2022.07.21

第2章　固体における応力と歪み

本日のトピック

1. イントロ (2.1)
2. 法線応力 (2.2前半)
3. 接線応力 (2.2後半)
4. 二次元における主応力 (2.3)
5. 惑星マントルの物理的性質の決め方 (おまけ)

しょうぶざこ けんすけ
菖蒲迫 健介
九州大学 地球惑星科学専攻 地球内部ダイナミクス・修士2年

応力と歪み

質点の力学から連続体の力学へ

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F} \longrightarrow \rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\underbrace{-\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}}_{\text{応力項}}+\underbrace{\boldsymbol{f}}_{\text{外力項}}$$

- **面積力 … 力の大きさが面積に比例**
- **体積力 … 力の大きさが体積(質量)に比例**

■ **応力(stress) … 単位面積あたりの力**

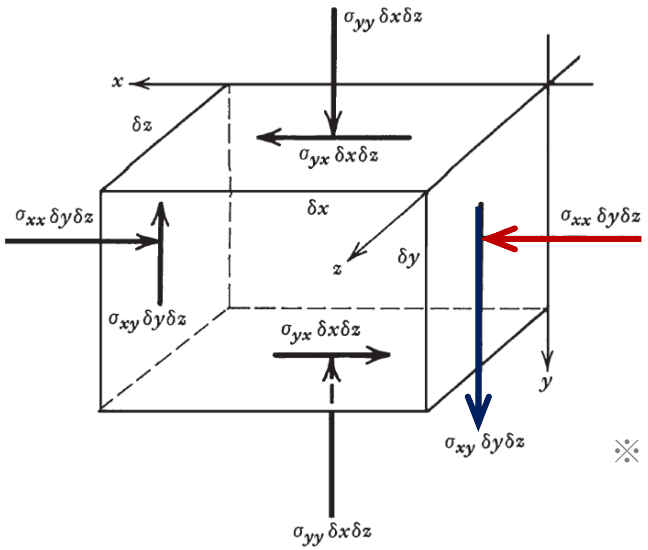
(1) 法線応力 (normal stress) … 面に垂直に働く力

(2) せん断応力 (shear stress) … 面に平行に働く力

■ **歪み(strain) … 応力による変形の一種**

(1) 法線歪み (normal strain) … 長さの変化率

(2) せん断歪み (shear strain) … 変化角度の半分



■ **二次元の応力**

σ_{ij} ：応力テンソル

i方向に垂直な面に働くj方向の応力

※ 教科書によっては定義が逆なこともある

■ **応力と歪みの関係は構成方程式で与えられる**

例：等方弾性体 (物質内に偏りがない) ※ 異方的な結晶構造はダメ

$$\sigma_{ij}=\sum_k\sum_l C_{ijkl}\mathsf{E}_{kl}\Rightarrow \underline{\lambda}\sum_k \mathsf{E}_{kk}\delta_{ij}+2\underline{\mu}\mathsf{E}_{ij}$$

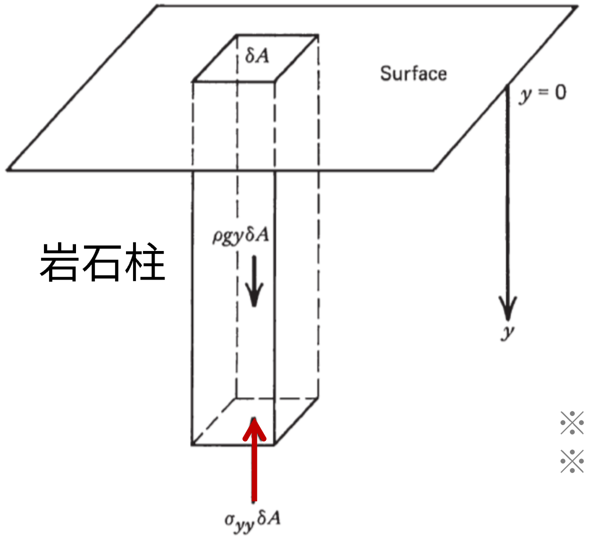
$$\mathsf{E}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}+\frac{\partial r_j}{\partial x_i}\right)$$ ：歪みテンソル (実際の変形)

