

Elektrooptischer Effekt und Faraday-Effekt

Zulassungsarbeit

zur wissenschaftlichen Prüfung für das Lehr-  
amt an Gymnasien

vorgelegt von

Bernd Hermann

Physikalisches Institut der Universität Freiburg

Januar 1977

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	1
Teil A	
1. Einleitung. Der elektrooptische Effekt - Pockelseffekt	2
2. Symmetrieelemente, Kristallklassen und Kristallsysteme	3
3. Die Doppelbrechung und das Indexellipsoid	10
4. Der piezoelektrische Effekt	13
5. Der umgekehrte piezoelektrische Effekt	17
6. Reduktion der Anzahl unabhängiger Koeffizienten	19
a) Reine Symmetrieargumente	19
b) Analytische Methoden	20
c) Reduktion der piezoelektrischen Koeffizienten für Kristalle der Klasse $\bar{4} 2m$	22
7. Wirkung von elektrischem Feld und elastischer Spannung auf das Indexellipsoid	25
8. Primärer und sekundärer elektrooptischer Effekt	27
9. Reduktion der Anzahl unabhängiger elektroopt. Koeff.	28
10. Einfluß eines el. Feldes auf das Indexellipsoid	29
11. Anwendung der Theorie speziell auf den KDP Kristall	30
12. Diskussion für zwei spezielle Feldrichtungen	30
a) E-Feld in $x_3$ -Richtung parallel zur opt. Achse	30
b) E-Feld in $x_1$ -Richtung senkrecht zur opt. Achse	32
13. Anwendung auf die vorliegende Pockelszelle	33
14. Versuchsbeschreibung	37
15. Messungen und Meßergebnis	41

Teil B

1. Einleitung zum Faraday-Effekt	43
Theorie zum Faradayeffekt	44
2. Theorie der Magnetorotation (magnetoopt. Drehung)	44
3. Versuchsaufbau und Versuchsbeschreibung	48
4. Methode der Winkelbestimmung	49
5. Berechnung des Magnetfeldes der Spule als Funktion der Koordinate der Spulenachse	51
6. Berechnung des Drehwinkels	53
7. Meßwerte und Meßergebnis	54
Literaturangaben	57

### Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war, den schon bestehenden Versuch im Fortgeschrittenenpraktikum "Faraday- und Kerreffekt" neu zu gestalten und verbesslungsfähige Bestandteile zu erneuern. Das zur Untersuchung des Kerreifektes verwendete Nitrobenzol ( $C_6H_5NO_2$ ) wurde wegen seiner giftigen Eigenschaften gegen einen piezoelektrischen Kristall ausgetauscht. Während Nitrobenzol den Kerreffekt zeigt, welcher zum Quadrat der elektrischen Feldstärke E proportional ist, beobachtet man bei dem verwendeten Kristall einen linearen Zusammenhang mit der elektrischen Feldstärke. Dieser lineare Effekt wird nach F. Pockels, der ihn als erster beobachtete, benannt. Als Lichtquelle für diesen Effekt wurde statt der Na-Lampe ein He-Ne-Laser verwendet. Die Analyse des modulierten Lichtstrahls geschieht mit einer Photozelle in Verbindung mit einem Czillographen und nicht mehr mit dem Auge. Beim Faraday-Effekt wurde eine Vergrößerung des Drehwinkels angestrebt, da dieser für die mit Wasser gefüllte Küvette bei dem maximalen Strom von 5 Ampère nur drei Grad betrug. Die Wasserküvette wurde gegen einen speziellen Glasstab ausgetauscht, dessen Verdetkonstante etwa dreieinhalb mal so groß ist wie die von Wasser ( $v_{H_2O} = 1,307 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Min}}{\text{Oe} \cdot \text{cm}}$ ). Auf diese Weise wurde der Drehwinkel der Polarisationsebene entsprechend vervielfacht.

Teil A

1. Einleitung

Der elektrooptische Effekt - Pockels Effekt

Der elektrooptische Effekt beruht auf der Tatsache, daß die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ , definiert durch  $\epsilon = \frac{\partial D}{\partial E}$ , bei genauer Untersuchung in Wirklichkeit keine Konstante ist, sondern eine Abhängigkeit von der Stärke des elektrischen Feldes zeigt. Das bedeutet, wie es in Bild 1 angedeutet wird, daß  $D$  mit  $E$  nicht exakt linear zusammenhängt, sondern auf folgende Weise als Funktion von  $E$  ausgedrückt werden kann:

$$D = aE + bE^2 + cE^3 + \dots \quad (1)$$

wobei  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ... Konstanten sind.

