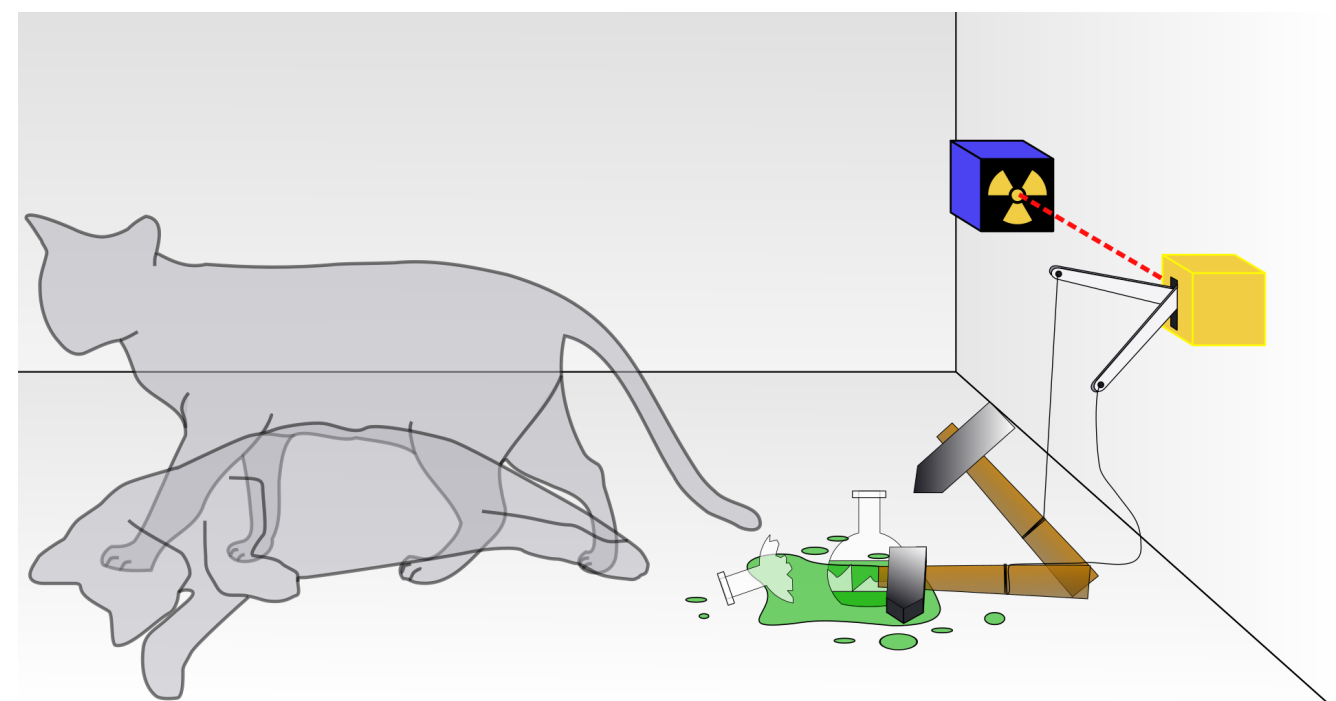


MÉCANIQUE QUANTIQUE

Le chat de Schrödinger



Le chat de Schrödinger

- Le chat est mort ? Est-il vivant ?
- Les deux à la fois ?
- Éléments observables.

Le Formalisme quantique À un instant donné

- Système multi-états.
- États \leftrightarrow fonctions d'ondes :
 $|\Phi(t)\rangle \in \mathcal{H}$: Hilbert.
- $|\Phi(t)\rangle^2$: densité de probabilité
de l'état du système à l'instant t .
- Observables : opérateurs sur \mathcal{H} .
 - \mathbf{r} : Position.
 - \mathbf{p} : Quantité de mouvement.
 - Principe d'incertitude :
 $[\mathbf{r}, \mathbf{p}] = i\hbar$.
- $H := \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}, t)$:
Hamiltonien (énergie).