二つの弾性定数だけで物質の弾性的特性が決まる

菖蒲迫 健介
九州大学 地惑 地球内部ダイナミクス・M2

静水圧平衡

静水圧平衡 … 重力とつり合いにある状態



■ つり合いの式

$$\boxed{\sigma_{yy} = \rho g y}$$

静水圧の式※

上にある重さと等しい法線応力

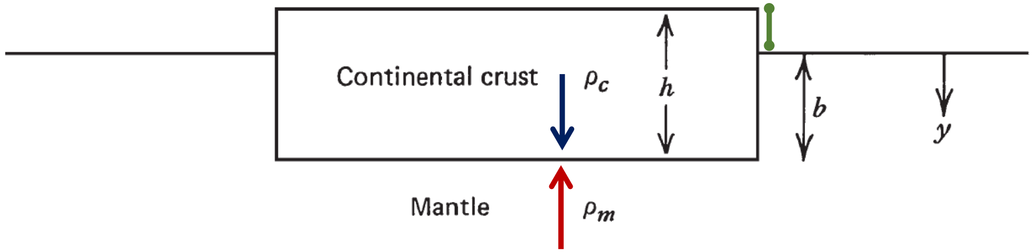
※ 教科書では「静岩圧」(lithostatic pressure)
※ 大気の存在は無視

- リソスフェアの典型的な値 (厚さ: $35\ \mathrm{km}$, 密度: $2750\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$)

$$\sigma_{yy} = 2750\ \mathrm{kg\ m^{-3}} \times 10\ \mathrm{m\ s^{-2}} \times (35\times 10^3)\ \mathrm{m}$$
$$= 9.625\times 10^8\ \mathrm{Pa} = 962.5\ \mathrm{MPa} = 0.9625\ \mathrm{GPa}$$

- 今後はMPaを使うらしいが，惑星科学業界ではGPaが一般的

■ アルキメデスの原理 … 浮力に関する静水圧平衡



- 押しのけた重量と同じ大きさの**浮力**を受ける

$$\underline{\rho_c h} = \underline{\rho_m b}$$

- マントルに浮かぶ大陸地殻の高さ ($\rho_m = 3300\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$)

$$\boxed{h-b} = h - \frac{\rho_c}{\rho_m}h = h\left(1-\frac{\rho_c}{\rho_m}\right) = (35\times 10^3)\ \mathrm{m}\left(1-\frac{2750\ \mathrm{kg\ m^{-3}}}{3300\ \mathrm{kg\ m^{-3}}}\right) \simeq \underline{5.8\ \mathrm{km}}$$

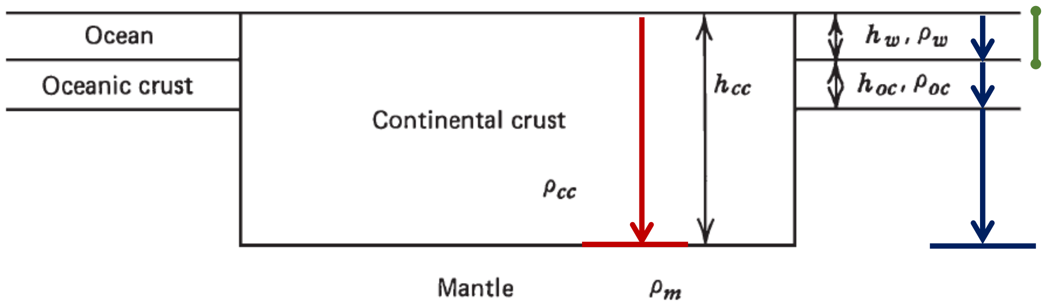
- 上記のような大陸とのつり合い → **アイソスタシー** (isostacy)

