

Geodynamics を読む会 (2.1~2.3)

菖蒲迫 健介 *

July 21, 2022

Abstract

このノートは菖蒲迫の発表用メモである。式変形の詳細などを書いた。
練習問題はアイソスタシーの問題を適当に解いた。

Contents

2	固体中の応力と歪み	2
2.1	イントロダクション	2
2.2	体積力と面積力	2
2.3	二次元における応力	14
3	英単語のメモ	19
4	B.5 岩石の物理的性質に対する一考察	20

* Department of Earth and Planetary Sciences, Graduate School of Science, Kyushu University; Twitter [@zakoken1998](https://twitter.com/zakoken1998)

2 固体中の応力と歪み

低温の岩石に対する弾性的変形は、地球ダイナミクスの過程において重要な役割を果たす。その意味で、弾性的変形に関する「応力」と「歪み」の理解は重要であり、この章ではそれらの概念を学ぶ。ただし、続く第3章で線形弾性体として両者が関係づけられる。

2.1 イントロダクション

応力と歪みを次のように定義する。

- **応力** … (原子間力の働く場において、物質中を伝わる) 単位面積あたりの力
 - (1) 法線応力 (*normal stress*) … ある面に対して垂直に働く応力
 - (2) せん断応力 (*shear stress*) … ある面に対して平行に働く応力
- **歪み** … 応力によって生じる変形の種類
 - (1) 法線歪み (*normal strain*) … 元の長さに対する長さの変化 = 長さ (辺) の変化率
 - (2) せん断歪み (*shear strain*) … 「直角からの角度の減少分の半分」として定義*¹

2.2 体積力と面積力

体積力と面積力を次のように定義する。

- **体積力** (*body force*) … 体積 (質量) に比例する力
例) 重力 → 質量 m と重力加速度 g の積で表されるので体積力である。
- **面積力** (*surface force*) … 面積に比例する力

重力は mg で与えられるから、 g は単位質量あたりの重力を示し、 $\rho g = mg/V$ は単位体積あたりの重力を示す。ここで ρ は密度、 V は体積である。

Appendix B の Section B.5 に幾つかの一般的な岩石密度が書いてある。ただし、これらの密度は**圧力ゼロ** (*zero-pressure*) における値である*²。マントルのような高圧環境下では「圧力ゼロ」の場合 (=地表の場合) に比べて 50% 以上密度が高くなる。密度プロファイル (一次元構造) については第4章で議論する。圧力ゼロにおける典型的な岩石密度は以下の通りである*³。

- マントル岩 (mantle rocks) … 3250 kg m^{-3}
- 海洋地殻を構成する玄武岩 (basalt) や斑レイ岩 (gabbro) … 2950 kg m^{-3}
- 大陸地殻を構成する花崗岩 (granite) や閃緑岩 (diorite) … $2650 - 2800 \text{ kg m}^{-3}$
- 堆積岩は一般に最も軽い。また密度の幅が広い ← 間隙率 (porosity) や含水量 (water content)

*¹ Figure 2.22 を見ると分かりやすい。

*² 「圧力ゼロ」とは厳密に圧力が 0 Pa という意味ではない。惑星内部の典型的な圧力単位は $\text{GPa} = 10^9 \text{ Pa}$ で、これは現在の大気圧 $10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$ に対してはるかに大きい。この意味で地球物理のコンテキストでは、地表圧力 (大気圧) を「圧力ゼロ」と表現することがある。

*³ このノートの第4節に Appendix B を用いた一考察を書いた。

に依存するため

地表からの深さが y である岩石柱の底面にかかる静水圧について考える (Figure 2.1).

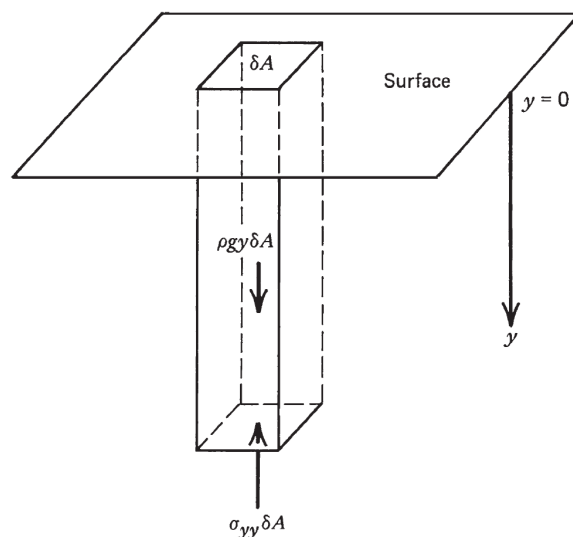


Figure 2.1 Body and surface forces acting on a vertical column of rock.

断面積 δA の岩石柱の重さは $\rho g y \delta A$ である。側面からに働く鉛直方向の力を無視し、密度一定とすると、上向きの面積力 $\sigma_{yy} \delta A$ とつり合うので

$$\sigma_{yy} = \rho g y \quad (2.1)$$

を得る。ここで σ_{ij} は後で分かるように*4, i 方向に垂直な面に働く j 方向の応力である*5。この式から単位面積あたりの法線応力は深さに比例して大きくなる。上にある岩石の重さによる法線応力は静岩圧 (*lithostatic pressure*) として知られる。

リソスフェアの典型的な応力の値を求めるために、大陸地殻の底の水平面にかかる静岩圧を求めてみる。地殻の厚さを 35 km, 密度を 2750 kg m^{-3} とすれば

$$\sigma_{yy} = 2750 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2} \times (35 \times 10^3) \text{ m} = 9.625 \times 10^8 \text{ Pa} = 962.5 \text{ MPa} = 0.9625 \text{ GPa}$$

教科書では「地球の圧力には通常 MPa で与えられる」とある。地殻ぐらいの深さだと MPa のオーダーで良いかもしれないが、惑星内部を言うときは GPa 単位の方が一般的だと思われる。

次に、大陸をマンツルの海に浮かぶブロックとして考える (Figure 2.2)。大陸密度 $\rho_c = 2750 \text{ kg m}^{-3}$ は、マンツル密度 $\rho_m = 3300 \text{ kg m}^{-3}$ よりも軽いのでアルキメデスの原理

*4 Figure 2.10 のあたりの本文。

*5 [ザコメモ] この式は大気圧 p_0 が小さいとして無視している。正しくは

$$\sigma_{yy} = p_0 + \rho g y \simeq \rho g y$$

(Archimedes' principle) が適用できる．つまり，大陸は押しのけた分のマンツルの重さと等しい浮力を受ける．アルキメデスの定理を別の表現では，静水圧平衡 (hydrostatic equilibrium) ともいう．大陸の重さは $\rho_c gh$ で，押しのけたマンツルの重さは $\rho_m gb$ なので

$$\rho_c h = \rho_m b \quad (2.2)$$

となる．よって，周囲のマンツルよりも上にある大陸の高さは

$$h - b = h - \frac{\rho_c}{\rho_m} h = h \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_m} \right) \quad (2.3)$$

となる．

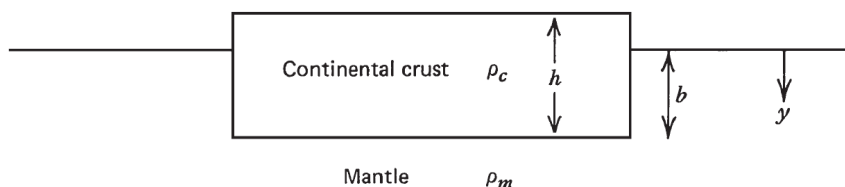


Figure 2.2 A continental block "floating" on the fluid mantle.

