緩和パラメーターの見直し

菖蒲迫 健介 (九州大学) *1
(2023/02/03)

■ 目的

RSST–VIM 系の緩和パラメーターを見直す

■ はじめに

我々の提案する新しい RSST–VIM 系は以下であった [菖蒲迫, 2022, SPH 密度分離法].

$$\zeta^2 \frac{D\tilde{\rho}}{Dt} = -\rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{1}$$

$$\xi^2 \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\rho'^G}{\rho_0}\,\boldsymbol{g} \tag{2}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T \tag{3}$$

$$p' = \frac{K_0}{\rho_0}(\tilde{\rho} - \rho_0) \tag{4}$$

$$\rho'^G = \rho_0 \left[-\alpha T' + \frac{1}{K_0}\,p' \right] \tag{5}$$

上は離散化する前の式系である．ここで，ζ, ξ は緩和パラメーターで，1 より大きくすることで，von Neumann 条件を緩和できる仕組みになっている．大事な点は複数の異なる密度を使っている点で，$\tilde{\rho}$ は人工密度 (the artificial density; Chorin, 1967)，ρ_0 は基準密度，ρ^G は重力密度である．それぞれの役割は

- $\tilde{\rho}$ ⋯ 音波を発生させる疑似的な密度 ((4) 式は人工的な状態方程式)
- ρ_0 ⋯ 基準密度
- ρ^G ⋯ 本当の状態方程式から決まる密度 (浮力を決める密度)

である．特に ρ^G を導入する点が新しい．我々の提案する WCSPH 法は，上式系に対して，SPH 粒子の体積に関係する ρ^S という密度をさらに導入する．具体的には

$$\tilde{\rho} = \rho^C \tag{6}$$

$$\rho^S = \rho_0 + \zeta^2 \rho'^C \tag{7}$$

とおいて，連続体の質量保存の式を SPH 粒子保存の式へと読み替える．つまり，上の連続の式を

$$\zeta^2 \frac{D\rho_i^C}{Dt} = \frac{D\rho_i^S}{Dt} = \left\langle -\rho^S \nabla \cdot \boldsymbol{v} \right\rangle_i \tag{8}$$

*1 九州大学大学院 理学府地球惑星科学専攻 地球内部ダイナミクス研究室 修士 2 年.
E-mail: shobuzako.kensuke.242@s.kyushu-u.ac.jp

と書くことにする．ここで，$\langle - \rangle_i$ は粒子 i に関して SPH 近似を行った，という操作を示す．この時，(4) 式は

$$p'_i = \frac{K_0}{\rho_0}\rho_i'^C = \left(\frac{c_0}{\zeta}\right)^2 \rho_i'^S \tag{9}$$

と書き直される[*2]．この意味は，SPH 粒子の体積を表す ρ^S は柔らかくするが，音波を発生させるのに用いる ρ^C は硬くしておく，ということである．これは従来の WCSPH 法 [e.g., Morris et al., 1997] を別の表現で言っているだけである．

大事な点は，浮力に関する ρ^G をこれらと完全に区別したことである．このように密度を分離した理由は，人工密度を重力密度と同一視する ($\rho'^S = \rho'^G = \zeta^2\tilde{\rho}' = \zeta^2\rho'^C$) と

(1) 圧縮による密度変化が熱膨張による密度変化よりも小さくないといけない，という条件が課されてしまう
$\rightarrow$ あんまり ζ を大きくできない

(2) 本当の状態方程式をどうやって使えば良いか分からない
$\rightarrow$ anelastic な系に拡張できない

という二大問題が発生するからである．だから，疑似的な圧縮性が重力 (浮力) に関する密度に影響を与えないよう，密度を分離した．このように重力密度を分離する WCSPH 方法を，Gravitational Density Separated–Weakly Compressible Smoothed Particle Hydodynamics Method (GDS–WCSPH 法，重力密度分離法を用いた WCSPH 法) と呼ぶことにする．

本題に戻る．ζ, ξ は定常状態におけるマッハ数条件とレイノルズ数条件から見積もっていた[*3]．しかし，マントル対流計算 [Blankenbach et al., 1989] で ζ, ξ の範囲を調べてみたら，あんまり大きくはできなかった．これは浮力を大きく見積もっていたことが原因だったので，熱境界層を考慮して，緩和パラメーターの適用範囲を見直した．

1．RSST 系の場合

$\xi = 1$ を考える．

■ 従来法の場合

従来法 [e.g., Morris et al., 1997; Yang et al., 2021] では，密度を特に区別しないので

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{10}$$

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p' + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}} - \alpha T'\boldsymbol{g} \tag{11}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa\nabla^2 T \tag{12}$$

$$p' = c_\zeta^2\rho' \tag{13}$$

[*2] ξ の効果が効くのは「CFL 条件に関する」音波の方である．
[*3] 吉田先生の『音速低減に関する一考察』には線形論の話があるが，今は定常状態だけを考える．