菖蒲迫 健介
九州大学 地惑 地球内部ダイナミクス・M2

アイソスタシー

アイソスタシー (isostacy) ⋯ 静水圧平衡を大陸地殻に適用したもの

■ 例1．海盆(ocean basin)の深さの推定



- アイソスタシーの考え方：十分深いところでは静水圧同じ

$$\rho_{cc}h_{cc} = \rho_w h_w + \rho_{oc}h_{oc} + \rho_m(h_{cc} - h_w - h_{oc})$$

$$h_w = \frac{\rho_m - \rho_{cc}}{\rho_m - \rho_w}h_{cc} - \frac{\rho_m - \rho_{oc}}{\rho_m - \rho_w}h_{oc}$$

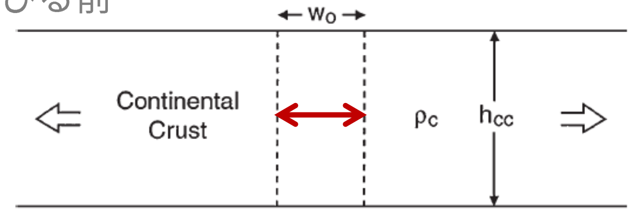
- h_{cc}: 35 km, h_{oc}: 6 km, ρ_m: 3300 kg m^{-3}, ρ_w: 1000 kg m^{-3}, ρ_{cc}: 2800 kg m^{-3}, ρ_{oc}: 2900 kg m^{-3}

海盆の深さが大体 6.6 km と推定できる

■ 例2．堆積盆地(sedimentary basin)の厚さの推定

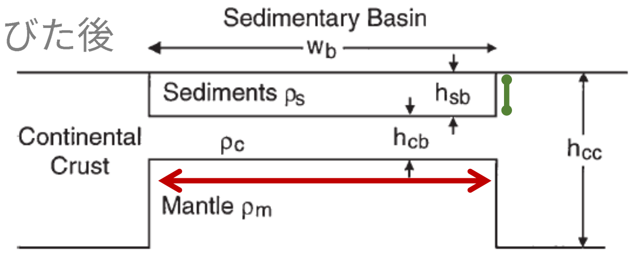
- 地殻が薄く伸ばされる際に，アイソスタシーの要請から大陸沈降が起きる (**地殻伸長モデル**)

伸びる前



(a)

伸びた後



(b)

- 伸長率

$$\alpha \equiv \frac{w_b}{w_0}$$

- 質量保存則

$$w_b h_{cb} = w_0 h_{cc}$$

$$\rightarrow \ h_{cb} = \frac{h_{cc}}{\alpha}$$

$$h_{sb} = h_{cc}\frac{\rho_m - \rho_{cc}}{\rho_m - \rho_s}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