$h = 35 \text{ km}$ とすると

$$h - b = (35 \times 10^3) \text{ m} \left(1 - \frac{2750 \text{ kg m}^{-3}}{3300 \text{ kg m}^{-3}} \right) \simeq 5.833 \times 10^3 \text{ m} \simeq \underline{5.8 \text{ km}}$$

ただし，海洋地殻や海の重さを考慮していないので海の深さを正確には与えない．静水圧平衡を大陸地殻に適用したものをアイソスタシー (isostasy) と言い，第 5 章で詳しく議論する．

Problem 2.1

海洋地殻の平均的な厚さは 6 km で，その密度は 2900 kg m^{-3} である．その上に海水が 5 km にわたって存在する (海水の密度は $\rho_w = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ とする)．海洋地殻の底面に働く単位面積あたりの法線方向の力を求めよ．

(解) 単純に重力を考えると

$$\underbrace{(2900 \text{ kg m}^{-3} \times 6 \text{ km} + 1000 \text{ kg m}^{-3} \times 5 \text{ km})}_{\text{海洋地殻の底面より上にある単位面積あたりの質量}} \times 1 \text{ m}^2 \times 10 \text{ m s}^{-2} = \underline{224 \text{ MPa}}$$

Problem 2.2 (MATLAB のプログラムあり)

標高が 5 km の山脈がある．マンツルの密度を $\rho_c = 3300 \text{ kg m}^{-3}$ とし，大陸地殻を $\rho_c = 2800 \text{ kg m}^{-3}$ とする．基準の大陸地殻の厚さを 35 km とするとき，山脈の下の大陸地殻の厚さを求めよ．

(解) 問題設定を図示すると，下図のようになる (Figure 1)．ただし，単位面積柱で考える．

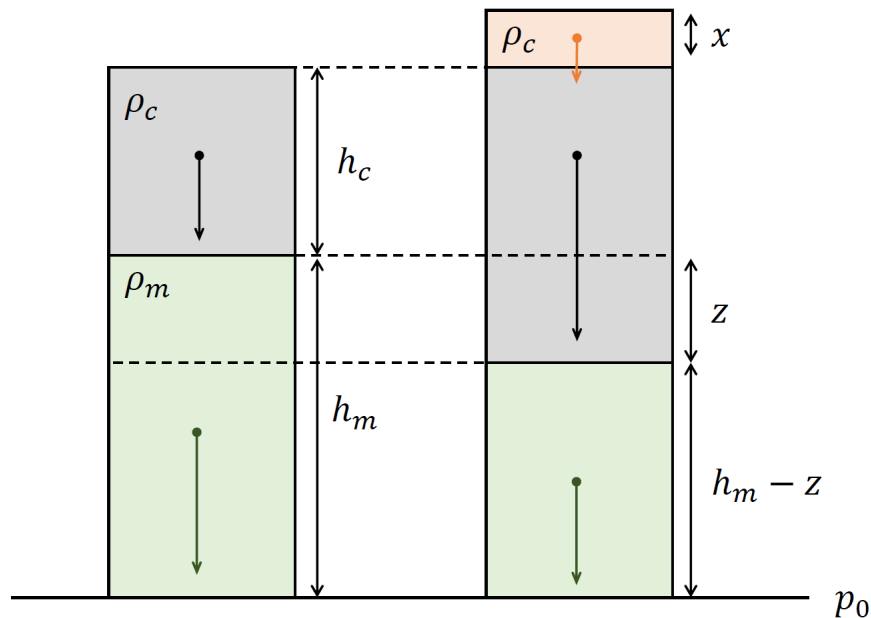


Figure1

十分深いところで圧力 p_0 が同じになるというのがアイソスタシーの考え方である*6．つり合いから

$$\underbrace{\rho_c h_c g + \rho_m h_m g}_{\text{左}} = \underbrace{\rho_c x g + \rho_c (h_c + z) g + \rho_m (h_m - z) g}_{\text{右}}$$

$$0 = \rho_c x + \rho_c z - \rho_m z$$

$$z = \frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c} x$$

今の問題では $x = 5 \text{ km}$ であるから，これを計算すると

$$z = \frac{2800 \text{ kg m}^{-3}}{3300 \text{ kg m}^{-3} - 2800 \text{ kg m}^{-3}} \times 5 \text{ km} = 28 \text{ km}$$

従って，山脈の下の大陸地殻の厚さは， $5 + 35 + 28 = 68 \text{ km}$ となる．そういうことで，大きな山の下には結構ぶ厚い地殻が存在することになる．

*6 別の表現では，「十分深いところの圧力はその上にある物体の単位面積あたりの重さに等しい」である．

Problem 2.3

大陸における観測から、白亜紀の海水準が今よりも 200 m 高かったことが知られている。海水準が 200 m 高くなってから数千年後には、しかし、その状態で海盆 (ocean basin) とアイソタティック的な平衡に達した。当時の海盆の深さは、これに伴ってどれくらい増加したか？ ただし、海水の密度を $\rho_w = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ とし、押しのけられたマンツルの密度を $\rho_m = 3300 \text{ kg m}^{-3}$ とする。

(解) 問題設定を図示すると、下図のようになる (Figure 2)。ただし、単位面積柱で考える。

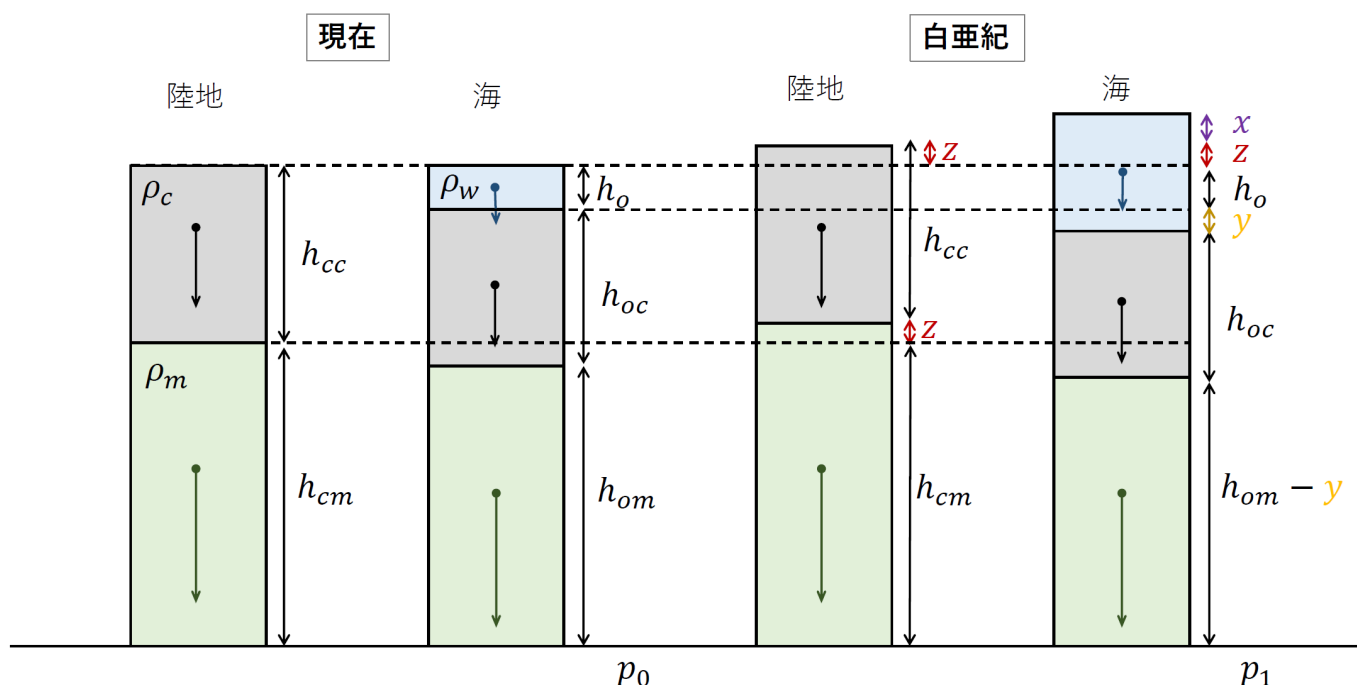


Figure2

図の読み方、及び考え方は以下の通り。

- **現在** を基準に考える (左の二つの図)。 h_{cc} は大陸地殻の厚さ、 h_{cm} は大陸地殻下のマンツルの適当な厚さ、 h_o は海洋の厚さ、 h_{oc} は海洋地殻の厚さ、 h_{om} は海洋地殻下のマンツルの適当な厚さである。簡単のため、陸地の基準と海水準を同じ高さに設定した*7。
- **現在** の陸地と海のアイソスタシーを考えて、十分深いところで同じ圧力 p_0 になるとする。以降はこの深さをアイソスタシーが成り立つ基準深さとする。
- 次に **白亜紀** (数千年後=アイソスタシーが成り立った状態) を考える。白亜紀の海水準が当時の陸よりも x だけ高いと置く ($x = 200 \text{ m}$)。ここで、**白亜紀の陸地の基準から見て** 海水準が x だけ高いということに留意したい。今、海が重くなった分、基準深さよりも y だけ海洋地殻下のマンツルが沈むと考える。ここで、地殻 (リソスフェア) は十分に硬いとい

