明けましておめでとうございます 今年も宜しくお願い致しますm()m

DISPH法を用いた 地球コア形成シミュレーションについて

しょうぶざこ けんすけ 菖蒲迫 健介 ' よしだ しげお かわだ よしふみ 3 吉田 茂生 川田 佳史 よしだ しげお

九州大学 理学府 地球惑星科学専攻 地球内部ダイナミクス研究室 3 国立研究開発法人海洋研究開発機構(JAMSTEC)

本日の流れ

導入

- 地球コア形成の惑星科学的意義
 - Topic Words

惑星形成シナリオ・ジャイアントインパクト マグマオーシャン・金属鉄分離・微量元素

- 流体数値シミュレーション
 - Topic Words

格子法と粒子法·SPH法

方法と結果

- 熱伝導と熱対流シミュレーション
 - Topic Words

弱圧縮性流体·境界設定

- 金属層沈降シミュレーション
 - Topic Words

DISPH法・レイリーテーラー不安定

今後の研究

3

• 3成分モデルの構築と3次元化

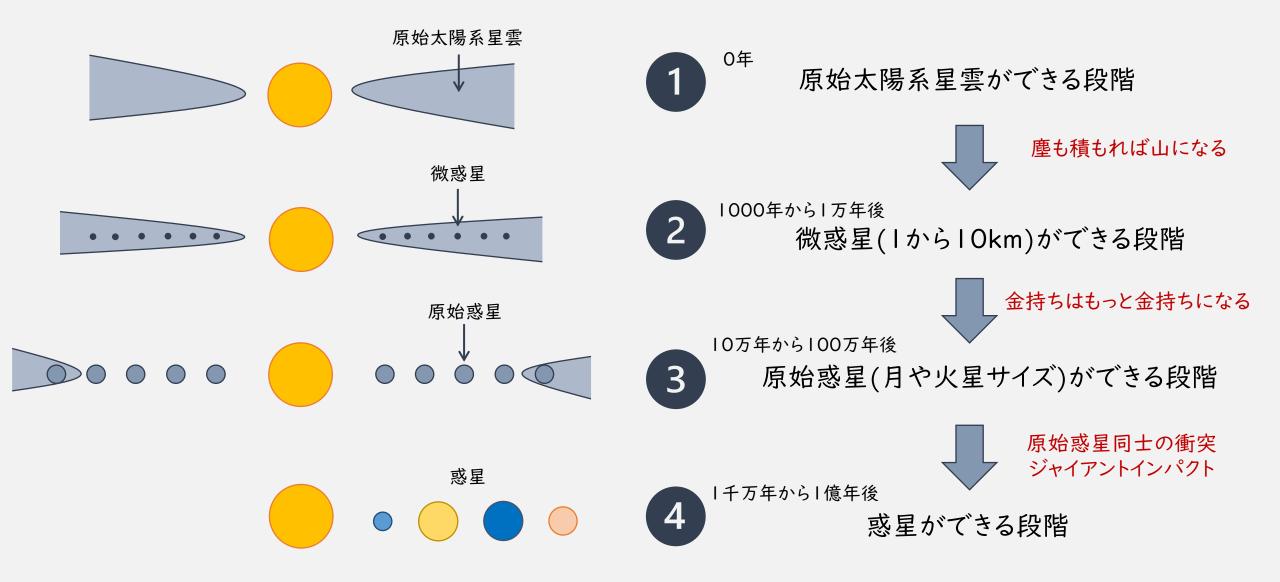


コア形成の過程をより具体的にしたい

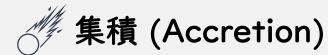
菖蒲迫 健介

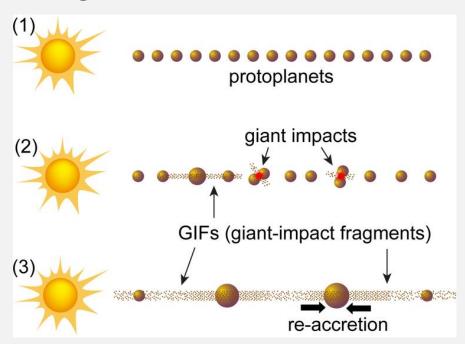
地球コア形成の惑星科学的意義

導入 はじまり 太陽系形成の標準シナリオと惑星の成因(その1)



太陽系形成の標準シナリオと惑星の成因(その2)





Genda et al. (2017)

3 原始惑星(月や火星サイズ)ができる段階

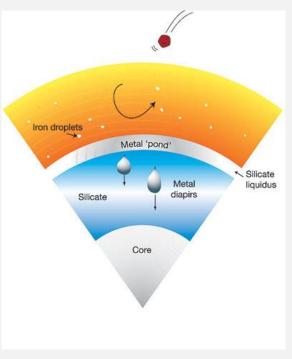


分化 (Fractionation)

マグマオーシャン (液体シリケイト)