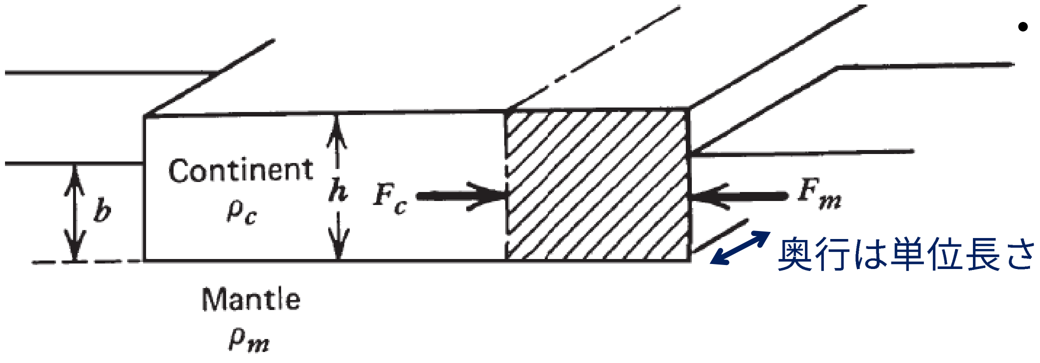
：$\alpha \to \infty$ の時 22 km

菖蒲迫 健介
九州大学 地惑 地球内部ダイナミクス・M2

水平方向の法線応力

これまでは鉛直方向の法線応力を考えたが

テクトニックな場では水平方向の法線応力がある

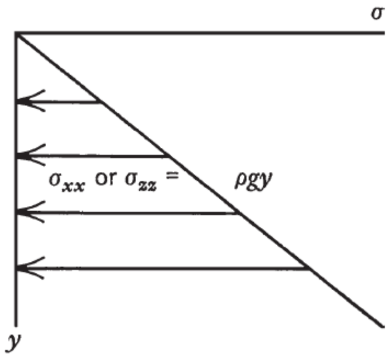


- 弾性体が脆弱なら流体的と見なせ，静止状態で法線応力は全て等しくなる

$$P_L \equiv \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{yy} = \rho g y$$

これを「**静水圧**」もしくは単に「**圧力**」という

$$F_m = \int_0^b P_L dy = \rho_m g \int_0^b y dy = \frac{1}{2}\rho_m g b^2$$



- 浮力を考える場合は，静止状態で水平方向のつり合いを別途考慮

偏差応力

$$\sigma_{xx} = \rho_c g y + \Delta\sigma_{xx} \Rightarrow F_c = \int_0^h \sigma_{xx} dy = \frac{1}{2}\rho_c g h^2 + \Delta\sigma_{xx} h \Rightarrow \Delta\sigma_{xx} = -\frac{1}{2}\rho_c g h\left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_m}\right)$$

大陸地殻の典型的な値：$\Delta\sigma_{xx} = -10\sim100\mathrm{MPa}$

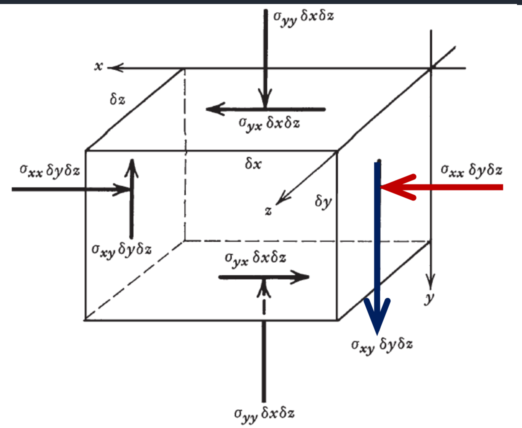
1. 自分が周りと同じ → $\Delta\sigma_{xx} = 0$ → 静水圧のみが存在
2. 自分が周りより軽い → $\Delta\sigma_{xx} < 0$ → 引っ張り応力が発生
3. 自分が周りより重い → $\Delta\sigma_{xx} > 0$ → 圧縮応力が発生 (想定外)

