2022.07.19 菖蒲直からの出題

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos\theta + \cos 2\theta}{(1+2\cos\theta)\sin\theta}\, d\theta \quad \text{を積分せよ。}$$

難易度：4/5　（菖蒲直は解法を思いつくのに2時間かかりました）

（解）

$$\text{与式} = \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \frac{2\cos\theta + (2\cos^2\theta - 1)}{(1+2\cos\theta)\sin\theta}\, d\theta \quad \cdots (1)$$

ここで、$\cos\theta = s$ とおくと 積分変数は $-\sin\theta d\theta = ds$ となる。

また 積分範囲は 以下のようになる。

θ	$-\pi/2 \to \pi/3$
s	$0 \to 1/2$

よって (1) 式は

$$(1) = \int_0^{1/2} \frac{2s + 2s^2 - 1}{(1+2s)\underline{\sin\theta}} \cdot \frac{ds}{-\underline{\sin\theta}} \longrightarrow \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-s^2$$

$$= -\int_0^{1/2} \frac{2s^2+2s-1}{(1+2s)(1-s^2)}\, ds$$

$$= -\int_0^{1/2} \frac{\overbrace{-(1-s)(1+2s)}^{-(-2s^2+s+1)} + 3s}{(1+s)(1-s)(1+2s)}\, ds$$

$$= \int_0^{1/2} \left\{ \frac{\cancel{(1-s)}\cancel{(1+2s)}}{(1+s)\cancel{(1-s)}\cancel{(1+2s)}} - \frac{3s}{(1+s)(1-s)(1+2s)} \right\} ds$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{1}{1+s}\, ds - \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{3s}{(1+s)(1-s)(1+2s)}\, ds}_{\boxed{A}} \quad \cdots (2)$$

$\boxed{A}$ の部分は「部分分数分解」の積分を行う

ここで、次の恒等式を考える

$$\frac{\alpha}{1+s} + \frac{\beta}{1-s} + \frac{\gamma}{1+2s} = \underbrace{\frac{3s}{(1+s)(1-s)(1+2s)}}_{\boxed{A}} \quad (3)$$

ここで α, β, γ は定数である。

両辺に $(1+s)(1-s)(1+2s)$ をかけると

$$(1-s)(1+2s)\alpha + (1+s)(1+2s)\beta + (1+s)(1-s)\gamma = 3s \quad \cdots (4)$$

後は (4) 式を解いて、α, β, γ を求める。

(i) $s = 1$ のとき　$2 \times 3\beta = 3 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

(ii) $s = -\frac{1}{2}$ のとき　$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\gamma = \frac{3}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}$

(iii) $s = -1$ のとき　$2 \times (-1)\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

従って　$\boxed{A} = \frac{3/2}{1+s} + \frac{1/2}{1-s} + \frac{1/2}{1+2s}$ を得る

よって

$$(2) = \int_0^{1/2} \frac{1}{1+s}\, ds - \int_0^{1/2} \left(\frac{3/2}{1+s} + \frac{1/2}{1-s} + \frac{1/2}{1+2s} \right) ds$$

$$= -\int_0^{1/2} \left(\frac{1/2}{1+s} + \frac{1/2}{1-s} + \frac{1/2}{1+2s} \right) ds$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\ln|1+s| - \frac{1}{2}\ln|1-s| + \frac{1}{4}\ln|1+2s| \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 2$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln 3 - \cancel{\ln 2}) - \cancel{\frac{1}{2}\ln 2} - \frac{1}{4}\ln 2$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2$$