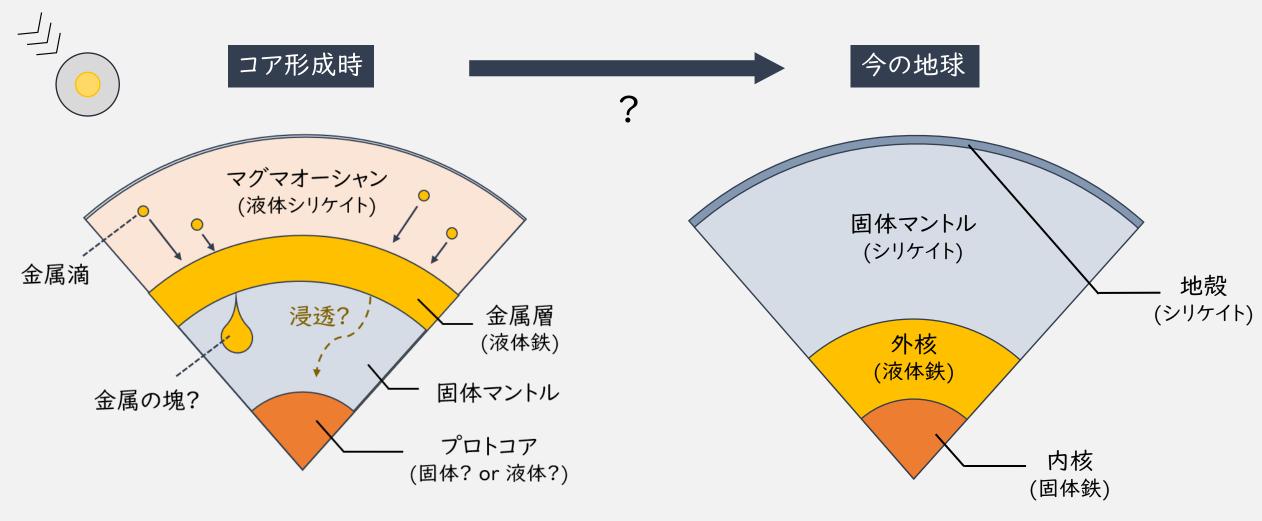
VS

液体金属鉄



Wood et al. (2016)

惑星ができる段階



✓ 地球には深い(~1000km)マグマオーシャンが 存在したと思われている。

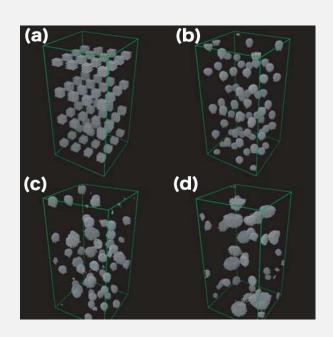
地球コア形成の惑星科学的意義 これまでの地球コア形成に関する計算例

彼らの結果によると 安定的な滴半径は~1.5cm 終端速度は30-110cm/s

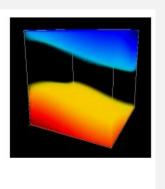
研究の方向性は 数値シミュレーションと元素分配の実験

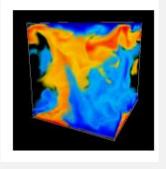
モデル整合性の確認 シミュレーション vs 今の地球マントル

マグマオーシャンを沈降する金属滴の数値シミュレーション



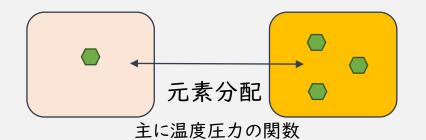
Ichikawa et al. (2009)



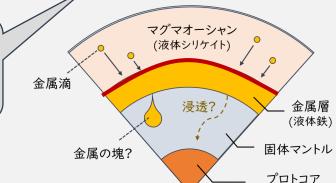


Hoink et al. (2006)

2 微量元素の分配シミュレーション



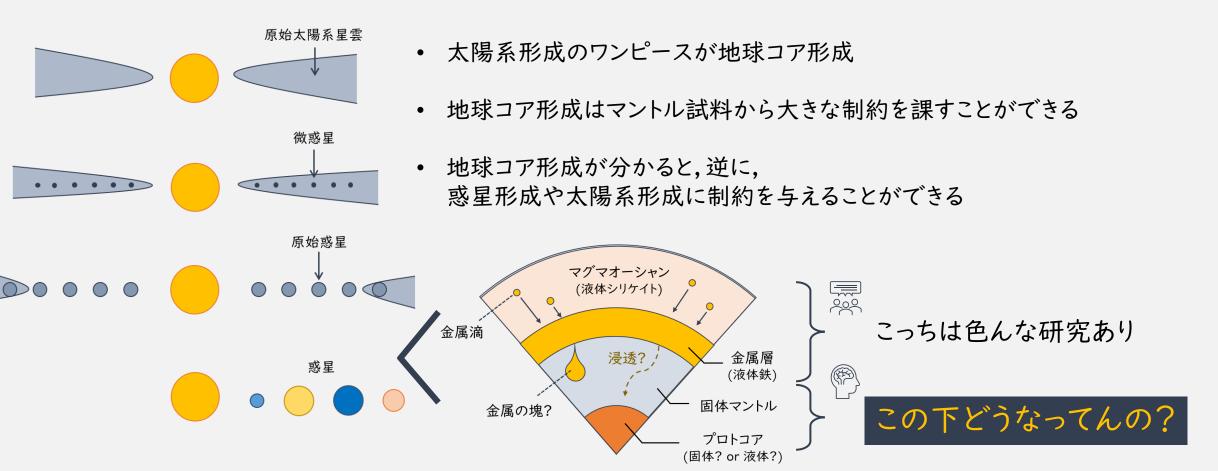
マグマオーシャンの深さを 推定できると思っている



(固体? or 液体?)

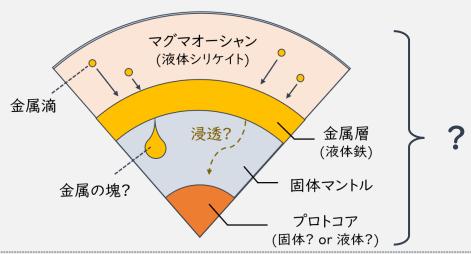


まとめ

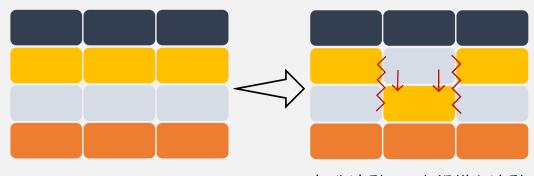


自分の興味の対象 将来的に解きたいコア形成モデル

金属が落ちていく全体像を具体化したい



粘性散逸による温度上昇?



部分溶融 or 大規模な溶融?

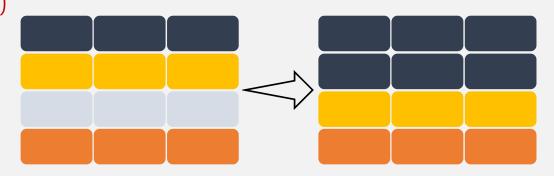
特に

金属層が形成されたとすれば、どうやって落ちていったか?