[注意] 圧縮方向が正！

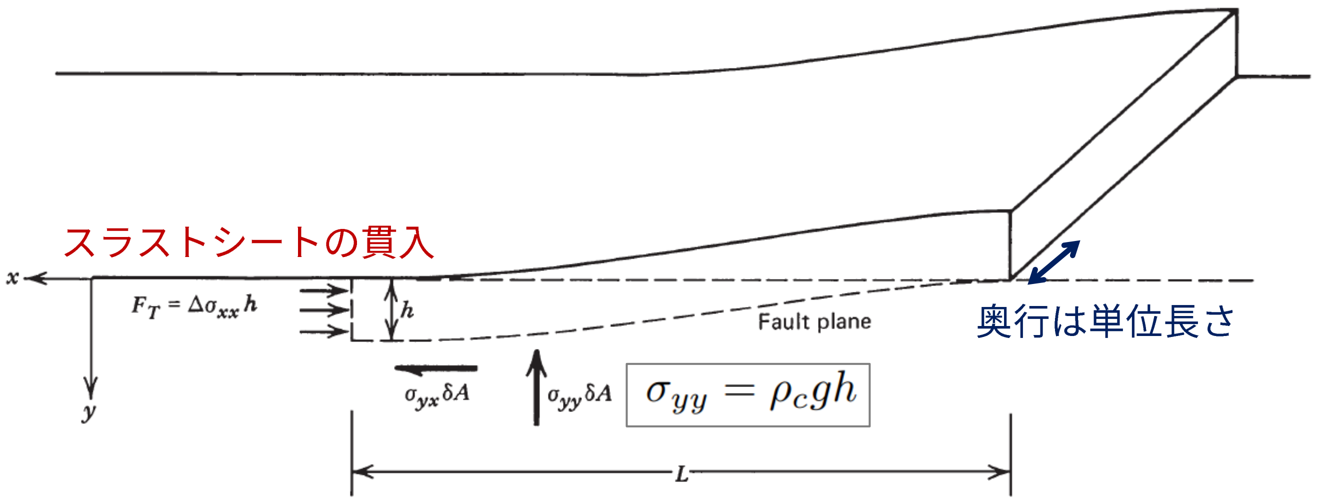
菖蒲迫 健介
九州大学 地惑 地球内部ダイナミクス・M2

せん断応力

- ☑ 法線応力 … 面に垂直に働く応力
- ☐ せん断応力 … 面に平行に働く応力



■ 例：スラストシート(thrust sheet)貫入に対する摩擦力



- 薄い結晶岩質が断層に沿って衝上(overthrsut)する
- この時に貫入していくシートをスラストシートという

$$F_T = \Delta\sigma_{xx}h$$

- これに対して，摩擦力が働く

$$F_R = \sigma_{yx}L$$

- 摩擦力が鉛直方向の力に比例すると仮定する

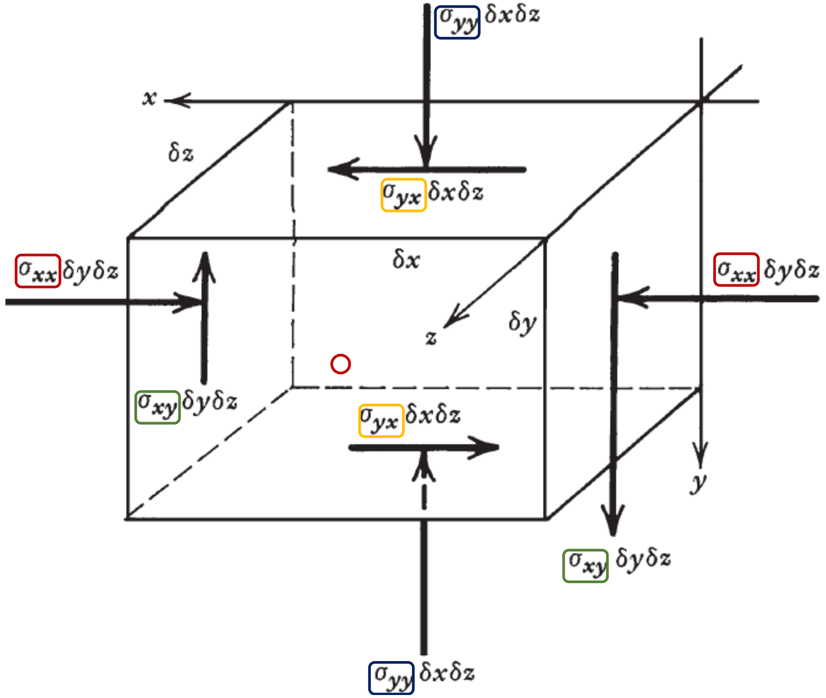
$$\sigma_{yx} = f\sigma_{yy} \Rightarrow \Delta\sigma_{xx} = f\rho_c gL$$

$\Delta\sigma_{xx} = 100\ \mathrm{MPa},\ L = 100\ \mathrm{km},\ \rho_c = 2750\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ とすると $f \simeq 0.036$

菖蒲迫 健介
九州大学 地惑 地球内部ダイナミクス・M2

二次元における主応力 (1/2)

