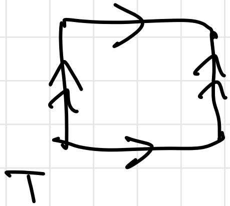
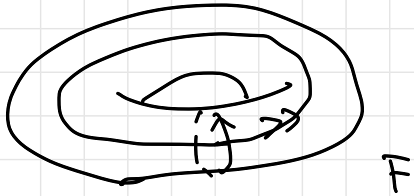
東工大2007[5]

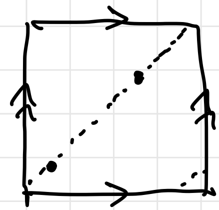
F は、正方形 $[0,1]\times[0,1]$ において $(x,0)$ と $(x,1)$、$(0,y)$ と $(1,y)$ を同一視したもの T と同相である

(対応)

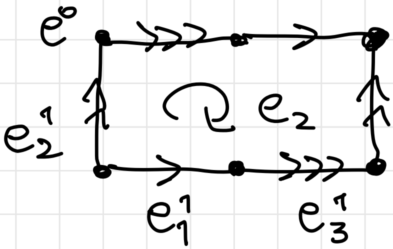
$F \cong$ 



(1) F/f は、T において、$\{x\}$ で x の小数部分を表すとき、(x,y) と $(\{x+1/2\}, \{y+1/2\})$ を同一視したものと同相。



これは次に同相である：(矢印で同一視する)



($[0,1]\times[0,1/2]$ の長方形)

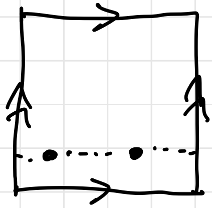
これを図のように $\{e^0, e_1^1, e_2^1, e_3^1, e^2\}$ で胞体分割すると、鎖複体

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

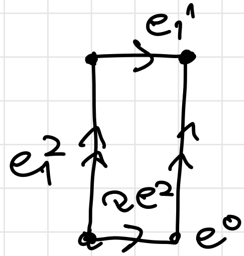
を得る. $\partial_2, \partial_1, \partial_0$ ともに 0 写像であるため、$H_n(F/f) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0,1) \\ \mathbb{Z}^3 & (n=2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

である. さらに、オイラー標数は、胞体分割より、$\chi(F/f) = 1-3+1 = -1$.

(2) F/g は T において (x, y) と $(\{x+1/2\}, y)$ を同一視したもので同相である.



これは次に同相である.



$\left([0,\frac{1}{2}]\times[0,1]\right.$ の長方形)

(1)と同様に，$\{e^0, e_1^1, e_2^1, e^2\}$ に胞体分割すると，鎖複体

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

を得る．$\partial_2, \partial_1, \partial_0$ はすべて0写像より．

$$H_n(F/g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0,1) \\ \mathbb{Z}^2 & (n=2) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

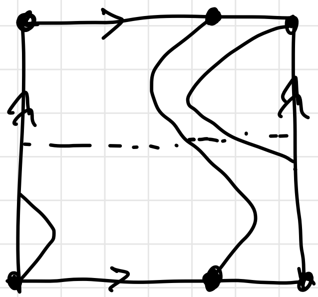
オイラー標数は胞体分割より，

$$\chi(F/g) = 1-2+1 = 0.$$

(3). F/φ は，T について $x\in F$ と $\varphi(x)\in F$ に対応する T の点を同一視した空間に同相である．

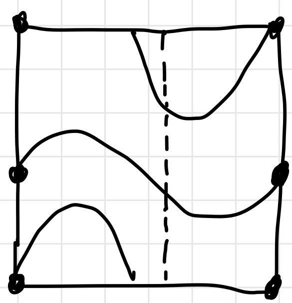
これを3つのパターンに分ける．

・パターン1：すべての$(x,y)\in T$について、ある$0<k<1$が存在して(x,y)と$(\{x+k\},y)$が同一視される。



これは、F/gと同相が(2)より分かる。

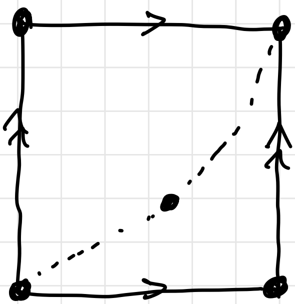
・パターン2：すべての$(x,y)\in T$についてある$0<k<1$が存在して、(x,y)と$(x,\{y+k\})$が同一視される。



これもまたF/gと同相である。

・パターン3：ある $(x, y) \in T$ に対し，$0 < \varepsilon_x < 1$ と $0 < \varepsilon_y < 1$ が存在して，(x, y) と $(\{x + \varepsilon_x\}, \{y, \varepsilon_y\})$ が同一視される．（$\{p \in F \mid \varphi(p) = p\} = \phi$ を満たす φ について，パターン1でもパターン2でもないときに必ずパターン3になる．）

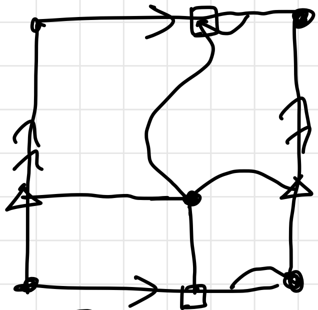
このとき平行移動によって，そのような $(0, 0)$ がパターン3の条件を満たす (x, y) と仮定してもよい．



このとき，$(0, 0)$ と $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ $(0 < \varepsilon_x, \varepsilon_y < 1)$ が同一視されているとする．

$[0, \varepsilon_x] \times [0, \varepsilon_y]$ の長方形で区切る

と，次のようになる



これは，(1)で見たような T/f と同相である．

以上から，φ が $\{p \in T \mid \varphi(p) = p\} = \emptyset$ を満たすときに T/φ は T/f，T/g のいずれかと同相である．