

ジオダイナミクスを読む会 (4.14 – 4.16)

葛蒲迫 健介 (九州大学) ^{*1}

(2023/03/09)

4.14 半無限空間の周期的加熱：地下温度の日・季節変化

■ はじめに

地球の地表温度は、日周期もしくは季節変化に伴って規則的に変化している。もっと長い時間スケールでは、準周期的な氷河期による変化などがある。この周期的な時間変化が地下温度にどのように影響するかを考える。時間変化を考えるということで、前節に続いて非定常問題を扱う。具体的には、一次元の熱伝導方程式 (熱拡散方程式) を考えてゆく。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.68)$$

■ 問題設定

$y \geq 0$ の半無限領域を考え、地表を $y = 0$ とする (鉛直下向きが正)。地表温度 T_s が以下のような周期的な関数であるとする。

$$T_s = T_0 + \Delta T \cos \omega t \quad (4.72)$$

ここで T_0 は地表における平均的な温度 (基準温度) で、 ΔT が温度変化の最大値 (最大振幅) とする。角周波数 ω と周波数 f の関係は

$$\omega = 2\pi f \quad (4.73)$$

であり、温度変化の周期 τ は

$$\tau = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.74)$$

と表される。境界条件として、 $y \rightarrow \infty$ で $T \rightarrow T_0$ を採用する。つまり、十分深い場所の温度は地表の基準温度 T_0 に等しいと仮定する。

ザコメモ

この仮定を実際の地表に適用するのは妥当だろうか？ 周期的な温度変化が小さく、基本的には地表と地下が平衡に達していると解釈すれば妥当的である。一方で、地表の温度変化が十分深い地下に実効的となる場合や、地下に熱源がある場合は適当でない。ここでは、単に固定端の問題にして解析的に解きやすくしたのだと思う。

^{*1} 九州大学 大学院理学府地球惑星科学専攻 地球内部ダイナミクス研究室 修士2年
E-mail: shobuzako.kensuke.242@s.kyushu-u.ac.jp

■ 解法

変数分離法 (the method of separation of variables) を用いる. すなわち

$$T(y, t) = T_0 + Y(y)T'(t) \quad (4.75)$$

と置く. 解くべき熱伝導方程式 ((4.68) 式) は線形なので, その階はせいぜい直交基底関数の足し合わせで表現できる. 今, 地表温度を三角関数 (trigonometric function) で書いたので, 基本的には三角関数の足し合わせで書けるはずである. そこで

$$T(y, t) = T_0 + Y_1(y) \cos \omega t + Y_2(y) \sin \omega t \quad (4.76)$$

とする. その他の成分 (モード) は初期条件や境界条件を満たすように付け加えれば良い. これを (4.68) 式に代入すると

$$-\omega Y_1 = \kappa \frac{d^2 Y_2}{dy^2} \quad (4.77.A)$$

$$\omega Y_2 = \kappa \frac{d^2 Y_1}{dy^2} \quad (4.77.B)$$

を得る. (4.77.A) 式を Y_1 について解いて, これを (4.77.B) に代入すると

$$\frac{d^4 Y_2}{dy^4} + \frac{\omega^2}{\kappa^2} Y_2 = 0 \quad (4.78)$$

となる. Y_1 に関する式も同様である. これは常微分方程式なので

$$Y_2 = ce^{\alpha y} \quad (4.79)$$

という階の形を考えて, 上式に代入すると

$$\alpha^4 + \frac{\omega^2}{\kappa^2} = 0 \quad (4.80)$$

となる. 式変形を重ねると

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \pm \frac{\omega}{\kappa} i \\ \alpha &= \pm \left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \end{aligned} \quad (4.81)$$

を得る*2.

*2 式変形には \sqrt{i} の具体的な値を用いた. 導出は以下の通り.