*7 もちろん、陸地の方を高く設定しても良い。

う仮定を用いた (つまり, 地殻は平行移動しただけで厚さは変わらない). 質量保存則を考えて, 海洋地殻下のマントルが y だけ沈んだ分, 大陸地殻下のマントルが z だけ 上昇する としよう. これを図示したものが, **白亜紀** の図である (右の二つの図).

- 求める量は, **現在** の海洋地殻の深さ h_o と比べた時の **白亜紀** の海洋地殻の深さ増分である. ここでややこしいのは, 「海洋地殻の深さ」とはそれぞれの時代の海水準から深さである. ゆえに, $x + y + z$ が求める量である.

現在 のアイソスタシーの式は

$$\underbrace{\rho_c h_{cc} + \rho_m h_{cm}}_{\text{陸地}} = \underbrace{\rho_w h_o + \rho_c h_{oc} + \rho_m h_{om}}_{\text{海}} \quad (\text{A})$$

他方, **白亜紀** のアイソスタシーの式は

$$\underbrace{\rho_c h_{cc} + \rho_m (h_{cm} + z)}_{\text{陸地}} = \underbrace{\rho_w (h_o + x + y + z) + \rho_c h_{oc} + \rho_m (h_{om} - y)}_{\text{海}} \quad (\text{B})$$

ちなみに, それぞれの式は, ある深さ (同じ深さ) におけるアイソスタシーの式なので, 当然圧力は異なる ($p_0 \neq p_1$). B から A を引いて整理する. ただし, y, z が未知量なので $y + z$ を求める.

$$\begin{aligned} \rho_m z &= \rho_w (x + y + z) - \rho_m y \\ (y + z) &= \frac{\rho_w}{\rho_m - \rho_w} x \end{aligned} \quad (\text{C})$$

従って, 求める $x + y + z$ は

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + \frac{\rho_w}{\rho_m - \rho_w} x \\ &= \frac{\rho_m}{\rho_m - \rho_w} x \\ &= \frac{3300 \text{ kg m}^{-3}}{3300 \text{ kg m}^{-3} \times 1000 \text{ kg m}^{-3}} \times 200 \text{ m} \simeq 286 \text{ m} \simeq \underline{290 \text{ m}} \end{aligned} \quad (\text{D})$$

となる. この問題を見て分かるように, アイソスタシーの問題は式自体は簡単だが, 考え方はかなりややこしい.

海盆の深さをもう少しリアルに与えるようなモデルが Figure 2.3 である。

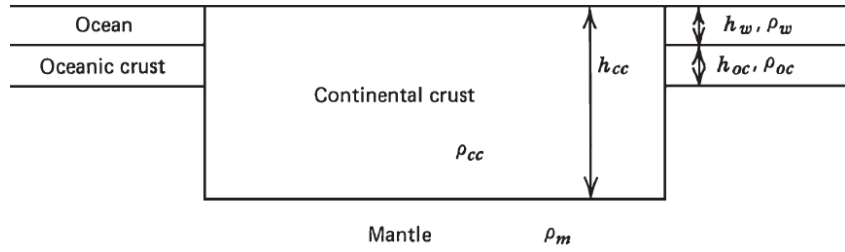


Figure 2.3 Isostasy of the continental crust relative to an ocean basin.

求めたいのは海盆の深さなので h_w である。大陸地殻の底でのアイソスタシーを考える。

$$\rho_{cc}h_{cc} = \rho_w h_w + \rho_{oc}h_{oc} + \rho_m(h_{cc} - h_w - h_{oc}) \quad (2.4)$$

これを h_w について解けば

$$h_w = \frac{\rho_m - \rho_{cc}}{\rho_m - \rho_w} h_{cc} - \frac{\rho_m - \rho_{oc}}{\rho_m - \rho_w} h_{oc} \quad (2.5)$$

$h_{cc} = 35 \text{ km}$, $h_{oc} = 6 \text{ km}$, $\rho_m = 3300 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_w = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_{cc} = 2800 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_{oc} = 2900 \text{ kg m}^{-3}$ とすると

$$h_w = \frac{3300 \text{ kg m}^{-3} - 2800 \text{ kg m}^{-3}}{3300 \text{ kg m}^{-3} - 1000 \text{ kg m}^{-3}} \times 35 \text{ km} - \frac{3300 \text{ kg m}^{-3} - 2900 \text{ kg m}^{-3}}{3300 \text{ kg m}^{-3} - 1000 \text{ kg m}^{-3}} \times 6 \text{ km} \simeq 6.56 \text{ km} \simeq \underline{\underline{6.6 \text{ km}}}$$

大陸地殻が沈降する結果として、**堆積盆地 (sedimentary basin)** が形成されることがある。これを次の二つの仮定をもとで考える。

- 最初の海水準と大陸地殻の高さが同じとする
- 堆積層が海水準と同じになるように溜まっていくとする

この時、大陸地殻は薄く引き伸ばされるが、アイソスタシーの要請によって大陸地殻の沈降が起こる。この簡単なモデルを**地殻伸長モデル (the crustal stretching model)** [McKenzie, 1978] という (Figure 2.4)。引き伸ばされる前の幅を w_0 とし、引き伸ばされた後の幅を w_b とする。この時**伸長率 (stretching factor)** α を次式のように定義する。

$$\alpha \equiv \frac{w_b}{w_0} \quad (2.6)$$

定義を見て分かるように $\alpha > 1$ で「伸び」を、 $\alpha < 1$ で「縮み」を示す。また $\alpha \rightarrow \infty$ は無限に薄くなった地殻を表現する。質量保存則から

$$w_b h_{cb} = w_0 h_{cc} \quad (2.7)$$

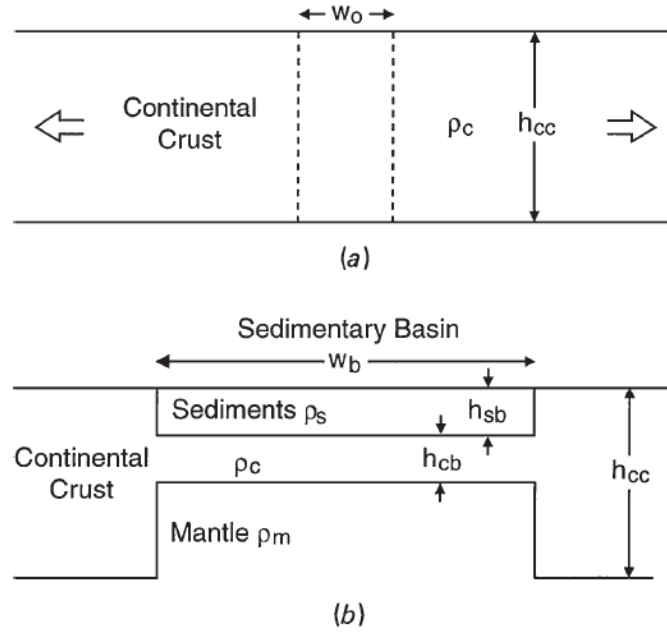


Figure 2.4 Illustration of the crustal stretching model for the formation of a sedimentary basin. A section of continental crust of initial width w_0 , illustrated in (a), is stretched by a stretching factor $\alpha = 4$ to a final width w_b to form the sedimentary basin illustrated in (b).

