DISPH 法の熱力学の整理

菖蒲迫 健介 *

June 14, 2022

Abstract

昨日は大変貴重な機会を設けて頂いてありがとうございました．
議論になった熱力学の対応関係などについてまとめました．

Contents

1 内部エネルギーと温度の熱力学的対応

以下では 1 成分系に限って議論する．

1.1 $dU = TdS - pdV$ の導出

熱力学第一法則から内部エネルギーの変化は次式のように書ける．

$$dU = d'Q + d'W \tag{1}$$

ここで，U は内部エネルギー，$d'Q$ は系に加わった熱量，$d'W$ は系になされた仕事である*1．導出なしに

$$d'W = -pdV \tag{2}$$

ここで，p は圧力，V は体積である．また，エントロピー S を次式で定義する．

$$dS \equiv \frac{d'Q}{T} \tag{3}$$

これらを用いると，内部エネルギーの変化を表す式は次式のようになる．

$$dU = TdS - pdV \tag{4}$$

* 九州大学 大学院理学府 地球惑星科学専攻 地球内部ダイナミクス研究室，Mail: shobuzako.kensuke.242@s.kyushu-u.ac.jp

*1 熱量や仕事は経路に依存する量なので状態量でない．そこで全微分の記号 d と区別するために d' を用いた．

1.2 理想気体の内部エネルギーの変化の式

理想気体では $dU = C_V dT$ が厳密に成り立つ．これを熱力学の関係式を用いて示す．まず，(4) 式を温度と体積の関数として書き直す．つまり $U(S,V) \to U(T,V)$ という変換を考える．そのためにエントロピーを温度と体積の関数として，その全微分を考える．

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \tag{5}$$

これを用いると (4) 式は次のように書かれる．

$$dU = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV\right] - pdV = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p\right] dV \tag{6}$$

一方，内部エネルギーは状態量なので，その全微分は温度と体積を独立変数に選ぶと次式のように書ける．

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \tag{7}$$

以降は，(7) 式をもとに $dU = C_V dT$ を示す．(6),(7) 式より次の関係を得る．

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p \tag{9}$$

熱容量 C の定義を用いると

$$d'Q = CdT \quad \xrightarrow{(3)\ 式} \quad C = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right) \tag{10}$$

であるから，(8) 式は

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = C_V \tag{11}$$

と書ける[*2]．

次に (9) 式を考える．マクスウェルの関係式より[*3]

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{12}$$

であるから，(9) 式は

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{13}$$

(11) 式と (13) 式を (7) 式に還元すると

$$dU = C_V dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right] dV \tag{14}$$

[*2] 人によって熱容量 C の定義は異なる．例えば，大谷 (2018) では (11) 式を熱容量の定義として与える．
[*3] ヘルムホルツの自由エネルギーに関するマクスウェルの関係式を用いる．

という式を得る．この表式の良いところは，右辺が実験で直接観測できる量で書かれていることである．さて，理想気体の状態方程式 $pV = RT$ を用いると，右辺の大括弧の中身が次のようになる．

$$\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right] = T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{RT}{V}\right)_V - p = \underbrace{\frac{RT}{V}}_{=p} - p = 0 \tag{15}$$

以上から，理想気体の場合は厳密に次式が成り立つ．

$$dU = C_V dT \tag{16}$$

これは理想気体の内部エネルギーは温度のみの関数であることを示す．実際，多くの気体は誤差の範囲でこれが成り立つ (例:ジュールの実験).