$z = \sqrt{i}$ において, $z^2 = i$ を解く. $z = a + bi$ とすると

$$(a + bi)^2 = i$$

$$(a^2 - b^2) + (2ab - 1)i = 0$$

であるから, $(a, b) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. 従って

$$\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i)$$

ゆえに

$$Y_2 = c_1 \exp \left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} y \right) + c_2 \exp \left(\frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} y \right) \\ + c_3 \exp \left(-\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} y \right) + c_4 \exp \left(-\frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} y \right) \quad (4.82)$$

温度変化は深さと共に減衰すべき (というより増加すべきでない: 下側境界の温度は一定) なので, $c_1 = c_2 = 0$ である. 従って

$$Y_2 = \underbrace{\exp \left(-y \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right)}_{\text{深さ方向の減衰}} \underbrace{\left[c_3 \exp \left(-iy \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right) + c_4 \exp \left(iy \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right) \right]}_{\text{深さ方向の位相遅れ}} \quad (4.83)$$

オイラーの公式を使って書き換えると

$$Y_2 = \exp \left(-y \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right) \left(b_1 \cos \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} y + b_2 \sin \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} y \right) \quad (4.84)$$

b_1, b_2 は適当な複素数である. Y_1 も同様に得る (出発式 ((4.78) 式) は同じ).

$$Y_1 = \exp \left(-y \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right) \left(b_3 \cos \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} y + b_4 \sin \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} y \right) \quad (4.85)$$

これらを (4.77.A), (4.77.B) 式に代入して, \sin, \cos でまとめると

$$b_2 = b_3 \quad \text{and} \quad b_1 = -b_4 \quad (4.86)$$

となることが分かる (計算はめんどくさい). $y = 0$ における境界条件 ((4.72) 式) から

$$b_1 = 0 \quad \text{and} \quad b_3 = \Delta T \quad (4.87)$$

を得る. 以上から

$$Y_1 = \Delta T \exp \left(-y \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right) \cos \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} y \\ Y_2 = \Delta T \exp \left(-y \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right) \sin \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} y$$

(4.76) 式に戻すと

$$T(y, t) = T_0 + \Delta T \exp \left(-y \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right) \left(\cos \omega t \cos \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} y + \sin \omega t \sin \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} y \right) \quad (4.88)$$

$$T(y, t) = T_0 + \Delta T \underbrace{\exp \left(-y \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right)}_{\text{深さ方向の減衰}} \underbrace{\cos \left(\omega t - y \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right)}_{\text{深さ方向の位相遅れ}} \quad (4.89)$$

この式から、温度変化は深さ方向に対して指数関数的に減衰することが分かる。温度変化が $1/e$ 倍になる深さを表皮深度 (skin depth) として、 d_ω で表すと

$$d_\omega = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}} \quad (4.90)$$

$\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ として、日周期 $\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ を用いると、表皮深度は 0.165 m となる。つまり、昼夜の温度変化は 15 cm 深くなる毎に、 $1/e \approx 0.36$ 倍されてゆく。上式から、速い温度変化 (短い時間スケールの変化) はさっさと減衰してしまうことが分かる ($1/e$ 倍されるまでの距離が短い)。逆に、遅い温度変化 (長い時間スケールの変化) は相対的にあまり減衰しない。これは d_ω が基本的には熱拡散距離と同じことに依る。つまり、(4.74) 式を用いて

$$d_\omega = \sqrt{\frac{2\kappa}{2\pi\tau}} = \sqrt{\frac{\kappa\tau}{\pi}} \propto \sqrt{\kappa\tau}$$

