

緩和パラメーターの再検討

菖蒲迫 健介 (九州大学) ^{*1}

(2023/06/21)

■ はじめに

菖蒲迫修論 (2023) における緩和パラメーター ζ, ξ の設定法を見直した。修論では熱境界層理論を参考にこれらのパラメーターを設定したのだが、 Ra, Pr の違いでスケーリング則が変わることを考慮できていなかった。幾つかの文献を読んで、低 Pr の場合の緩和パラメーターの適用範囲を再検討してみた。

目次

1	Geodynamics のスケーリング則	2
1.1	準備	2
1.2	遷移境界層理論 (transient boundary-layer theory)	3
1.3	定常境界層理論 (steady-state boundary-layer theory)	5
1.4	まとめ	9
2	Pr 小, Ra 大のスケーリング則	10
2.1	準備	10
2.2	ヌッセルト数の表現 [Sigga, 1994]	11
2.3	従来のスケーリング則 (1/3 乗則)	16
2.4	新しいスケーリング則 [Castaing et al., 1989]	19
3	修論への修正	27
	謝辞	29
	参考文献	29

^{*1} 九州大学大学院理学府 地球惑星科学専攻 地球内部ダイナミクス研究室 博士 1 年
E-mail: shobuzako.kensuke.242@s.kyushu-u.ac.jp

1 Geodynamics のスケーリング則

この節では Turcotte and Schubert (2020) の説明をまとめる*2. §4.15, §6.20, §6.21 に準拠し、乱流的イメージの遷移境界層理論と層流的イメージの定常境界層理論について書く.

1.1 準備

後から使うので, §4.15「半無限空間の瞬間的な加熱・冷却」の概要をメモしておく (導出は省略).

■ 想定する状況

- 考える式 (一次元の熱伝導方程式)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

- 初期条件と境界条件 (図 1.1)

$$\begin{aligned} T &= T_1 & (t = 0-, y > 0) \\ T &= T_0 & (t = 0+, y = 0) \\ T &\rightarrow T_1 & (t > 0, y \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (1.2)$$

ここで, $T_0 > T_1$ である (注意: 後の議論では T_0, T_1 の大小関係が逆転する).

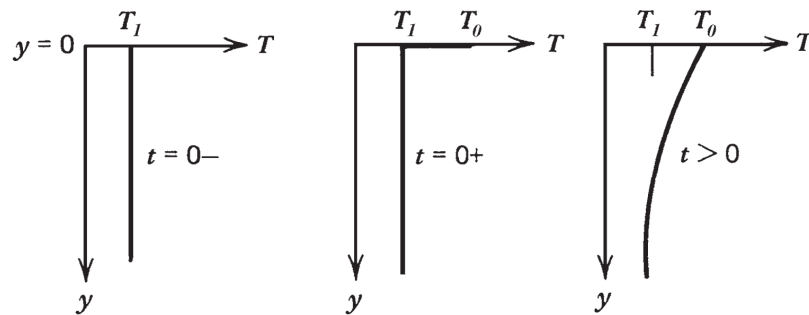


図 1.1: 一次元半無限空間モデル (昇温の場合). 図の出典は Turcotte and Schubert (2020).

■ 計算の結果から分かる重要なこと

1. 一般解は以下.

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (1.3)$$

ここで, $\operatorname{erfc}(x)$ は x に関する相補誤差関数*3.

*2 参考にしたのは日本語訳版.

*3 相補誤差関数は 1 から誤差関数 $\operatorname{erf}(x)$ を引いたものである. ここで, 誤差関数は以下で定義される.

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x'^2} dx'$$

2. 表面の当然昇温が起こってから時間 t だけ経過するまでに半無限空間に流入する熱エネルギー Q は以下.

$$Q = \int_0^t q dt' = \frac{2k(T_0 - T_1)}{\sqrt{\kappa\pi}} \sqrt{t} \quad (1.4)$$

ここで, q は地表面 $y = 0$ における熱流束である^{*4}. T_0, T_1 は実効的な境界温度を表す.

1.2 遷移境界層理論 (transient boundary-layer theory)

■ コンセプト

「低温上面で冷やされて成長した部分 (熱境界層) が重力不安定によって剥がれ落ちることで下降流が生じ, 下側境界ではその逆の現象が起きることで上昇流が生じる」と考える. または, ある流体塊の実効的なレイリー数が臨界レイリー数に達すると, その流体塊が熱境界層から分離すると考える. すなわち, **熱境界層に線形安定解析の考え方を適用する**ことを前提条件としている.

[ザコメモ] 激しい対流には適用不可?

■ 具体的な計算

対流層の厚さを b とし, 上下の熱境界層に挟まれた領域に等温核が形成されるとする. 等温核の温度 T_c は

$$T_c = T_0 + \frac{1}{2}(T_1 - T_0) \quad (1.5)$$

である. ここで, T_0 は上面温度, T_1 は下面温度である ($T_0 < T_1$). 対称性から低温上面のみを考える. この時, 等温核の流体に対して半無限空間冷却モデルを適用する.

$$\frac{T_c - T}{T_c - T_0} = \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \quad (1.6)$$

熱境界層における実効的な臨界レイリー数 $Ra_{c,\delta}$ を以下で定義する.

$$Ra_{c,\delta} \equiv \frac{\alpha g \Delta T_{\text{eff}} \delta^3}{\nu \kappa} = \frac{\alpha g (T_1 - T_0) \delta^3}{2\nu \kappa} \quad (1.7)$$

実効的な温度差 ΔT_{eff} には $T_c - T_0$ を用いた ((1.5) 式を使用). δ は熱境界層の厚さで, 今回は以下を採用する.

$$\delta = \sqrt{\kappa t} \quad (1.8)$$

これを用いると, 境界層が分離するまでにかかる時間 t_c を以下のように得る.

$$t_c = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{2\nu \kappa Ra_{c,\delta}}{\alpha g (T_1 - T_0)} \right)^{2/3} \quad (1.9)$$

^{*4} フーリエの法則から

$$q = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{k(T_0 - T_1)}{\sqrt{\pi \kappa t}}$$

また、この間に等温核から境界層に流入した平均熱流量 \bar{q} は、(1.4) 式より

$$\bar{q} \equiv \frac{Q}{t_c} = \frac{2k(T_c - T_0)}{\sqrt{\pi\kappa t_c}} = \frac{k(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi\kappa t_c}} \quad (1.10)$$

(1.9) 式と (1.10) 式から、 t_c を消去すると

$$\bar{q} = \frac{k(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\alpha g(T_1 - T_0)}{2\nu\kappa Ra_{c,\delta}} \right)^{1/3} \quad (1.11)$$

を得る．ヌッセルト数 Nu は実際の熱輸送と熱伝導のみによる熱輸送の比であるから

$$Nu = \frac{\bar{q}}{k(T_1 - T_0)/b} = \frac{1}{2^{1/3}\pi^{1/2}} \left(\frac{Ra}{Ra_{c,\delta}} \right)^{1/3} \quad (1.12)$$

を最終的に得る．例えば、二次元箱型の問題の場合、free-slip 条件では $Ra_c \sim 657.5$ なので

$$Nu \sim 0.051 Ra^{1/3} \quad (1.13)$$

となり、no-slip 条件では $Ra_c \sim 1707.8$ なので

$$Nu \sim 0.037 Ra^{1/3} \quad (1.14)$$

となる^{*5}．

■ 重要な帰結

遷移境界層理論 (transient boundary-layer theory) では、 $Nu \sim Ra^{1/3}$ となる．

^{*5} ジオダイナミクスの結果と定数倍異なるのは、熱境界層の厚さを指定していないからである．

1.3 定常境界層理論 (steady-state boundary-layer theory)

■ 目標

高粘性流体の定常状態における速度スケールとヌッセルト数を解析的に求める。

■ 問題設定

- 非常に粘性が大きい流体を考え、運動方程式の慣性項を無視する
- 図 1.2 のように幅 $\lambda/2$ のセル状の二次元対流を考える
- 上面境界を $y = 0$ とし、鉛直下向きを正とする
- 水平方向の速度は $x = 0, \lambda/2$ でゼロとし、 $x = \lambda/4$ で最大値 u_0 になるようにする
- 鉛直方向の速度は $y = 0, b$ でゼロとする
- 全壁で free-slip とする