Évolution temporelle

Une EDP linéaire :

$$i\hbar \partial_t \Phi = H\Phi \quad (\text{Schrodinger})$$

CONTEXTE ET PROBLÈME

Un système quantique est décrit par un opérateur différentiel du second ordre, l'opérateur de Schrödinger, qui joue le rôle d'hamiltonien d'un système quantique. Nous nous intéressons à la description de son spectre dans le cadre du mouvement d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique.

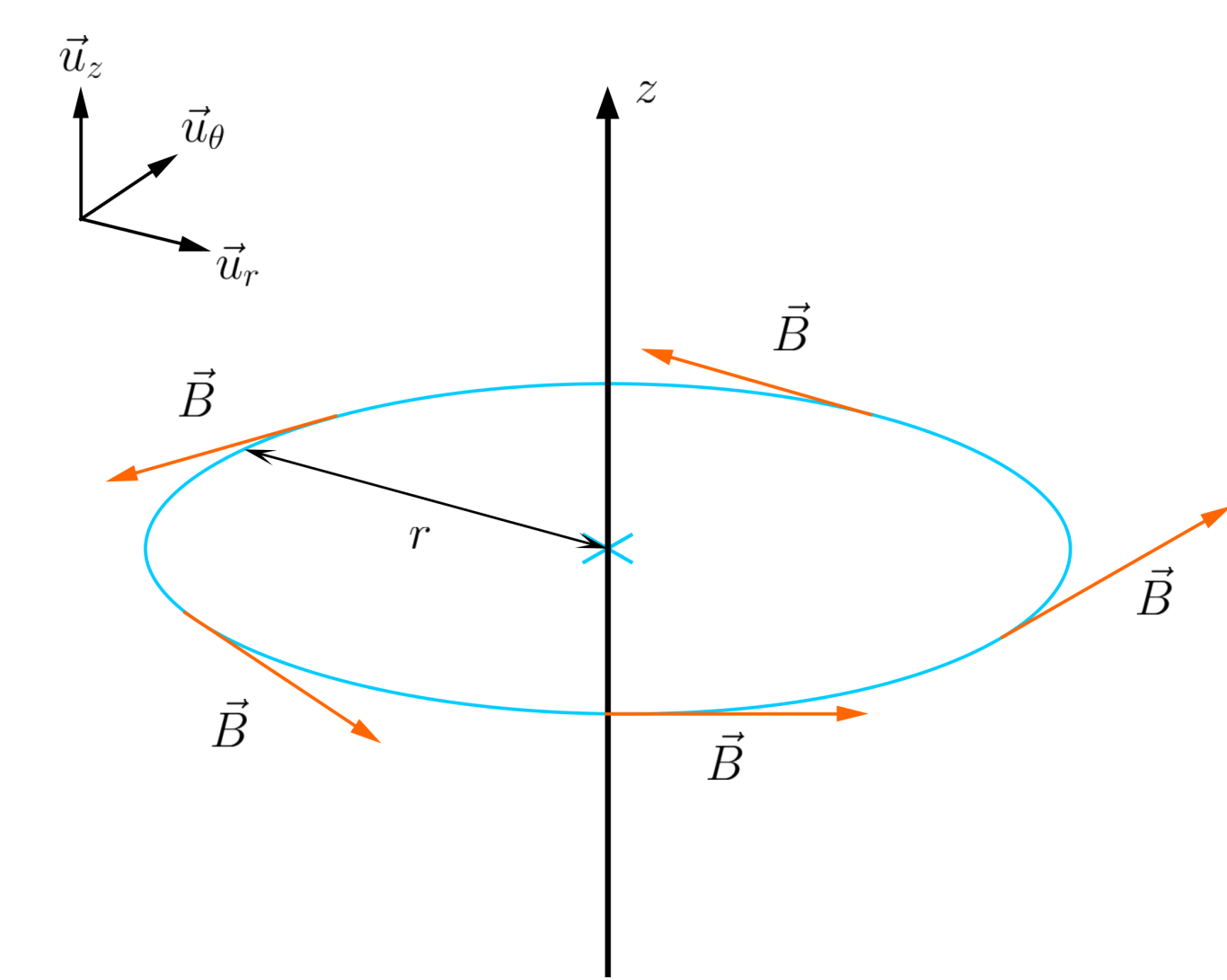
REPRÉSENTATION SPECTRALE

Hamiltonien : opérateur linéaire
Recherche d'éléments propres :

$$H\Phi_n = E_n\Phi_n$$

- Spectre ponctuel : solutions liées à un puit de potentiel, niveaux d'énergie quantifiés (électron autour d'un atome d'hydrogène).
- Spectre continu : solutions libres (électron échappant à l'atome d'hydrogène).
- Solution stationnaire de l'équation de Schrödinger.