であるから、周期の大きな変化ほど深く潜れることが分かる。

一方、深さ方向の位相遅れ ϕ は

$$\phi = y \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \quad (4.91)$$

である。これらを図示すると、図 4.19 のようになる。

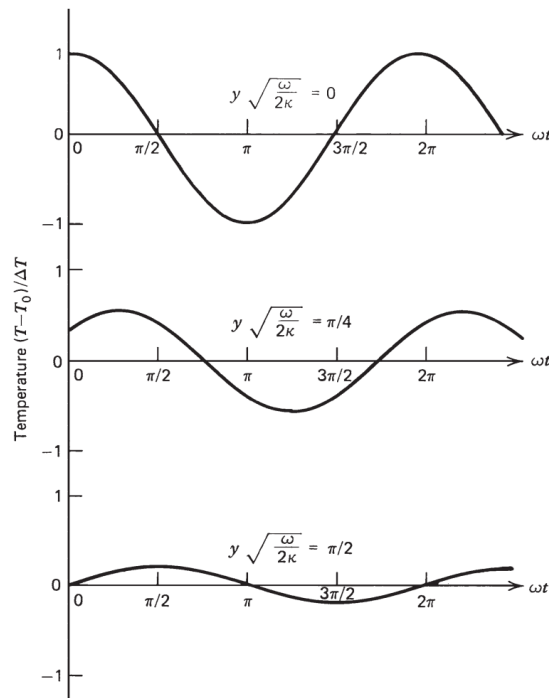


図 4.19: 周期的な地表温度に対する、深さ方向の位相のずれと振幅の減衰。横軸は時間変化。縦軸は基準 T_0 との差を温度変化 ΔT で規格化した温度。上から順に $y = 0$ (地表), $y = \frac{\pi}{4} d_\omega$ 地点, $y = \frac{\pi}{2} d_\omega$ 地点の温度変化を表す。深くなるほど、振幅が減衰していることが分かる。

ザコメモ

図 4.19 を見ると, $t = 0$ において $y = \frac{\pi}{4} d_\omega$ 地点で温度変化が存在している. すなわち, 手を放した瞬間 ($t = 0_+$) に温度変化が無限大の速さで伝わっていることになる. この勘違いが生じた理由は, T_s が無限大の過去から続く周期的な変化であることを忘れていたためである. つまり, 「手を放す」という物理はここでは考慮されていない. これを考慮したければ, もう少し複雑な式を扱わないといけない. 例えば, ヘビサイド関数^a $H(t)$ を用いて

$$T_s = T_0 + H(t) \sin \omega t \quad (\text{z1})$$

を考えてみよう. 最終的に $T(t, y)$ が知りたい訳なので

$$T(t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_s(\omega) G(t, y; \omega) d\omega \quad (\text{z2})$$

と畳み込みの形で解を想定する. ここで一般解 (4.89) 式より, 今の場合は

$$G(t, y; \omega) = \exp \left(-y \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right) \exp \left(i\omega t - iy \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right) \quad (\text{z3})$$

である. $\tilde{T}_s(\omega)$ は $T_s(t)$ のフーリエ係数である.

$$T_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_s(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{z4})$$

逆フーリエ変換より

$$\tilde{T}_s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_s(t) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{z5})$$

であるが, (z1) 式を用いて

$$\tilde{T}_s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (T_0 + \sin \omega t) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{z6})$$

これが解析的に解けるかは分からないが, 少なくとも積分の形では書けているので, 数値計算で $T(t, y)$ を決定できる.

^a 時刻 0 までは値が 0 で, それ以降は何かの値を持つ関数

4.15 半無限空間の瞬間的な加熱・冷却

■ はじめに

多くの重要な地質学の問題は、半無限空間の瞬間的な加熱あるいは冷却問題としてモデル化できる。例えば、マグマが母岩を急激に温めたり、海嶺でマグマが急に冷やされたりする問題などがある。これを解析的に解いてみようというのが本節の趣旨であり、後に続く節の基本となる。

■ 問題設定

考える方程式は相変わらず、一次元の熱伝導方程式 ((4.86) 式) である。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.86)$$

想定する状況は以下である (図 4.20)。

- (1) 最初はどこでも一定温度 T_1 とする。
- (2) 手を放した瞬間に表面を T_0 にする。ただし、 $T_1 < T_0$ なら加熱、 $T_1 > T_0$ なら冷却となる。
- (3) 十分深い場所 (無限遠) の温度は、 T_1 で固定する。

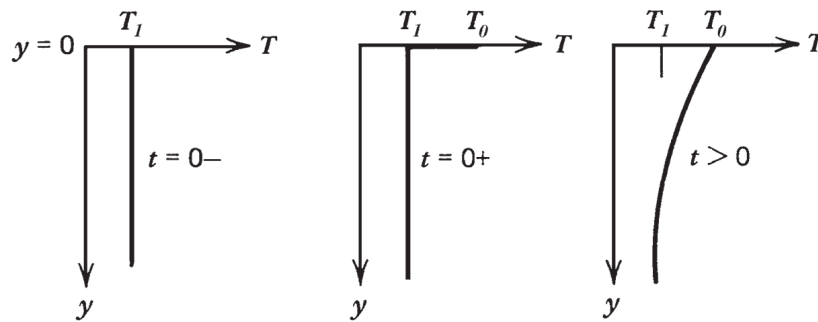


図 4.20: 表面温度の突然昇温による半無限空間の加熱。

これを式で書くと

$$T(y, t) = \begin{cases} T_1 & (y > 0, \quad t = 0_-) \\ T_0 & (y = 0, \quad t = 0_+) \\ T_1 & (y \rightarrow \infty, \quad t > 0) \end{cases} \quad (4.92)$$