大きな変形を伴う流体計算が必要 かつ 複数相を同時に解く必要性あり

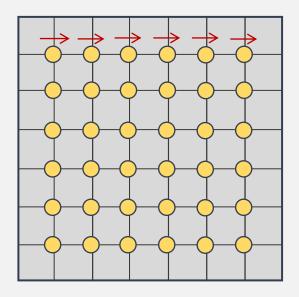


マグマオーシャンの深さが変わるかも?





格子法



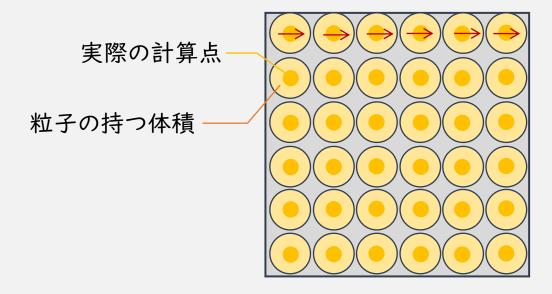
固定された格子点で物理量を計算

一 隣の格子点の情報を使う

★ツシュを細かくすれば解析性能が向上

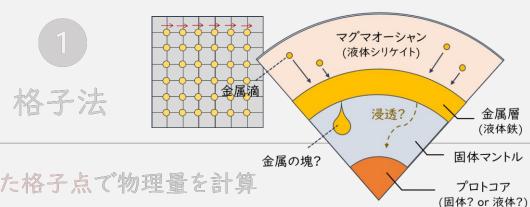
2

粒子法



- 動く粒子の中心で物理量を計算
- 割 周りの粒子の情報を使う
- 粒子数を大きくすれば解析性能が向上

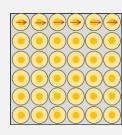
数値シミュレーションについて 格子法と粒子法(その2)



2

粒子法

動く粒子の中心で物理量を計算



特徴冒

固定された格子点で物理量を計算

1960~

長所 😊

- ✓ 流体計算例が豊富 (歴史が長い)
- ✓ 誤差評価が簡単

- ✓ 大変形に対応できる
- ✓ 比較的アルゴリズムが簡単

短所(三)

- ✓ 大変形に対応できない
- ✓ メッシュがない場所では物理量を計れない

- ✓誤差評価が難しい 1977~
- ✓ 手法自体が発達途上段階 (歴史が浅い)

代表例

- ✓ 差分法 (最も簡単な方法)
- ✓ 有限体積法 (格子点が有限体積を持つ)
- ✓ 有限要素法 (形状を持つ要素を使う)
- √ etc.···

- ✓ SPH法 (最も一般的な方法)
- ✓ MPS法 (日本人が開発した非圧縮用の方法)

方法と結果 はじまり SPH法の3つの基本概念(その1)

なめらか粒子の流体力学法 Smoothed Particle Hydrodynamics Method

1

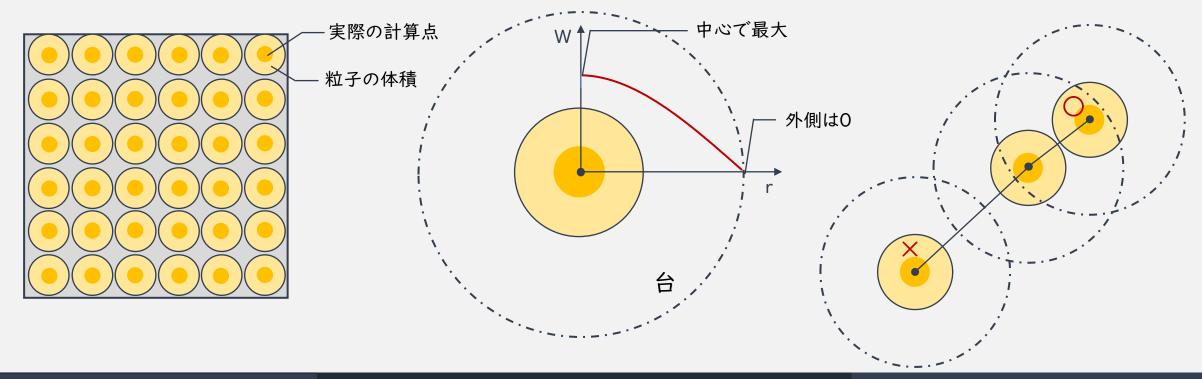
2

3

流体全体を仮想粒子で近似する

粒子に重み関数を張り付ける

近傍の粒子の情報のみを使う



数値シミュレーションについて SPH法の3つの基本概念(その2)

なめらか粒子の流体力学法

Smoothed Particle Hydrodynamics Method

粒子に重み関数を張り付ける

中心で最大 外側は0

重み関数が最低でも 二階微分可能かつ連続

"なめらか"

仮想粒子のことを

なめらか粒子 と呼び

その流体力学を

なめらか粒子の流体力学 と呼ぶ

SPH法

- ✓ Lucy (1977)
- ✓ Monaghan and Gingold (1977)

SPH法のイメージ









空間の空隙をなめらかな 重み関数で内挿補間する



質量・密度・位置・速度・温度・圧力などの 物理量を属性として持つ



なめらか粒子は流体の保存則に基づいて 運動し、その属性が時間発展していく

f(x)

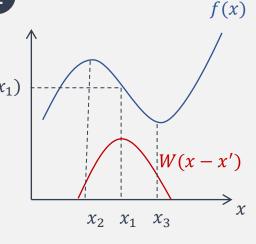
数値シミュレーションについて SPH法の公式(その1)

- 1 デルタ関数の定義から出発 $f(m{x}) = \int_{\Omega} f(m{x}') \, \delta(m{x} m{x}') \, dm{x}'$
 - $f(x_1)$ xを含む任意体積 $f(x_1)$ $f(x_1)$ $f(x_2) \approx \langle f(x) \rangle \equiv \int_{\Omega} f(x') \, W(x-x';h) \, dx'$ 誤差 $g(x) = \int_{\Omega} f(x') \, W(x-x';h) \, dx'$
- 2 <u>カーネル関数による近似</u> = 重み関数 ♀ ?
- 3 離散化 (粒子近似)