NOTRE MODÈLE DE CHAMP MAGNÉTIQUE



Le champ magnétique tourne autour de l'axe Oz

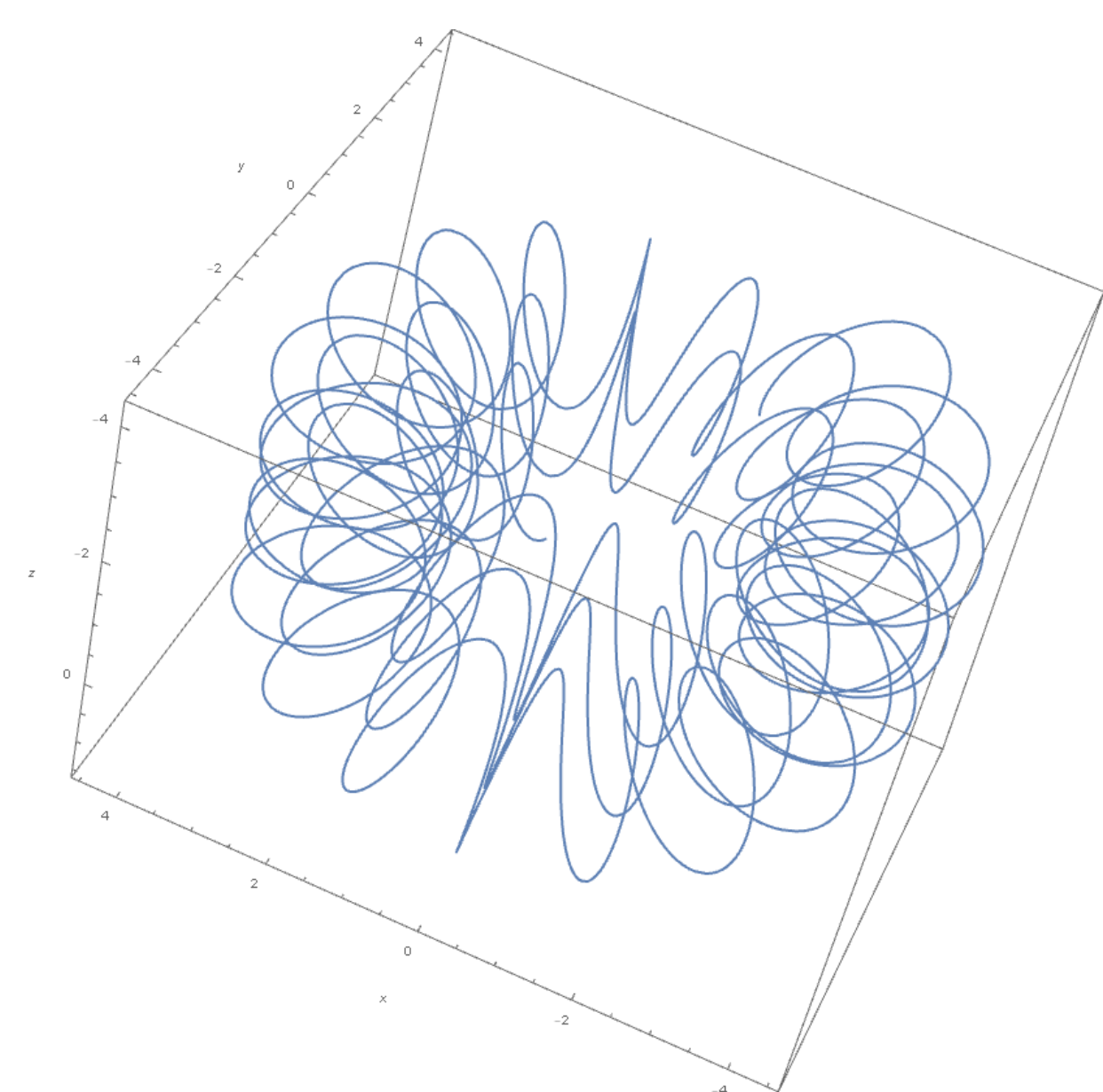
- Champ magnétique :
 $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$.
- Potentiel magnétique :
 $\vec{B} = r \vec{\text{rot}}(\vec{A})$ avec $\vec{A} = a(r) \vec{u}_z$.
- Cadre classique :
Trajectoire définie par une EDO :
 $m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}$.
- Cadre quantique :
Étude spectrale de l'hamiltonien sur $L^2(\mathbb{R}^3)$:
 $H = (i\nabla + A)^2$.

