潜熱による地温勾配の変化

Shobuzako Kensuke *

April 15, 2022

Abstract

ジオダイナミクスを読む会で気になったことを少し自分で考えてみた．

ジオダイナミクス [3] に次の図があった．

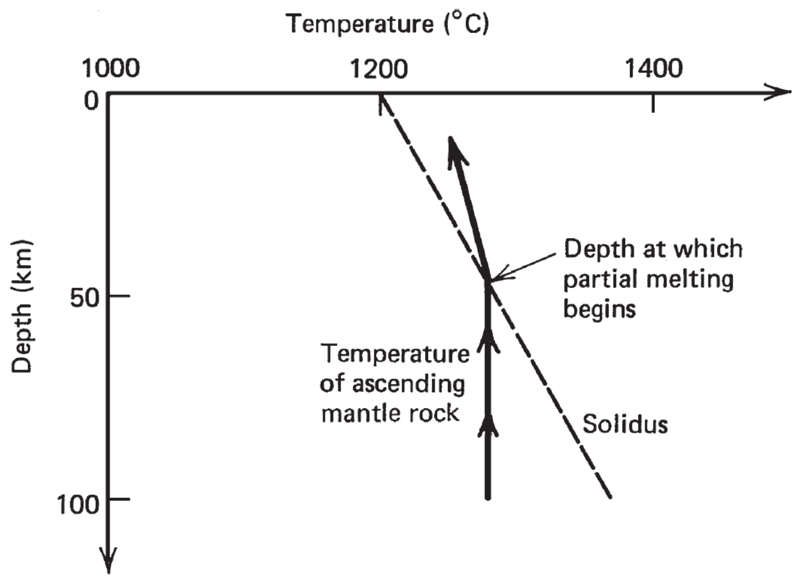

Figure 1.5 The process of pressure-release melting is illustrated. Melting occurs because the nearly isothermal ascending mantle rock encounters pressures low enough so that the associated solidus temperatures are below the rock temperatures.

この図はマントルを地下深くから等温で引き上げてくる際に，ソリダス (固相線) にぶつかって温度が変化する様子を模式的に描いたものである．図中の矢印はその経路を示す．この図を見て，**ソリダスと交差してから温度が低温側にシフトするのはどうしてか？** と思った．そこで，マントルを地表まで持ってくる時の温度変化を簡単に見積もることで，この図の説明を試みる．ただし，地球マントルは等温的ではなく断熱的なので，断熱線に沿って引き上げることにする．

* Department of Earth and Planetary Sciences, Graduate School of Science, Kyushu University; Twitter @zakoken1998

断熱線の勾配 (**断熱温度勾配**) は次式で与えられる (導出は Appendix A を参照).

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{\alpha V T}{C_p} = \frac{\alpha T}{\rho c_p} \tag{1}$$

T は温度，p は圧力，S はエントロピー，α は熱膨張，V は体積，C_p は定圧熱容量，ρ は密度，c_p は定圧比熱を示す．これを離散化して，地球マントルの代表的な値 [2] を代入する．

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} \approx \frac{10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1} \cdot 1000\ \mathrm{K}}{3000\ \mathrm{kg\ m}^{-3} \cdot 1000\ \mathrm{J\ kg}^{-1}\ \mathrm{K}^{-1}} \approx 10^{-9}\ \mathrm{K\ Pa}^{-1} \tag{2}$$

この式は，マントルが 1 GPa 分上昇 ($\Delta p < 0$) すると, 1 K 程度のオーダーの温度減少が起こることを意味する．定性的に言えば，断熱膨張によってマントルの温度が下がることを意味している．地球マントルは対流によってよく混ざっているので断熱的であり*[1]，その意味で (2) 式は地球マントルの大まかな温度勾配を示すため，**地温勾配** (geothrm) と呼ばれる．

次に，潜熱の効果を考える．さっきまでの話は固体マントルを下から断熱的に引き上げてくる話であったが，途中でソリダスとぶつかって，局所的に固体から液体になるという部分溶融が起こる．固体から液体に相変化する際に，潜熱 $L(>0)$ が発生するので断熱線からはずれる．そこで，部分溶融による潜熱を見積もってみる．潜熱 L は融解したマントルの質量に比例するので，まずは $\Delta p = 1$ GPa に対応する質量を見積もる (さっき 1 GPa で考えたので)．惑星内部は第 0 近似的には静水圧平衡が成り立っている．

$$\frac{dp}{dz} = \rho(z) g \tag{3}$$

ここで z は地表からの深さを示し，g は重力加速度を示す．これを離散化して

$$\Delta p \approx \rho g \Delta z \tag{4}$$

Δz は Δp に対応する深さである．Δz 内に含まれるマントルの質量は $\rho \times (S\Delta z)$ である．ここで S は底面積である．単位面積あたりでは (4) 式を用いて

$$\rho \times (1 \times \Delta z) = \rho \Delta z \approx \frac{\Delta p}{g} \approx \frac{10^9\ \mathrm{Pa}}{10\ \mathrm{m\ s}^{-2}} \approx 10^8\ \mathrm{kg} \tag{5}$$