誤差見積もり? $\int N$ $f(m{x}) pprox \langle f(m{x})
angle pprox \int f(m{x}_j) W(|m{x} - m{x}_j|;h) \Delta V_j$ 誤差 $O(h^2)$ 数子の体積

$$\Delta V_j = \frac{m_j}{
ho_j}$$
 と置けば

$$f(oldsymbol{x}) = \sum_{j}^{N} \; rac{m_{j} \; f(oldsymbol{x}_{j})}{
ho_{j}} \, W(|oldsymbol{x} - oldsymbol{x}_{j}|; h)$$





特別ななめらか量

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j}^{N} \frac{m_{j} f(\boldsymbol{x}_{j})}{\rho_{j}} W(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{j}|; h) \qquad \xrightarrow{f(\boldsymbol{x}) = \rho_{i}} \qquad \rho_{i} = \sum_{j}^{N} m_{j} \widehat{W_{ij}}$$
 密度は常にこの関係式から は不要

密度は常にこの関係式から決まる



質量は粒子に不変量として張り付けるので 粒子がどこかに行かない限り保存される



一階微分の公式 (空間微分は位置
$$x$$
に対してかかる)
$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j}^{N} \frac{m_{j} f(\boldsymbol{x}_{j})}{\rho_{j}} W(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{j}|; h) \qquad \qquad \nabla f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j}^{N} \frac{m_{j} f(\boldsymbol{x}_{j})}{\rho_{j}} \nabla W(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{j}|; h)$$

$$abla f(oldsymbol{x}) = \sum_{j}^{N} rac{m_{j} \ f(oldsymbol{x}_{j})}{
ho_{j}}
abla W(|oldsymbol{x} - oldsymbol{x}_{j}|; h)$$



<mark>二階微分の公式</mark>(導出はかなりマニアックなので省略)

$$abla^2 oldsymbol{f}(oldsymbol{x}) = 2 \sum_{j}^{N} rac{m_j}{
ho_j} rac{(oldsymbol{x} - oldsymbol{x}_j) \cdot \underline{
abla W(oldsymbol{x} - oldsymbol{x}_j; h)}{|oldsymbol{x} - oldsymbol{x}_j|^2} (oldsymbol{f}(oldsymbol{x}) - oldsymbol{f}(oldsymbol{x}))$$



-階微分の形で書かれることがほとんど

- ✓ 二階微分はたくさん項が含まれる → 計算が多くなる
- ✓ 計算が不安定になる報告がある

数値シミュレーションについて SPH法の基礎方程式



※ 流体の基礎方程式

└ カーネル近似+粒子近似

SPH法の基礎方程式

連続の式 (質量保存の式)

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \, \nabla \cdot \boldsymbol{v}$$

運動方程式 (運動量保存の式)

$$rac{Doldsymbol{v}}{Dt} = -rac{1}{
ho}
abla p + rac{\eta}{
ho}
abla^2oldsymbol{v} + oldsymbol{K}$$

SPH世界で厳密に保存

エネルギー方程式 (エネルギー保存の式)

$$\frac{De}{Dt} = \frac{k}{\rho} \nabla^2 T - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho} \Phi + J$$

+状態方程式

対称的な形で定式化することが重要

+状態方程式

$$rac{D
ho_i}{Dt} = \sum_{i}^{N} m_j oldsymbol{v}_{ij} \cdot
abla_i W_{ij}$$
 もしくは $ho_i = \sum_{j}^{N} m_j W_{ij}$

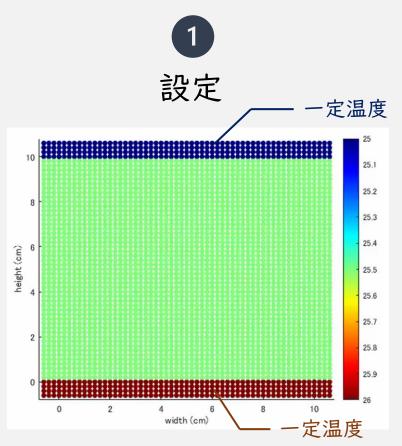
$$\int \frac{D\boldsymbol{v}_{i}}{Dt} = -\sum_{j}^{N} m_{j} \left(\frac{p_{i}}{\rho_{i}^{2}} + \frac{p_{j}}{\rho_{j}^{2}} \right) \nabla_{i} W_{ij}$$

$$+ \sum_{j}^{N} \frac{4\eta_{i}\eta_{j}}{\eta_{i} + \eta_{j}} \frac{m_{j}}{\rho_{i}\rho_{j}} \frac{\boldsymbol{x}_{ij} \cdot \nabla_{i} W_{ij}}{|\boldsymbol{x}_{ij}|^{2}} (\boldsymbol{v}_{ij}) + \boldsymbol{K}_{i}$$

$$\frac{De_i}{Dt} = \sum_{j}^{N} \frac{4k_i k_j}{k_i + k_j} \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\boldsymbol{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{|\boldsymbol{x}_{ij}|^2} T_{ij} + \sum_{j}^{N} \frac{m_j}{2} \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \boldsymbol{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}
- \sum_{i}^{N} \frac{2\eta_i \eta_j}{\eta_i + \eta_j} \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \boldsymbol{v}_{ij}^2 \frac{\boldsymbol{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{|\boldsymbol{x}_{ij}|^2} + J_i$$

SPH法シミュレーションをやってみた(その1) **熱伝導問題**

方法と結果

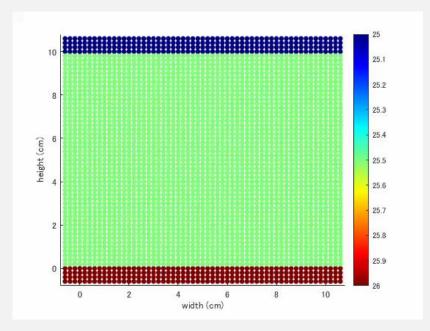


- ✓ 粒子数は2500個
- ✓ 熱拡散率 $\kappa = 10^{-6} \, m^2 s^{-1}$
- ✓ 時間差分は前進オイラー法
- ✓ タイムステップの制約はCFL条件から $\Delta t < 4s$