従って、薄くなった大陸地殻の厚さは次のように表現される。

$$h_{cb} = \frac{h_{cc}}{\alpha} \quad (2.8)$$

基準となる大陸地殻の底におけるアイソスタシーから

$$\rho_{cc}h_{cc} = \rho_s h_{sb} + \rho_{cc}h_{cb} + \rho_m(h_{cc} - h_{sb} - h_{cb}) \quad (2.9)$$

そこで堆積層の厚さ h_{sb} は次のように表される。

$$\begin{aligned} (\rho_m - \rho_s)h_{sb} &= (\rho_m - \rho_{cc})h_{cc} - (\rho_m - \rho_{cc})h_{cb} \\ h_{sb} &= h_{cc} \frac{\rho_m - \rho_{cc}}{\rho_m - \rho_s} \left(1 - \frac{h_{cb}}{h_{cc}}\right) \\ h_{sb} &= h_{cc} \frac{\rho_m - \rho_{cc}}{\rho_m - \rho_s} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

(海盆の深さ) と同じパラメーターと $\rho_s = 2500 \text{ kg m}^{-3}$ を用いた場合における、 α と h_{sb} の関係が Figure 2.5 である (α に反比例)。この図から分かることは、伸長率が大きいくほど (より伸びやすいほど) h_{sb} が厚くなることで*8, $\alpha \rightarrow \infty$ の時, $h_{sb} = 21.875 \simeq 22 \text{ km}$ となる。

*8 α の定義から当たり前だけど。

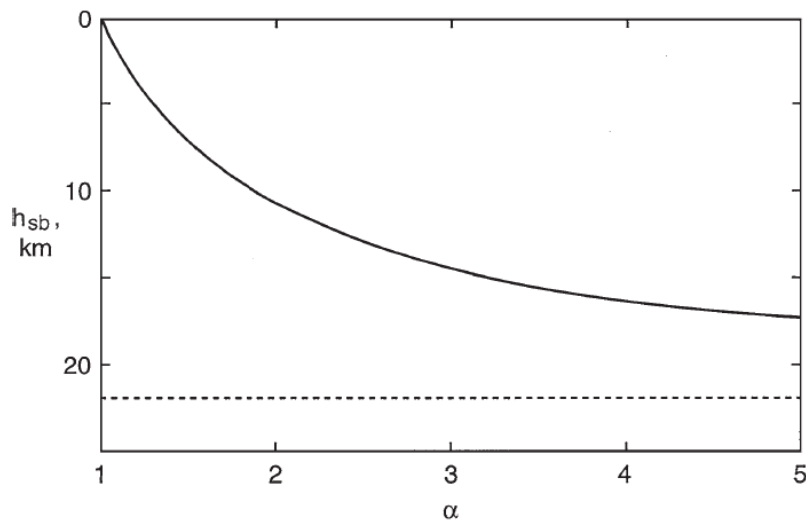


Figure 2.5 Thickness of a sedimentary basin h_{sb} as a function of the crustal stretching factor α .

今までは地球内部の鉛直方向の法線応力を考えたが、もちろん、水平方向の法線応力も存在する (Figure 2.7).

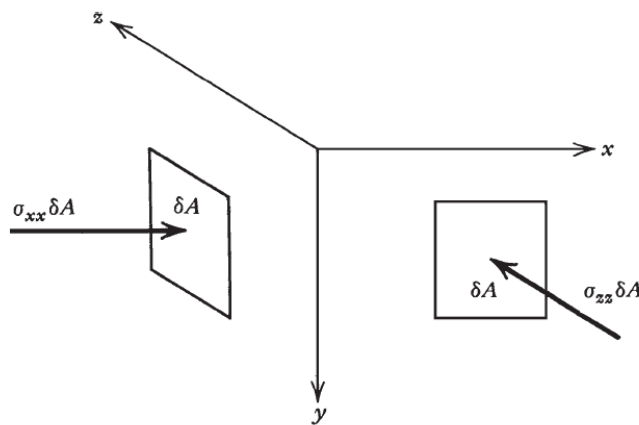


Figure 2.7 Horizontal surface forces acting on vertical planes.

大きなスケールのテクトニック的な力の場合は $\sigma_{xx} \neq \sigma_{zz} \neq \sigma_{yy}$ であるが、岩石が十分に加熱された場合や、十分脆弱な場合においては、それぞれの法線応力は上にある重さと等しくなる。つまり

$$P_L \equiv \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{yy} = \rho g y \quad (2.13)$$

上の三つの応力が等しい場合、これは「圧力」と定義される。圧力と上にある重さのつり合いは静岩圧 (*lithostatic state of stress*) と呼ばれる。要は、静水圧が上にある岩石の重さとのつり合いだけで書ける状態を静岩圧平衡、もしくは、静水圧平衡にあるという。

Figure 2.2 で示された大陸地殻のブロックが静岩圧平衡として簡単には書けないことを示そう．Figure 2.8 のような状況を想定する．

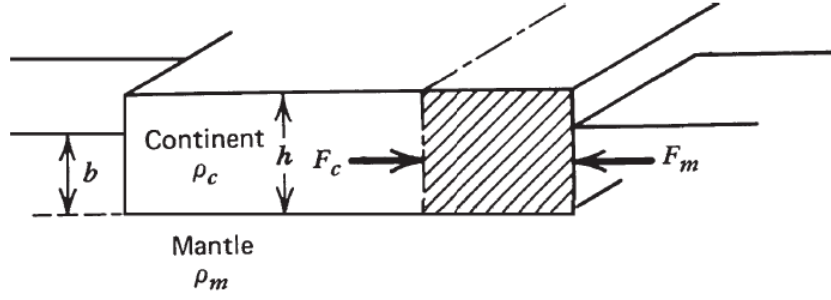


Figure 2.8 Force balance on a section of continental block.

まず，大陸地殻の水平面に対して働くマントルからの法線応力 F_m を考える．このマントルからの応力は静岩圧であると仮定し，深さの関数とする (Figure 2.9)．

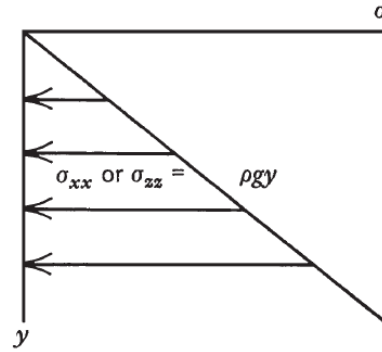


Figure 2.9 The area under the stress versus depth profile is proportional to the total horizontal force on a vertical plane.

奥行方向に単位長さを取れば

$$F_m = \int_0^b P_L dy = \rho_m g \int_0^b y dy = \frac{1}{2} \rho_m g b^2 \quad (2.14)$$

次にブロック状の大陸地殻からの引っ張り応力 (*tensile stress*) を計算する．この応力は静水圧の部分に加えて，テクトニック的な寄与 $\Delta\sigma_{xx}$ から成るとする．つまり，ある深さ y における大陸地殻内部からの応力を次のように書く．

$$\sigma_{xx} = \rho_c g y + \Delta\sigma_{xx} \quad (2.15)$$

$\Delta\sigma_{xx}$ は応力の法線成分から静水圧 (圧力) を引いたものであるから，偏差応力 (*deviatoric stress*) である．そこで

$$F_c = \int_0^h \sigma_{xx} dy = \int_0^h (\rho_c g y + \Delta\sigma_{xx}) dy = \frac{1}{2} \rho_c g h^2 + \Delta\sigma_{xx} h \quad (2.16)$$

従って、つり合いから

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{1}{2} \frac{\rho_m g b^2}{h} - \frac{1}{2} \rho_c g h = -\frac{1}{2} \rho_c g h \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_m} \right) \quad (2.17)$$