ということで，Δp に対応する固体が全て液体になるのに必要な熱 $d'Q$ は次のようになる．

$$d'Q \approx L \times \frac{\Delta p}{\rho} \approx 5 \times 10^5\ \mathrm{J\ kg}^{-1} \times 10^8\ \mathrm{kg} \approx 10^{13}\ \mathrm{J} \tag{6}$$

ただし，リキダス (液相線) よりは低温なので全てが液体になるわけではない．仮に Δz 内の固体マントルの 1% が溶けるとすれば，$d'Q \approx 10^{11}$ J の熱が必要になる．これを温度に換算すると

$$\Delta T = \frac{d'Q}{C_p} \approx \frac{d'Q}{\Delta p / g \times c_p} \approx \frac{10^{11}\ \mathrm{J}}{10^8\ \mathrm{kg} \cdot 1000\ \mathrm{J\ kg}^{-1}\ \mathrm{K}^{-1}} \approx 1\ \mathrm{K} \tag{7}$$

すなわち，マントルが 1 GPa 分上昇し部分溶融を起こすと，1 K 程度のオーダーの温度が周囲から失われる．この結果は，潜熱による温度減少が断熱膨張による温度減少とほとんど同程度であることを示す．つまり，部分溶融が起きると断熱温度勾配よりも 2 倍程度急な傾きとなる．今は固体マントル全体の 1% が溶けるとしたが，もっと多くのマントルが溶ける場合には，潜熱による温度減少がより大きくなるので，傾きがより急になる．傾きがより急になると，マントルが少し上昇するのに沢山の温度を周囲から奪うことになる．以上の議論から，断熱的な地温勾配は部分溶融によって，温度の低い方へシフトすることが分かった．

*[1] 「よく混ざっている」と等温的になるはずだが，惑星内部は自重で潰されるため，その分断熱圧縮される．惑星内部が断熱的であるとは，対流でよく混ざっている等温的な状態から，自重による圧縮分だけ温度上昇が起きている状態のことを言う．

AppendixA　式の補足 (断熱温度勾配の導出)

準静的過程 (可逆過程) におけるエントロピー変化は次式で与えられた．

$$dS = \frac{d'Q_{\mathrm{rev}}}{T} \tag{8}$$

断熱過程の場合 $d'Q = 0$ なので，$dS = 0$ である．つまり，断熱過程とは等エントロピー過程と同義である．そこで，エントロピーの微小変化を表す式を考える．エントロピーを温度と圧力の関数として全微分すると

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT = -\alpha V dp + \frac{C_p}{T} dT \tag{9}$$

ここで式変形にはマクスウェルの関係式と次の定義を用いた*2．

$$\alpha \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{10}$$

$$C_p \equiv T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \tag{11}$$

断熱的であれば $dS = 0$ なので

$$0 = -\alpha V dp + \frac{C_p}{T} dT \quad \Longrightarrow \quad \frac{dT}{dp} = \frac{\alpha V T}{C_p} = \frac{\alpha T}{\rho c_p} \tag{12}$$

を得る．おまけとして，地球惑星分野では超有名な惑星内部の温度プロファイル (一次元温度構造) の式も導出しておく．惑星内部が (a) よく混ざっていて (=断熱的で) (b) ほとんど静水圧平衡にある とする．(a) の条件を数式で書くと (12) 式である．(b) は (3) 式なので，これらを組み合わせる．

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dT}{dp}\frac{dp}{dz} = \frac{\alpha T}{\rho c_p}\rho g = \frac{\alpha g T}{c_p} \tag{13}$$

地表での温度を T_0 として，これを積分すると

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{T} \frac{dT'}{T'} &= \int_{z=0}^{z} \frac{\alpha g}{c_p} dz' \\ T(z) &= T_0 \exp\left(\frac{\alpha g z}{c_p}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

を得る．ただし，$\alpha g / c_p$ は一定とした．この式は惑星内部のある深さ z での温度を与える式である．T_0 は $z = 0$ における温度で，これを温位 (ポテンシャル温度) という．つまり，ある深さ z における温度 $T(z)$ の物体を断熱的に地表まで持ってきた時の温度を言う．

References

[1] Atkins, P. W., De Paula, J., 2017. アトキンス物理化学. 東京化学同人.

[2] Stacey, F. D., Davis, P. M., 本多 了ら著, 2013. 地球の物理学事典. 朝倉書店.

[3] Turcotte, D., Schubert, G., 2014. Geodynamics. Cambridge University Press, Cambridge.

[4] 大谷 栄治, 2018. 地球内部の物質科学. 共立出版.

*2 マクスウェルの関係式はギブズエネルギーに関する式を用いる．