1.3 一般的な内部エネルギーの変化の式

以上の議論を一般的な場合に拡張する．つまり，固体や液体などの内部エネルギー変化に圧縮の効果が無視できないような場合を考える．(14) 式の右辺第二項に偏微分公式を使うと

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha K_T \tag{17}$$

ここで，等温体積弾性率 K_T と体積熱膨張率 α の定義を用いた．

$$K_T \equiv -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \tag{18}$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{19}$$

従って，次式を得る．

$$dU = C_V dT + (\alpha K_T T - p)dV \tag{20}$$

これが熱力学的に厳密な内部エネルギーと温度を対応づける式である*4．DISPH 法で温度を扱った論文は Takeyama et al. (2017) 及び Hosono et al. (2019) である．それぞれの論文では，温度と内部エネルギーの関係を $dU = C_V dT$ で与えている*5．しかし，これは上記の式において圧縮による寄与の部分が抜け落ちているように見える．

断熱系の場合を考えてみる．この時 $d'Q = 0$ であるから (14) 式は

$$dU = \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right]dV \tag{21}$$

となる．温度の関数であることを陽に書きたいので，体積を温度と圧力の関数として全微分を取る．

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp = \alpha V dT - \frac{V}{K_T}dp \tag{22}$$

*4 「shobuzako_slide_2022_6_13」のスライドでは符号に間違いがある．

*5 Takeyama et al. (2017) では $du = c_p dT$ と書かれているが，$du = c_V dT$ の書き間違いと思われる．

式変形には (18),(19) 式を用いた．これと (17) 式を用いて，(21) 式は次のように書ける．

$$\begin{aligned} dU =& \left[T(\alpha K_T) - p\right]\left[\alpha V dT - \frac{V}{K_T}dp\right] \\ =& \left(\alpha^2 K_T TV - \alpha pV\right)dT - \left(\alpha TV - \frac{pV}{K_T}\right)dp \end{aligned} \tag{23}$$

$dU = C_V dT$ に近づけるために，マイヤーの関係式を用いる．エントロピーを温度と体積の関数として，全微分を取ると

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \tag{5}$$

p 一定として

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{24}$$

(12),(17),(19) 式を用いると

$$\frac{C_p}{T} = \frac{C_V}{T} + \alpha K_T \cdot \alpha V \tag{25}$$

これは (一般的な) マイヤーの関係式である．整理すると

$$\alpha^2 K_T VT = C_p - C_V \tag{26}$$

そこで，(23) 式は次のように書ける．

$$dU = \left((C_p - C_V) - \alpha pV\right)dT - \left(\alpha TV - \frac{pV}{K_T}\right)dp \tag{27}$$

ということで，式変形が正しければ断熱系であっても $dU = C_V dT$ にはならない．内部エネルギーから温度の変換を熱力学的に厳密に計算したければ (20) 式を積分すれば良い．ただし，dU, dV の変化に対応する係数部分 $(C_V, \alpha K_T T - p)$ の変化が小さい場合においてのみ簡単に計算できる．なぜなら，係数の変化が大きい場合は係数が積分の外に出ないのでややこしくなるからである．また，(一気に斜めに積分するのが難しいから) 線積分の方法で解こうとすると，V 一定下における U の変化を計算しないといけないが，それは流体計算の中では隠れてしまっていて計算できない．結局，温度を熱力学的に厳密に計算しようと思ったら，熱力学的に厳密な変形がなされた「温度の時間発展式」を直接解くのが手っ取り早いと考える．

2 温度の時間発展式

2.1 粘性流体の基礎方程式

一般的な流体の基礎方程式は次の通りである．

流体の基礎方程式

▶ **連続の式 (質量保存の式)**

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{28}$$

▶ **運動方程式 (運動量保存の式)**

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\underline{\underline{\mathsf{P}}} + \boldsymbol{K} \tag{29}$$

▶ **エネルギー方程式 (エネルギー保存の式)**

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{q} + \frac{1}{\rho}\nabla\boldsymbol{v} : \underline{\underline{\mathsf{P}}} + \mathcal{J} \tag{30}$$

▶ **状態方程式 (物質固有の式)**

$$f(\rho, u, p) = 0 \quad \text{or} \quad f(\rho, T, p) = 0 \tag{31}$$

ここで，$\underline{\underline{\mathsf{P}}}$ は応力テンソル，$\boldsymbol{K}$ は単位質量あたりの外力，$\boldsymbol{q}$ は熱流束，$\mathcal{J}$ は単位質量あたりの発熱率である．等方的なニュートン流体の構成方程式を考える．

$$\mathsf{P}_{ij} = \left(-p + \chi\sum_{k}^{3}\mathsf{E}_{kk}\right)\delta_{ij} + 2\eta\left(\mathsf{E}_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{k}\mathsf{E}_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{32}$$