最後の式変形には (2.2) 式を用いた。この式から分かることは次である。

- 自分が周りよりも重い場合、 $\rho_c > \rho_m$ なので、 $\Delta\sigma_{xx} > 0$ (想定外)
- 自分が周りよりも軽い場合、 $\rho_c < \rho_m$ なので、 $\Delta\sigma_{xx} < 0$ (引っ張り応力)
- 自分と周りと同じ重さの場合、 $\rho_c = \rho_m$ なので、 $\Delta\sigma_{xx} = 0$

そういうことで、周りに対して自分が浮いているような状況を想定するときは、単に静水圧平衡としては書けない ($\Delta\sigma_{xx} \neq 0$)。

さて、通常の弾性体の教科書では外向きの応力を正とすることが一般的である (つまり、引っ張り応力の方向を正とする)。しかし、この教科書においては地質学の文献に準じて **圧縮応力を正の方向** としている。従って、以降留意しないといけないのは、「法線応力の正方向は圧縮方向とする」ことである。 $h = 35 \text{ km}$, $\rho_m = 3300 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_c = 2750 \text{ kg m}^{-3}$ とすると

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{xx} &= -\frac{1}{2} \times 3300 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2} \times (35 \times 10^3) \text{ m} \left(1 - \frac{2750 \text{ kg m}^{-3}}{3300 \text{ kg m}^{-3}} \right) \\ &\simeq -80.208 \text{ MPa} \simeq -80.2 \text{ MPa} \end{aligned}$$

大陸地殻の典型的な引っ張り応力の値は $10 \sim 100 \text{ MPa}$ の範囲にある。

以上の議論は法線応力だけを考えた。ここからはせん断応力 (*shear stress*) を考え、Figure 2.10 のような横ずれ断層 (*strike-slip fault*) の δA 面に働く応力を考える。

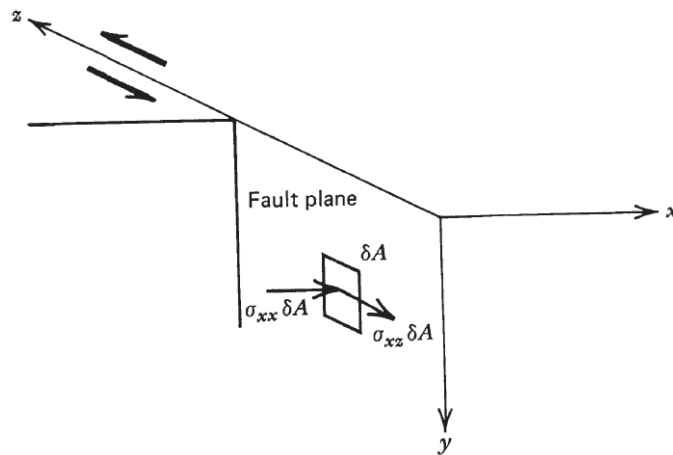


Figure 2.10 Normal and tangential surface forces on an area element in the fault plane of a strike-slip fault.

ここで、 $\sigma_{xx} \delta A$ は静水圧およびテクトニック的な応力によって記述される。一方、 $\sigma_{xz} \delta A$ は左横ずれに対する抵抗力であり、これは摩擦抵抗の帰結として生じる。このような面に対して平行に働く応力をせん断応力 (*shear stress*) という。

せん断応力による抵抗力の他の例として、スラストシート (*thrust sheet*) の貫入を考える。これは大陸衝突帯において、薄い結晶岩質が断層の上に衝上 (*overthrust*) している例である (Figure 2.11).

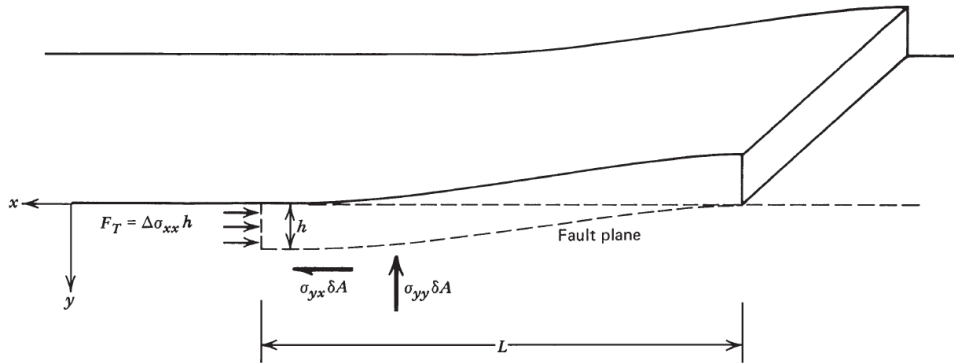


Figure 2.11 Normal and tangential forces acting on a rock mass displaced horizontally to the right in a low-angle overthrust fault.

重力を一旦忘れて*9, x 方向のテクトニック的な応力 $\Delta\sigma_{xx}$ と用いて F_T を次のように書く。

$$F_T = \Delta\sigma_{xx} h \quad (2.21)$$

ただし、奥行きは単位長さとしている。これに対する摩擦力 F_R は応力 σ_{yx} によって生じる。

$$F_R = \sigma_{yx} L \quad (2.22)$$

多くの場合、ある面に対する摩擦力としてのせん断応力を、その面に働く法線方向の力と関係づけることは適当らしい。経験的に

$$\sigma_{yx} = f \sigma_{yy} \quad (2.23)$$

ここで、 f は摩擦係数 (*coefficient of friction*) である。 σ_{yy} は静水圧で求めるとして

$$\sigma_{yy} = \rho_c g h \quad (2.24)$$

従って、つり合いから

$$\Delta\sigma_{xx} = f \rho_c g L \quad (2.25)$$

$\Delta\sigma_{xx} = 100 \text{ MPa}$, $L = 100 \text{ km}$, $\rho_c = 2750 \text{ kg m}^{-3}$ とすると

$$f = \frac{(100 \times 10^6) \text{ Pa}}{2750 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2} \times (100 \times 10^3) \text{ m}} \simeq 0.0363 \simeq 0.036$$

式から分かるように、スラストシートが長いほど摩擦係数は小さくなる。

*9 重力を含めた場合は、Section 8.4 で考える。

2.3 二次元における応力

前節では具体例を挙げて、物質表面における法線応力とせん断応力について学んだ。この節では二次元の応力をより一般化することを目標とする。デカルト座標を想定して、Figure 2.13 のような微小な直方体に対する応力を考える。

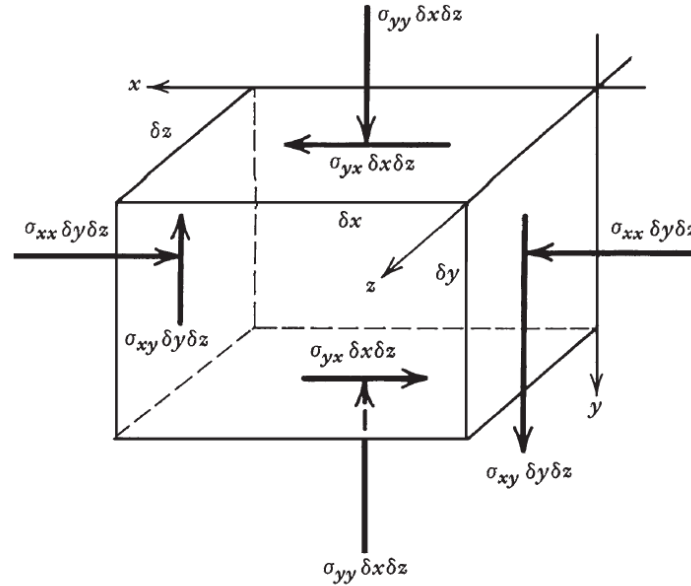


Figure 2.13 Surface forces acting on a small rectangular element in a two-dimensional state of stress.