■ 解法

この種の偏微分方程式は、相似性 (similarity) と呼ばれる手法で解くことができる。まず、変数 θ を新たに導入する。

$$\theta \equiv \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} \quad (4.93)$$

この時、元の方程式 (4.86) 式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4.94)$$

と同じ表式となる。一方で，初期条件と境界条件は簡単になる。

$$\theta(y, t) = \begin{cases} 0 & (y > 0, \quad t = 0_-) \\ 1 & (t = 0, \quad t = 0_+) \\ 0 & (y \rightarrow \infty, \quad t > 0) \end{cases} \quad (4.95)$$

となる。ここで，熱伝導の基本は熱拡散であるから，距離 y が熱拡散距離 $\sqrt{\kappa t}$ に基づくと考える。すなわち，相似変数 (similarity variable) η を新たに定義する。

$$\eta \equiv \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (4.96)$$

η は変数 y, t を内包する変数で， $\theta(y, t) \rightarrow \theta(\eta)$ と書き換えたことになっている。この時，チェー
ンルールより

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{1}{2t} \eta \right) \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (4.98)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.99)$$

となるから，(4.94) 式は

$$-\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.100)$$

となる。初期条件と境界条件はさらに簡単になる。

$$\theta(\eta) = \begin{cases} 0 & (\eta \rightarrow \infty) \\ 1 & (\eta = 0) \end{cases} \quad (4.101)$$

ここで，(4.95) 式の第1式と第3式をまとめて $\eta \rightarrow \infty$ とした。後は，これを解いてゆく。

$$\phi = \frac{d\theta}{d\eta} \quad (4.102)$$

と置くと，(4.100) 式は

$$-\eta \phi = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{d\eta} \quad (4.103)$$

となる。積分を実行して

$$\phi = c_1 e^{-\eta^2} = \frac{d\theta}{d\eta} \quad (4.106)$$

を得る。もう一度積分すると

$$\theta = c_1 \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' + 1 \quad (4.107)$$

となる。ここで、条件 $\theta(\eta = 0) = 1$ を利用した。さらに、条件 $\theta(\eta \rightarrow \infty) = 0$ より

$$0 = c_1 \int_0^\infty e^{-\eta'^2} d\eta' + 1 \quad (4.108)$$

$$c_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

を得る。式変形には以下のガウス積分を用いた。

$$\int_0^\infty e^{-\eta'^2} d\eta' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4.109)$$

以上から

$$\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' \quad (4.110)$$

を得る。ここで、有名な特殊関数である誤差関数 (error function) を導入する。

$$\text{erf}(\eta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' \quad (4.111)$$

これを用いると、結局

$$\theta = 1 - \text{erf}(\eta) \equiv \text{erfc}(\eta) \quad (4.112)$$

と書くことができる。erfc は相補誤差関数 (complementary error function) である。誤差関数は多くの計算言語で関数として用意されている。図 4.21 のグラフは誤差関数と相補誤差関数を表す。具体的な値は教科書の表 4.5 を参照されたい。

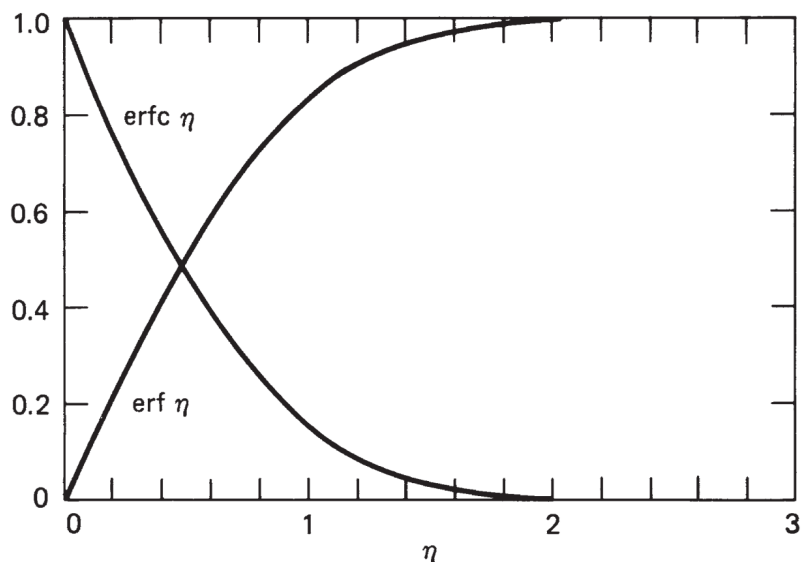


図 4.21: 誤差関数 erf と相補誤差関数 erfc.