である．最初の式系を $\zeta^2\tilde{\rho}' \to \rho'$ とスケール変換し，$\rho_0 = \rho$ としたら出てくる．ここで，c_ζ は低減された音速である．

$$c_\zeta \equiv \frac{c_0}{\zeta} \tag{14}$$

運動方程式と人工的な状態方程式より，各項のオーダーを見積もると

$$\frac{V^2}{L} \approx \frac{c_\zeta^2}{L}\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\nu V}{L^2} - \alpha g \Delta T \times \frac{\delta}{L} \tag{15}$$

ここで，浮力には熱境界層を考慮し，$\delta = \sqrt{\kappa L/V}$ とした．V は適当な速度スケールで後から具体的に与える．弱圧縮性を許容したことによる密度変化率は，ρ'/ρ である．重要なことは，これが熱対流で本質的な熱膨張を隠してはいけないことで，すなわち

$$\frac{\rho'}{\rho} \ll \alpha \Delta T \frac{\delta}{L} \ll 1 \tag{16}$$

(15) 式と (16) 式より

$$c_\zeta^2 \gg gL \tag{17}$$

という条件式を得る．従って，ζ の範囲を決める条件式は

$$\zeta \ll \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{RaPr}M_{th}} \tag{18}$$

ここで，以下の無次元量を定義した．

$$Ra \equiv \frac{\alpha \Delta T g L^3}{\kappa \nu} \tag{19}$$

$$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} \tag{20}$$

$$M_{th} \equiv \frac{\kappa}{L c_0} \tag{21}$$

$$\epsilon \equiv \alpha \Delta T \tag{22}$$

■ 重力密度分離法を適用した場合

　この場合，ρ' は疑似的な密度なので ρ'/ρ に対する制約はなくなる．そこで，弱圧縮性近似が有効な範囲を，流れが音速よりも十分遅いというマッハ数条件から見積もることにする．熱対流の問題では，速度スケールとして次の二通りが考えられる．これまで書いてきたのは

$$V_s = \frac{\alpha \Delta T g L^2}{\nu} = Ra M_{th} c_0 \tag{23}$$

$$V_f = \sqrt{\alpha \Delta T g L} = \sqrt{RaPr} M_{th} c_0 \tag{24}$$

ここで，V_s はストークス速度で，V_f は自由落下速度である．ただし，これらは熱境界層のことを考慮していない．熱境界層のことを考えて計算してみると

$$V_s^{tb} = Ra^{2/3} M_{th} c_0 \tag{25}$$

$$V_f^{tb} = (RaPr)^{2/5} M_{th} c_0 \tag{26}$$

ここで，上付き添え字 tb は熱境界層を考慮したことを意味する．低減された音速 c_ζ に対するマッハ数条件を調べると

$$M_{s,\zeta} = \frac{V_s}{c_\zeta} = \zeta_s Ra M_{th} \tag{27}$$

$$M_{f,\zeta} = \frac{V_f}{c_\zeta} = \zeta_f \sqrt{RaPr} M_{th} \tag{28}$$

$$M_{s,\zeta}^{tb} = \frac{V_s^{tb}}{c_\zeta} = \zeta_s^{tb} Ra^{2/3} M_{th} \tag{29}$$

$$M_{f,\zeta}^{tb} = \frac{V_f^{tb}}{c_\zeta} = \zeta_f^{tb} (RaPr)^{2/5} M_{th} \tag{30}$$

となる．$M \ll 1$ という条件から

$$\zeta_s \ll \frac{1}{RaM_{th}} \tag{31}$$

$$\zeta_f \ll \frac{1}{\sqrt{RaPr} M_{th}} \tag{32}$$

$$\zeta_s^{tb} \ll \frac{1}{Ra^{2/3} M_{th}} \tag{33}$$

$$\zeta_f^{tb} \ll \frac{1}{(RaPr)^{2/5} M_{th}} \tag{34}$$

を得る．この結果から，熱境界層を考慮すると，最大で二桁くらい ζ を大きくできそうである[*4]．

■ 従来法との比較

(1) 従来法だと，マッハ数条件から見積った ζ に比べて，$\sqrt{\epsilon} = \sqrt{\alpha \Delta T}$ 倍だけ小さい

(2) 空気の対流の場合，$\mathcal{O}(\alpha T) = \mathcal{O}(1)$ だから，あんまり変わらない

(3) マントル対流の場合，$\mathcal{O}(\alpha T) = \mathcal{O}(10^{-3})$ だから，ζ は一桁以上大きくしないとダメ