教科書では z 方向に力が働かないと仮定しているので、この図には z 方向に対する力が示されていない。せん断応力は z 軸を軸として回転する効果を寄与する。静止状態では回転しない。そこで、 z 軸に垂直な面の中心から見た (この点を原点と思った) 場合の力のモーメントのつり合いを考える。

$$\underbrace{(\sigma_{yx} \delta x \delta z) \times \frac{(-\delta y)}{2} + (-\sigma_{yx} \delta x \delta z) \times \frac{\delta y}{2}}_{\text{反時計まわり}} = \underbrace{(-\sigma_{xy} \delta y \delta z) \times \frac{\delta x}{2} + (\sigma_{xy} \delta y \delta z) \times \frac{(-\delta x)}{2}}_{\text{時計まわり}}$$

これを解けば

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (2.27)$$

従って、せん断応力は下付き添え字に対して対称性を持つ。従って、独立な応力成分は $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ の3つとなる。

応力状態の記述は座標系の取り方に依存する。そこで、(デカルト座標において) 便利な座標系を探すことがこれからも目標である。具体的にはせん断応力がゼロになるような軸 (主軸) を基準とする座標系を探すことである。まず、Figure 2.14(a) のように θ だけ回転した座標系を考えよう。

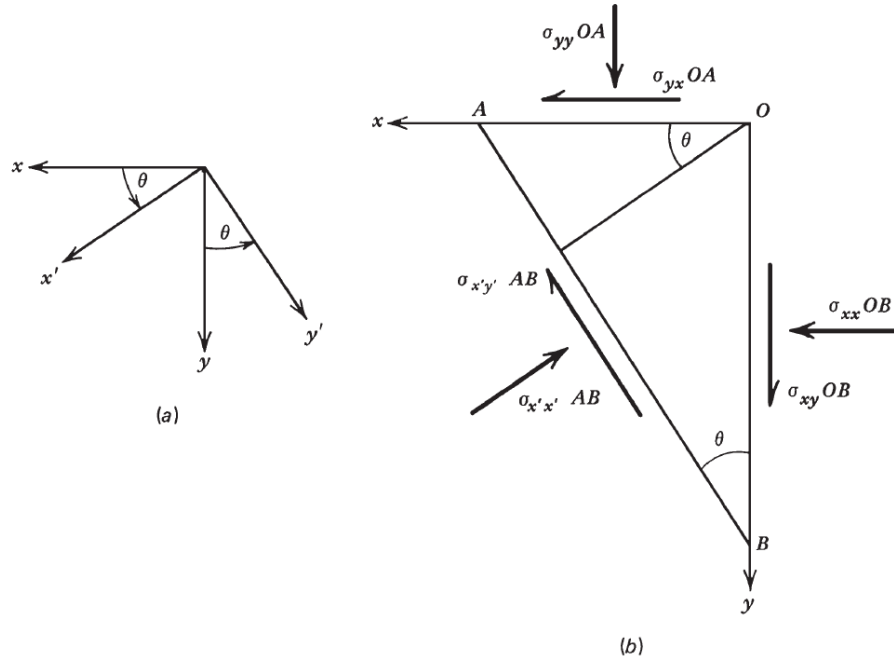


Figure 2.14 Transformation of stresses from the x, y coordinate system to the x', y' coordinate system. (a) Illustration of the coordinate systems. (b) Triangular element (with sides in the x, y , and y' directions) on which a static force balance is carried out.

x', y' 座標系における法線応力を求めるために、 x 方向と y 方向の力のつり合いを考える。ただし、 z 方向は単位長さとしておく。 y 方向のつり合いから

$$(\sigma_{x'x'} \sin \theta + \sigma_{x'y'} \cos \theta)AB = \sigma_{yy}AO + \sigma_{xy}BO \quad (2.28)$$

$$\sigma_{x'x'} \sin \theta + \sigma_{x'y'} \cos \theta = \sigma_{yy} \sin \theta + \sigma_{xy} \cos \theta \quad (2.30)$$

ただし、(2.27) 式と以下を用いた。

$$\frac{AO}{AB} = \sin \theta \quad \frac{BO}{AB} = \cos \theta \quad (2.29)$$

x 方向のつり合いから

$$(\sigma_{x'x'} \cos \theta - \sigma_{x'y'} \sin \theta)AB = \sigma_{yx}AO + \sigma_{xx}BO \quad (2.31)$$

$$\sigma_{x'x'} \cos \theta - \sigma_{x'y'} \sin \theta = \sigma_{yx} \sin \theta + \sigma_{xx} \cos \theta \quad (2.32)$$

次のような式変形を行う。

$$\square (2.30) \times \sin \theta + (2.32) \times \cos \theta$$

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta \quad (2.37)$$

$$\square (2.30) \times \cos \theta - (2.32) \times \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x'y'} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})(\sin \theta \cos \theta) + \sigma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (2.40)$$

$\sigma_{y'y'}$ も同様の考え方で導出できる (はず)*¹⁰. これらの式を用いれば, (デカルト座標における) 任意の方向の面積要素に対する法線応力とせん断応力を σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} の 3 つで確かに記述できる.

プライム付きの座標系の取り方は任意であるから, せん断応力 $\sigma_{x'y'}$ がゼロになる面を考えたい. この時, (2.40) 式より

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (2.42)$$

この式によって決まる θ の向きは応力の主軸 (*a principal axis of stress*) として知られている. θ の方向が主軸方向であれば $\theta + \pi/2$ も主軸となる.

$$\tan \left[2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \tan (2\theta + \pi) = \tan 2\theta \quad (2.43)$$

このようにせん断応力がゼロになるような軸を主軸 (*principal axis*) という.

主軸を座標軸とする座標系における, 法線応力を主応力 (*principal stress*) という. この応力を σ_1, σ_2 とする. これを求めるに (2.37) 式を次のように整理する.

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= \sigma_{xx} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) + \sigma_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\sigma_{xy} \tan 2\theta) \end{aligned} \quad (2.47)$$

ここで

$$\cos 2\theta = \frac{1}{(1 + \tan^2 2\theta)^{1/2}} \quad (2.49)$$

という関係を用いて*¹¹

$$\cos 2\theta = \frac{1}{(1 + 4\sigma_{xy}^2/(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2)^{1/2}} = \pm \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2)^{1/2}} \quad (2.50)$$

従って,

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} = \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2)^{1/2}} \left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\sigma_{xy} \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) \\ &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \left\{ \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.51)$$

*¹⁰ 幾何学的な問題なので解いてはいない. ジオダイナミクスによれば

$$\sigma_{y'y'} = \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - \sigma_{xy} \sin 2\theta \quad (2.41)$$

*¹¹ (2.49) 式は次のようにして導ける.

$$\tan^2 2\theta = \frac{\sin^2 2\theta}{\cos^2 2\theta} = \frac{1 - \cos^2 2\theta}{\cos^2 2\theta} \quad (2.48)$$

を得る.

この式を得る途中に, $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \neq 0$ という仮定を用いた*12. もしも, $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 0$ だったら (2.40) 式は

$$\sigma_{x'y'} = \sigma_{xy} \cos 2\theta$$

となる. プライム付きの応力が主軸座標系の場合, $\sigma_{x'y'} = 0$ であるから, $\theta = \pi/4$ が主軸の方向ということになる. ただし, ここで $\sigma_{xy} = 0$ を仮定した. もしも $\sigma_{xy} = 0$ であれば, 当たり前だが, プライム無しの座標系は主軸座標系であるから, σ_{xx}, σ_{yy} は主応力を示す.

色々考えてきたが, 結局 Figure 2.14 の x, y 軸を主軸座標系に取ることにしよう.

$$\sigma_{xx} = \sigma_1$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_2$$

$$\sigma_{xy} = 0$$

これと (2.37), (2.40), (2.41) 式を用いれば $\sigma_{x'x'}, \sigma_{y'y'}, \sigma_{x'y'}$ は次のように計算される.

$$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \quad (2.53)$$

$$\sigma_{x'y'} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta \quad (2.54)$$

$$\sigma_{y'y'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \quad (2.55)$$

このように書くと, もはやプライムの有無は関係ないので, 教科書ではプライムを外している. (2.54) 式から, セン断応力が最大になるのは, $\theta = \pi/4$ であることが分かる.

[ザコメモ] 教科書は式変形の詳細が書かれている一方で, ゴールとその恩恵が明確になっていないので, 結局何が言いたかったのかが分かりづらい. 上の変形を通して筆者らが伝えたかったことは, 以下のようなことだろう.