Généralisation à la dimension n

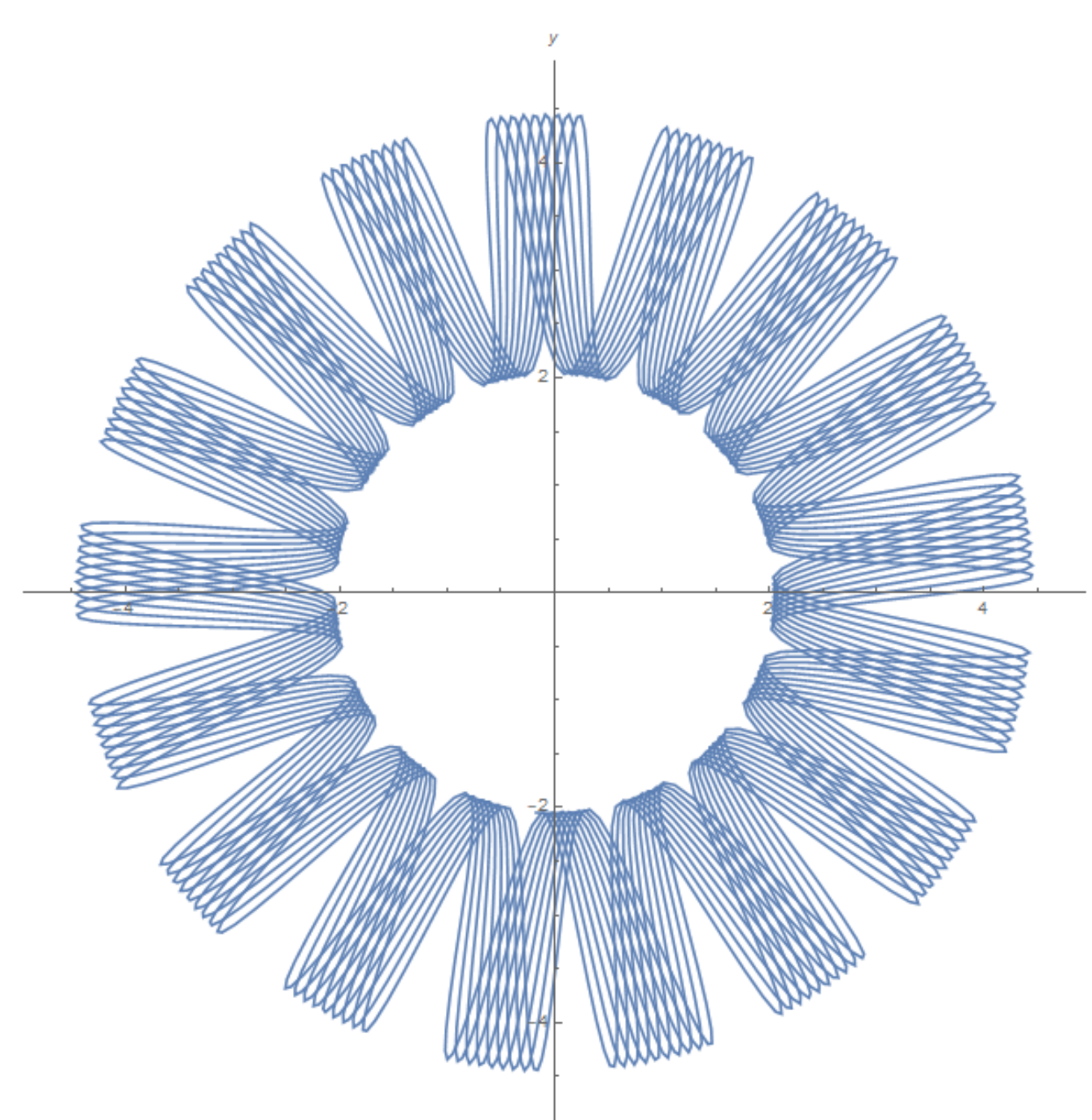
- Formes différentielles :
 $A = \sum_{k=1}^n A_k dx_k$.
- $B = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j$.
- $dB = 0$ et $B = dA$.
- Généralisation des opérateurs vectoriels **rot** et **div**.