ここで χ は体積粘性率，η は粘性率，E_{ij} は歪み速度テンソルである．

$$\mathsf{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{33}$$

通常，体積粘性率は小さいと仮定される (ストークスの仮説 [e.g., 今井 (1993)])．そこで，粘性流体の構成方程式として次式を考える．

$$\mathsf{P}_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(2\mathsf{E}_{ij} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\delta_{ij}\right) = -p\delta_{ij} + \eta\mathsf{T}_{ij} \tag{34}$$

ここで次式を定義した．

$$\mathsf{T}_{ij} \equiv \left(2\mathsf{E}_{ij} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\delta_{ij}\right) = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\sum_{k}^{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) \tag{35}$$

これを用いると，よく見る形の粘性流体の基礎方程式を次のように得る．

粘性流体の基礎方程式

▶ **連続の式 (質量保存の式)**

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{36}$$

▶ **運動方程式 (運動量保存の式)→ ナビエ・ストークス方程式**

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\eta\underline{\underline{\mathsf{T}}}) + \boldsymbol{K} \tag{37}$$

▶ **エネルギー方程式 (エネルギー保存の式)**

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(k\nabla T) - \frac{p}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \frac{\eta}{2\rho}\left(\underline{\underline{\mathsf{T}}} : \underline{\underline{\mathsf{T}}}\right) + \mathcal{J} \tag{38}$$

▶ **状態方程式 (物質固有の式)**

$$f(\rho, u, p) = 0 \quad \text{or} \quad f(\rho, T, p) = 0 \tag{39}$$

ここで次式を定義した．

$$\mathsf{T}_{ij} \equiv \left(2\mathsf{E}_{ij} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \boldsymbol{v})\delta_{ij}\right) = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\sum_k^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) \tag{35}$$

2.2 エネルギー方程式から温度の時間発展式へ

地球物理で用いる状態方程式は「圧力・密度・温度」が一般的である．特に，コア形成問題の場合，元素分配が重要であるが，これは温度圧力などの関数である．その意味でエネルギー方程式を解くよりも，これを温度の時間発展式に直しておいた方が都合が良い．ここでは，エネルギー方程式を温度に関する式に変換する．流体のエネルギー方程式を思い出す．

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (k\nabla T) - \frac{p}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \frac{\eta}{2\rho}\left(\underline{\underline{\mathsf{T}}} : \underline{\underline{\mathsf{T}}}\right) + \mathcal{J} \tag{40}$$

比内部エネルギー u は熱力学の関係を用いて次式のように書けた．

$$du = -pdv + Tds = \frac{p}{\rho^2}d\rho + Tds \tag{41}$$

ここで，v は比体積，s は比エントロピーである．これを用いると，エネルギー方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}} + T\frac{Ds}{Dt} &= \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (k\nabla T) - \cancel{\frac{p}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{v}} + \frac{\eta}{2\rho}\left(\underline{\underline{\mathsf{T}}} : \underline{\underline{\mathsf{T}}}\right) + \mathcal{J} \\ T\frac{Ds}{Dt} &= \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (k\nabla T) + \frac{\eta}{2\rho}\left(\underline{\underline{\mathsf{T}}} : \underline{\underline{\mathsf{T}}}\right) + \mathcal{J} \end{aligned} \tag{42}$$

第二式への変形には連続の式を用いた．右辺は断熱的であれば 0 になるので，**断熱項**と呼ばれる．
比エントロピーを温度と圧力の関数とすると，その微小変化は次のように表せる．

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp \tag{43}$$

定圧比熱，熱膨張率の定義とマクスウェルの関係式を用いると[*6]

$$ds = \frac{c_p}{T}dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp = \frac{c_p}{T}dT - \frac{\alpha}{\rho}dp \tag{44}$$