計算が破綻しないための条件

2

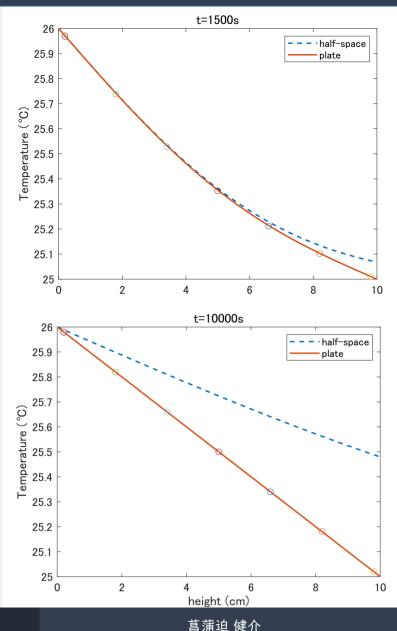
結果



----- 一次元半無限空間の解析解

─ プレート冷却モデルの解析解

○ 水平平均した粒子の温度

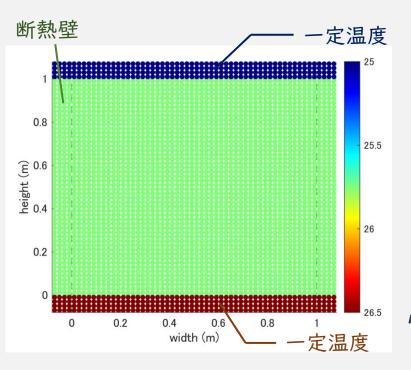


方法と結果

SPH法シミュレーションをやってみた(その2) 熱対流問題(その1)



設定



- ✓ 粒子数は2500個
- ✓ 全壁ですべしなし
- ✓ レイリー数 I 0000, プラントル数 I
- ✓ 時間差分は前進オイラー法
- ✓ タイムステップの制約はCFL条件から $\Delta t < 1s$
- ✓ 弱圧縮性流体を仮定 計算が破綻しないための条件
- SPH法は圧縮性流体を解くための手法で 非圧縮問題を解くことができない
- つまり音波が取れないので, 音波よりも短 いタイムステップ条件が課される
- これを回避するために物理に影響が出な い範囲で音速を遅くする効果を人工的に 入れる

非圧縮性流体 弱圧縮性流体

音速を無限大にして, 音波の存在を忘れる

音速は残すが,遅くする

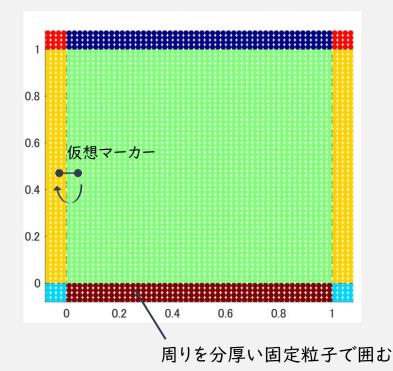


SPH法特有の問題

境界設定。②



適切に境界設定を行わないと 粒子が壁をすり抜けてしまう

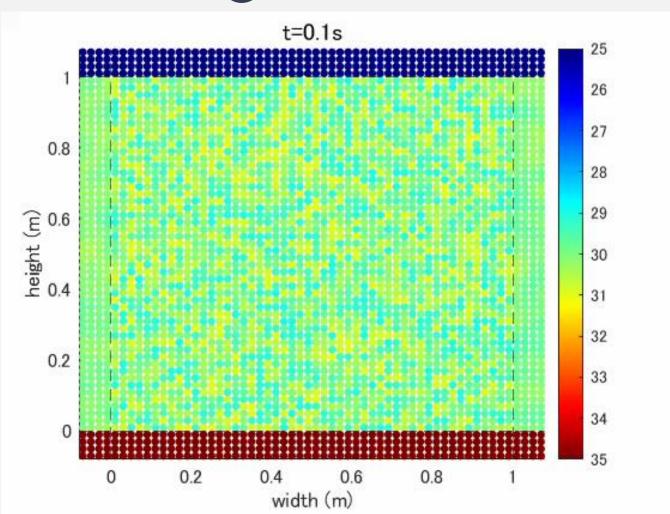


SPH法シミュレーションをやってみた(その2) **熱対流問題(その2)**

2 結果



- ✓ 最初は適当な温度ゆらぎを与えた
- ✓ 熱伝導で熱が伝わった後に 熱対流が起こる
- ✓ よく見ると端が動いている 本当はすべりなし



基本アルゴリズム

初期配置と初期条件の入力

→

仮想マーカーの情報を更新

一

固定壁粒子に情報を付与

→

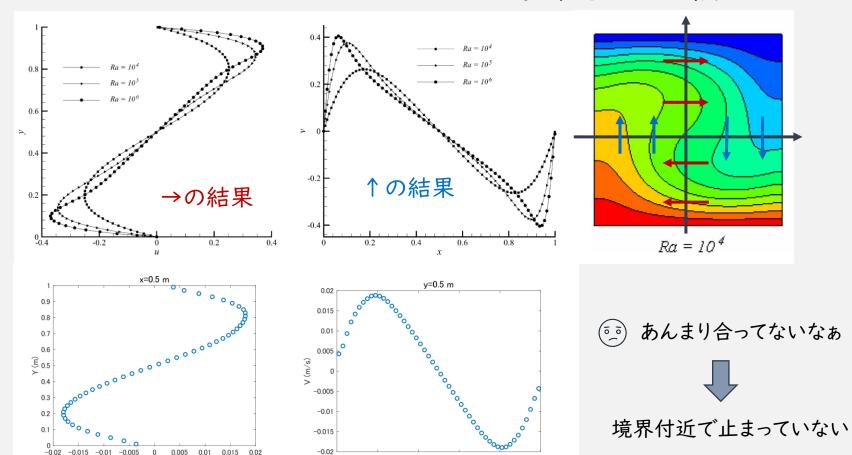
SPHの基礎方程式を解く

アルゴリズムの工夫点 ぐ 近くの粒子を効率的に探す アルゴリズム(近傍粒子検索)