θ, η の定義を思い出すと

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \quad (4.113)$$

$$T(y, t) = T_1 + (T_0 - T_1) \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right)$$

という $T(y, t)$ に関する式を得る.

■ 地球年齢の推定

1800 年台中期に、ウィリアム・トンプソン (William Thompson, later Lord Kelvin) がこの理論を用いて地球年齢を求めた. すなわち, 初期地球が一様温度 T_1 であるとし, 表面が急に T_0 に冷やされたと考えたのである (熱境界層 (温度変化が急激な層) が薄いと仮定. **これが厚いと地下深くの温度が一定温度と見なせない**ので, 本モデルは適用不可である.). 現在の年齢を知るためには, 現在における「何か」の計測をする必要がある. 彼は観測可能な現在の地表 ($y = 0$) における熱流束を用いた. まず, 地表でのフーリエの法則を考える.

$$\begin{aligned} q &= -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \\ &= -k(T_0 - T_1) \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right)_{y=0} \\ &= k(T_0 - T_1) \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{erf} \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right)_{y=0} \\ &= \frac{k(T_0 - T_1)}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{d}{d\eta} (\operatorname{erf} \eta)_{\eta=0} \\ &= \frac{k(T_0 - T_1)}{2\sqrt{\kappa t}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \right)_{\eta=0} \\ &= \frac{k(T_0 - T_1)}{\sqrt{\pi \kappa t}} \end{aligned} \quad (4.116)$$

これより

$$t_0 = \frac{(T_1 - T_0)^2}{\pi \kappa q_0} \quad (4.118)$$

ここで t_0 は地球の年齢, q_0 は現在の地表における地温勾配である. $q_0 = 25 \text{ K km}^{-1}$, $T_1 - T_0 = 2000 \text{ K}$, $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ として計算すると, $6450 \approx 6500$ 万年という見積もりになる. 1900 年 (1896 年) 代に放射性熱源が見つかるまでは, 疑問視されることはなかった.

4.16 海洋リソスフェアの冷却

■ はじめに

前節の半無限空間に対する一次元熱伝導モデルは、海洋リソスフェアの成長 (冷却) 問題にも適用可能である。海洋リソスフェア冷却に関して、以下のような説明がなされている (図 4.22)。

- まず、海嶺の下に上昇してきたマグマが海水で冷やされることで、プレートが形成される。
- 海洋リソスフェアとは、そのプレートのうち硬い部分 (剛体的な部分) で、簡単には変形しない上部マントルのことを指す。
- 海嶺では常に新しいプレートが生まれるから、古いプレートは速度 u で移動してゆく。ただし、常に上から冷やされて厚くなってゆく。
- 従って、海嶺から離れるにつれて古い海洋リソスフェアということになる。
- 以下では、海嶺から x だけ離れた地点に到達するのにかかる時間 t を「海洋リソスフェアの年齢」とする ($t = x/u$)。

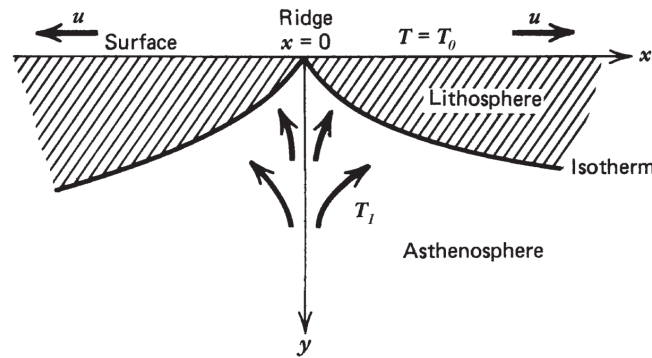


図 4.22: 海洋リソスフェア冷却の概略図。

■ 半無限空間冷却モデルを用いた海洋リソスフェアの厚さの推定

本項目では、前節のモデルを用いて、海嶺からの距離と海洋リソスフェアの厚さ (年齢) の関係を定量的に扱うことを目標とする。考える問題は「最初の高い温度 T_1 にあったマントルが表面で急に低い温度 T_0 にさらされて、横向きに移動する」というものである。水平方向の熱伝導を無視すると、冷却される垂直な柱が速さ u で移動するというだけの問題になる (図 4.23)。 (4.113) 式より