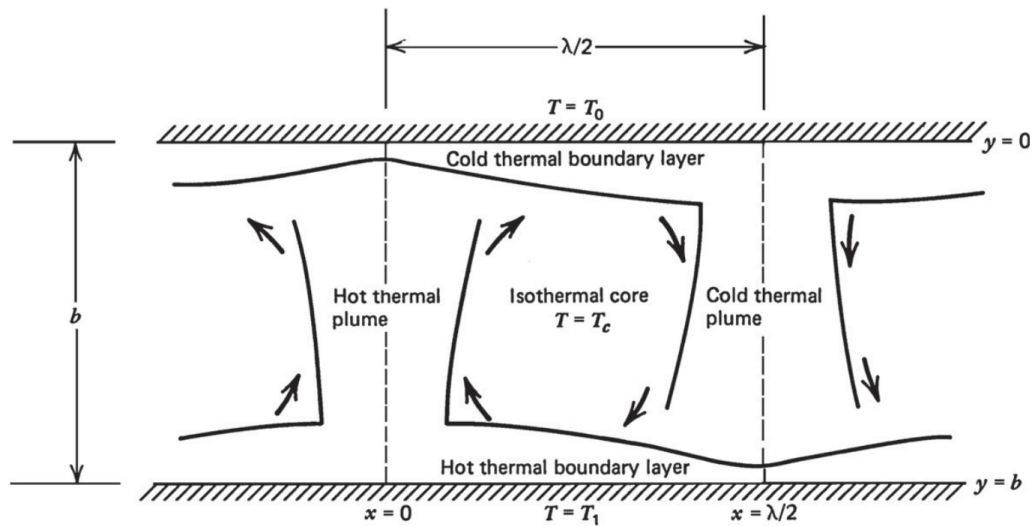


図 1.2: 二次元熱対流セルの境界層構造. 図の出典は Turcotte and Schubert (2020).

■ 具体的な計算

上側の境界層内の温度は、海洋リソスフェアの冷却モデル (§4.16) と同様に考えると

$$\frac{T_c - T}{T_c - T_0} = \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{2} \left(\frac{u_0}{\kappa x} \right)^{1/2} \right] \quad (1.15)$$

となる。ここで、 $t \rightarrow x/u_0$ と置き換えた。 u_0 は水平方向の平均速度である。(1.4) 式を用いて、1 ロール内における上側の熱境界層に流入した熱量を以下のように求める。

$$Q = \int_0^{\lambda/2} k(T_c - T_0) \left(\frac{u_0}{\pi \kappa x'} \right)^{1/2} dx' = 2k(T_c - T_0) \left(\frac{u_0 \lambda}{2\pi \kappa} \right)^{1/2} \quad (1.16)$$

次に、上側の熱境界層が位置 $x = \lambda/2$ で方向転換して下降ブルームになる場合を考える。この間の熱伝導は小さいと思って無視すると、回った直後のブルーム内の水平温度分布は、回る前の熱境界層内の鉛直温度分布と等しい。この時、単位時間当たりの質量保存則から

$$u_0 \int_0^y dy' = v_0 \int_0^{\lambda/2} -x dx' \quad (1.17)$$

すなわち

$$y = \frac{v_0}{u_0} \left(\frac{\lambda}{2} - x \right) \quad (1.18)$$

(1.15) 式に対して、 $x = \lambda/2$ および上式を適用すると

$$\frac{T_c - T}{T_c - T_0} = \operatorname{erfc} \left[\frac{v_0}{2u_0} \left(\frac{\lambda}{2} - x \right) \left(\frac{2u_0}{\kappa\lambda} \right)^{1/2} \right] \quad (1.19)$$

を得る。その後のブルーム内における温度場の時間発展は、上式を初期条件とした熱伝導問題を解けば良い。

ここからは水平方向の平均速度 u_0 を見積もる。下降ブルームに対する鉛直下向きの単位体積あたりの浮力は $\rho_0 g \alpha (T_c - T)$ である。そこで、鉛直下向きに沿った単位長さ当たりの浮力 f_b は

$$\begin{aligned} f_b &= \rho_0 g \alpha \int_{\lambda/2}^{-\infty} (T_c - T)(-dx) \\ &= \rho_0 g \alpha (T_c - T_0) \int_{\lambda/2}^{-\infty} \operatorname{erfc} \left[\frac{v_0}{2u_0} \left(\frac{\lambda}{2} - x \right) \left(\frac{2u_0}{\kappa\lambda} \right)^{1/2} \right] (-dx) \end{aligned} \quad (1.20)$$

と書ける。ここで、積分は x 負方向に行うため負の符号を付けた。積分の上端は本来ブルームの厚さ分だけだが、その場所では $T \rightarrow T_c$ となるので、計算の都合上、無限積分に置き換えた。 $x' = \lambda/2 - x$ と変数変換すると、積分区間は $[0, \infty]$ となるので以下のようになる^{*6}。

$$\begin{aligned} f_b &= \rho_0 g \alpha (T_c - T_0) \int_0^{\infty} \operatorname{erfc} \left[\frac{v_0 x'}{2u_0} \left(\frac{2u_0}{\kappa\lambda} \right)^{1/2} \right] dx' \\ &= \rho_0 g \alpha (T_c - T_0) \frac{2u_0}{v_0} \left(\frac{\kappa\lambda}{2u_0} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}(z) dz \\ &= \rho_0 g \alpha (T_c - T_0) \frac{2u_0}{v_0} \left(\frac{\kappa\lambda}{2\pi u_0} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.21)$$

ゆえに、ブルーム全体に対する浮力 F_b は次となる。

$$F_b = \int_0^b f_b dy' = f_b b = 2\rho_0 g \alpha b (T_c - T_0) \frac{u_0}{v_0} \left(\frac{\kappa\lambda}{2\pi u_0} \right)^{1/2} \quad (1.22)$$

^{*6} 相補誤差関数の積分は以下の通り。

$$\int_0^{\infty} 1 \cdot \operatorname{erfc}(z) dz = [z \cdot \operatorname{erfc}(z)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} z \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \right) dz = 0 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} [e^{-z^2}]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

ただし、下降プルーム内では水平方向の熱伝導しか起こらないと考え、(1.20) 式の水平方向の積分がどの深さでも一定であるとした (f_b は深さに依らないとした). 対称性から、上昇プルームでは $(T_c - T_0) \rightarrow (T_c - T_1)$ と置き換えるだけで良い. 次に等温核の粘性流を求めるための境界条件を考える. 簡単のため、図 1.3 のような線形な速度分布を仮定する.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dy} &= c_1 \\ \frac{dv}{dx} &= c_2\end{aligned}\tag{1.23}$$

ここで、 c_1, c_2 は定数. これを適切な境界条件のもと解くと

$$u = u_0 \left(1 - 2 \frac{y}{b}\right)\tag{1.24}$$

$$v = -v_0 \left(1 - 4 \frac{x}{\lambda}\right)\tag{1.25}$$

となる*7. 幾何学的な質量保存から

$$\frac{v_0 \lambda}{2} = u_0 b\tag{1.26}$$

ただし、端で速度がゼロになるという境界条件は考慮できていないことに注意.

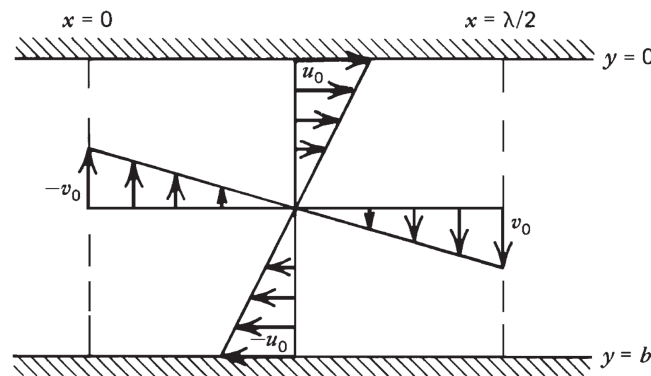


図 1.3: 線形速度分布. 図の出典は Turcotte and Schubert (2020).

等温核と (薄い) 熱境界層のに釣り合い流れを考える. 粘性が非常に高いので粘性力と浮力が釣り合う. 二次元における粘性応力 τ_{xy} は以下で与えられた (座標の取り方に注意).