$\rightarrow$ 従来法の考え方では，$c_\zeta > 100 V_{\max}$ 程度にしないといけなくなる

■ RSST 系のまとめ

ζ を大きく設定できる熱境界層理論の方を採用する．V_s, V_f のうち，実際に実現するのは速度の遅い方である[*5]．つまり，$M_{s,\zeta}^{tb}, M_{f,\zeta}^{tb}$ の小さい方が ζ の範囲を制約するから

$$\zeta \ll \frac{1}{\min\left(Ra^{2/3} M_{th}\ ,\ (RaPr)^{2/5} M_{th}\right)} = \max\left(\frac{1}{Ra^{2/3} M_{th}}\ ,\ \frac{1}{(RaPr)^{2/5} M_{th}}\right) \tag{35}$$

[*4] 熱境界層を考慮しない場合に比べて

- ストークス速度の場合 ⋯ $Ra^{1/3}$ 倍大きくできる
- 自由落下速度の場合 ⋯ $(RaPr)^{1/10}$ 倍大きくできる

見積もりとなる．空気の対流を考えて $Pr = 0.71, Ra = 10^6$ とすると，境界層を考慮したからと言って，そこまで ζ が大きくなるわけではない．一方，マントル対流を考えて $Ra = 10^6$ とすると，2 桁くらい大きくできる．

[*5] このように考えられる根拠を付録に書いた．

2．VIM 系の場合

$\zeta = 1$ とし，重力密度分離法を適用した場合を考える．

■ レイノルズ数条件

Takeyam et al. (2017) では，慣性項が粘性項に対して無視できる，というレイノルズ数条件から ξ の範囲を決めた．本来のレイノルズ数 Re は

$$Re \equiv \frac{VL}{\nu} \tag{36}$$

VIM を適用した時のレイノルズ数 Re_ξ を

$$Re_\xi \equiv \xi^2 Re \tag{37}$$

と書く．VIM が有効なのは $Re_\xi \ll 1$ となる範囲なので

$$\xi \ll \sqrt{\frac{1}{Re}} \tag{38}$$

が ξ の制約条件である．ただし，これは数値不安定の条件とは異なるから，結果的にこうなっていれば良い．今はストークス速度が実現するから

$$\xi \ll \left(\frac{\nu}{V_s L}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \tag{39}$$

$$\xi^{tb} \ll \left(\frac{\nu}{V_s^{tb} L}\right)^{1/2} = \frac{Pr^{1/2}}{Ra^{1/3}} \tag{40}$$

マントル対流では $Ra \approx 10^6, Pr \approx 10^{24}$ 程度なので，$\xi \approx \mathcal{O}(10^{10})$ 程度になる．

■ マッハ数条件

次にマッハ数条件を考えてみる．

$$M_\xi = \frac{V_s}{c_\zeta} = \xi Ra M_{th} \tag{41}$$

$$M_\xi^{tb} = \frac{V_s^{tb}}{c_\zeta} = \xi Ra^{2/3} M_{th} \tag{42}$$

従って

$$\xi \ll \frac{1}{Ra M_{th}} \tag{43}$$

$$\xi^{tb} \ll \frac{1}{Ra^{2/3} M_{th}} \tag{44}$$

音速低減の側面では RSST 系と全く同じなので，当然ながら，$\zeta_s = \xi$, $\zeta_s^{tb} = \xi^{tb}$ である．地球マントル対流では $M_{th} \approx 10^{-15}$ 程度なので，基本的にはレイノルズ数条件の方がキツイが，他の惑星の場合はそうとは限らない．

■ VIM 系のまとめ

ξ を大きく設定できる熱境界層理論の方を採用する．

$$\xi \ll \min\left(\frac{Pr^{1/2}}{Ra^{1/3}},\ \frac{1}{Ra^{2/3}M_{th}}\right) \tag{45}$$

3．RSST–VIM 混合モデルの場合

陽解法でマントル対流を解こうと思ったら，CFL 条件と von Neumann の運動量拡散に関する条件の両方を緩和しないといけない．そこで，RSST–VIM の混合モデルを考える．

■ マッハ数条件

結局，ストークス速度が実現するから，VIM 系のアナロジーから

$$M_{\zeta,\xi} = \frac{V_s}{c_{\zeta\xi}} = \zeta\xi Ra M_{th} \tag{46}$$

$$M^{tb}_{\zeta,\xi} = \frac{V_s}{c_{\zeta\xi}} = \zeta\xi Ra^{2/3} M_{th} \tag{47}$$

ここで，$c_{\zeta,\xi}$ を以下で定義した．

$$c_{\zeta,\xi} \equiv \frac{c_0}{\zeta\xi} \tag{48}$$

従って

$$\zeta\xi \ll \frac{1}{Ra M_{th}} \tag{49}$$

$$\zeta\xi \ll \frac{1}{Ra^{2/3} M_{th}} \tag{50}$$

ξ の方をレイノルズ数条件から決めることにし，(39) 式，もしくは，(40) 式を採用する．この時，次式のように ξ を定める．

$$\xi = \phi_\xi \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \tag{51}$$

$$\xi^{tb} = \phi^{tb}_\xi \frac{Pr^{1/2}}{Ra^{1/3}} \tag{52}$$

ここで，ϕ_ξ は 1 未満の正定数である．これを用いると

$$\zeta \ll \frac{1}{\phi_\xi}\,\frac{1}{\sqrt{Ra Pr} M_{th}} \tag{53}$$

$$\zeta^{tb} \ll \frac{1}{\phi^{tb}_\xi}\,\frac{1}{Ra^{1/3} Pr^{1/2} M_{th}} \tag{54}$$

