東工大 2011 [4]

(1) $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$ である.

$(x, y) \mapsto (x, y)\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$ は A の逆写像 A^{-1} である.

A が全単射であることは, 逆写像があることより従う. また, A, A^{-1} はともに連続なので $\mathbb{R}^2$ の同型写像である.

$(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し.

$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ なら,

$A(x_1, y_1) \sim A(x_2, y_2)$ であることを示す.

いま. $A(x_1, y_1) - A(x_2, y_2)$

$$= (x_1, y_1)\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} - (x_2, y_2)\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 - x_2, y_1 - y_2)\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

は $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ より $\mathbb{Z}^2$ の元. よって.

$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ を射影として, $f : \mathbb{R}^2/\sim \to \mathbb{R}^2/\sim$ の写像で $f \circ \pi = \pi \circ A$ となるものが

存在する。同じく、$g\circ\pi = \pi\circ A^{-1}$ となる $g : \mathbb{R}^2/\sim \ \to \ \mathbb{R}^2/\sim$ が存在する。

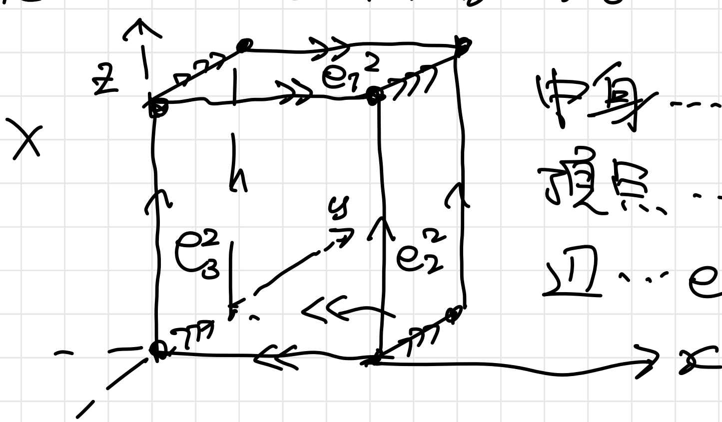
よって、

$$f\circ g\circ\pi(x) = f\circ\pi\circ A^{-1}(x)$$
$$= \pi\circ A\circ A^{-1}(x)$$
$$= \pi$$

$$g\circ f\circ\pi(x) = \pi\circ A^{-1}\circ A(x)$$
$$= \pi$$

より、$f\circ g = id$, $g\circ f = id$ であり、位相同型である。（f は連続、全単射、g は連続である）

(2) 次のように胞体分割する



中身 … e^3

頂点 … e^0

辺 … e_1^1, e_2^1, e_3^1.

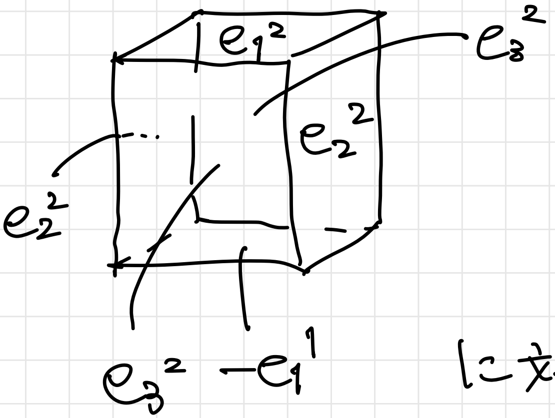
$\{e^0, e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_1^2, e_2^2, e_3^2, e^3\}$

より、鎖複体

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

が出来る。

まず ∂_3 は 左下の図より、$\langle e^3 \rangle$ を

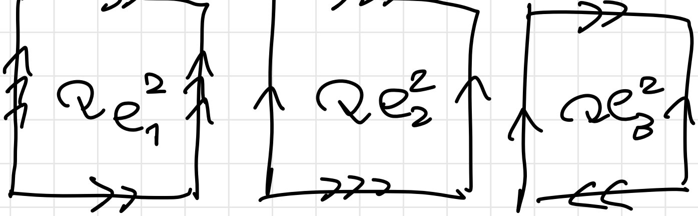


$$\begin{aligned} &-(\langle e_3^2\rangle - \langle e_3^2\rangle) \\ &+(\langle e_2^2\rangle - \langle e_2^2\rangle) \\ &-(-\langle e_1^2\rangle - \langle e_1^2\rangle) \\ &= 2\langle e_1^2\rangle \end{aligned}$$

に対応させる。よって

$\mathrm{Ker}\,\partial_3 \cong 0$, $\mathrm{Im}\,\partial_3 \cong 2\mathbb{Z}$.

∂_2 は 左下図より



$\langle e_1^2 \rangle$ を 0 に
$\langle e_2^2 \rangle$ を 0 に
$\langle e_3^2 \rangle$ を $2\langle e_2^1 \rangle$
に対応する。

よって $\mathrm{Ker}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{Im}\,\partial_2 \cong 2\mathbb{Z}$.

∂_1 は, 0 写像となるので

$$\mathrm{Ker}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^3, \quad \mathrm{Im}\,\partial_1 \cong 0.$$

∂_0 も 0 写像で

$$\mathrm{Ker}\,\partial_0 \cong \mathbb{Z}, \quad \mathrm{Im}\,\partial_0 \cong 0.$$

以上より写像に気を付けて

$$H_3(X) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_3 \cong 0$$

$$H_2(X) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_2 / \mathrm{Im}\,\partial_3 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$H_1(X) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_1 / \mathrm{Im}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$H_0(X) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_0 / \mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}.$$

となる.

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (n=2) \\ \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (n=1) \\ \mathbb{Z} & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である.