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial(-y)} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\tag{1.27}$$

*7 境界条件として以下を設定.

$$\begin{aligned}(y, u) &= (0, u_0), (b, -u_0) \\ (x, v) &= (0, -v_0), (\lambda/2, v_0)\end{aligned}$$

鉛直境界と水平境界で考えると以下となる (端で速度がゼロになることを用いる).

$$\tau_{xy} = \mu \frac{2u_0}{b} \quad (1.28)$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{4v_0}{\lambda} \quad (1.29)$$

対流セルにおける単位時間あたりの仕事の釣り合いから

$$2 \times F_b v_0 = 2 \times \underbrace{\tau_{xy} \times \frac{\lambda}{2} \times 1 \times u_0}_{\text{force}} + 2 \times \underbrace{\tau_{yx} \times b \times 1 \times v_0}_{\text{force}} \quad (1.30)$$

となる. (1.22), (1.28), (1.29) 式を代入すると

$$\rho_0 g \alpha u_0 (T_c - T_0) \left(\frac{\kappa \lambda}{2\pi u_0} \right)^{1/2} = \frac{2v_0^2 \mu}{\lambda} + \frac{u_0^2 \mu \lambda}{2b^2} \quad (1.31)$$

を得る. さらに, (1.5) 式と (1.26) 式を用いて, $(T_c - T_0), v_0$ を消去すると

$$u_0 = \frac{\kappa}{b} \frac{(\lambda/2b)^{7/3}}{\{1 + (\lambda/2b)^4\}^{2/3}} \left(\frac{Ra}{2\sqrt{\pi}} \right)^{2/3} \quad (1.32)$$

(1.16) 式に代入すると

$$Q = \frac{k(T_1 - T_0)}{2^{1/3} \pi^{2/3}} \frac{(\lambda/2b)^{5/3}}{\{1 + (\lambda/2b)^4\}^{1/3}} Ra^{1/3} \quad (1.33)$$

従って

$$Nu = \frac{Q}{k(T_1 - T_0)/b \times \lambda/2} = \frac{1}{2^{1/3} \pi^{2/3}} \frac{(\lambda/2b)^{2/3}}{\{1 + (\lambda/2b)^4\}^{1/3}} Ra^{1/3} \quad (1.34)$$

最後に, セルの横縦比 (アスペクト比) $\lambda/2b$ を与える. 線形安定解析の結果によると, 最も擾乱が速く成長するアスペクト比は $\sqrt{2}$ であるが, 有限振幅理論ではヌッセルト数が最大になるアスペクト比を用いる. これは, ある固定されたレイリー数に対して最も効率的に熱を輸送するアスペクト比を求めることに対応する. 従って

$$\frac{\partial Nu}{\partial (\lambda/2b)} = 0 \quad (1.35)$$

を解いて

$$\frac{\lambda}{2b} = 1 \quad (1.36)$$

となる. これを代入すると

$$u_0 \sim 0.271 Ra^{2/3} \quad (1.37)$$

$$Nu \sim 0.294 Ra^{1/3} \quad (1.38)$$

■ 重要な帰結

定常境界層理論 (steady-state boundary-layer theory) では, $Nu \sim Ra^{1/3}$ となる.

1.4 まとめ

本節のまとめは以下である。

1. どちらの理論においても $Nu \sim Ra^{1/3}$ となる
2. 遷移境界層理論は温められた流体塊がポコポコ浮かんでいく乱流的イメージで、定常境界層理論は穏やかな層流的イメージである

両者の考え方はかなり異なるが、**ヌッセルト数がレイリー数の $1/3$ 乗に比例する**点で一致する。その理由は有名で以下の通り。

$Nu \propto Ra^{1/3}$ の理由

上下面の境界を通した熱の受け渡しは熱境界層で行われる。熱境界層が系の大きさに依らないと仮定すると、実効的な熱流量 q も系の大きさに依らない。ゆえに、ヌッセルト数は流体層の厚さ d のみに比例する。

$$Nu = \frac{q}{k\Delta T/d} \propto d \quad (1.39)$$

一方、レイリー数は d の 3 乗に比例する。

$$Ra \propto d^3 \quad (1.40)$$

レイリー数とヌッセルト数が比例関係にあるならば、以上の整合性から

$$Nu \sim Ra^{1/3} \quad (1.41)$$

が得られる。実験では、滑りなし条件で $Nu \propto Ra^{0.3}$ となるようだ。

2 Pr 小, Ra 大のスケーリング則

■ はじめに

B. Castaing et al. (1989) と E. D. Siggaa (1994) をまとめる. 両者とも Pr が小さく Ra が大きい場合の乱流的な熱対流を対象にしている. 具体的には $0.64 < Pr < 6.5$ と $10^4 < Ra < 10^{14}$ で, 修論で扱った空気の $Pr = 0.71$ をカバーしている. Castaing et al. (1989) は 5 K のヘリウムに関する実験および理論が書かれており^{*8}, Siggaa et al. (1994) はレビュー論文である. なお, 以下の変数は原論文と異なることに注意.

2.1 準備

■ 考える系

- 箱型のブシネスク熱対流

$$\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \alpha T g \hat{\mathbf{e}}_z \quad (2.1)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right] = \kappa \nabla^2 T \quad (2.2)$$

$\hat{\mathbf{e}}_z$ は鉛直方向の単位ベクトルで, 鉛直上向きを正とした. ここで, $\underline{\underline{\tau}}$ は等方的なニュートン流体の構成方程式である.

$$\tau_{\alpha\beta} = \eta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \right) = \eta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (2.3)$$

最後の等式には非圧縮の式を用いた.

- 横壁は断熱壁 (もしくは周期境界条件)
- Castaing et al. (1989) は no-slip 条件 / Siggaa et al. (1994) は free-slip 条件

■ 無次元因子

無次元化には以下を用いる. ただし, 圧力はエネルギー密度でスケールする.

$$\mathbf{v} = \frac{\kappa}{d} \mathbf{v}^* \quad (2.4)$$

$$t = \frac{d^2}{\kappa} t^* \quad (2.5)$$

$$\nabla = \frac{1}{d} \nabla^* \quad (2.6)$$

$$T = \Delta T T^* \quad (2.7)$$

$$p' \sim \rho_0 v^2 p^* \sim \rho_0 \frac{\kappa^2}{d^2} p^* \quad (2.8)$$

^{*8} 特に hard turbulence と呼ばれる対流を対象にしていた. これは定常状態における温度分布が指数関数的な対流系を指す. 一方, これがガウスシアン的なものを soft turbulence と呼ぶ.

この時、基礎方程式を無次元化すると以下を得る.

$$\left[\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* + \nabla^* p^* \right] Pr^{-1} = \nabla^* \cdot \underline{\underline{\tau}}^* + Ra Pr T^* \hat{\mathbf{e}}_z \quad (2.9)$$

$$\left[\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) T^* \right] = \nabla^{*2} T^* \quad (2.10)$$

ここで、以下のレイリー数とプラントル数の定義を用いた.

$$Ra \equiv \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\kappa \nu} \quad (2.11)$$

$$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.12)$$

[ザコメモ] 直感的に分かりやすいので次元付きで計算を進める

2.2 ヌッセルト数の表現 [Sigga, 1994]

■ 温度の式を用いたヌッセルト数の表現

温度の式 ((2.2) 式) の水平平均を取ると、次式を得る^{*9}.

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{v_z T} - \kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.13)$$

上付きバーは水平平均を表す. 以降は定常状態を考えてゆくが乱流的な熱対流を想定しているので、時間平均すると定常的と見なせる状態 (統計的な定常状態, stationary state) を考える. この時、上式は

$$\overline{v_z T} - \kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = Const. \quad (2.14)$$

となる. もしくは

$$\rho_0 c_p \overline{v_z T} - k \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = Const. \equiv q_c \quad (2.15)$$

である. 特に、下の式は定常状態における一定の熱流束 (heat flux) を表す. 従って、ヌッセルト数は以下となる.

$$Nu \equiv \frac{q_c}{k \Delta T / d} = \frac{1}{k \Delta T / d} \left(\rho_0 c_p \overline{v_z T} - k \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) \quad (2.16)$$

これを無次元化すると以下を得る.

$$Nu = \overline{v_z^* T^*} - \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial z^*} \quad (2.17)$$

^{*9} 移流項は以下のように非圧縮の式を使ってから平均を取ることに注意.