従って，(42) 式は以下のようになる．

$$T\left(\frac{c_p}{T}\frac{DT}{Dt} - \frac{\alpha}{\rho}\frac{Dp}{Dt}\right) = \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (k\nabla T) + \frac{\eta}{2\rho}\left(\underline{\underline{\mathsf{T}}} : \underline{\underline{\mathsf{T}}}\right) + \mathcal{J} \tag{45}$$

[*6] 定圧比熱と熱膨張率の定義は

$$\begin{aligned} c_p &\equiv T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \\ \alpha &\equiv \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \end{aligned}$$

用いたマクスウェルの関係式は

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

これを整理すると

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho c_p}\nabla\cdot(k\nabla T) + \frac{\eta}{2\rho c_p}(\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}) + \frac{1}{c_p}\mathcal{J} + \frac{\alpha T}{\rho c_p}\frac{Dp}{Dt} \tag{46}$$

を得る．これ以上の式変形 (圧力の時間微分項の変形) には状態方程式が必要になる．そこで，状態方程式が $\boldsymbol{p = p(\rho, u)}$ **の場合** と $\boldsymbol{p = p(\rho, T)}$ **の場合**でそれぞれ考える．一般に，前者は天文物理業界で，後者は地球物理業界で使われる．

2.2.1 $\boldsymbol{p = p(\rho, u)}$ を使う場合

この時，圧力の時間微分項は

$$\begin{aligned}
\frac{Dp}{Dt} &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_u \frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho \frac{Du}{Dt} \\
&= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_u \underbrace{\left(-\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)}_{\text{連続の式}} + \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho \underbrace{\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(k\nabla T) - \frac{p}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \frac{\eta}{2\rho}(\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}) + \mathcal{J}\right)}_{(40)\text{ 式}} \\
&= \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho \left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(k\nabla T) + \frac{\eta}{2\rho}(\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}) + \mathcal{J}\right) - \rho\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_u + \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho\right]\nabla\cdot\boldsymbol{v}
\end{aligned} \tag{47}$$

と変形される．よって，温度の時間発展式は

$$\begin{aligned}
\frac{DT}{Dt} =& \frac{1}{\rho c_p}\nabla\cdot(k\nabla T) + \frac{\eta}{2\rho c_p}(\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}) + \frac{1}{c_p}\mathcal{J} \\
&+ \frac{\alpha T}{\rho c_p}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho \left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(k\nabla T) + \frac{\eta}{2\rho}(\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}) + \mathcal{J}\right) - \rho\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_u + \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho\right]\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right\} \\
=& \frac{1}{\rho c_p}\left[1 + \frac{\alpha T}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho\right]\nabla\cdot(k\nabla T) - \frac{p\alpha T}{\rho c_p}\left\{\frac{\rho}{p}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_u + \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho\right]\right\}\nabla\cdot\boldsymbol{v} \\
&+ \frac{\eta}{2\rho c_p}\left[1 + \frac{\alpha T}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho\right](\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}) + \frac{1}{c_p}\left[1 + \frac{\alpha T}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho\right]\mathcal{J} \\
=& \frac{\beta}{c_p}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(k\nabla T)\right) + \frac{\alpha T\gamma}{c_p}\left(-\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) + \frac{\beta}{c_p}\left(\frac{\eta}{2\rho}(\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}) + \mathcal{J}\right)
\end{aligned} \tag{48}$$

ここで次を定義した．

$$\beta \equiv 1 + \frac{\alpha T}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho \tag{49}$$

$$\gamma \equiv \frac{\rho}{p}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_u + \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho\right] \tag{50}$$