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa x/u}} \right) \quad (4.124)$$

これを以下のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} &= 1 - \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa x/u}} \right) \\ \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} &= \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa x/u}} \right) \end{aligned} \quad (4.125)$$

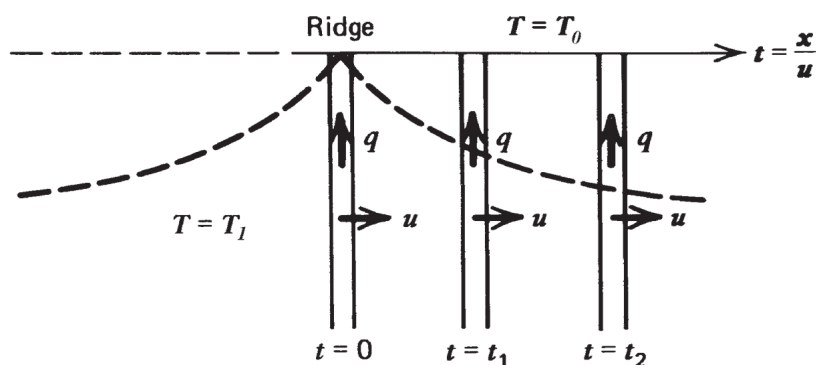


図 4.23: マントルとリソスフェアの垂直な柱は、水平方向に移動しながら、鉛直方向に冷やされる。

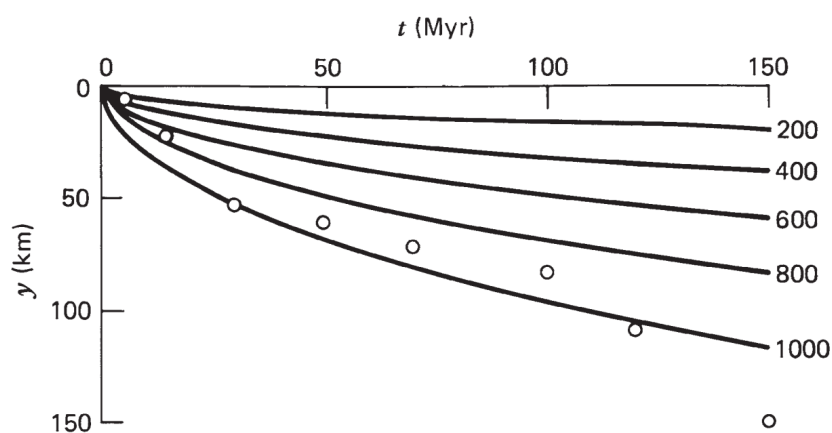


図 4.24: (4.125) 式から計算される海嶺から距離と海洋リソスフェアの厚さ。実線は $T - T_0$ に関する等温線 (つまり、その場所の温度 T と海水温度 T_0 の差が一定となる境界線) である。丸印はレイリー波 (表面波のうち体積変化を伴う波 \leftrightarrow ラブ波) の分散データから導かれた太平洋における海洋リソスフェアの厚さ。

図 4.24 は (4.125) 式において、 $T_1 - T_0 = 1300 \text{ K}$, $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ とした場合の結果を示す。地震波による観測結果と概ね一致していることから、海洋リソスフェアの成長に関しては、半無限空間冷却モデルでそこそこ良い近似になっているのかもしれない。

■ 半無限空間冷却モデルを用いた熱流束の推定

本項目では、前節のモデルを用いて、海嶺からの距離と熱流束の関係を定量的に扱うことを目標とする。具体的には、海嶺からの距離に応じた現在の熱流束（観測）を用いる。(4.116) 式で与えられる現在の熱流束と海嶺からの距離の関係は

$$q_0 = \frac{k(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi \kappa t}} = k(T_1 - T_0) \sqrt{\frac{u}{\pi \kappa x}} \quad (4.127)$$

