}{H_2(A\cap B)} \xrightarrow{\alpha_2} \underset{\mathbb{Z}}{H_2(A)\oplus H_2(B)}$$

$$\xrightarrow{\beta_2} H_2(A\cup B) \xrightarrow{\partial_2} \underset{0}{H_1(A\cap B)} \xrightarrow{\alpha_1} \underset{0}{H_1(A)\oplus H_1(B)}$$

$$\xrightarrow{\beta_1} H_1(A\cup B) \xrightarrow{\partial_1} \underset{\mathbb{Z}^4}{H_0(A\cap B)} \xrightarrow{\alpha_0} \underset{\mathbb{Z}^2}{H_0(A)\oplus H_0(B)}$$

$$\xrightarrow{\beta_0} H_0(A\cup B) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

まず，$A \cup B$ は連結なので $H_0(A \cup B) = 0$．
また，$n \geq 3$ について $H_3(A \cup B) = 0$ も容易に分かる．明らかでないのは $n = 1, 2$ のところである．

- $n = 2$ について：完全列

$$0 \to \mathbb{Z} \to H_2(A \cup B) \to 0$$

が抜き出せる．ここから $H_2(A \cup B) \cong \mathbb{Z}$ が従う．

- $\alpha_0 : H_0(A \cap B) \to H_0(A) \oplus H_0(B)$ について調べる．これは (n_1, n_2, n_3, n_4)

$$\mapsto (n_1 + n_2 + n_3 + n_4,\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$$

という $\mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^2$ の写像と同型である．

よって $\operatorname{Ker} \alpha_0 = \{ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 0 \} \cong \mathbb{Z}^3$

$\operatorname{Im} \alpha_0 \cong \mathbb{Z}$，

いま $\operatorname{Im} \partial_1 = \operatorname{Ker} \alpha_0 \cong \mathbb{Z}^3$ より，完全列

$$0 \to H_1(A \cup B) \to \mathbb{Z}^3 \to 0$$

がある．$H_1(A \cup B) \cong \mathbb{Z}^3$ が従う．

以上より $H_n(A \cup B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 2) \\ \mathbb{Z}^3 & (n = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$