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \nabla \cdot (\mathbf{v} T) - T (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{v} T)$$

特に、上下の壁境界では $v_z = 0$ であるから

$$Nu = \frac{-k \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right)_{(z=0,d)}}{k\Delta T/d} \quad (2.18)$$

という見慣れた形のヌッセルト数の式を得る。

もう一つの表現を得るために、温度の式の両辺に T を掛けて変形すると以下を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} T^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} T^2 \mathbf{v} \right) - \kappa T \nabla^2 T = 0 \quad (2.19)$$

ただし、非圧縮であることを用いた。両辺を体積積分し、ガウスの定理を用いて式変形を重ねる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} T^2 \right) dV + \underbrace{\int_S \left(\frac{1}{2} T^2 \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{S}}_{=0} - \kappa \int_V \left(\nabla \cdot (T \nabla T) - \nabla T \cdot \nabla T \right) dV &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} T^2 \right) dV + \kappa \int_S T \nabla T \cdot d\mathbf{S} - \kappa \int_V (\nabla T)^2 dV &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

水平平均を取って、統計的な定常状態を考えると

$$\begin{aligned} \kappa \int_S T \nabla T \cdot d\mathbf{S} &= \kappa \int_V (\nabla T)^2 dV \\ T_t \int_{z=d} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} dS - T_b \int_{z=0} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} dS &= \int_V (\nabla T)^2 dV \\ -\frac{T_t \Delta T}{d} Nu \int_{z=d} dS + \frac{T_b \Delta T}{d} Nu \int_{z=0} dS &= \int_V (\nabla T)^2 dV \\ \frac{(\Delta T)^2}{d} Nu \times S &= \int_V (\nabla T)^2 dV \end{aligned} \quad (2.21)$$

ここで、 S は上面、下面の面積とした。体積平均を取ると (Sd で割ると)

$$\frac{(\Delta T)^2}{d^2} Nu = \langle (\nabla T)^2 \rangle \quad (2.22)$$

となる。ここで、記号 $\langle - \rangle$ は体積平均を意味する。ゆえに

$$Nu = \frac{d^2}{(\Delta T)^2} \langle (\nabla T)^2 \rangle \quad (2.23)$$

無次元化すると

$$Nu = \langle (\nabla^* T^*)^2 \rangle \quad (2.24)$$

を得る。以上の結果をまとめる。

温度の式を用いたヌッセルト数の表現

温度の式から導かれるヌッセルト数は以下となる。

$$\begin{aligned} Nu &\equiv \frac{q_c}{k\Delta T/d} \\ &= \frac{1}{k\Delta T/d} \left(\rho_0 c_p \overline{v_z T} - k \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right) = \frac{d^2}{(\Delta T)^2} \langle (\nabla T)^2 \rangle = \frac{-k \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right)_{(z=0,d)}}{k\Delta T/d} \quad (2.25) \end{aligned}$$

右辺を無次元化すると以下となる。

$$Nu = \overline{v_z^* T^*} - \frac{\partial \overline{T^*}}{\partial z^*} = \langle (\nabla^* T^*)^2 \rangle = \left(\frac{\partial \overline{T^*}}{\partial z^*} \right)_{(z=0,d)} \quad (2.26)$$

■ 運動方程式を用いたヌッセルト数の表現

運動方程式 ((2.1) 式) の両辺に \mathbf{v} との内積を取る (運動エネルギーの式を作る)。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{v} \cdot \nabla p' + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}) + \alpha T g v_z \quad (2.27)$$

これからは両辺の体積積分を考える。まず、移流項に注目すると

$$\begin{aligned} &\int_V \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \, dV \\ &= \int_V \sum_{\alpha} v_{\alpha} \sum_{\beta} v_{\beta} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \, dV \\ &= \int_V \left[\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(\frac{1}{2} v_{\alpha}^2 v_{\beta} \right) - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{1}{2} v_{\alpha}^2 \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\beta}} \right] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (|\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) \, dV - \frac{1}{2} \int_V |\mathbf{v}|^2 \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{v})}_{=0} \, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (|\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) \, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_S |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

式変形にはガウスの定理と非圧縮の式を用いた。圧力勾配項と粘性項も同様に変形を重ねる。

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho_0} \int_V \mathbf{v} \cdot \nabla p' dV + \frac{1}{\rho_0} \int_V \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} dV \\
& = -\frac{1}{\rho_0} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{v} p') dV - \frac{1}{\rho_0} \int_V p' \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{v})}_{=0} dV + \frac{1}{\rho_0} \int_V \sum_{\alpha} v_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} dV \\
& = -\frac{1}{\rho_0} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{v} p') dV + \frac{1}{\rho_0} \int_V \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left[\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (v_{\alpha} \tau_{\alpha\beta}) - \left(\tau_{\alpha\beta} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \right) \right] \\
& = -\frac{1}{\rho_0} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{v} p') dV + \frac{1}{\rho_0} \int_V [\nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \cdot \mathbf{v}) - \underline{\underline{\tau}} : \nabla \mathbf{v}] dV \\
& = -\frac{1}{\rho_0} \int_S \mathbf{v} p' \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\rho_0} \int_S (\underline{\underline{\tau}} \cdot \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{\rho_0} \int_V (\underline{\underline{\tau}} : \nabla \mathbf{v}) dV \\
& = -\frac{1}{\rho_0} \int_V (\underline{\underline{\tau}} : \nabla \mathbf{v}) dV
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ただし、壁を突き抜けない条件と free-slip 条件を用いた^{*10}。(2.29) 式をもう少し計算すると

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho_0} \int_V (\underline{\underline{\tau}} : \nabla \mathbf{v}) dV \\
& = -\nu \int_V \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} dV \\
& = -\nu \int_V \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left[\left(\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(v_{\alpha} \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) - v_{\alpha} \frac{\partial^2 v_{\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \right] dV \\
& = -\nu \int_V \left[(\nabla \mathbf{v})^2 + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{v})}_{=0} \right] dV \\
& = -\nu \int_V (\nabla \mathbf{v})^2 dV - \nu \int_S (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \\
& = -\nu \int_V (\nabla \mathbf{v})^2 dV - \nu \int_S (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z dS \\
& = -\nu \int_V (\nabla \mathbf{v})^2 dV
\end{aligned} \tag{2.30}$$

^{*10} 例えば、 $(\underline{\underline{\tau}} \cdot \mathbf{v})$ の表面積分を具体的に計算すると

$$\begin{aligned}
\int_S (\underline{\underline{\tau}} \cdot \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} & = \int_S (\tau_{xz} v_x + \tau_{yz} v_y + \tau_{zz} v_z) dS \\
& = \eta \int_S \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) v_x + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) v_y + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \color{red}{v_z} \right] dS = 0
\end{aligned}$$

となる。ここで境界条件によって消える部分を赤字で示した。

となる。この式の物理的解釈は「表面で粘性が効かない (粘性力が表面で仕事をしない) 場合、粘性応力のする仕事は常に運動エネルギーを散逸させる」というものである。散逸した運動エネルギーは熱に還元されるが、ブシネスク系は熱エネルギーが運動エネルギーよりも遥かに大きい系であるから、この散逸分は通常無視される^{*11}。従って、(2.27) 式の体積積分を以下のように得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) dV = -\nu \int_V (\nabla \mathbf{v})^2 dV + \int_V \alpha T g v_z dV \quad (2.31)$$

統計的な定常状態では

$$\int_V \alpha T g v_z dV = \nu \int_V (\nabla \mathbf{v})^2 dV \quad (2.32)$$

となる。両辺の体積平均を取ると

$$\langle \alpha T g v_z \rangle = \nu \langle (\nabla \mathbf{v})^2 \rangle \quad (2.33)$$

となる。(2.25) 式を鉛直方向に積分すると

$$\begin{aligned} Nu \times d &= \frac{d}{k \Delta T} \left(\rho_0 c_p d \langle v_z T \rangle + k \Delta T \right) \\ \langle v_z T \rangle &= \frac{\kappa \Delta T}{d} (Nu - 1) \end{aligned} \quad (2.34)$$

を得る。上式に代入すると

$$\begin{aligned} \langle (\nabla \mathbf{v})^2 \rangle &= \frac{\alpha g}{\nu} \left[\frac{\kappa \Delta T}{d} (Nu - 1) \right] \\ &= Ra (Nu - 1) \frac{\kappa^2}{d^4} \end{aligned} \quad (2.35)$$

を最終的に得る。

運動エネルギーの式を用いたヌッセルト数の表現

温度の式から導かれるヌッセルト数は以下となる。

$$\langle (\nabla \mathbf{v})^2 \rangle = Ra (Nu - 1) \frac{\kappa^2}{d^4} \quad (2.36)$$

左辺を無次元化すると以下となる。

$$\langle (\nabla^* \mathbf{v}^*)^2 \rangle = Ra (Nu - 1) \quad (2.37)$$

(2.25) 式と (2.36) 式を導くのに特別な仮定を用いていないことに注意。すなわち、**これらの式はあらゆる熱対流系に対して適用可能な式である。**

^{*11} これを無視しない熱対流系の例は、拡張ブシネスク系や非弾性の熱対流系である。

力のバランスとエネルギーのバランスについて

(2.32) 式は運動エネルギーのつり合いを表す式である。物理的には「境界でエネルギーのやり取りがなければ、浮力のする仕事は粘性応力のする仕事とバランスする」ことを表す。特に、粘性の大きさに依存しないことに注意したい。力のつり合いの場合は粘性の大きさによって、浮力と粘性がバランスするか、浮力と慣性バランスするかが決まる。一方、エネルギーのつり合いでは常に粘性応力のする仕事とつり合う。なぜなら、エネルギーは常に巨視的なスケールから微視的なスケールへと輸送され (エネルギーカスケード過程)、ある空間スケールよりも小さくなると (分子) 粘性によって死んでしまう (コルモゴロフ理論) と考えられているからである^a。力のバランスは粘性の大きさや着目する空間スケールによって異なるが、エネルギーは必ず小さいスケールに輸送され、やがては (分子) 粘性応力のする仕事とつり合うのである。