TRAJECTOIRE CLASSIQUE

La particule s'enroule autour des lignes de champ.



Trajectoire en 3D



Projection sur le plan : $z = 0$

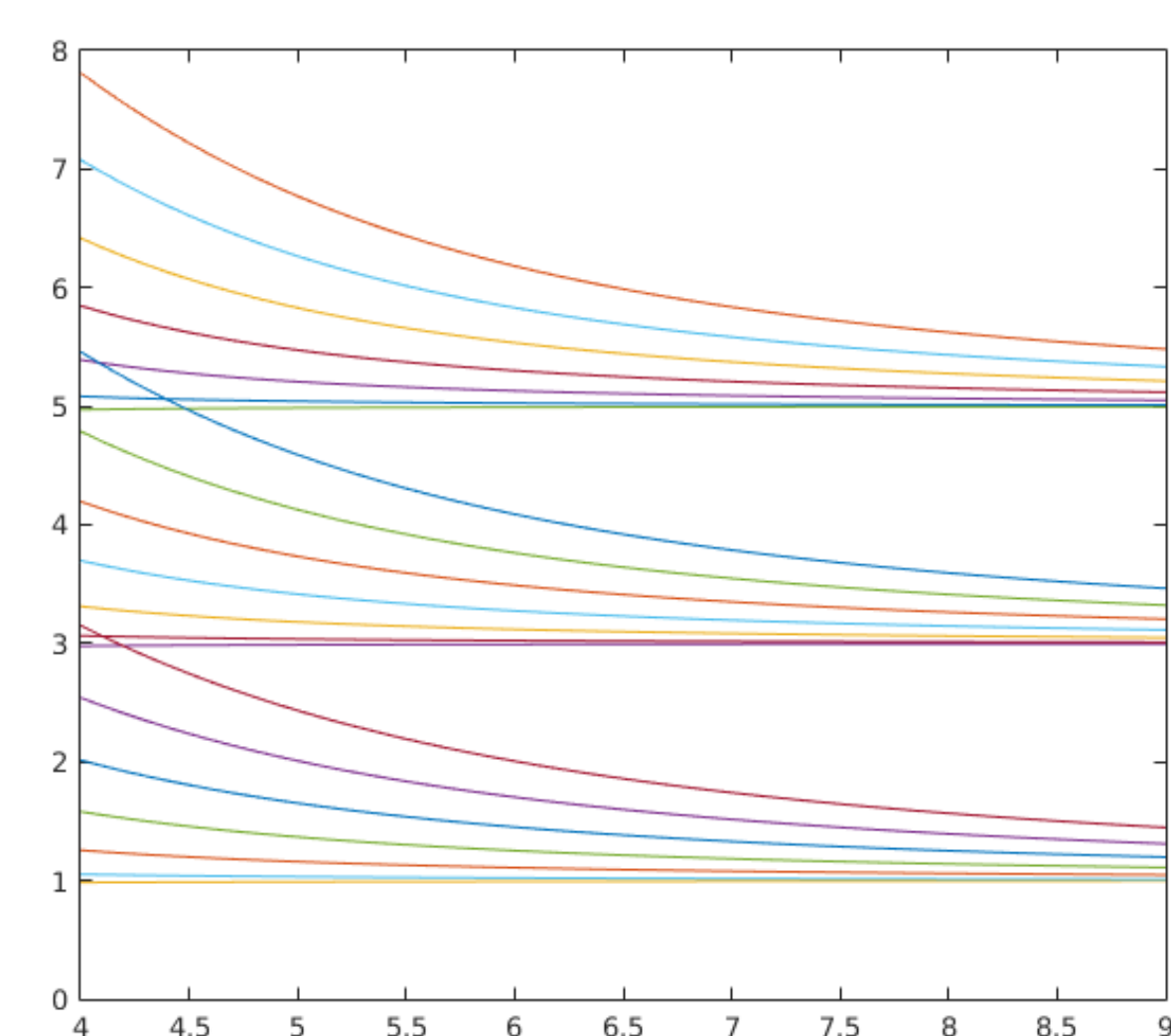
HAMILTONIEN ET COURBES DE DISPERSION

- $H = -\Delta_{n-1} + (i\partial_z + a(r))^2$.
- Fourier en z (fréquence ξ) et série de Fourier angulaire :
$$H \simeq \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} H_m(\xi) d\xi,$$

$$H_m(\xi) := -\partial_r^2 + \frac{k_m}{r^2} + (\xi - a(r))^2$$

opérateur 1D en polaire.
- H est autoadjoint.
- $H_m(\xi)$ à résolvante compacte donc à spectre discret.
- Courbes de dispersion :
 $\sigma(H_m(\xi)) = \{\lambda_{m,p}(\xi), p \in \mathbb{N}\}$.
- $\sigma(H) = \bigcup_{m,p} \lambda_{m,p}(\mathbb{R})$ abs continu

COURBES DE DISPERSION



Interprétation

$\lambda_{m,p}(\xi)$: niveau d'énergie.
 $\lambda'_{m,p}(\xi)$: vitesse de propagation le long de l'axe Oz .
 $\text{sgn}(\lambda'_{m,p}(\xi))$: direction de propagation.
Décomposition d'un niveau d'énergie en une somme de modes propres.
 ξ : fréquence
 m : moment angulaire

COMPORTEMENT DES FONCTIONS DE BANDE

Vers la quantification, les **niveaux de Landau** : $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \lambda_{m,p}(\xi) = E_p := 2p + 1$
Développement asymptotique à tout ordre des courbes de dispersion (dans le cas $a(r) = r$) :

$$\lambda_{m,p}(\xi) \underset{\xi \rightarrow +\infty}{=} E_p + \frac{k_m}{\xi^2} + \dots$$

Propagation lente à niveau d'énergie fixé : $k_m \rightarrow +\infty$ et ξ tel que $\lambda_{m,p}(\xi) = E$