目標：二次元応力の一般化 と 主軸座標系の設定

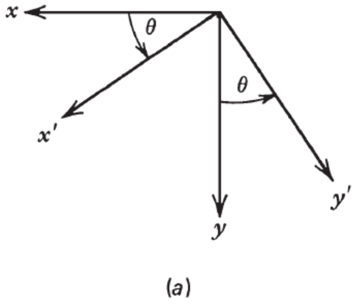


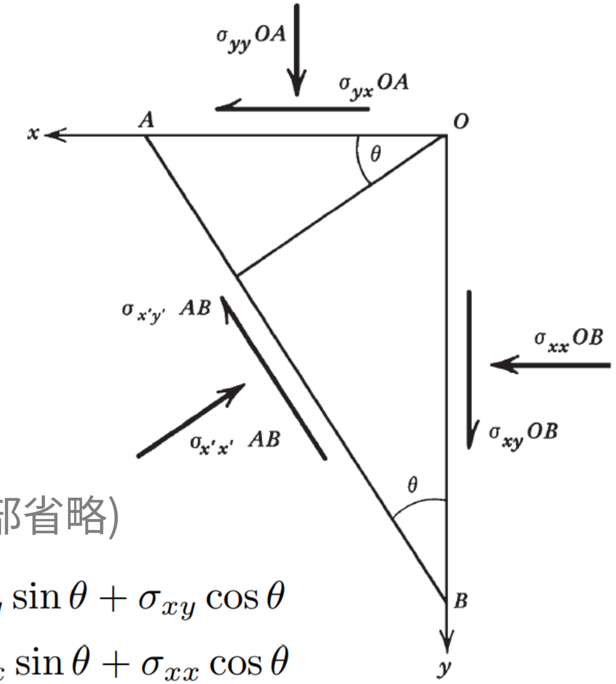
$$\underbrace{(\sigma_{yx}\delta x\delta z)\times\frac{(-\delta y)}{2}+(-\sigma_{yx}\delta x\delta z)\times\frac{\delta y}{2}}_{\text{反時計まわり}}=\underbrace{(-\sigma_{xy}\delta y\delta z)\times\frac{\delta x}{2}+(\sigma_{xy}\delta y\delta z)\times\frac{(-\delta x)}{2}}_{\text{時計まわり}}$$

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$$

- 応力は対称的である → 独立な応力成分は σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}

- 座標軸を回転させた場合どうなるだろうか？





つり合いの式 (一部省略)

$$\sigma_{x'x'}\sin\theta+\sigma_{x'y'}\cos\theta=\sigma_{yy}\sin\theta+\sigma_{xy}\cos\theta$$
$$\sigma_{x'x'}\cos\theta-\sigma_{x'y'}\sin\theta=\sigma_{yx}\sin\theta+\sigma_{xx}\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'}&=\sigma_{xx}\cos^2\theta+\sigma_{yy}\sin^2\theta+\sigma_{xy}\sin 2\theta\\ \sigma_{y'y'}&=\sigma_{xx}\sin^2\theta+\sigma_{yy}\cos^2\theta-\sigma_{xy}\sin 2\theta\\ \sigma_{x'y'}&=\frac{1}{2}(\sigma_{yy}-\sigma_{xx})\sin 2\theta+\sigma_{xy}\cos 2\theta\end{aligned}$$

菖蒲迫 健介
九州大学 地惑 地球内部ダイナミクス・M2

二次元における主応力 (2/2)

目標：二次元応力の一般化 と 主軸座標系の設定

- 回転させたら，応力成分3つ + θ = 4 つの独立変数が出てきた

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + \sigma_{xy}\sin 2\theta$$
$$\sigma_{y'y'} = \sigma_{xx}\sin^2\theta + \sigma_{yy}\cos^2\theta - \sigma_{xy}\sin 2\theta$$
$$\sigma_{x'y'} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\right)\sin 2\theta + \sigma_{xy}\cos 2\theta$$