- まず, 応力は座標系の取り方でその表記が異なることを示したかった
→ そこで, 元々考えていた $x - y$ 座標系を θ 回転させた $x' - y'$ 座標系を導出した
- このことを別の見方で見ると, 独立な 3 つの応力成分 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ を線形変換し, $\sigma_{x'x'}, \sigma_{y'y'}, \sigma_{x'y'}$ を新しく独立な応力成分として選んだことを示す
→ 要は, $(\sigma_{x'x'}, \sigma_{y'y'}, \sigma_{x'y'}) = \mathcal{F}(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ という変換を行っただけ.
ここで \mathcal{F} は適当な線形写像.
- 従って, \mathcal{F} を変えれば色々な座標系の取り方が考えられる*13. 最も使いやすい座標系は何だろうか?
- その一つが, セン断応力がゼロになるような軸を用いた主軸座標系だろう

*12 (2.42) 式を見よ.

*13 \mathcal{F} は回転 θ の取り方で変わる.

- 主軸座標系では、せん断応力は存在しないから、存在する応力成分は互いに直交する主応力だけである。だから、応力が見かけ上二つで十分ということになる。
- もしも、プライム無しの座標系を主軸座標系に取れば、(2.53) から (2.55) 式を得る。
- この式は任意の応力成分 ($\sigma_{x'x'}, \sigma_{y'y'}, \sigma_{x'y'}$) が、主応力 σ_1, σ_2 及び、 θ の関数として与えられることを示す。ここで、 θ は $x' - y'$ 座標系と $x - y$ 座標系間の角度である。
- 主軸座標系の良いところは、計測が難しそうなせん断応力が含まれていないことである。結局、応力を定量的に計測する場合、一番簡単に計測が行える座標系を選ぶべきで、それが主軸座標系なのである。

3 英単語のメモ

(恥ずかしながら) 直ぐに意味が思い浮かばなかった英単語をメモしておく.

- topography … 地形 (学)
- sedimentary basin(s) … 堆積盆地
- dilatation … 膨張/体積歪み
- geodetic … 測地学的な
- the product A and B … A と B の積
- gabbro … 斑レイ岩
- diorite … 閃緑岩
- porosity … 間隙率
- cross-sectional area … 断面積
- lateral … 側面の
- lithostatic stress … 静岩圧
- elevation … 海拔・標高
- mountain range … 山脈
- the Cretaceous … 白亜紀の
- ocean basin(s) … 海盆
- the crustal stretching model … 地殻伸長モデル
- stretching factor … 伸長率
- tensile stress … 引っ張り応力
- deviatoric stress … 偏差応力
- strike-slip fault … 横ずれ断層
- thrust-sheet … スラストシート
- thrust fault … 衝上断層
- overthrust … 衝上
- rectangular … 長方形の
- principal axis … 主軸

4 B.5 岩石の物理的性質に対する一考察

物質固有の熱力学的な特性は状態方程式によって与えられる。熱力学量は様々なものがあるが、その中でも実験で直接観測可能な「圧力、体積、温度」を用いると都合が良い^{*14}。これらを用いた代表例は理想気体の状態方程式である。

$$pV = RT \quad (1)$$

また、水の状態方程式はその温度依存性が小さく、次のような形で書かれる [Morris et al., 1997].

$$p = B \left\{ \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma - 1 \right\} \quad (2)$$

ここで、 B, γ は定数である。一般に、一成成分系における状態方程式は次式を満たす。

$$f(p, V, T) = 0 \quad (3)$$

ここで、 f は適当な関数を示す。つまり、一成成分系においては f の関数形が分かれば、二つの熱力学量だけで他の全ての熱力学的な特性を決定できる^{*15}。また、流体の数値シミュレーションを行う際には状態方程式が必須である。惑星内部を研究する人間にとってみれば、状態方程式が分かること (= f の関数形が分かること) はとても重要なのである。

以下では一成成分系で議論を進める。 $V = V(p, T)$ という形の状態方程式を考え、この全微分を考える。

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT \quad (4)$$

ここで、等温体積弾性率 K_T と体積熱膨張率 α を以下で定義する。

$$K_T \equiv -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \quad (5)$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (6)$$

これを用いると

$$dV = -\frac{V}{K_T} dp + \alpha V dT \quad (7)$$

を得る。 K_T は温度一定下における物質の硬さを表す量で、その逆数は圧縮率である。 α は圧力一定下における温度上昇に対する体積の変化率を与える。大事なことは、これらも同時に圧力と温度の関数となっていることである。すなわち

$$dV = -\frac{V}{K_T(p, T)} dp + \alpha(p, T) V dT \quad (8)$$

^{*14} 実験で直接測れない熱力学量はエントロピーや内部エネルギーなどである。ただし、間接的には求まる。

^{*15} 例えば、(マントル対流で重要な) 熱膨張率や、(地震波速度に関係する) 体積弾性率などなど。

従って、理論上は全ての物質の K_T と α の圧力温度依存性が分かれば、上式を積分することで、この世の全ての物質の状態方程式を記述できる(ただし、一成分系)。しかし、これはそう単純ではない。なぜなら、基準となる関数系が与えられていないから、実験でこれらを決めるには相当数の実験データが必要になるからである*16。

特に、惑星内部の構造を決めるという点では、高温高压の状態方程式が必須であるが、これを実験によって決定するのは技術的な面で大変難しい。そのため高温高压の状態方程式を構成する際には、理論的なフィッティング式を用いて*17、物理的意味のある内挿(もしくは外挿)により、少ない実験データから幅広い温度圧力をカバーするようにしている。例えば、外核を構成する液体金属鉄の状態方程式のフィッティング式には以下のようなものが使われる [Kuwayama et al., 2020]。

$$p(V, T) = 3K_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-2/3} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^{1/3} \right\} \exp \left[\frac{2}{3} (K'_0 - 1) \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^{1/3} \right\} \right] + 3R\gamma_0 \frac{V}{w} \left(\frac{V}{V_0} \right)^b \left\{ (T - T_0) + e_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^g (T^2 - T_0^2) \right\} \quad (9)$$

ここで、 K_0, γ_0 はそれぞれ基準温度における体積弾性率と、基準体積における熱力学的グリュナイゼンパラメーターである。これらは実験によって決まり、「定数」とされる量である。下付き添え字 0 のついている量は、基準体積と温度で既知量である。また、 R, w は物理定数と量的な定数である。従って、実験から求めた (p, V, T) に合うように、 K'_0, b, e_0, g を調整することで、液体金属鉄の状態方程式を構成している (Figure 3)。

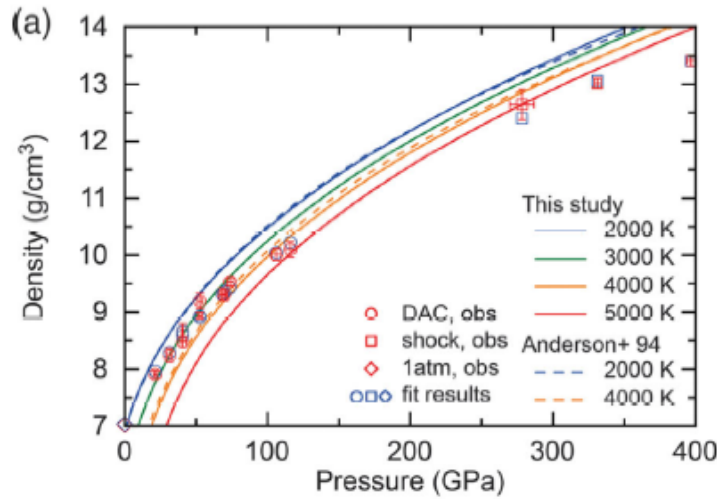


Figure3: Kuwayama et al. (2020) の FIG4 (a).