■ ϕ_ξ の目安

上の式は，ξ を大きくすると (ϕ_ξ を大きくすると)，ζ がその分小さくなってしまうことを示している．これはマッハ数条件が $\zeta\xi$ に依存することを反映している．ϕ_ζ は大体どれくらいが良いのか考えてみる．大元の式は

$$\zeta^2 \frac{D\tilde{\rho}}{Dt} = -\rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{55}$$

$$\xi^2 \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\rho'^G}{\rho_0}\,\boldsymbol{g} \tag{56}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T \tag{57}$$

$$p' = c_0^2(\tilde{\rho} - \rho_0) \tag{58}$$

$$\rho'^G = \rho_0 \left[-\alpha T' + \frac{1}{K_0}\,p'\right] \tag{59}$$

これを SPH 近似してみると

$$\zeta^2 \frac{D\rho_i^C}{Dt} = \frac{D\rho_i^S}{Dt} = \left\langle -\rho^S \nabla \cdot \boldsymbol{v} \right\rangle_i \tag{60}$$

$$\xi^2 \frac{D\boldsymbol{v}_i}{Dt} = \left\langle -\frac{1}{\rho^S}\nabla p' + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\rho'^G}{\rho^S}\,\boldsymbol{g} \right\rangle_i \tag{61}$$

$$\frac{DT_i}{Dt} = \left\langle \kappa \nabla^2 T \right\rangle_i \tag{62}$$

$$p'_i = c_0^2(\rho_i^C - \rho_0) = \frac{c_0^2}{\zeta^2}(\rho_i^S - \rho_0) \tag{63}$$

$$\rho_i'^G = \rho_0 \left[-\alpha T'_i + \frac{1}{K_0}\,p'_i\right] \tag{64}$$

SPH 密度に関する連続の式と人工的な状態方程式に，以下の式を用いた．

$$\rho'^S = \zeta^2 \rho'^C \tag{65}$$

この結果から次の (少し困った) ことが分かる．

- CFL 条件に関する音速は ζ, ξ に依存するが，圧縮率の方は ζ のみに依存する[*6]
- SPH 的には圧力擾乱があまり起きてほしくないので，ζ は大きい方が良い
- そこで，ξ は出来るだけ小さくしたい
- しかし，マントル対流的には拡散条件の方が厳しいので，ξ は出来るだけ大きくしたい

どっちがしんどいかはやってみないと分からない．

[*6] ζ, ξ の物理的イメージは「ばね」を考えると分かりやすい．連続体の音速を，ばねの固有振動数だと思うと

$$c_0 \;\rightarrow\; \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$$

k はばね定数，m は質量である．連続体だとそれぞれ，弾性率と密度みたいなものである．ζ は k を小さくし，ξ は m を小さくする働きを持つと解釈する．両方の効果で音速を遅くしてやろうという作戦である．

４．計算パラメーターの見直し ($Pr \ll Ra$)

■ 概要

- Ouertatani et al. (2008) を正解に用いる
- 彼らは $Pr = 0.71$ を固定し，$Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ を計算
- ただし，無次元化された式を解いているため，具体的なパラメーターセットはない
- $Pr = 0.71$ は乾燥空気の物性値らしいので，Stacey and Davis (2013) を参考にして，表 1 のようなパラメーターセットを組んだ
- 今回は ΔT を変化させることで，Ra を変えることにした

表 1: $Pr \ll Ra$ の場合のパラメーターセット (空気の対流)

記号	説明	単位 (SI)	値 [Stacey and Davis, 2013]	採用値
L	長さ	m	-	0.1
ΔT	温度差	K	-	10^{-2} ($Ra = 10^4$)
				10^{-1} ($Ra = 10^5$)
				10^{0} ($Ra = 10^6$)
ρ_0	密度	kg m^{-3}	1.226	1
κ	熱拡散率	m^2 s^{-1}	2.043×10^{-5}	10^{-5}
ν	動粘性率	m^2 s^{-1}	1.468×10^{-5}	7.1×10^{-6}
g	重力加速度	m s^{-2}	-	10
α	熱膨張率	K^{-1}	3.480×10^{-3}	7.1×10^{-3}
c_p	比熱	J kg^{-1} K^{-1}	1006	10^3
K_0	体積弾性率	GPa	1.42×10^{-4}	1.4×10^{-4}

熱伝導率 k と粘性率 η は以下のように決めた．

記号	単位 (SI)	値 [Stacey and Davis, 2013]	採用値
k	W m^{-1} K^{-1}	0.0252	10^{-2}
η	Pa s	1.80×10^{-5}	7.1×10^{-6}