SPH法シミュレーションをやってみた(その2) **熱対流問題(その3)**



先行研究との比較



格子法 (有限体積法) Ouertatani et al. (2008)

最大速度

 $\rightarrow \cdots 0.022 ms^{-1}$

 $\uparrow \cdots 0.022 ms^{-1}$

ヌッセルト数 … 2.158

対流の定常性に関する無次元数

今回の結果

最大速度

 $\rightarrow \cdots 0.018 ms^{-1}$

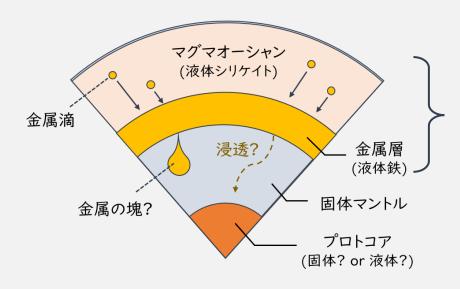
 $\uparrow \cdots 0.019 ms^{-1}$

ヌッセルト数 … ~3.2

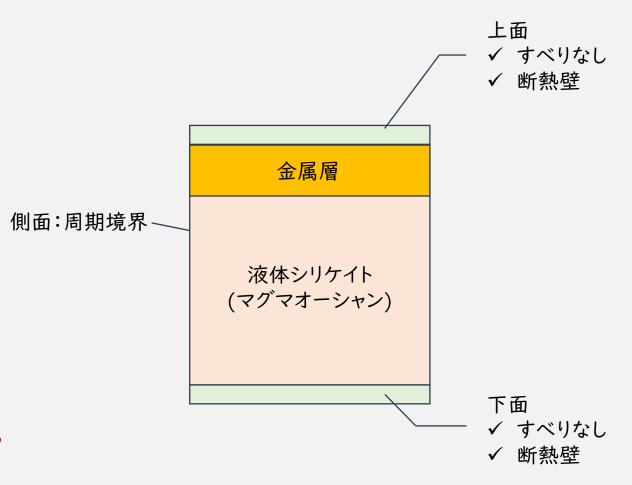
たぶん自分の計り方が良くない

コア形成モデルについて 二相二次元問題のモデル設定

液体金属鉄 vs 液体シリケイト



- ✓ まずは二相二次元から ゆくゆくは三相三次元にしたい
- ✓ 粘性が大きくない液体間の計算 粘性が大きいとタイムステップの制約がきついので工夫がいる
- ✓ 先行研究がいくつかある

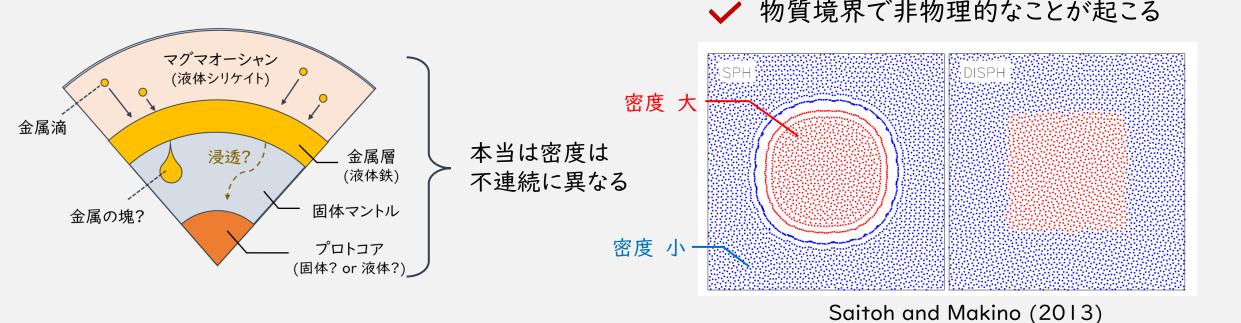


SPH法の問題点 密度をならしてしまうのは良くない?



特別ななめらか量

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j}^{N} \frac{m_{j} f(\boldsymbol{x}_{j})}{\rho_{j}} W(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{j}|; h) \xrightarrow{f(\boldsymbol{x}) = \rho_{i}} \rho_{i} = \sum_{j}^{N} m_{j} \underline{W_{ij}}_{ij}$$



基礎方程式中に密度が陽に現れないようにしたい

DISPH法について DISPH法の基本概念



Saitoh and Makino (2013)

Density-Independent SPH

体積要素を別の量で置き換える

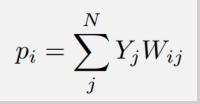
特別ななめらか量が圧力となる

$$f(\boldsymbol{x}) pprox \langle f(\boldsymbol{x}) \rangle pprox \sum_{j}^{N} f(\boldsymbol{x}_{j}) W(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{j}|; h) \Delta V_{j}$$

$$\Delta V_j = \frac{m_j}{\rho_j} = \frac{Y_j}{p_j}$$
 \Rightarrow $Y_j = p_j \Delta V_j$



$$Y_j = p_j \Delta V_j$$



圧力は本来連続的な量



なめらかにしても何の問題もないはず



謎量Yはどうやって決めるのか?

 \checkmark Hosono et al. (2013)によると、状態方程式を使って全てが整合的になるように反復法によってYを決める

DISPH法を開発したSaitoh and Makino (2013)と同じグループ

圧力・密度・温度とY



収束する保証はあるのか? 分からない



良いアイデアだが勉強してみると 手法自体が結構怪しそう…

DISPH法について オリジナルのDISPH法の改良点



[!] 運動量とエネルギーが保存していない。



◆ **対称的な形**にして保存則を満たすようにする



□・」 謎量Yを反復法で求める?



Yの決定方程式を正しく構成し直す

→ Hosono et al. (2013)には式変形に間違いがある



DISPH法の基礎方程式 (改良ver.)