となる。 $k = 3.3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ として、Lister et al. (1990) の結果と比較した (図 4.25)。この結果は、半無限空間冷却モデルが、新しい海洋リソスフェアに関しては良い近似である一方で、海嶺から離れた古い海洋リソスフェアには不適當であることを示唆する。

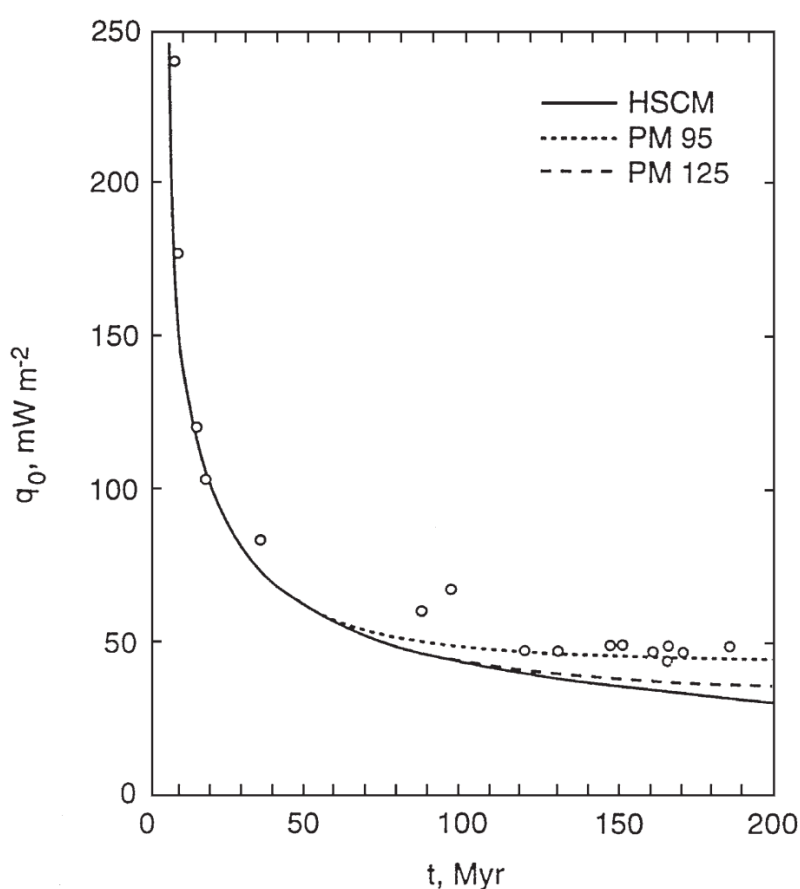


図 4.25: 海底年齢に対する熱流量。丸印は、堆積層で覆われた大西洋と太平洋のデータである (Lister et al., 1990)。HSCM は Half-Space Cooling Model((4.127) 式) である。PM はプレート冷却モデルのことで、(4.133) 式において $y_{L0} = 95 \text{ km}$ としたものが PM95, $y_{L0} = 125 \text{ km}$ としたものが PM125 である。新しい年代は良い一致を示すが、古い年代は怪しい。次節で説明があるが、実際にはプレートの厚さは有限なので、年を取るほど熱境界層の成長が抑制される (半無限空間と異なり、どこかで定常状態になる)。言い換えると、半無限空間のモデルでは上限なく熱境界層 δ を厚くすることができてしまい、実効的な熱流量 ($\propto \Delta T / \delta$) が小さくなってゆく。

■ 大陸リソスフェアへの適用

半無限空間冷却モデルを大陸リソスフェアにも適用すると、図 4.28 となる。これは、大陸リソスフェアの底面にはマントル対流による追加の熱供給があることを強く示唆している。

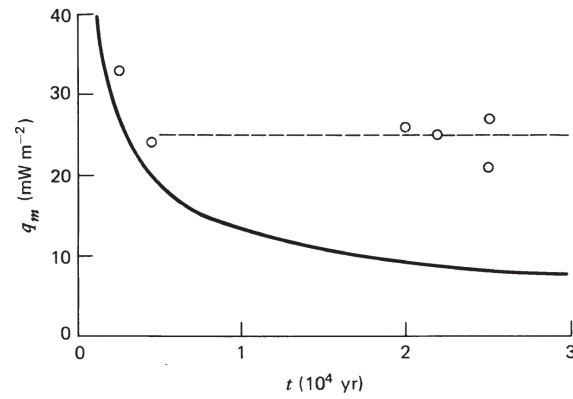


図 4.28: 複数の地質区におけるマントル熱流量と年齢。実線は (4.127) 式によるモデル，破線は 25 mW m^{-2} 一定線，丸印は Sclater et al. (1980) の結果。

