新居の問題

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 7 \\ x + \sqrt{y} = 11 \end{cases}$$

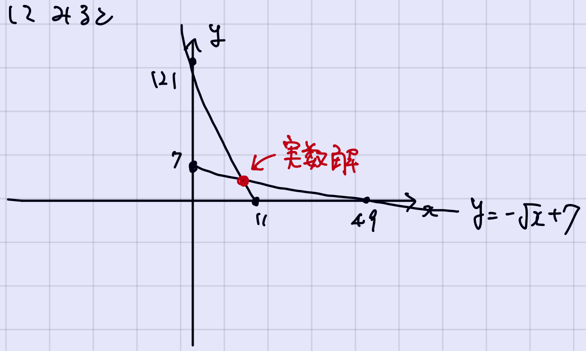
実数解を全て求めよ

(解)　アイデア

与式を変形すると

$$\begin{cases} y = -\sqrt{x} + 7 & \cdots (1) \\ x = -\sqrt{y} + 11 & \cdots (2) \end{cases}$$

図示してみると



ということで、実数解はおそらく1つだけなので単純に連立して解いてみる。(1),(2)式を次のように書く

$$\begin{cases} \sqrt{x} = -y + 7 & \cdots (3) \\ \sqrt{y} = -x + 11 & \cdots (4) \end{cases}$$

今の問題は実数解を探すので、(3),(4)式が実数であるという条件は

$$\begin{cases} \sqrt{x} \geqq 0 \\ \sqrt{y} \geqq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases} \text{ and } \begin{cases} -y+7 \geqq 0 \\ -x+11 \geqq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leqq x \leqq 11 \\ 0 \leqq y \leqq 7 \end{cases} \cdots (5)$$

(4)式を2乗すると　$y = x^2 - 22x + 121 \quad \cdots (6)$

よって、解くべき式は次のようになる

$$\begin{cases} y = -\sqrt{x} + 7 & \cdots (7) \\ y = x^2 - 22x + 121 & \cdots (8) \end{cases}$$

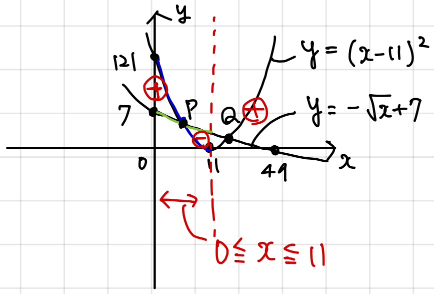
ここで次の関数を定義する。

$$f = (x^2 - 22x + 121) - (-\sqrt{x} + 7) \quad \cdots (9)$$

$$f = \underbrace{(x^2 - 22x + 121)}_{(x-11)^2} - (-\sqrt{x} + 7) \quad \cdots (9)$$

$f=0$ になる x が求める x である。ただし、(5)式の範囲で。

f の第1項と第2項を図示すると下図。



従って f は2つの交点 P, Q を持つが $0 \leqq x \leqq 11$ の範囲では交点Pの方が求める x になる。つまり、求める実数解は1つだけということが分かる。

→もっと厳密に言いたければ $y = -\sqrt{x} + 7 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{x}} < 0$ $(\because 0 < x \leqq 11)$ で単調減少と言えば…

そういうことで $f=0$ の解を力技で求めてみる。

$$(x-11)^2 = -\sqrt{x} + 7$$

$$(x-11)^2 - 7 = -\sqrt{x}$$

$$(x-11)^4 - 14(x-11)^2 + 49 = x$$

$$\underbrace{(x-11)}_{s}{}^4 - 14\underbrace{(x-11)}_{s}{}^2 + 38 = \underbrace{x-11}_{s}$$

$$s^4 - 14s^2 - s + 38 = 0 \longrightarrow$$

1	0	-14	-1	38	-2
	-2	4	20	-38	
1	-2	-10	19	0	

$s=-2$ は解の1つ

$$\underbrace{(s+2)}_{(ア)}\underbrace{(s^3 - 2s^2 - 10s + 19)}_{(イ)} = 0$$

(ア)$=0 \Rightarrow s=-2 \Rightarrow x-11=-2 \Rightarrow x=9$　上の図から明らか

これは $0 \leqq x \leqq 11$ を満たす。よって(イ)は解かなくてもよい

(ア)式より　$y = -\sqrt{9} + 7 = -3 + 7 = 4$

これは $0 \leqq y \leqq 7$ を満たす

以上から求める実数解は　$x=9,\ y=4$

[ザツメモ]

$s^3 - 2s^2 - 10s + 19 = 0$ の数値解は $s \approx -3.13,\ 1.84,\ 3.28$ なので

$x-11 \approx -3.13,\ 1.84,\ 3.28 \Rightarrow x \approx +7.87,\ 12.84,\ 14.28$ となる。

$0 \leqq x \leqq 11$ だと $x \approx 7.87$ は解の候補になってしまう。

しかし、実は (5),(8)式より x の条件は

$$0 \leqq (x-11)^2 \leqq 7$$

$$-\sqrt{7} \leqq x-11 \leqq \sqrt{7} \qquad \sqrt{7} \approx 2.64$$

$$11-\sqrt{7} \leqq x \leqq 11+\sqrt{7} \rightarrow 8.36 \leqq x \leqq 13.64$$

(5)式に戻ると　$8.36 \leqq x \leqq 11$ が最終的な x の条件

で、これを満たすのは $x=9$ だけである。