アリさんの問題

縦 1，横 1，高さ 2 の直方体があり，その一つの頂点の上にアリが乗っている．アリは頂点から歩き始め直方体の表面上に設定されたある一点をゴールとして，スタートからゴールまで最短距離となるようなルートを通って進む．アリの歩く距離が最も長くなるようなゴールの位置を求めよ．

[メモ] 実は答えは対角頂点にならない！

(解答案)

Figure1 のように頂点を設定し，点 A から出発するとする．題意を満たす点を P とする．最長距離を求めるのだから点 P は底面に設定した[*1]．点 P から GH と GF に垂線を引き，その交点と G からの距離をそれぞれ x, y とする．x, y は一辺が 1 の正方形上に存在するので，以下の束縛条件がある．

$$0 \leqq x \leqq 1 \quad \text{.and.} \quad 0 \leqq y \leqq 1 \tag{1}$$

もしも，G が答えであれば $x = 0, y = 0$ である．

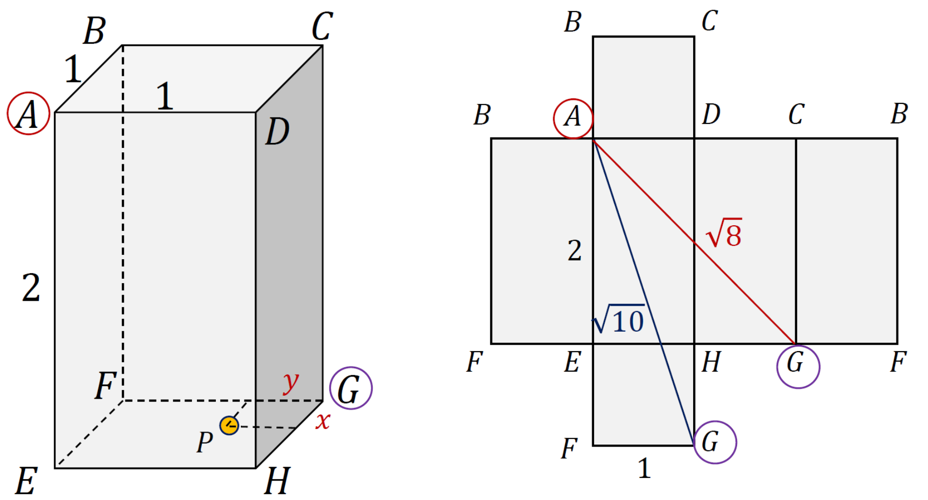

Figure1: **(左)** 問題設定．**(右)** A から G に向かう場合の確認．最短距離が選ばれるので題意を満たす AG 間の距離は $\sqrt{8}$ となる．従って，問題の意図は AP 間の距離が $\sqrt{8}$ よりも長くなるような P の位置を探しなさい，ということ．

まず点 P にたどり着くルートを次の 4 つに場合分けする (Figure2).

