東工大2018[5]

(1) $\sim$ の定義に使われた条件

$$((x_1, x_2), t) = ((x_1', x_2'), t')$$

を Ⓐ, $\{t, t'\} = \{-1, +1\}$ かつ $(x_1', x_2') = (-x_1, -x_2)$ を Ⓑ とおく。

・反射律については，自身とは Ⓐ が満たされるから成り立つ.

・対称律については. Ⓐ や Ⓑ が成り立つか否かが，$((x_1, x_2), t)$ と $((x_1', x_2'), t')$ を入れ替えても変わらないので成り立つ.

・推移律について. $a, b, c \in A \times I$ を任意の元として.

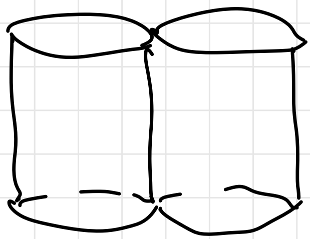
$$a = ((x_a, y_a), t_a)$$
$$b = ((x_b, y_b), t_b)$$
$$c = ((x_c, y_c), t_c)$$

とおく，$a \sim b$, $b \sim c$ のいずれか(または両方)で Ⓐ が満たされるとき，それぞれ $a = b$, $b = c$ が成り立つので $a \sim c$ である

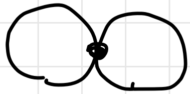
$a \sim b$, $b \sim c$ で条件Ⓑがどちらも成り立っているときは $x_a = -x_b = x_c$, $y_a = -y_b = y_c$, $t_a = -t_b = t_c$ が導くため、$a = c$ となり条件Ⓐが満たされる。よって $a \sim c$ となる。

以上から、$\sim$ は $A \times I$ の同値関係である。

(2) $A \times I$ は次のようになる:



これは、

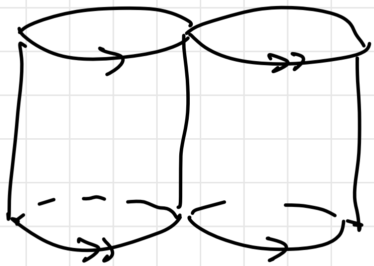
 $\simeq S^1 \vee S^1$ (1点和) と

ホモトピー同値である。よって

$$H_n(A \times I) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (n=1) \\ \mathbb{Z} & (n=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である。

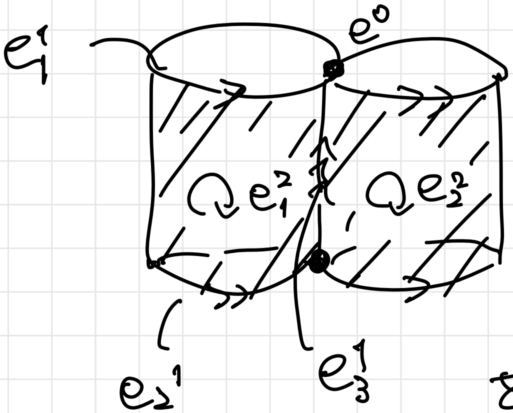
(3) X は、次のようになる。



$X = A\times I/\sim$

ただし、矢印の向きで同一視する。

これを次のように胞体分割する。



$\{e^0, e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_1^2, e_2^2\}$.

これによって完全列

$$0 \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

を導く。

$\partial_2 : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$ については、

e_1^2 は e_2^1 を -1 周, e_1^1 を $+1$ 周

e_2^2 は e_1^1 を -1 周, e_2^1 を $+1$ 周する。

よって ∂_2 は $(n_1, n_2) \mapsto (n_1 - n_2, -n_1 + n_2, 0)$

となり $\mathrm{Ker}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\,\partial_2 \cong \mathbb{Z}$.

$\partial_1 : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ は 0 写像である。よって

$\mathrm{Ker}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z}^3$, $\mathrm{Im}\,\partial_1 \cong 0$.

以上から

$$H_2(X) \cong \operatorname{Ker}\partial_2 \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(X) \cong \operatorname{Ker}\partial_1 / \operatorname{Im}\partial_2 \cong \mathbb{Z}^2$$

$$H_0(X) \cong \operatorname{Ker}\partial_0 / \operatorname{Im}\partial_1 \cong \mathbb{Z}.$$

よって

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 2) \\ \mathbb{Z}^2 & (n = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases},$$