教科書の Appendix B.5 には体積弾性率の代わりにヤング率 E 、剛性率 G 、および、ポアソン比

*16 例えば、 α は圧力一定下で温度上昇に対する体積変化率を見れば良い訳だが、その圧力依存性も見ないといけない。具体的には、常圧での α_0 を求めた後に、少し圧力を変えて求めた α_1 、さらに少し圧力を変えて求めた α_2 というのを永遠と見ていかないといけない。永遠と見ていかないといけないのは、フィッティング式が与えられていないからである。もちろん、勝手に直線近似とか指数関数近似とかしてはいけない。

*17 例えば、ビネーの状態方程式やバーチ・マーナハンの状態方程式と呼ばれるフィッティング式。

ν が与えられている。弾性体理論から、体積弾性率 K は次式で与えられる。

$$K = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G \quad (10)$$

概ね、 $\nu \approx 0.2$ であるから、第 0 近似的には

$$K \approx \frac{2(1+0.2)}{3(1-0.4)} G \approx 1.3 G \approx G \quad (11)$$

である。そこで、地表付近のカンラン岩 (dunite) は $K \approx G \approx 0.5 \times 10^{11} \text{ Pa} \approx 50 \text{ GPa}$ 程度となる。方、体積熱膨張率の方は $\sim 2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1} \approx 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ である。そこで状態方程式は大体次のように書けるだろう。

$$dV \approx -\frac{V}{(50 \text{ GPa})} dp + (10^{-5} \text{ K}^{-1}) V dT \approx V \left(-\frac{1}{50 \text{ GPa}} dp + \frac{1}{10^5 \text{ K}} dT \right) \quad (12)$$

惑星内部の典型的な圧力単位は GPa で、温度は K である。そこで、 K_T, α が一定とした時に、この式から分かることは

- 温度変化が 100 K のオーダーよりも小さいなら、温度寄与は無視できる
- つまり、固体の状態は圧縮の効果によってほとんど決まることになる
- 温度変化が 1000 K のオーダーになって、温度寄与が効いてくる

マントル対流とかだと温度変化が 1000 K くらいあるので、さすがに温度寄与を無視できない (ので少し複雑な状態方程式を使わないといけな)。もちろん、惑星内部は幅広い温度圧力範囲を持つので、 α や K_T は桁で変わってくる (Figure4)。Appendix B.6 の「マントルの物理的性質」の体積弾性率 K が書かれてあり、液体鉄同様に、桁で変わる様子が分かる。

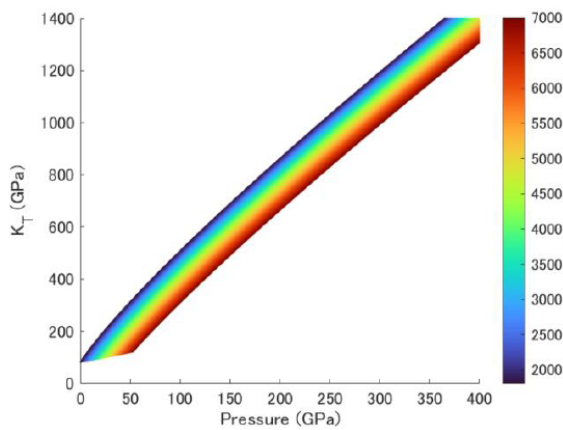


Figure4: 液体金属鉄の K_T 。

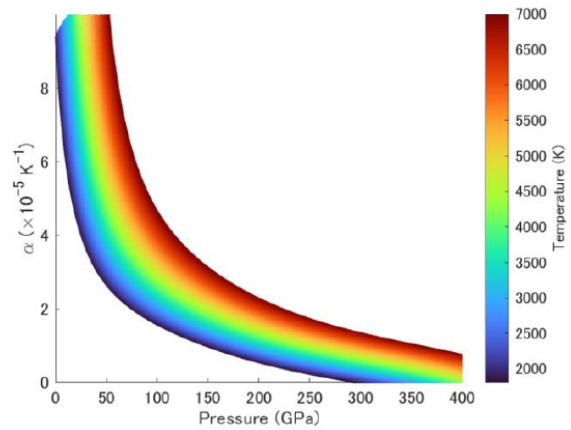


Figure5: 液体金属鉄の α 。

さて、Appendix B.6 の「マントルの物理的性質」の体積弾性率はどのようにして求まっているのだろうか？ これを間接的に決めるには剛性率やヤング率を実験によって求めればよい訳だが、高压実験ではなかなか難しい。実は地球マントルの体積弾性率は地震波観測によってほとんど決

められる。地震波は弾性体理論から

$$V_P = \sqrt{\frac{K_S + (4/3)G}{\rho}} \quad (13)$$

$$V_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (14)$$

である*18。従って、地震波速度が分かれば K_S, G を決定できるということになる。ただし、惑星内部が十分対流しており、断熱的だと思って、 K_S とした。

最後の仕上げとして、地球に限らず惑星内部の密度の一次元構造 (プロファイル) を考えよう。地球内部を研究している人間にとってみれば、惑星内部の密度分布こそ、最も知りたい情報の一つでもある。一般に、状態方程式が既知であれば次の仮定によって、惑星内部の密度分布を大まかに決めることができる。

- 惑星内部が十分対流している → 惑星内部が断熱的 ($dS = 0$) であるという仮定
- 惑星内部は流れが十分遅い*19 → 惑星内部が静水圧平衡で近似できるという仮定
- 内部が均質であるという仮定 → 一次元構造だけを考えれば十分

以上の仮定により、次の連立方程式を解くことで、惑星内部の温度・圧力・密度分布を決定できる。

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\alpha g T}{c_p} \quad (15)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g \quad (16)$$

$$p = p(\rho, T) \quad (17)$$

上から順に断熱温度勾配の式、静水圧平衡の式、既知な状態方程式である。今は重力加速度を一定としてが、一般的には

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad (18)$$

で決める。通常、上の連立方程式は非線形方程式となり手では解けないので、数値計算によって解かれる。その上、状態方程式はかなり複雑であることが多い。

*18 弾性体理論では、この形よりも次の方をよく見かける。

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$$V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

ここで、 λ, μ は弾性定数である。

*19 「十分遅い」を定量的に言うと、マッハ数が十分小さいである。ここで、マッハ数 M の定義は次式である。

$$M \equiv \frac{V_{\max}}{c} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{K_S/\rho}}$$

ここで、 V_{\max} は系の最大速度、 c は音速である。今は音速をバルク速度、すなわち、地震波速度で与えた。

しかし、地震波観測があれば上の非線形方程式を解かなくても、密度構造をある程度決定できる。まず次の量を定義する。

$$\Phi \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \frac{K_S}{\rho} = V_P^2 - \frac{4}{3} V_S^2 \quad (19)$$

ここで K_S は断熱体積弾性率である。 Φ は地震パラメーターと呼ばれる値で、 V_P, V_S が既知なら、これは既知である。惑星内部が十分に対流して混ざっているとしたら、断熱的なので

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_S = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \frac{dp}{dr} = -\frac{\rho g}{\Phi} \quad (20)$$

を積分すれば良い。従って、地震波速度が分かっているれば、状態方程式がなくても密度のプロファイルを簡単に得ることができるのである。ただし、物質境界や水平方向の不均一があるような場合には、そう簡単には積分できない点は注意。あくまで第 0 近似的なプロファイルを与えるものである*20。なお、最後の式は「Adams-Williamson の式」と呼ばれる式で、地球内部物理業界では有名な式である。

*20 物質境界では、音響インピーダンスに関係した反射係数や透過係数等を使って構造が決定される。(ここら辺は専門外なので地震屋の方々に聞いてください！)

References

- [1] Turcotte, D., Schubert, G. (2014) *Geodynamics*, cambridge university press
- [2] 巽 友正 (1995) 連続体の力学, 岩波書店
- [3] 西山 忠男, 吉田 茂生 (2019) 新しい地球惑星科学, 培風館
- [4] Morris et al. (1997) Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH, *Journal of Computational Physics*, **136**, 214-226
- [5] Kuwayama et al. (2020) Equation of State of Liquid Iron under Extreme Conditions, *Physical Review Letters*, **124**, 16