^a 詳しくは乱流理論の本 (例: 木田重雄, 柳瀬真一郎 (1999) 『乱流力学』, 朝倉書店) を参照されたい。

2.3 従来のスケーリング則 (1/3 乗則)

■ 導出1: 熱境界層における熱輸送が系の大きさに依らないという仮定

熱境界層における熱流束 q が系の大きさ d に依らないと仮定すると

$$Nu \equiv \frac{q}{k\Delta T/d} \propto d \quad (2.38)$$

となる。一方, Ra は d の 3 乗に比例するので $Ra \propto d^3$ である。 $Nu \sim Ra$ とすると以下を得る。

$$Nu \sim Ra^{1/3} \quad (2.39)$$

■ 導出2: 遷移境界層理論

熱境界層での熱輸送が流体の運動に依らず, 単に熱伝導のみで起こると考える。この時, ヌッセルト数は以下となる。

$$Nu \sim \frac{k\Delta T/\delta}{k\Delta T/d} = \frac{d}{\delta} \quad (2.40)$$

熱境界層での実効的な臨界レイリー数 $Ra_{c,\delta}$ は

$$Ra_{c,\delta} = \frac{\alpha g \Delta T \delta^3}{\kappa \nu} \quad (2.41)$$

なので, ヌッセルト数の式と組み合わせて

$$\begin{aligned} Nu^3 &\sim \left(\frac{d}{\delta}\right)^3 = \frac{Ra}{Ra_{c,\delta}} \\ Nu &\sim \left(\frac{Ra}{Ra_{c,\delta}}\right)^{1/3} \end{aligned} \quad (2.42)$$

いずれにしても, $Nu \sim Ra^{1/3}$ というスケーリング則を得る。

■ 他の物理量に対するスケーリング則

以降、中心の流体層を対流層（論文では”central region”）と呼ぶ。\$Pr\$ が小さな系を想定しているので、統計的な定常状態では慣性項と浮力のつり合いが実現する。この時、対流層の速度 \$u_c\$ は以下のように見積もられる。

$$u_c \sim (\alpha g d \Delta T_c)^{1/2} \quad (2.43)$$

ここで \$\Delta T_c\$ は対流層の温度擾乱である^{*12}。対流層では主に移流によって熱が運ばれるから、熱流束 \$q\$ は以下のように書ける。

$$q \sim \rho_0 c_p u_c \Delta T_c \quad (2.44)$$

ここで \$Nu\$, \$\Delta T_c\$, \$u_c\$ が全てレイリー数に比例すると仮定する。

$$\begin{aligned} Nu &\sim Ra^\beta \\ \Delta T_c &\sim \Delta T Ra^\gamma \\ u_c &\sim \nu / d Ra^\epsilon \end{aligned} \quad (2.45)$$

以上 5 つの式を用いると、以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2}{3} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \\ \epsilon &= \frac{1}{2} (1 + \gamma) \end{aligned} \quad (2.46)$$

従来のスケーリング則では \$Nu \sim Ra^{1/3}\$ なので、上の式に代入すると最終的に以下を得る。

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{3} \\ \gamma &= -\frac{1}{9} \\ \epsilon &= \frac{4}{9} \end{aligned} \quad (2.47)$$

論文では下面の温度振動 \$\omega_p\$ も計測しており、上記と同様に \$Ra\$ に比例すると仮定する (図 2.1)。

$$\frac{\omega_p d^2}{\kappa} \sim Ra^\sigma \quad (2.48)$$

^{*12} 上面低温を \$T_0\$, 下面高温を \$T_1\$ とすると対流層の平均温度 \$T_c\$ は大体

$$T_c \sim \frac{T_0 + T_1}{2}$$

である。従って、\$\Delta T_c\$ を具体的に書くと以下となる。

$$\Delta T_c = T - T_c \sim T - \frac{T_0 + T_1}{2}$$

例えば、\$T\$ が最大温度 \$T_1\$ であったとすると

$$\Delta T_c = T_1 - T_c \sim \frac{T_1 - T_0}{2} \sim \frac{\Delta T}{2}$$

となるから、\$\Delta T_c\$ は最大でも系の温度差 \$\Delta T\$ の半分くらいの見積もりである。

Howard (1966) によると^{*13}, この振動数は κ/δ^2 に比例するらしいので

$$\frac{\omega_p d^2}{\kappa} \sim \frac{\kappa d^2}{\delta^2 \kappa} \sim \frac{Ra^{2/3}}{Ra_{c,\delta}^{2/3}} \sim Ra^{2/3} \quad (2.49)$$

と計算され, $\sigma = \frac{2}{3}$ を得る. ちなみに, 固有振動数 ω_p が Ra に比例することは図 2.2 から確かめられる.

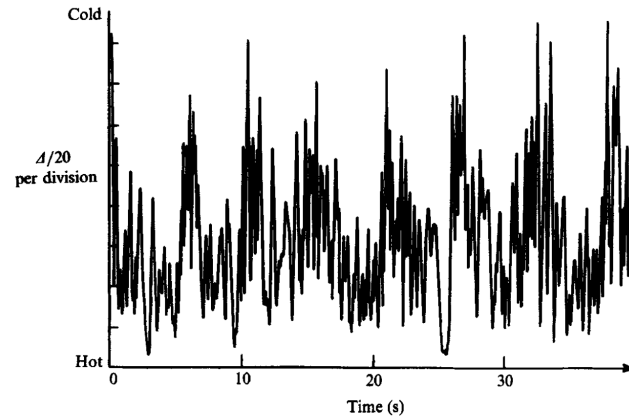


FIGURE 9. A time series from the bottom probe, showing 8 oscillations at the characteristic frequency ω_p . Here $Ra = 2.3 \times 10^8$.

図 2.1

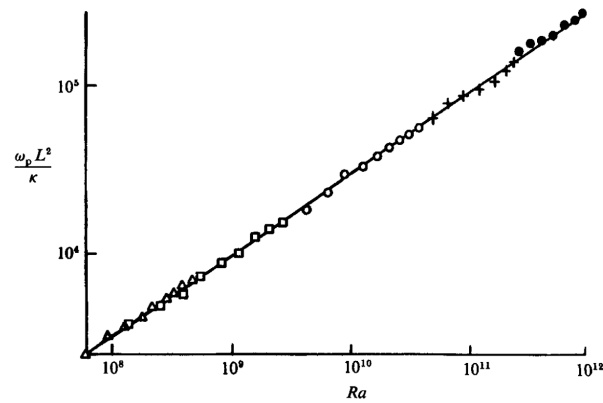


FIGURE 11. The dependence of the characteristic frequency ω_p upon Ra . The different symbols indicate different helium pressures within the cell.

図 2.2

これらの係数 ($\beta, \gamma, \epsilon, \delta$) を実際に計測してみると, 理論値と異なることが分かった (後述).

^{*13} L. N. Howard (1966) Convection at high Rayleigh number, *Applied Mechanics, Proc. of the 11th Congr. of Appl. Mech. Munich*, pp. 1109–1115, Springer

2.4 新しいスケーリング則 [Castaing et al., 1989]

実験で得られたデータを説明するために、対流層 (central region), 熱境界層に加えて, mixing zone なる層を考える (図 2.3). この層は熱境界層と対流層をなめらかに繋ぐ.

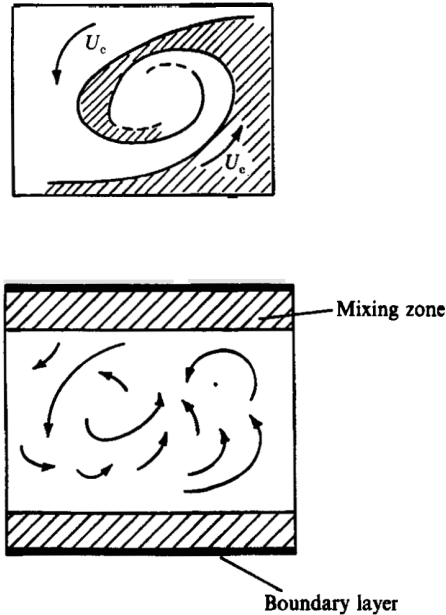


FIGURE 14. Two possible cartoons of the flow pattern in the centre of the cell.

図 2.3

まず、彼らの考える対流の描像について述べる (図 2.4). 対称性から下側境界のみを考える.

- (1) 流体が底面から温められることで、厚さ δ の熱境界層が形成される
- (2) このうち、体積割合 f だけがプルームとして成長する
- (3) このプルームが速さ u_c で引きちぎられて、対流層に合流する
- (4) 以上の過程が連続して起こる

■ 仮定

大きな仮定は以下の 2 つである.