謝辞

本資料には川田 佳史さん (@ JAMSTEC) の L^AT_EX テンプレートを使用しております。この場をお借りして感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Turcottte, D., Schubert, G. (2014) Geodynamics, Cambridge University Press, 183–195

付録 A プレート冷却モデル

■ はじめに

続く 4.17 節では現実に近い問題を取り扱う目的のため、解析対象を半無限空間から有限空間に落とす。しかし、教科書では具体的な解き方が載っていない。半無限空間を導出したのに、有限空間はやらないというのはかわいそうなので、導出の記録を残しておく。半無限空間との違いは境界条件だけであるが、解き方が随分と変わる点が面白い。

■ 問題設定

解くべき方程式は相変わらず、一次元の熱伝導方程式である。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{A.1})$$

想定する状況は以下である。

1. 最初は一定温度 T_1 とする。
2. 手を放した瞬間に表面を T_0 にする。
3. プレート底面 ($y = y_{L0}$) の温度は T_1 に保つ。

初期条件と境界条件を以下のように設定する。

$$T(y, t) = \begin{cases} T_1 & (y > 0, t = 0_-) \\ T_0 & (y = 0, t = 0_+) \\ T_1 & (y = L, t > 0) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

次のような変数を導入する。

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} - \frac{y}{L} \quad (\text{A.3})$$

$$\zeta = \frac{y}{L} \quad (\text{A.4})$$

$$\tau = \frac{\kappa t}{L^2} \quad (\text{A.5})$$

ただし、 $\theta(\zeta, \tau)$ と独立変数 ζ, τ の関数であるとする。この時、もとの方程式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \quad (\text{A.6})$$

となり、境界条件は

$$\theta(\zeta, \tau) = \begin{cases} 1 - \zeta & (\zeta, \tau = 0) \\ 0 & (\zeta = 0, \tau) \\ 0 & (\zeta = 1, \tau) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

となる。ここで、 θ を三角関数を使って級数展開した

$$\theta(\zeta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\tau) \sin(n\pi\zeta) \quad (\text{A.8})$$

は, ζ に関する境界条件を満たす. τ に関する初期条件から

$$1 - \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(0) \sin(n\pi\zeta) \quad (\text{A.9})$$

である. これを $\Theta_n(0)$ について解く. 両辺に $\sin(m\pi\zeta)$ を掛けて, 区間 $[-1, 1]$ を ζ で積分する.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - \zeta) \sin(m\pi\zeta) d\zeta &= \underbrace{\Theta_n(0) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \sin(n\pi\zeta) \sin(m\pi\zeta) d\zeta}_{\text{直交性から } n=m \text{ の時だけ } 1} \\ \Theta_n(0) &= \int_{-1}^1 (1 - \zeta) \sin(n\pi\zeta) d\zeta \\ &= 2 \int_0^1 (1 - \zeta) \sin(n\pi\zeta) d\zeta \\ &= -\frac{2}{n\pi} [(1 - \zeta) \cos(n\pi\zeta)]_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi\zeta) d\zeta \\ &= \frac{2}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi\zeta) \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{n\pi} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

また, (A.8) 式を (A.6) 式に代入すると

$$\frac{d\Theta_n(\tau)}{d\tau} = -(n^2\pi^2)\Theta_n(\tau) \quad (\text{A.11})$$

となる. これを解いて, 条件 (A.10) 式を用いると

$$\Theta_n(\tau) = \frac{2}{n\pi} e^{-n^2\pi^2\tau} \quad (\text{A.12})$$

を得る. 従って

$$\theta(\zeta, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2\tau} \sin(n\pi\zeta) \quad (\text{A.13})$$

を最終的に得る. これを元の変数に戻すと以下のとなる.

$$T(y, t) = T_0 + (T_1 - T_0) \left[\frac{y}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{L^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right] \quad (\text{A.14})$$

これがプレート冷却モデルの式である.