(1) 線分 EF を通る場合

この場合の AP 間の最短距離を $L_{EF}(x, y)$ とおくと，展開図から

$$\Big(L_{EF}(x, y)\Big)^2 = (1 - x)^2 + (3 - y)^2 \tag{2}$$

(2) 線分 EH を通る場合

$$\Big(L_{EH}(x, y)\Big)^2 = (1 - y)^2 + (3 - x)^2 \tag{3}$$

(3) 線分 FG を通る場合

$$\Big(L_{FG}(x, y)\Big)^2 = (2 + x)^2 + (2 - y)^2 \tag{4}$$

[*1] 点 P が側面にいるようだと，少なくとも距離 AG より短くなってしまうので題意を満たさない．

(4) 線分 HG を通る場合

$$\left(L_{HG}(x,y)\right)^2 = (2-x)^2 + (2+y)^2 \tag{5}$$

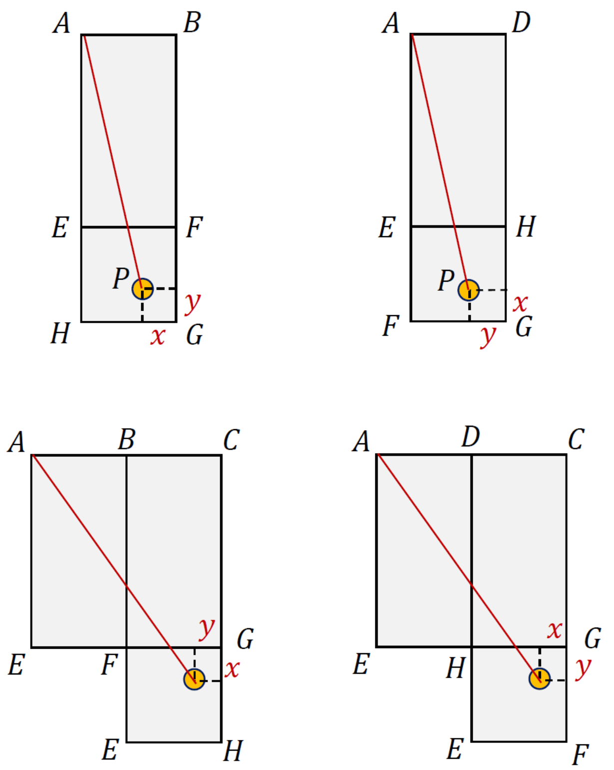

Figure2: **(左上)** 線分 EF を通る．**(右上)** 線分 EH を通る．**(左下)** 線分 FG を通る．**(右下)** 線分 HG を通る．

仮に L_{EF} が題意を満たすルートであったと仮定する．この時の条件式は

$$\max\left(L_{EF}^2\right) \leqq \min\left(L_{EH}^2, L_{FG}^2, L_{HG}^2\right) \tag{6}$$

である[*2]．従って，条件 (1) 式の範囲で L_{EF}^2 の最大値，ならびに，$L_{EH}^2, L_{FG}^2, L_{HG}^2$ の最小値を調べて，その大きさ比べをすれば良いことになる．しかし，なんとなく (6) 式の条件は相当厳しそうなので，最小値と最大値の議論は一旦置いといて，単純にこの不等式の大小関係で条件を絞れるか見てみる[*3]．そういうことで，今から調べるのは

$$L_{EF}^2 \leqq L_{EH}^2 \quad \text{.and.} \quad L_{EF}^2 \leqq L_{FG}^2 \quad \text{.and.} \quad L_{EF}^2 \leqq L_{HG}^2 \tag{7}$$

を同時に満たす (x,y) の組が果たして存在するか，ということである (なければ L_{EF}^2 は題意を満たさないと言える)．

(i) $L_{EF}^2 \leqq L_{EH}^2$ について

$$\left\{(1-x)^2 + (3-y)^2\right\} \leqq \left\{(1-y)^2 + (3-x)^2\right\} \quad \Rightarrow \quad y \geqq x \tag{8}$$

[*2] この式の意味は L_{EF}^2 が最大となる (x,y) の組をを $L_{EH}^2, L_{FG}^2, L_{HG}^2$ のそれぞれに与えたときに，その 3 つの中の最小値よりも L_{EF}^2 が小さいという条件である．つまり，L_{EF} が最短距離かつ最長距離という条件そのものである．

[*3] 一般に，関数の最小値や最大値を求めるには極値，もしくは，関数の定義域の端を調べれば良い．今は (x,y) の二変数なので関数の停留点を知らべれば良いが，条件式が複雑なので結構大変 (なので諦めた)．

(ii) $L_{EF}^2 \leqq L_{FG}^2$ について

$$\left\{(1-x)^2+(3-y)^2\right\} \leqq \left\{(2+x)^2+(2-y)^2\right\} \quad \Rightarrow \quad y \geqq -3x+1 \tag{9}$$

(iii) $L_{EF}^2 \leqq L_{HG}^2$ について

$$\left\{(1-x)^2+(3-y)^2\right\} \leqq \left\{(2-x)^2+(2+y)^2\right\} \quad \Rightarrow \quad y \geqq \frac{1}{5}x+\frac{1}{5} \tag{10}$$

この条件を図示すると Figure3 の灰色の部分となる (実は三直線は交わる！).