- (i) mixing zone では浮力と粘性がつり合う
- (ii) mixing zone から対流層へ合流する際の速度は、対流層の速度と等しい

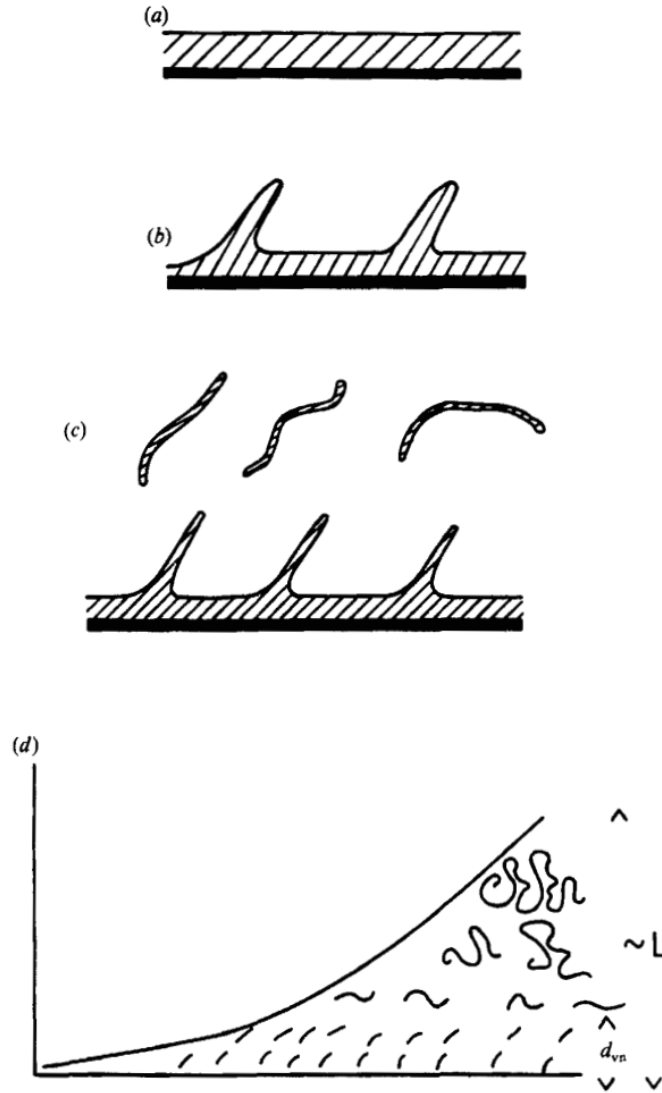


FIGURE 15. The mixing of the hot fluid from the boundary layer with the flow in the interior. (a) A boundary layer of size λ , stabilized by the wind, is formed (the dark line represents the bottom plate). (b) When the wind changes, the layer is unstable and breaks in a way similar to the Rayleigh–Taylor instability. (c) The process repeats itself. The spikes can be deformed by the wind, but the fraction of hot bubbles or objects is essentially determined by their speed of rise (see text). (d) The entire region, cold and hot fluid together is aspirated into the interior by turbulence in the interior. The hot region may be deformed further in the process but the fraction of hot and cold fluid remains the same.

図 2.4

彼らのスケーリング則を 2 つのアプローチから導く．

■ 導出 1

熱境界層では熱伝導によって熱が運ばれるから，系に出入りする熱流速 q は

$$q \sim \frac{k\Delta T}{\delta} \quad (2.50)$$

と見積もられる．ヌッセルト数の定義と $Nu \sim Ra^\beta$ の関係を用いて変形する．

$$\delta \sim \frac{k\Delta T}{q} \sim \frac{d}{Nu} \sim dRa^{-\beta} \quad (2.51)$$

次に mixing zone を出てゆく時の速度 w_h を考える．仮定 (i) を用いると統計的な定常状態では

$$w_h = \frac{\alpha g \Delta T \delta^2}{\nu} \quad (2.52)$$

となる．ここで長さスケールに熱境界層の厚さ δ を用いたことに注意．さらに仮定 (ii) を用いて， $w_h \sim u_c$ と見なす．

$$u_c \sim \frac{\alpha g \Delta T \delta^2}{\nu} \quad (2.53)$$

(2.53) 式に $u_c = \nu/LRa^\epsilon$ と (2.51) 式を代入すると

$$\epsilon = 1 - 2\beta \quad (2.54)$$

が得られる．(2.46) 式を用いると，最終的に以下を得る．

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2}{7} \\ \gamma &= -\frac{1}{7} \\ \epsilon &= \frac{3}{7} \end{aligned} \quad (2.55)$$

■ 導出 2

mixing zone の保存則を考える．まず質量保存を考える．

$$w_h f \sim w_b \quad (2.56)$$

ここで左辺は mixing zone から対流層へ出ていく (もぎ取られる) 量，右辺は熱境界層から mixing zone へ入っていく量を表す．次に熱の保存を考える．

$$q \sim \frac{k\Delta T}{\delta} \sim \rho_0 c_p w_b \Delta T \quad (2.57)$$

左辺は mixing zone の下から入ってくる熱，右辺は mixing zone から出ていく熱を表す．上の二つの式と仮定 (i) を用いると

$$f \sim \frac{\kappa \nu}{\alpha g \Delta T \delta^3} \quad (2.58)$$

を得る。熱境界層のうち割合 f だけが (温度 ΔT の) プルームとして上昇し, mixing zone を構成する。そのため, mixing zone の温度擾乱 ΔT_m は以下のように書ける^{*14}。

$$\Delta T_m \sim f \Delta T \quad (2.59)$$

mixing zone の上端付近では速度 u_c で流体塊がもぎ取られるが, この際に温度損失を伴わないとする。すなわち

$$\Delta T_c = \Delta T_m \quad (2.60)$$

(2.58), (2.59), (2.60) 式を用いると

$$\Delta T_c \sim \frac{\kappa \nu}{\alpha g \delta^3} \quad (2.61)$$

を得る。(2.43), (2.44), (2.51), (2.61) 式を用いて式変形を重ねる。

$$\begin{aligned} q &\sim \frac{k \Delta T}{d} Ra^\beta \quad (2.51) \\ \rho_0 c_p (\alpha g d \Delta T_c)^{1/2} \Delta T_c &\sim \frac{k \Delta T}{d} Ra^\beta \\ Ra^\beta &\sim \frac{d}{\kappa \Delta T} (\alpha g d)^{1/2} \left(\frac{\kappa \nu}{\alpha g \delta^3} \right)^{3/2} \\ Ra^\beta &\sim \frac{d}{\kappa \Delta T} (\alpha g d)^{1/2} \left(\frac{\kappa \nu}{\alpha g} \right)^{3/2} (d Ra^{-\beta})^{-9/2} \\ Ra^{-2\beta/7} &\sim Pr^{1/2} Ra^{-1} \quad (2.62) \end{aligned}$$

従って, $\beta = \frac{2}{7}$ となる。(2.46) 式を用いると (2.55) 式と同じ値を得る。なお, 導出 1 と異なる点は $u_c \sim w_h$ という仮定を用いていない点である。代わりに mixing zone を出る時の温度と対流層の温度が同じという (2.60) 式を用いた。実験の結果はこのスケーリング則と整合的である (下表)。

Quantity	Amplitude Experiment	Name	Index		
			Experimental value	Theoretical values	
				Present paper	Classical
Nu	0.23 ± 0.03	β	0.282 ± 0.006	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$
Δ_c / Δ	0.36 ± 0.04	γ	-0.147 ± 0.005	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{9}$
$\omega_p L^2 / \kappa$	0.36 ± 0.01	δ	0.491 ± 0.002	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$u_c L / \nu$	$1.05 Pr^{-\frac{2}{3}}$	ϵ	0.43	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{9}$
$\langle T(z) \rangle / \Delta$	varies	s	varies	0	$\frac{1}{3}$

TABLE 1. Summary of index values. The origin of the data and the theoretical predictions are given in the text. The fits are all in the form quantity = Amplitude $\times Ra^{\text{index}}$ except for the temperature which scales as a power of the distance from the bottom plate (see also §1.2).