■ 無次元量

$$Ra \equiv \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\kappa \nu} = 10^4, 10^5, 10^6 \tag{66}$$

$$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} = 0.71 \tag{67}$$

$$M_{th} \equiv \frac{\kappa}{L c_0} \approx 2.67 \times 10^{-7} \tag{68}$$

ここで，低減される前の音速 c_0 は

$$c_0 = \sqrt{\frac{K_0}{\rho_0}} \approx 3.74 \times 10^2 \quad (\mathrm{m\ s^{-1}}) \tag{69}$$

■ 緩和パラメーター

(35) 式を用いて，$M_\zeta \approx 0.1$ となるように ζ を決めた (表 2)．なお，自由落下速度が実現する．

表 2: $Pr \ll Ra$ の場合の緩和パラメーター

Ra	ζ	ζ^{tb}	c_ζ (m s^{-1})	$c_{\zeta^{tb}}$ (m s^{-1})
10^4	4440	10800	8.43×10^{-2}	3.47×10^{-2}
10^5	1400	4290	2.66×10^{-1}	8.72×10^{-2}
10^6	444	1710	8.43×10^{-1}	2.19×10^{-1}

■ 実効的なタイムステップ

(1) 音速低減法を使わない場合

$$\Delta t_{\mathrm{CFL}} < \frac{\Delta x}{c_0} \approx 2.67 \times 10^{-6} \tag{70}$$

$$\Delta t_{\mathrm{mo}} < \frac{(\Delta x)^2}{2\nu} \approx 7.04 \times 10^{-2} \tag{71}$$

$$\Delta t_{\mathrm{th}} < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa} \approx 5.00 \times 10^{-2} \tag{72}$$

ここで，$\Delta x = L/n$ であり，n を一辺の粒子数とし，$n = 100$ を用いた[*7]．この場合，CFL 条件が支配的である．

(2) 音速低減法を使う場合

今の場合，CFL 条件だけが緩和される．ζ が Ra 毎に変化することに注意して

$$\Delta t_{\mathrm{CFL}} < \frac{\Delta x}{c_\zeta} = 1.19 \times 10^{-2} \quad (Ra = 10^4) \tag{73}$$

$$= 3.75 \times 10^{-3} \quad (Ra = 10^5) \tag{74}$$

$$= 1.19 \times 10^{-3} \quad (Ra = 10^6) \tag{75}$$

$$\Delta t_{\mathrm{CFL}}^{tb} < \frac{\Delta x}{c_{\zeta^{tb}}} = 2.88 \times 10^{-2} \quad (Ra = 10^4) \tag{76}$$

$$= 1.15 \times 10^{-2} \quad (Ra = 10^5) \tag{77}$$

$$= 4.57 \times 10^{-3} \quad (Ra = 10^6) \tag{78}$$

(1) と比べると，計算速度を 1000 から 10000 倍程度速めることができる．

[*7] SPH 法では Δx の代わりに，smoothing length h を用いることが多いが，$h = \beta \Delta x$ なので，Δx を使った方がタイムステップ条件は厳しくなる．ここで，β は適当な正定数で，慣例的に $1.2 \sim 1.5$ が用いられる．

■ ステップ数の見積もり

定常状態における典型的な時間スケール τ は大体

$$\tau \approx \frac{L}{V} \tag{79}$$

ここで，V は終端速度で，今の場合自由落下速度である．従って，対流が見えるためのステップ数 t_N は大体

$$t_N \approx \frac{\tau}{\Delta t_{\mathrm{CFL,eff}}} \approx \frac{L}{V} \times \frac{1}{\phi_{\mathrm{CFL}}} \frac{10V}{L/n} \approx \frac{10n}{\phi_{\mathrm{CFL}}} \tag{80}$$

ここで，ϕ_{CFL} は実効的な $\Delta t_{\mathrm{CFL,eff}}$ を決める 1 未満の定数とした．

$$\Delta t_{\mathrm{CFL,eff}} = \phi_{\mathrm{CFL}} \times \frac{\Delta x}{c_\zeta} \tag{81}$$

また，$M_\zeta \approx 0.1$ だから，$c_\zeta = 10V$ と置いた．(80) 式から，対流が見えるステップ数は Ra や ζ に依らず，粒子数 n だけで決まることが分かる．$\phi_{\mathrm{CFL}} = 0.1, n = 100$ とすると $t_N \approx \mathcal{O}(10^4)$ であるから，1 万ステップ以上は計算しないといけない．

5．計算パラメーターの見直し ($Ra \ll Pr$)

ベンチマークとして Blankenbach et al. (1989) を用いる．詳細は『VIM–RSST 系について』を参照されたい．ここでは必要事項のみ書く．

