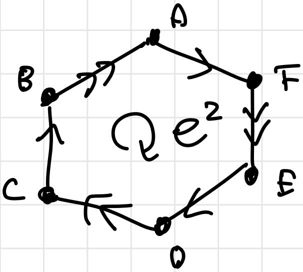
東工大2005[6]

(1)



辺の同一視により正六角形の各頂点はすべて同じ点…

よって e^2：正六角形，e^1_1：辺AF，e^1_2：辺FE

e^0：正六角形の頂点

というふうに胞体分割でき，鎖複体

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

を得る。

∂_2 は $n \mapsto (3n, 3n)$ となるから，

$\mathrm{Ker}\,\partial_2 \cong 0$，$\mathrm{Im}\,\partial_2 \cong 3\mathbb{Z}$，

∂_1 は $(n_1, n_2) \mapsto 0$ となるから，

$\mathrm{Ker}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$，$\mathrm{Im}\,\partial_1 \cong 0$.

∂_0 は0写像．よって

$$H_2(Y) = \mathrm{Ker}\,\partial_2 \cong 0.$$

$$H_1(Y) = \mathrm{Ker}\,\partial_1 / \mathrm{Im}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

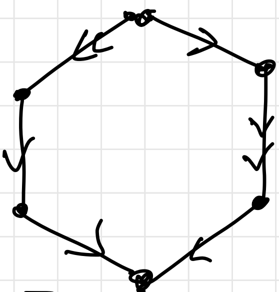
$$H_0(Y) = \mathrm{Ker}\,\partial_0 / \mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}.$$

以上より

$$H_n(Y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & (n=1) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

である.

(2)



Z

同じように胞体分割でき,
鎖複体 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0$
を得る.

$\partial_2, \partial_1, \partial_0$はともに$0$写像. よって

$H_2(Z) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(Z) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_0(Z) \cong \mathbb{Z}$

を得る. 以上より

$$H_n(Z) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0, 2) \\ \mathbb{Z}^2 & (n=1) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$