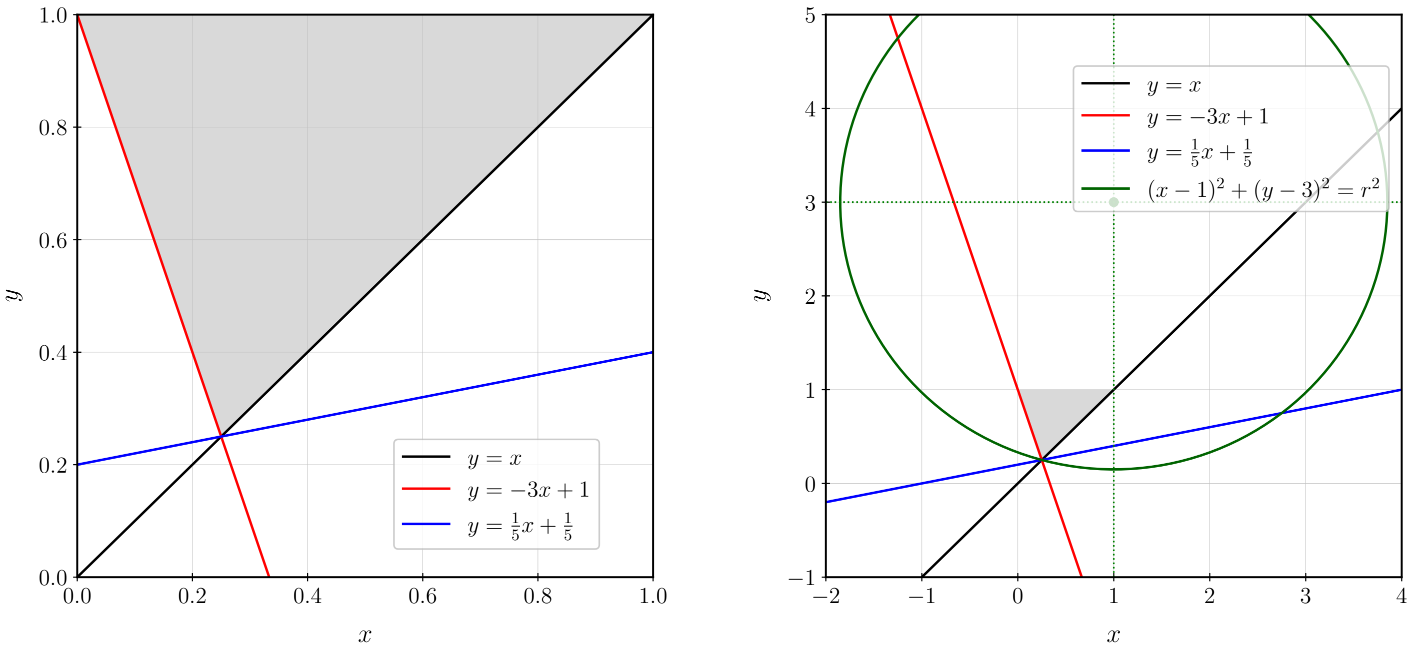

Figure3: **(左)** L_{EF} が最短距離になる場合の条件．**(右)** 点 $(1,3)$ を中心とする半径 L_{EF} の円と条件の確認.

灰色の部分の (x,y) の組に対しては，L_{EF} が AP の最短距離を与える．(6) 式より，灰色の部分の中から L_{EF}^2 が最も大きくなるような (x,y) を探せばよいことになる．ここで，(2) 式を思い出して，その見方を変えれば，これは点 $(1,3)$ を中心とする半径 L_{EF} の円の方程式である．ゆえに，**灰色の部分を通る最も大きい半径 L_{EF} が題意を満たす最長距離になる**と言える．図示すると明らかなように，これは 3 直線の交点となる (Figure3 の **(右図)**)．これを求めると $(x,y)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ である．

この結果から分かる重要なことは，AP に関して最短かつ最長距離となる L_{EF} が次の関係を満たすことである．

$$\max(L_{EF}) = L_{EH} = L_{FG} = L_{HG} \tag{11}$$

このことは，題意を満たす AP 間の距離は**4 つのどのルートから通っても等しい**ことを示す．ゆえに，求める点 P は Figure1 において $(x,y)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ である．この時，AP 間の距離は

$$\mathrm{AP} = \max(L_{EF}) = \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(3-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{4} \approx 2.850 > \sqrt{8} \tag{12}$$

ここで，$\sqrt{8}$ は Figure1 より題意を満たす AG 間の距離であったので，確かに求めた AP の距離の方が若干長いことが分かる．実は対角頂点が一番遠い場所にならないのは，直感に反していて面白い．

2022/7/3　菖蒲迫 健介