$$\frac{K_-}{\sqrt{k_m}} \leq \lambda'_{m,p}(\xi) \leq \frac{K_+}{\sqrt{k_m}}.$$

OUTILS DES PREUVES

Niveaux de Landau :

- Principe du Min-Max.
- Approximation harmonique.
- Oscillateur harmonique.
- Fonctions d'Hermite.

Propagation infiniment lente :

- Méthode de Frobenius.
- Étude des fonctions propres $u_{m,p}$ de $H_m(\xi)$:
Localisations.
Estimées d'Agmon :
décroissance exponentielle.
- Perturbation au 1^{er} ordre :

$$\lambda'_{m,p}(\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{|u_m(r, \xi)|^2}{r^3} dr.$$

PERSPECTIVES

Perturbation par un champ électrique (étude de $H + V$) ou par un obstacle pouvant mener à l'apparition :

- de spectre ponctuel, c'est-à-dire de trajectoires captées.
- de résonances.

Application à d'autres modèles :

- modèle d'Iwatsuka.
- modèles sur le demi-plan intervenant en mécanique quantique.

RÉFÉRENCES

- S. Agmon. *Lectures on Exponential Decay of Solutions of Second-Order Elliptic Equations: Bounds on Eigenfunctions of N-Body Schrödinger Operations*. 1982.
- V. Bruneau and N. Popoff. On the ground state energy of the Laplacian with a magnetic field created by a rectilinear current. 2015.
- M. Dimassi and G. Raikov. Spectral asymptotics for quantum Hamiltonians in strong magnetic fields. 2001.
- D. Yafaev. On spectral properties of translationally invariant magnetic Schrödinger operators. 2008.
- P. Geniet. Spectral study of a Schrödinger operator (en préparation).