■ 概要

- ブシネスク系の計算 $\rightarrow$ 粘性散逸はなし
- 粘性率 (動粘性率) を変化させることで，Ra と Nu をコントロール
- 今回比較に用いる計算モデルは全部で 4 つで，基本設定として
  - 二次元の正方形
  - 上下壁の温度は一定 ($T_t = 0, T_b = \Delta T$)
  - 横壁は断熱
  - 全壁で自由すべり (壁面に対する法線速度シアーがゼロ)
- 具体的なモデルは以下
  case (1a)：粘性率一定，$Ra = 10^4$，$Pr = 2.5 \times 10^{25}$
  case (1b)：粘性率一定，$Ra = 10^5$，$Pr = 2.5 \times 10^{24}$
  case (1c)：粘性率一定，$Ra = 10^6$，$Pr = 2.5 \times 10^{23}$
  case (2a)：粘性率変化，$Ra_0 = 10^4$，$Pr_0 = 2.5 \times 10^{25}$
  粘性率は温度のみの関数とし，次式で与える．

$$\nu = \nu_0 \exp\left(-\frac{bT}{\Delta T}\right) \tag{82}$$

ここで，ν_0 は基準の粘性率，H は系の高さ，b は定数で

$$b = \ln(1000) = 6.907755279 \tag{83}$$

とする．つまり，粘性率は最大で 3 桁変化する．系のレイリー数 Ra_0 を

$$Ra_0 = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\kappa \nu_0} \tag{84}$$

で決める．Pr_0 も同様にして決める．

表 3: $Ra \ll Pr$ の場合のパラメーターセット (マントル対流)

記号	説明	単位 (SI)	値	引用
L	高さ	m	10^6	B89
ΔT	温度差	K	1000	B89
ρ_0	密度	kg m^{-3}	4×10^3	B89
κ	熱拡散率	m^2 s^{-1}	10^{-6}	B89
ν	動粘性率	m^2 s^{-1}	2.5×10^{19} (1a)	B89
			2.5×10^{18} (1b)	
			2.5×10^{17} (1c)	
ν_0	表面での動粘性率	m^2 s^{-1}	2.5×10^{19} (2a, b)	B89
g	重力加速度	m s^{-2}	10	B89
α	熱膨張率	K^{-1}	2.5×10^{-5}	B89
c_p	比熱	J kg^{-1} K^{-1}	1.25×10^3	B89
K_0	体積弾性率	GPa	100	-

熱伝導率と粘性率は陽には与えられていないが，計算で求めると

記号	単位 (SI)	値
k	W m^{-1} K^{-1}	5
η	Pa s	10^{23} ($Ra = 10^4$)
		10^{22} ($Ra = 10^5$)
		10^{21} ($Ra = 10^6$)

■ 無次元量

$$Ra \equiv \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\kappa \nu} = 10^4, 10^5, 10^6 \tag{85}$$

$$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} = 2.5 \times 10^{25},\ 2.5 \times 10^{24},\ 2.5 \times 10^{23} \tag{86}$$

$$M_{th} \equiv \frac{\kappa}{L c_0} = 2.0 \times 10^{-16} \tag{87}$$

ここで，低減される前の音速 c_0 は

$$c_0 = \sqrt{\frac{K_0}{\rho_0}} = 5.0 \times 10^3 \quad (\mathrm{m\ s^{-1}}) \tag{88}$$

■ 緩和パラメーター

RSST–VIM 系の緩和パラメーターの式から決定する．ただし，二変数導入することに注意[*8]．今回は $\phi_\xi = 0.5$ を採用し，$M \approx 0.1$ から ζ を制約した (表 4)．

表 4: $Ra \ll Pr$ の場合の緩和パラメーター

case	Ra	Pr_{eff}	Pr_{eff}^{tb}	ζ	ζ^{tb}	ξ	ξ^{tb}	$c_{\zeta\xi}$ $(\mathrm{m\ s^{-1}})$	$c_{\zeta^{tb}\xi^{tb}}$ $(\mathrm{m\ s^{-1}})$
(1a)	10^4	4.0×10^4	1.8×10^3	2.0	9.2	2.5×10^{10}	1.1×10^{11}	1.0×10^{-7}	4.6×10^{-9}
(1b)	10^5	4.0×10^5	8.6×10^3	2.0	13	2.5×10^9	1.7×10^{10}	1.0×10^{-6}	2.1×10^{-8}
(1c)	10^6	4.0×10^6	4.0×10^4	2.0	20	2.5×10^8	2.5×10^9	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-7}

ここで，Pr_{eff} は実効的なプラントル数である．ξ は基本的に $\sqrt{Pr/Ra}$ に比例する．今は Ra を一桁大きくなると，Pr が一桁小さくなる仕組みになっている．従って，Ra を一桁大きくすると，ξ は一桁小さくなる．$Pr_{\mathrm{eff}} = Pr/\xi^2$ より，Ra を一桁大きくすると，実効的なプラントル数は一桁小さくなる．