^{*14} mixing zone の温度を T_m とおく。mixing zone は温度 T_c の対流層と温度 T_1 のプルームの平均を取って

$$T_m = f T_1 + (1 - f) T_c$$

と書ける。両辺から T_c を引くと, (2.59) 式を得る。

$$\Delta T_m = f(T_1 - T_c) \sim f \Delta T$$

■ Pr との関係

Castaing et al. (1989) では Pr に対するスケーリング則が書かれていない。Sigga (1994) はこれを以下のように修正した。まず、ヌッセルト数がレイリー数の他に、プラントル数にも依存すると考える。

$$Nu \sim \frac{d}{\delta} \sim Ra^a Pr^b \quad (2.63)$$

その上でヌッセルト数の定義を (2.43), (2.44), (2.61) 式を用いて変形してゆく。

$$\begin{aligned} Nu &= \frac{q}{k\Delta T/d} \\ &\sim \frac{u_c \Delta T_c d}{\kappa \Delta T} \\ &\sim \frac{d}{\kappa \Delta T} (\alpha g d \Delta T_c)^{1/2} \Delta T_c \\ &\sim \frac{d}{\kappa \Delta T} (\alpha g d)^{1/2} \left(\frac{\kappa \nu}{\alpha g \delta^3} \right)^{3/2} \\ &\sim \frac{d}{\kappa \Delta T} (\alpha g d)^{1/2} \left(\frac{\kappa \nu}{\alpha g} \right)^{3/2} \left(\frac{d}{Ra^a Pr^b} \right)^{-9/2} \\ &\sim Ra^{-1} Pr^{1/2} (Ra^a Pr^b)^{9/2} \end{aligned} \quad (2.64)$$

ゆえに, $a = \frac{2}{7}, b = -\frac{1}{7}$ を得る。レイノルズ数 Re も同様に考える。

$$Re = \frac{u_c d}{\nu} \sim Ra^c Pr^d \quad (2.65)$$

上と同じように式変形を重ねると以下が得られる。

$$Re \sim Ra^{3/7} Pr^{-5/7} \quad (2.66)$$

■ この節のまとめ

mixing zone を仮定すると、以下のスケーリング則を得る。

$$Nu \sim Ra^{2/7} Pr^{-1/7} \quad (2.67)$$

$$Re \sim Ra^{3/7} Pr^{-5/7} \quad (2.68)$$

このスケーリング則は、特に $Pr < 5$ かつ $Ra > 10^7$ の範囲において整合的と思われる。以下に Sigga (1994) の図を載せておく。

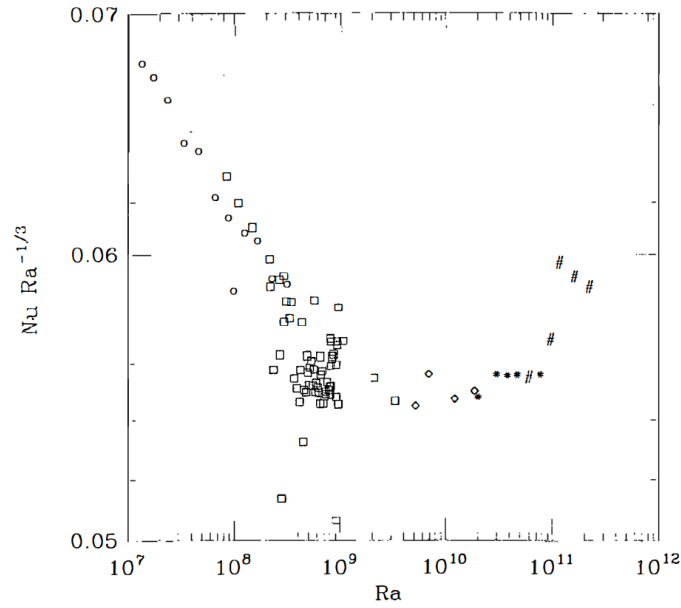


Figure 1 A scaled plot of the $Nu(Ra)$ data of Goldstein & Tokuda (1980) and Garon & Goldstein (1973). A fit to the data below 3.3×10^9 gave $Nu = 0.130 Ra^{0.293}$. The symbols—circle, square, diamond, star, and pound—denote the aspect ratios 4.5, 2.5, 0.98, 0.67, and 0.57, respectively. The points at $Ra = 1.18$ and 1.64×10^{11} are “suspect.”

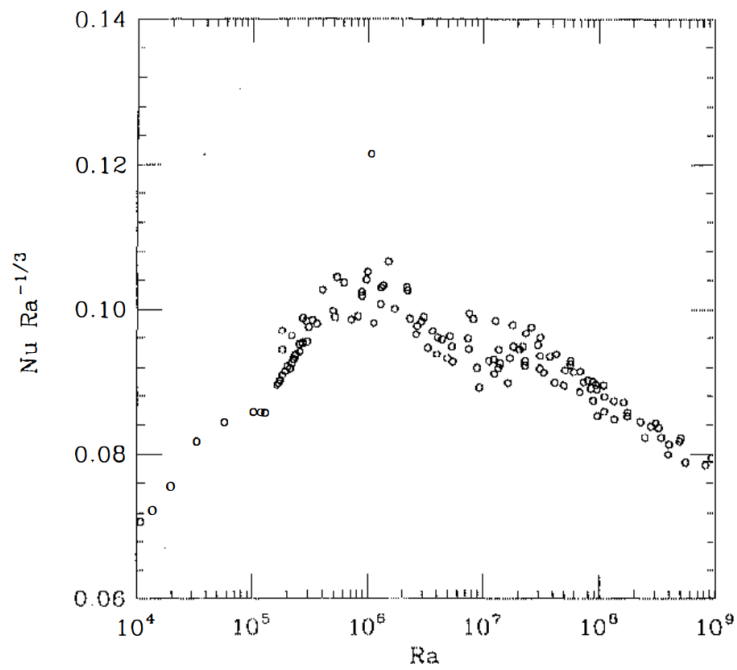


Figure 2 The low Ra portion of the Nu vs Ra data for the $A = 1$ helium cell from Castaing et al (1989) and Wu (1991). The Pr is 0.64–0.66. There is no well-defined $1/3$ exponent but rather a cross over to $(2.17a)$ for $Ra \gtrsim 10^7$.

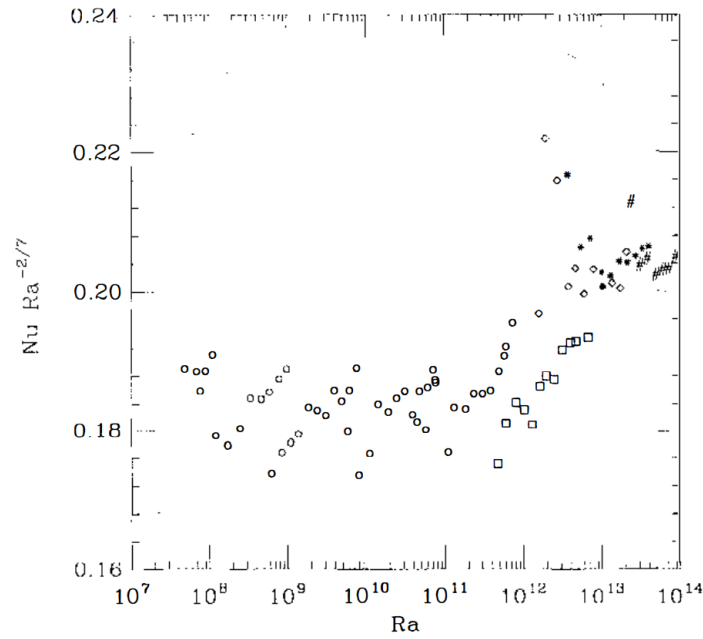


Figure 3 The high Ra heat flux data for the $A = 0.5$ helium cell from Wu & Libchaber (1992) and Wu (1991) scaled according to (2.17a) (inclusion of $Pr^{-1/7}$ gives a slightly worse fit). The circle, square, diamond, star, and pound correspond to $Pr \approx 0.67, 0.80, 0.97, 1.07$, and 1.52 . For the solid diamond near $Ra \sim 10^{13}$, there is a 12% difference in thermal diffusivity between the temperature extremes, and somewhat greater non-Boussinesq effects at higher Ra . The fit to (2.17a) for $A = 1$ is comparable.