- θ の取り方は任意だから，変数を一つ消すような取り方をしたい
- もしも，$\sigma_{x'y'} = 0$ となる θ があれば嬉しい

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

- このような軸を**主軸(principal axis)**と言う
- この座標系における $\sigma_{x'x'}, \sigma_{y'y'}$ を**主応力(principal stress)**と言う
- だから，主軸を座標軸とする座標系(**主軸座標系**)を設定できれば，変数は3つのままになり，ありがたみが深い

- (なぜか) プライムなしを量を主軸座標系の量とする

※ さっきはプライム付きの量が主軸座標系になりかけた

$$\sigma_{xx} = \sigma_1$$
$$\sigma_{yy} = \sigma_2$$
$$\sigma_{xy} = 0$$

- プライム付きの量を求める (途中計算はメモを参照)

$$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\theta$$
$$\sigma_{x'y'} = -\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)\sin 2\theta$$
$$\sigma_{y'y'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\theta$$

- よって，任意の3つの応力成分(プライム付き)は主応力 σ_1, σ_2 と角度 θ の3つの変数で書けるようになった
- 要は，<u>測りやすい主応力だけで任意の応力を書けるように，座標変換しただけである</u>

菖蒲迫 健介
九州大学 地惑 地球内部ダイナミクス・M2

惑星マントルの物理的性質の決め方 (1/3)

状態方程式(EOS) … 熱力学特性を決定する物質固有の式

■ 有名な状態方程式の話 (1成分系)

- 経験式に，平衡な系では独立な熱力学量は2つだけ
- この関係を式で書いたものが「**状態方程式**」である

例：理想気体の状態方程式 (経験式 → 理論式)

$$pV = RT$$

例：お水の状態方程式 (経験式)

$$p = B\left\{\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma} - 1\right\}$$

密度と圧力だけで書ける → バロトロピー流体

- 一般的な形として次式で書ける

$$f(p, V, T) = 0$$

別に，エントロピーとか内部エネルギーとかで書いてもOK

■ 状態方程式の一般化と地球物理との関係

- $V = V(p, T)$ とした場合の一般形

$$dV = \boxed{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} dp + \boxed{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p} dT$$

等温体積弾性率

$$K_T \equiv -V\boxed{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}$$

熱膨張率

$$\alpha \equiv \frac{1}{V}\boxed{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}$$

一般形

$$\boxed{dV = -\frac{V}{K_T(p, T)} dp + \alpha(p, T) V dT}$$

- それぞれは，地震波速度やマントル対流などに強く関係

バルク音速

$$C^2 \equiv \frac{K_S}{\rho} = \frac{c_p}{c_V}\frac{K_T}{\rho}$$

レイリー数

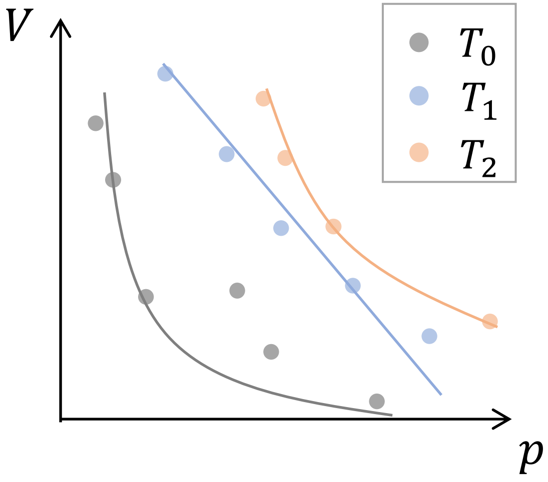
$$Ra \equiv \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\kappa \nu}$$