[メモ] $Pr_{\mathrm{eff}}^{tb} < Ra$ だけど，良いのか？

■ 実行的なタイムステップ

(1) 緩和しない場合

$$\Delta t_{\mathrm{CFL}} < 2.0 \tag{89}$$
$$\Delta t_{\mathrm{mo}} < 2.0 \times 10^{-12} - 2.0 \times 10^{-10} \tag{90}$$
$$\Delta t_{\mathrm{th}} < 5.0 \times 10^{13} \tag{91}$$

ここで，$n = 100$ を用いた．この場合，圧倒的に運動量拡散時間が支配的である．

(2) 音速低減法と慣性変化法を使う場合

$$\Delta t_{\mathrm{CFL}} < 1.0 \times 10^{11} \quad (Ra = 10^4) \tag{92}$$
$$< 1.0 \times 10^{10} \quad (Ra = 10^5) \tag{93}$$
$$< 1.0 \times 10^{9} \quad (Ra = 10^6) \tag{94}$$
$$\Delta t_{\mathrm{mo}} < 1.2 \times 10^{9} \quad (Ra = 10^4) \tag{95}$$
$$< 1.2 \times 10^{8} \quad (Ra = 10^5) \tag{96}$$
$$< 1.2 \times 10^{7} \quad (Ra = 10^6) \tag{97}$$

[*8] 後から分かるように，マントル対流では運動拡散時間が CFL 条件よりも支配的となる．だから，タイムステップ条件の緩和という観点では，ζ よりも ξ の緩和を頑張りたい．一方，ξ を頑張りすぎると ζ を全然緩和できない．SPH 的な観点から見ると困る．なぜなら，人工的な圧縮率がほとんど変わらないので，大きな圧力変動を生み出してしまうからである．

$$\Delta t^{tb}_{\mathrm{CFL}} < 2.1 \times 10^{12} \quad (Ra = 10^4) \tag{98}$$
$$< 4.6 \times 10^{11} \quad (Ra = 10^5) \tag{99}$$
$$< 1.0 \times 10^{11} \quad (Ra = 10^6) \tag{100}$$
$$\Delta t^{tb}_{\mathrm{mo}} < 2.6 \times 10^{10} \quad (Ra = 10^4) \tag{101}$$
$$< 5.8 \times 10^{9} \quad (Ra = 10^5) \tag{102}$$
$$< 1.2 \times 10^{9} \quad (Ra = 10^6) \tag{103}$$

(1) と比べると，計算速度を 10^{19} 倍以上速めることができる．

■ ステップ数の見積もり

定常状態における典型的な時間スケール τ は大体

$$\tau \approx \frac{L}{V} \approx \frac{L}{RaM_{th}c_0} \tag{104}$$

従って，対流が見えるためのステップ数 t_N は

$$t_N \approx \frac{\tau}{\Delta t_{\mathrm{mo,eff}}} \approx \frac{L}{RaM_{th}c_0} \times \frac{1}{\phi_{\mathrm{mo}}}\frac{2\nu}{(L/n)^2\xi^2} = \frac{2n^2}{\phi_{\mathrm{mo}}\phi_\xi^2} \tag{105}$$

ここで

$$\Delta t_{\mathrm{mo,eff}} = \phi_{\mathrm{mo}} \times \frac{(\Delta x)^2}{2(\nu/\xi^2)} \tag{106}$$

とした．従って，対流が見えるステップ数は Ra, ζ に依らない．ただし，ξ には依存する形になっている．$\phi_{\mathrm{mo}} = 0.1, n = 100, \phi_\xi = 0.5$ とすると

$$t_N \approx 8.0 \times 10^5 \tag{107}$$

となる．従って，空気の対流に比べて，一桁くらい多くステップを踏まないといけない．大変になってしまったのは，タイムステップ条件が拡散時間で制約されるからである．つまり，t_N が n の二乗に比例してしまうからで，これはやむを得ない．

謝辞

このノートの作成には，川田 佳史さん (JAMSTEC) の LaTeX テンプレートを使用させて頂きました．この場をお借りして感謝申し上げます．

付録：「速度の遅い流れが実現する」という物理的解釈

■ はじめに

流体の運動方程式は大体

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{K} \tag{108}$$

ここで，$\boldsymbol{K}$ は単位質量あたりの外力である．熱対流では浮力にあたる．遅い流れの場合，外力とつり合うのは，慣性項と粘性項のうち大きい方である．熱対流では前者のつり合いで実現する速度を自由落下速度，後者のつり合いで実現する速度をストークス速度という．このことを別の言い方では「速度の遅い流れが実現する」と言ったり，「抵抗が大きい方とのつり合いが実現する」と言ったりする．粘性の場合は直感的に分かりやすいが，慣性を抵抗と呼ぶ気持ちは何であろうか？ 吉田先生に教えて頂いたので，忘れないうちにメモしておく．

■ ベルヌーイの定理

簡単のため，非粘性で考える．断熱的な状況を考えてバロトロピー流体を仮定する．ここで，次の圧力関数 $P(p)$ を定義する*9.