β, γ は状態方程式から決まる量である．

2.2.2 $\boldsymbol{p = p(\rho, T)}$ を使う場合

この時，圧力の時間微分項は

$$\begin{aligned}\frac{Dp}{Dt} &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \frac{DT}{Dt} \\ &= \frac{K_T}{\rho} \underbrace{\left(-\rho \nabla \cdot \boldsymbol{v}\right)}_{\text{連続の式}} + K_T \alpha \frac{DT}{Dt} \\ &= -K_T \nabla \cdot \boldsymbol{v} + K_T \alpha \frac{DT}{Dt} \end{aligned} \tag{51}$$

と変形される．ここで等温体積弾性率 K_T と熱膨張率 α の定義を用いた*7．よって，温度の時間発展式は

$$\begin{aligned}\frac{DT}{Dt} &= \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\eta}{2\rho c_p} (\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}) + \frac{1}{c_p} \mathcal{J} + \frac{\alpha T}{\rho c_p} \left[-K_T \nabla \cdot \boldsymbol{v} + K_T \alpha \frac{DT}{Dt} \right] \\ \left(1 - \frac{K_T \alpha^2 T}{\rho c_p}\right) \frac{DT}{Dt} &= \frac{1}{c_p} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (k \nabla T)\right) + \frac{K_T \alpha T}{p c_p} \left(-\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{v}\right) + \frac{1}{c_p} \left(\frac{\eta}{2\rho} (\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}})\right) + \frac{1}{c_p} \mathcal{J} \\ \frac{DT}{Dt} &= \left(\frac{\rho c_p - K_T \alpha^2 T}{\rho}\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (k \nabla T)\right) + \frac{K_T \alpha T}{p} \left(-\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{v}\right) + \left(\frac{\eta}{2\rho} (\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}})\right) + \mathcal{J} \right] \end{aligned} \tag{52}$$

既出のマイヤーの関係式 ((26) 式) と熱力学的グリュナイゼンパラメーター γ_{th} を用いると*8

粘性流体の温度の時間発展式

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{c_V} \left[\left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (k \nabla T)\right) + \gamma_{th} c_V T \frac{\rho}{p} \left(-\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{v}\right) + \left(\frac{\eta}{2\rho} (\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}})\right) + \mathcal{J} \right] \tag{53}$$

この式は熱力学的に厳密な変形をしているため，内部エネルギーの時間変化と整合的である．

---

*7 それぞれの定義は

$$\begin{aligned} K_T &\equiv -V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \\ \alpha &\equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \end{aligned}$$

そこで

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{K_T}{\rho} \cdot \left(-\rho \alpha\right) = K_T \alpha$$

を式変形には用いた．

*8 熱力学的グリュナイゼンパラメーターは熱力学の関係式を用いて様々な形に書ける．

$$\gamma_{th} \equiv -\left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln V}\right)_S = -\frac{V}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = \frac{K_T \alpha}{\rho c_V} = \frac{K_S \alpha}{\rho c_p} = V \left(\frac{\partial p}{\partial U}\right)_V$$

References

[1] 戸田 盛和 (1983) 『熱・統計力学』, 岩波書店

[2] 大谷 栄治 (2018) 『地球内部の物質科学』, 共立出版

[3] Atkins P.W., De Paula Julio, 中野ら訳 (2017) 『アトキンス物理化学』, 東京化学同人

[4] 今井 功 (1993) 『流体力学』, 岩波書店

[5] Versteeg H.K., Malalasekera W., 松下ら訳 (2011) 『数値流体力学』

[6] Saitoh T.R., Makino J. (2013) A Density-Independent Formulation of Smoothed Particle Hydrodynamics, *The Astrophysical Journal*, **768**, 44

[7] Hosono N, Saitoh T.R., Makino J. (2013) Density-Independent Smoothed Particle Hydrodynamics for a Non-Ideal Equation of State, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, **65**, 5, 108

[8] Takeyama K., Saitoh T.R., Makino J. (2017) Variable inertia method: A novel numerical method for mantle convection simulation, *New Astronomy*, **50**, 82-103

[9] Hosono N., Karato S., Makino J., Saitoh T.R. (2019) Terrestrial magma ocean origin of the Moon, *Nature Geoscience*, **6**, 418-423