SPHの方程式に戻る

特別ななめらか量(なめらか圧力の式)

$$p_i = \sum_{j}^{N} Y_j W_{ij}$$

運動方程式 (運動量保存の式)

$$m_i \frac{D\boldsymbol{v}_i}{Dt} = -\sum_j^N \left(\frac{Y_i^2}{p_i} + \frac{Y_j^2}{p_j}\right) \nabla_i W_{ij} + \sum_j^N \frac{4\eta_i \eta_j}{\eta_i + \eta_j} \frac{Y_i Y_j}{p_i p_j} \frac{\boldsymbol{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{|\boldsymbol{x}_{ij}|^2} \boldsymbol{v}_{ij} + m_i \boldsymbol{K}_i$$

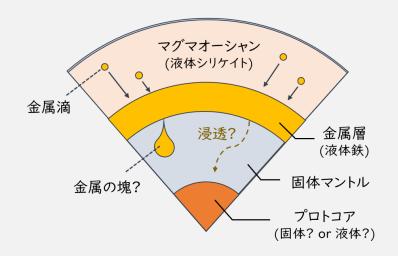
エネルギー方程式 (エネルギー保存の式)

$$\frac{DU_{i}}{Dt} = \sum_{j}^{N} \frac{4k_{i}k_{j}}{k_{i} + k_{j}} \frac{Y_{i}Y_{j}}{p_{i}p_{j}} \frac{\boldsymbol{x}_{ij} \cdot \nabla_{i}W_{ij}}{|\boldsymbol{x}_{ij}|^{2}} T_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j}^{N} \left(\frac{Y_{i}^{2}}{p_{i}} + \frac{Y_{j}^{2}}{p_{j}}\right) \boldsymbol{v}_{ij} \cdot \nabla_{i}W_{ij}
- \sum_{j}^{N} \frac{2\eta_{i}\eta_{j}}{\eta_{i} + \eta_{j}} \frac{Y_{i}Y_{j}}{p_{i}p_{j}} \boldsymbol{v}_{ij}^{2} \frac{\boldsymbol{x}_{ij} \cdot \nabla_{i}W_{ij}}{|\boldsymbol{x}_{ij}|^{2}} + J_{i}$$

Yの決定方程式 (導出に連続の式と状態方程式をを使う)

$$\frac{DY_i}{Dt} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p_i} K_{T,i} \right) \sum_{j}^{N} \left(\frac{Y_i^2}{p_i} + \frac{Y_j^2}{p_j} \right) \boldsymbol{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} + \alpha_i K_{T,i} \frac{Y_i}{p_i} \frac{DT_i}{Dt}$$

金属が落ちていく全体像を具体化したい



特に

金属層が形成されたとすれば、どうやって落ちていったか?





固体マントルの粘性デカすぎ問題を解決

→ Takeyama et al. (2017) で紹介された慣性変化法 (the inertia variable method)



課題2 部分溶融した際の粘性変化を考慮

→ Abe (1997) で紹介されたメルト分率による粘性決定方法



課題3 三次元化に伴う計算量の増加

→ アルゴリズムの工夫

ご清聴ありがとうございました



地球には深いマグマオーシャンが存在した?

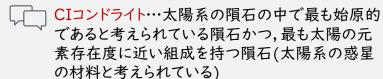


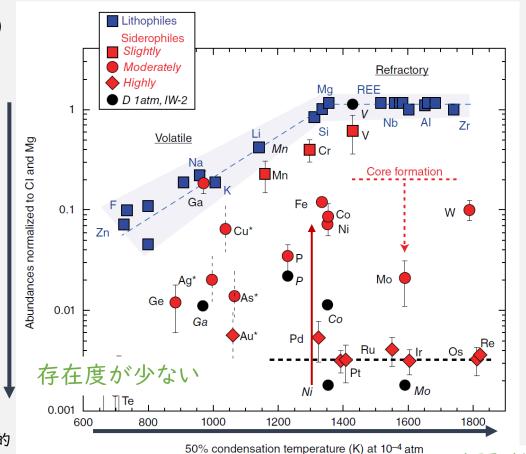
地球マントル中の親鉄性元素濃度が 非常に高い ので、深いマグマオーシャンが示唆される

- 親石性元素 (鉄よりシリケイト)
- わずかに親鉄性元素
- 親鉄性元素
- 強親鉄性元素

縦軸…ある元素のMg比をCI コンドライト中それで規格化し た値

横軸···凝縮温度





- ほとんどの赤色が1より下…コア形成 時にコアに持っていかれた
- でも常圧での実験結果(●)と比べる と存在度が桁違いにでかい
- **不揮発性**親鉄元素なのに不思議 ("Niのパラドックス")
- 高圧下で分配を示唆 (つまり,深いマグマオーシャンを示唆)

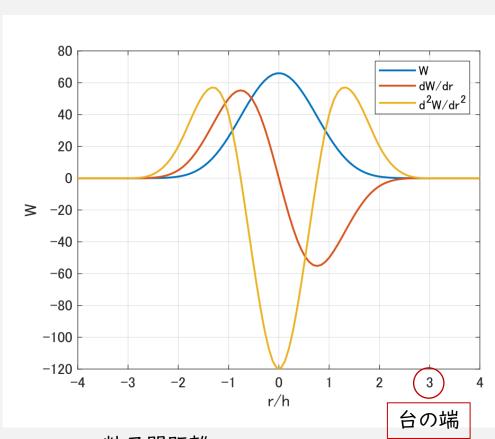
不揮発性 大

Siebert and Shahar (2015)

付録 2 具体的な重み関数



よく用いられる重み関数は 5次のスプライン関数



r···粒子間距離

h…台の範囲を決める基準距離 (smoothing length)

--- 重み関数

--- 一階微分 ----

二階微分

$$W(q;h) = \alpha_d \times \begin{cases} (3-q)^5 - 6(2-q)^5 + 15(1-q)^5 & (0 \le q \le 1) \\ (3-q)^5 - 6(2-q)^5 & (1 \le q < 2) \\ (3-q)^5 & (2 \le q \le 3) \\ 0 & (q > 3) \end{cases}$$