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)} \tag{109}$$

この形を選んだのは，$P(p)$ の空間微分が

$$\nabla P(p) = \frac{\partial P(p)}{\partial p}\nabla p = \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{110}$$

という都合の良い形になるからである．この時，運動方程式は以下のようになる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla P(p) + \boldsymbol{K} \tag{111}$$

次に，ベクトル恒等式

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{112}$$

を用いると

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla\left(P(p) + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) + \boldsymbol{K} + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{113}$$

*9 イメージとしては，$\rho = \hat{\rho}(p)$ という適当な関数を想定して，$dP = dp/\rho(p)$ という関数 P を採用した感じ．

$\boldsymbol{K}$ が保存力である ($\boldsymbol{K} = -\nabla\Lambda$) とし，定常状態の流れを考えると

$$\nabla \left(P(p) + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \Lambda \right) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega} \tag{114}$$

従って，流線もしくは渦線に沿って

$$P(p) + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \Lambda = Const. \tag{115}$$

となることが分かる．これをベルヌーイの定理という [巽, 1995]．つまり，各時刻における場の流れは，上式が一定となるような曲面として実現される．あるいは，括弧の中身は単位質量あたりのエネルギーの次元を持つから，流線もしくは渦線に沿ったエネルギー保存則を表す式でもある．圧力関数 (もしくは圧力) がエネルギーと等価な形で含まれている点が重要である．

■ 動圧

さらに，非圧縮なら

$$P(p) = \frac{p}{\rho} \tag{116}$$

と書ける．外力として，重力を選ぶと

$$p + \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2 + \rho g z = Const. \tag{117}$$

ここで，重力は z 方向の関数として与えた．これがよく見る形のベルヌーイの定理である．ピトー管のように，ある分岐点で流れが別れる場合を考える．この分岐点を淀み点 (stagnation point) という．ピトー管が薄くて，流線上の高度差が無視できる場合

$$p + \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2 = p_s = Const. \tag{118}$$

となる．ここで，p_s は淀み圧 (stagnation pressure) である．この式から，圧力 p は単位体積あたりのエネルギーと等価な量であると言える．もしくは，運動エネルギーの方を圧力の一種と見ることもできる．この意味で $\rho \boldsymbol{v}^2/2$ を動圧という．

■ 抵抗としての慣性

流れが流体 (ピトー管) の前後で完全に対称であれば，(118) 式が成り立つが，Re 数が高い流れ (乱流) では非対称になる．例えば，z 負方向に流体が落下することを考える．流体の前後で流れが非対称なら，前側は大きな動圧を受けるが，後ろ側は小さな動圧になっていると予想される．この圧力差が抵抗力として流体に働くと解釈してみる．すると，動圧は速度の二乗に比例する形になっているから，速度の二乗に比例する抵抗を受ける，と考えることができる．ここで，動圧はそもそも慣性項由来であることを考えると，慣性項は速度の二乗に比例する抵抗力という見方もできる．

ストークス速度と自由落下速度のどちらが実現するかは，どちらの抵抗力が大きいかである．その意味で，「速度の遅い流れが実現する」のである．

参考文献

[1] Blankenbach, B., Busse, F., Christensen, U., Cserepes, L., Gunkel, D., Hansen, U., Harder, H., Jarvis, G., Koch, M., Marquart, G., Moore, D., Olson, P., Schmeling, H., Schnaubelt, T. (1989) A benchmark comparison for mantle convection codes, *Geophysical Journal International*, **98**, 1, 23–38

[2] Chorin, A. J., (1967) A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *Journal of Computational Physics*, **2**, 1, 12–26

[3] Monaghan, J. J. (1994) Simulating Free Surface Flows with SPH, *Journal of Computational Physics*, **110**, 399–406

[4] Morris, J. P., Fox, P. J., Zhu, Y. (1997) Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH, *Journal of Computational Physics*, **136**, 214–226

[5] Ouertatani, N., Ben Cheikhm, N., Ben Beya, B., Lili, T. (2008) Numerical simulation of two-dimensional Rayleigh ☒ Bénard convection in an enclosure, *Comptes Rendus Mécanique*, **336**, 5, 464–470

[6] Stacey, F. D., Davis, Paul M. 本多ら訳 (2013) Physics of the earth, Cambridge University Press

[7] Yang, P., Huang, C., Zhang, Z., Long, T., Liu, M. (2021) Simulating natural convection with high Rayleigh numbers using the Smoothed Particle Hydrodynamics method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **166**, 120758

[8] 菖蒲迫 健介 (2022) まとめノート 6 – 惑星コア形成への応用編 (2022/10/13 版)

[9] 菖蒲迫 健介 (2022) SPH 密度分離法

[10] 巽 友正 (1995) 連続体の力学, 岩波書店

[11] 吉田 茂生 (2022) 音速低減に関する一考察