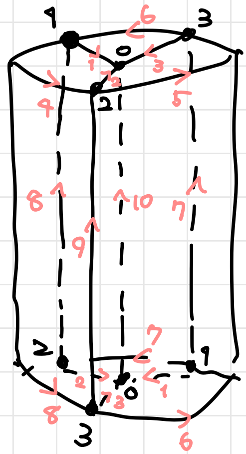
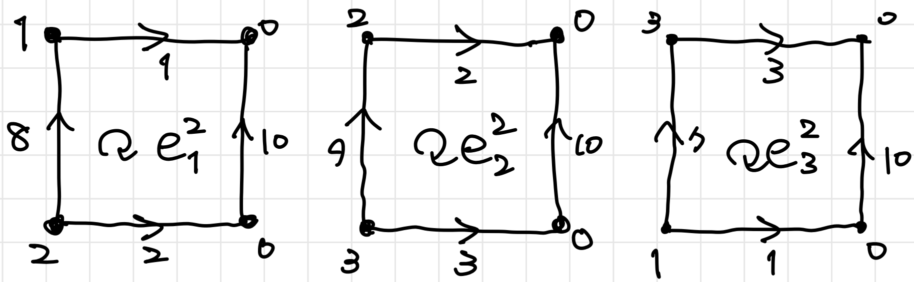
東工大 2020 [4]

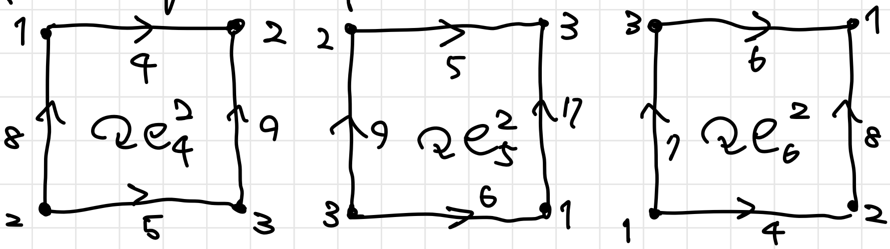
$\mathbb{C}$ を $x+\sqrt{-1}\,y \mapsto (x,y)$ によって自然に $\mathbb{R}^2$ と同一視する. $X = P\times[0,1]/\sim$ を図示すると.



このようになる. 2次元胞体として, $[0,1]\times[0,\omega]\times[0,\omega^2]$ の部分に相当する3つ.



と, $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ に相当する3つ.



をとると，これにより胞体分割ができて，
鎖複体 $0 \to \mathbb{Z}^6 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^{10} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\partial_0} 0$
を導く．

∂_2 について，その表現行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，$\mathrm{Ker}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z}$，$\mathrm{Im}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z}^5$ である．

∂_1 について，その表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり $\mathrm{Ker}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^7$，$\mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^3$ である．

∂_0 は 0 写像のため $\mathrm{Ker}\,\partial_0 \cong \mathbb{Z}^4$，

以上から．

$$H_2(X) \cong \operatorname{Ker}\partial_2 \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(X) \cong {\operatorname{Ker}\partial_1}/{\operatorname{Im}\partial_2} \cong \mathbb{Z}^2.$$

$$H_0(X) \cong {\operatorname{Ker}\partial_0}/{\operatorname{Im}\partial_1} \cong \mathbb{Z}.$$

よって.
$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 2) \\ \mathbb{Z}^2 & (n = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$