 α_d 規格化係数

$$I 次元 \qquad \alpha_d = \frac{1}{120h}$$

$$2$$
次元 $\alpha_d = \frac{7}{478\pi h^2}$

$$\alpha_d = \frac{3}{358\pi h^3}$$

q 規格化された距離

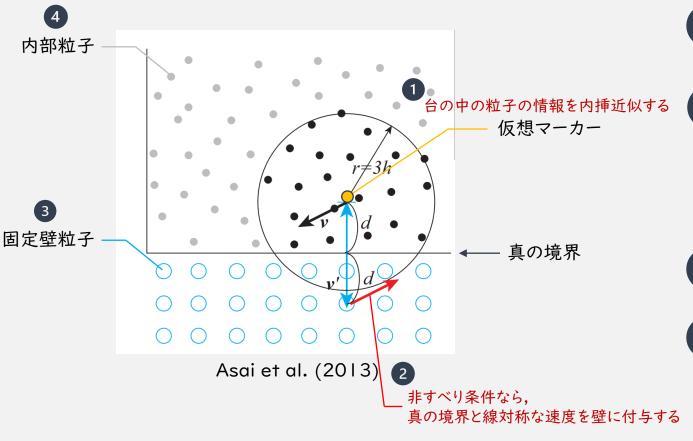
$$q = \frac{r}{h}$$

付録 3 具体的な境界設定

✓ いくつか方法があるが, 今回はこれを採用 ✓ 九大の工学部の先生 (津波の研究など)



Asai et al. (2013) ← 仮想マーカーを用いた境界処理法



- 仮想マーカーの近傍の粒子の情報を使って, 密度・速度・圧力・温度を内挿近似する
- 2 物理的な境界条件を満たすように物理量を調整する 例) 非すべり・断熱壁
 - ✓ 速度は真の境界に対して逆向き
 - 温度は内挿近似して求めたそのままの温度
 - ✓ 圧力は粒子が貫入しないように決める (少しややこしい)
- 固定壁粒子に今求めた情報を付与する
- 壁付近の内部粒子は固定壁粒子を含めて計算される 自分の台が壁にめり込んだら



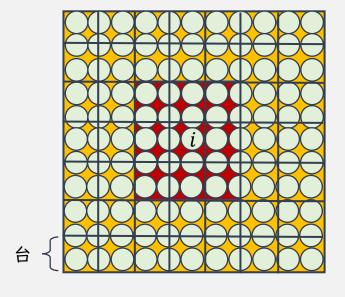
物理的な境界条件を満たすためだけの計算

実際の基礎方程式を解く計算

近傍粒子検索のアルゴリズム



基本的な考え方



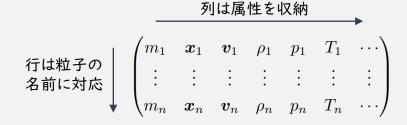


に対応

実際のプログラムの中身

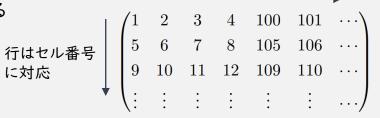
まず二つの配列を用意

粒子の名前と属性 (各物理量) を収納する配列



各セルに収納された粒子の名前を覚えるための配列

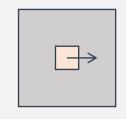
列はセル内の粒子の名前を昇順に収納



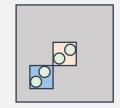
各時間ステップ毎に配属は更新される

計算の際は…

2 の行列の行を順に動かす 周りの9つのセルを順に動かす セル内の粒子を順に取り出して計算させる







固定壁粒子に対応する仮想マーカーも収納する

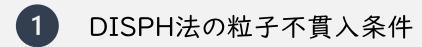


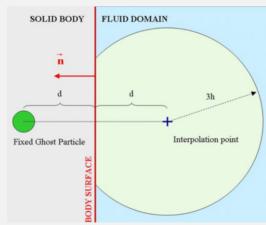
漏れなく全空間を効率よく検索できる

解析空間全体を固定されたセルに分割する

二次元の場合は ☆ 粒子iは周りの9つのセル中の粒子とだけ 計算すれば事足りる

DISPH法の境界の取り扱い (オリジナル)





Marrone et al. (2011)

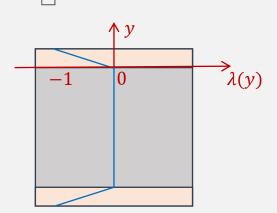
従来のSPH法では壁の圧力を変えて 粒子貫入を防ぐ

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \underbrace{\nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{f}}$$

$$p_{wall} = p_{vir} + 2d\rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}$$

DISPH法では圧力をなめらかにするので 勝手に壁の圧力だけを変えたくない

② そこで壁付近の粒子の運動方程式に直接反発力を入れる



$$\frac{D oldsymbol{v}}{D t} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 oldsymbol{v} + oldsymbol{g} + oldsymbol{\Lambda}(y)}{f}$$
 は普通に計算する

$$\Lambda(y) = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} \, \underline{\lambda(y)}$$

真の境界で- \mathbb{I} 真の境界で- \mathbb{I} 上れ分より遠いと \mathbb{I} はない \mathbb{I} もの \mathbb{I} も



境界付近ではカーネル関数の台が切れるので誤差が大きくなる

そのような場合にはカーネル関数を次のようにして修正する
Bonet and Kulasegaram (2002)

$$f_i = \sum_{j}^{N} \frac{m_j f_j}{\rho_j} \, \tilde{W}_{ij} \qquad \qquad \tilde{W}_{ij} \equiv \frac{W_{ij}}{\sum_{j}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij}}$$

DISPH法では
$$\Delta V_j = rac{m_j}{
ho_j} = rac{Y_j}{p_j}$$
 を使うので

$$f_i = \sum_{j}^{N} \frac{Y_j f_j}{p_j} \, \tilde{W}_{ij}$$
 $\qquad \qquad \tilde{W}_{ij} \equiv \frac{W_{ij}}{\sum_{j}^{N} \frac{Y_j}{p_j} W_{ij}}$

実際にこれを使うのは、仮想マーカーが情報を取得する時である