菖蒲迫 健介
九州大学 地惑 地球内部ダイナミクス・M2

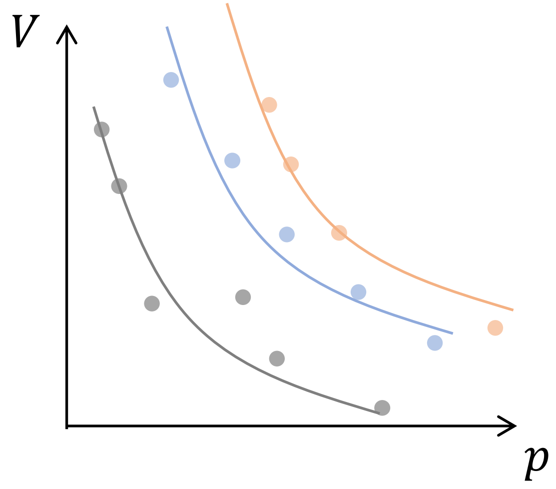
惑星マントルの物理的性質の決め方 (2/3)

少しマニアックな状態方程式の作り方の話

- 実際に得られるのは (温度, 圧力, 体積) のデータの組
- K_T, α はそれらを使って計算するけど，早い話実験データを使って，**フィッティング式を求めれば良い**
- 重要なのは，その「**ひな形**」をどうするかである
  [注意] 勝手に直線近似とかしたらダメ！



色んな関数系が考えれられる

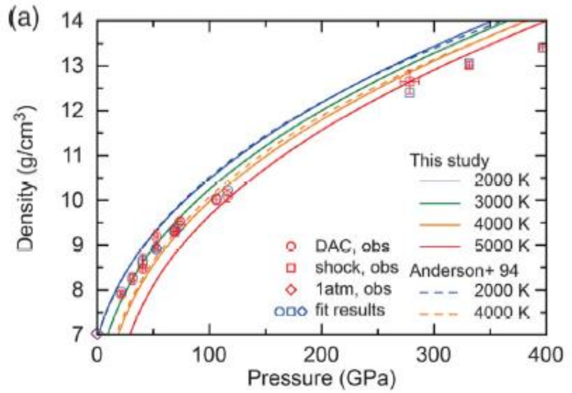


理論から関数形を制限

- 特に，高圧高温実験は大変で，データ少ない…
- 幅広い温度圧力をカバーするには，**理論的裏付けのある内挿 or 外挿** を行う必要あり

液体鉄の状態方程式 [Kuwayama et al., 2020]

$$p(V,T) = 3K_0 \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-2/3} \left\{1 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^{1/3}\right\} \exp\left[\frac{2}{3}(K_0' - 1)\left\{1 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^{1/3}\right\}\right] + 3R\gamma_0 \frac{V}{w}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{b}\left\{(T - T_0) + e_0\left(\frac{V}{V_0}\right)^{g}(T^2 - T_0^2)\right\}$$



菖蒲迫 健介
九州大学 地惑 地球内部ダイナミクス・M2

惑星マントルの物理的性質の決め方 (3/3)

惑星内部の「温度・圧力・密度」の決め方

- ２つの仮定を元に決める

1. 惑星内部が**対流で十分混ざっている** → 断熱的で均質的
2. 惑星内部の**流れが十分遅い** → 静水圧平衡が概ね成立

断熱温度勾配の式 $$\frac{dT}{dr} = \frac{\alpha g T}{c_p}$$

静水圧平衡の式 $$\frac{dp}{dr} = -\rho g \qquad g = \frac{GM}{r^2}$$

既知な状態方程式 $$p = p(\rho, T)$$

- 手で解けないことが多いので，数値積分して求める
- ただし，積分には各層の厚さが必要

→ 慣性モーメント等の観測に合うように決める

- 内部を構成している物質が不明 or 状態方程式がない…
- 地震波速度があれば，大まかな密度構造を推定できる

$$V_P = \sqrt{\frac{K_S + (4/3)G}{\rho}} \qquad V_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G : 剛性率 (弾性定数)

- 次の量が既知となる

$$\Phi \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \frac{K_S}{\rho} = V_P^2 - \frac{4}{3} V_S^2$$

- 次式から密度構造を計算できる → 状態方程式は登場しない

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)_S = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S \frac{dp}{dr} = -\frac{\rho g}{\Phi}$$

Adams-Williamson の式

菖蒲迫 健介
九州大学 地惑 地球内部ダイナミクス・M2