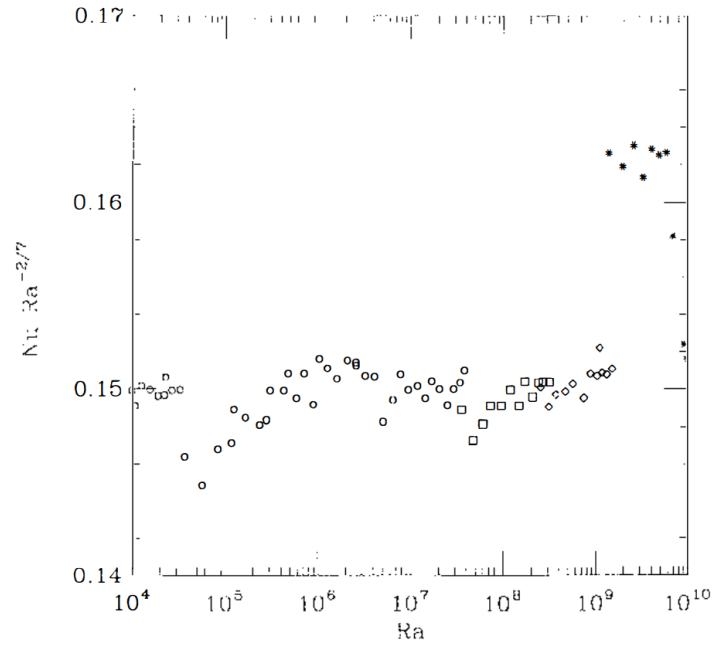


Figure 4 The Nu vs Ra data for the $A = 6.7$ cell following Figure 3. The symbols now correspond to $Pr = 0.65, 0.7, 0.8$, and 1.1 with comparable non-Boussinesq effects at the highest Ra .

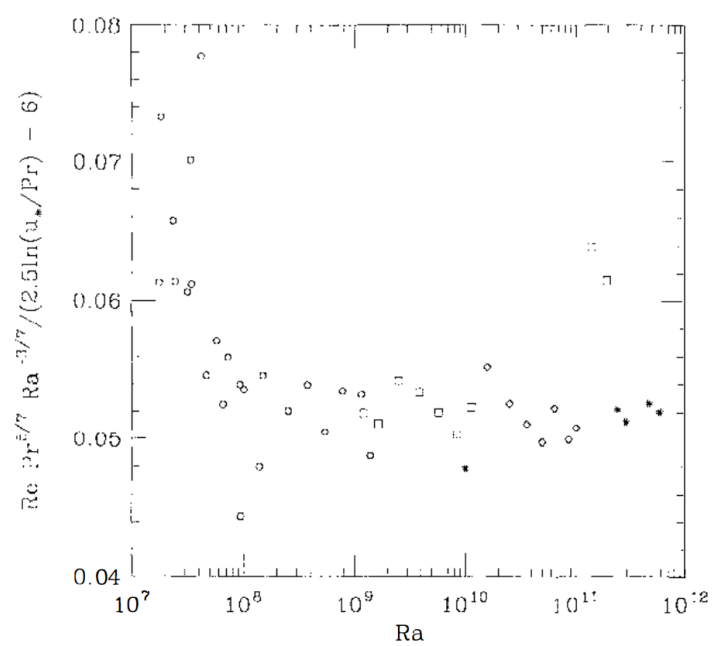


Figure 5 The Reynolds number scaled according to (2.17b) for the $A = 1$ data in Figure 2. The symbols—circle, square, diamond, star, and pound—correspond to $Pr \simeq 0.65, 0.7, 0.9$, and 1.4.

3 修論への修正

■ 緩和パラメーター ζ の正しい適用範囲

修論では、 $Pr = 0.71$ の流れに対して (マントル対流のような) 層流的な熱境界層理論を適用していた。しかし、このレジームではブルームがぼつぼつ生じるような乱流的熱対流が起これると思われる。そこで、この低 Pr 領域に新しいスケーリング則 (2.67), (2.68) 式を加えて、修正する。

まず、(2.68) 式を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} V &= \frac{\nu}{d} Ra^{3/7} Pr^{-5/7} \\ &= \frac{\kappa}{dc_0} \frac{\nu}{\kappa} Ra^{3/7} Pr^{-5/7} c_0 \\ &= Ra^{3/7} Pr^{2/7} M_{th} c_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで V は典型的な速度、 c_0 は音速で、 M_{th} は熱拡散速度を用いたマッハ数である。

$$M_{th} \equiv \frac{\kappa}{dc_0} \quad (3.2)$$

マッハ数 M が十分小さいという条件から

$$M \equiv \frac{V}{c_\zeta} = Ra^{3/7} Pr^{2/7} M_{th} \zeta \ll 1 \quad (3.3)$$

となる。ここで c_ζ は低減された音速である。

$$c_\zeta \equiv \frac{c_0}{\zeta} \quad (3.4)$$

ζ について解くと以下を得る。

$$\zeta \ll \frac{1}{Ra^{3/7} Pr^{2/7} M_{th}} \quad (3.5)$$

■ 修論との比較

熱境界層を考慮した力のつり合いから求まる速度は以下であった。

$$V_s^{tb} = Ra^{2/3} M_{th} c_0 \quad (3.6)$$

$$V_f^{tb} = (RaPr)^{2/5} M_{th} c_0 \quad (3.7)$$

ここで V_s^{th} は熱境界層を考慮したストークス速度、 V_f^{th} は熱境界層を考慮した自由落下速度である。このうち、自由落下速度を (3.1) 式に書き換える。実現する速度は遅い方なので、速度スケールの切り替えとして $Pr \ll Ra^{5/6}$ を採用する。

ζ は大きいほうが良いので、積 $Ra^a Pr^b$ は小さい方がお得となる。修論の場合との比を取ると

$$\epsilon = \frac{Ra^{3/7} Pr^{2/7}}{(RaPr)^{2/5}} = Ra^{1/35} Pr^{-4/35} \quad (3.8)$$

となる． ϵ が 1 よりも大きいと，新しい ζ の決め方は修論の時に比べて不利である． $Pr = 0.71, Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ を代入すると

$$\epsilon = 1.35, 1.43, 1.53 \quad (3.9)$$

を得るから，新しい決め方は不利という結論になる（どれくらい不利かは計算してみないと分からない）．この結果は修論時のスケーリング則がやや甘かったことも示唆する．つまり，速度を過小評価していた可能性がある．

■ まとめ

以上の結果を踏まえて，緩和パラメーターを以下のように改める．

(1) $Pr \ll Ra^{5/6}$ の場合^{*15}

$$\zeta \ll \frac{1}{Ra^{3/7} Pr^{2/7} M_{th}} \quad (3.10)$$

$$\xi = 1 \quad (3.11)$$

(2) $Pr \gg Ra^{5/6}$ の場合

$$\zeta \xi \ll \frac{1}{Ra^{2/3} M_{th}} \quad (3.12)$$

$$\xi = \frac{Pr^{1/2}}{Ra^{1/3}} \quad (3.13)$$

もしくは

$$\xi = \phi_\xi \frac{Pr^{1/2}}{Ra^{1/3}} \quad (3.14)$$

$$\zeta = \phi_\zeta \frac{1}{\phi_\xi Ra^{1/3} Pr^{1/2} M_{th}} \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

ここで ϕ_ζ, ϕ_ξ は 1 未満の正定数である．

[ザコメモ] レイリー・ベナール対流のスケーリングに関する論文は他にも以下があるが，マントル対流を対象としていないので追わないことにした（最大でも $Pr = 10^5$ ）．詳しく見たい場合は以下を参照．

- Grossmann, S., Lohse, D. (2000) Scaling in thermal convection: a unifying theory, *Journal of Fluid Mechanics*, **407**, 27–56
- Grossmann, S., Lohse, D. (2001) Thermal convection for large Prandtl numbers, *Physical review letters*, **86**, 15, 3316
- Ahlers, G. Grossmann, S., Lohse, D. (2009) Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection, *Reviews of modern physics*, **81**, 2, 503

^{*15} 修論では $Pr \ll Ra^{2/3}$ であった．

謝辞

本ノートは、九州大学 大学院理学府 地球惑星科学専攻 地球内部ダイナミクス研究室が主催する「初期地球勉強会」の議論をもとに作成しています。勉強会では、指導教員の吉田 茂生准教授をはじめ、川田 佳史さん (@国立研究法人 海洋研究開発機構 海洋機能利用部門 海底資源センター) と、中島 涼輔さん (@本学理学研究院) らに有意義なご意見を賜りました。また、本ノートの作成にあたっては、川田 佳史さんの L^AT_EX テンプレートを使用させて頂きました。深く感謝申し上げます。

参考文献

■ 論文

- [1] Castaing, B., Gunaratne, G., Heslot, F., Kadanoff, L. Libchaber, A., Thomae, S., Wu, Xiao-Zhong, Zaleski, S., Zanetti, G. (1989) Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Bénard convection, *Journal of Fluid Mechanics*, **204**, 1–30
- [2] Siggia, E. D. (1994) High Rayleigh number convection, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **26**, 137–168

■ 本

- [3] Turcotte, D., Schubert, G. 原著, 安藤亮輔, 岩森光, 沖野郷子, 片山郁夫, 加納靖之, 川田佳史, 木下正高, 坂口有人, 田中愛幸, 中西正男, 西山竜一, 山野誠, 吉田晶樹 訳 (2020) 『ジオダイナミクス』, 共立出版
- [4] 木田重雄, 柳瀬真一郎 (1999) 『乱流力学』, 朝倉書店