Die Konstante  $a$  gibt die Steigung der Kurve im Nullpunkt wieder. Die Terme mit  $b$ ,  $c$  usw. sind ein Maß für die Abweichung von der Geraden mit der Steigung  $a$ .

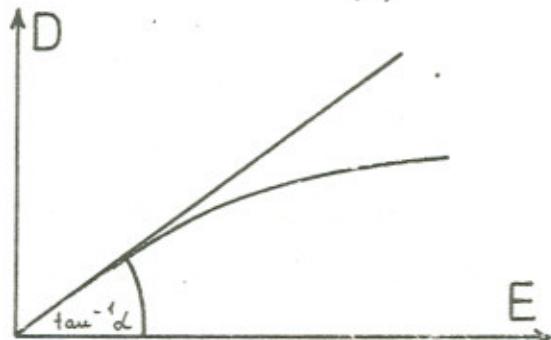


Bild 1

Das  $\epsilon$ , welches durch die Steigung der Kurve definiert ist, lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$\epsilon = \frac{dD}{dE} = a + 2bE + 3cE^2 + \dots \quad (2)$$

Der Term  $bE^2$  und die Terme höherer Ordnung in Gl. (1) liefern sehr kleine Beiträge und sind gewöhnlich schwierig zu messen. Kleine Änderungen von  $\epsilon$  bedeuten auch kleine Änderungen des Brechungsindex  $n$ . Im optischen Bereich können sehr kleine Änderungen jedoch mittels Doppelbrechung und auf interferometrische Art sehr genau gemessen werden. Diese Änderung des Brechungsindex eines Kristalls, die durch ein äußeres elektrisches Feld hervorgerufen wird, bezeichnet man als den elektrooptischen Effekt. Die Folge eines geänderten Brechungsindex ist eine

Verformung des Indexellipsoids des Kristalls. Im Abschnitt 3. werden deshalb Doppelbrechung und Indexellipsoid behandelt.

Der lineare Teil  $2bE$  in Gl. (2) ist die Größe, die schließlich beim Pockelseffekt zum Tragen kommt. Der für den Kerr Effekt maßgebliche Term ist der in  $E$  quadratische  $\beta cE^2$ .

Bei Kristallen mit Symmetriezentrum verschwindet der Pockelseffekt und man beobachtet nur den Kerr-Effekt und die Effekte der Terme höherer Ordnung, die jedoch im Vergleich zum Kerr-Effekt sehr klein sind.

Nur für Kristalle ohne Symmetriezentrum, zu denen auch der hier zu untersuchende  $KD^*P$  Kristall (Kalium dideuterium Phosphat) der Klasse  $\overline{42m}$  aus dem tetragonalen System gehört (siehe Seite 42a), mißt man auch den Pockelseffekt, der dann infolge der linearen Abhängigkeit von  $E$  dominiert. Bei den weiteren Betrachtungen werden deshalb die Beiträge von Kerr-Effekt und Termen höherer Ordnung vernachlässigt.

Der elektrooptische Effekt besteht nun nicht nur aus der direkten Einwirkung des  $E$ -Feldes auf die Änderung von  $\epsilon$  bzw. von dem Brechungsindex  $n$ , sondern man beobachtet auch Auswirkungen auf Grund von Piezoelektrizität und Elektrostriktion. Die Piezoelektrizität ist in dem Faktor  $2b$  und die Elektrostriktion in dem Faktor  $\beta c$  der Gl. (2) zu berücksichtigen. Im Fall der direkten Einwirkung des  $E$ -Feldes spricht man vom primären, im anderen Fall vom sekundären elektrooptischen Effekt. Nach der Beschreibung des piezoelektrischen Effektes in Abschnitt 4. wird hierauf in 8. noch näher eingegangen werden.

## 2. Symmetrieelemente, Kristallklassen und Kristallsysteme

Im folgenden sollen Begriffe wie Kristallklassen und Kristallsysteme in Verbindung mit Symmetrieeigenschaften von Kristallen erläutert wer-

den, von denen in späteren Abschnitten Gebrauch gemacht werden wird.

Diese Symmetrieeigenschaften werden durch einzelne Symmetrieelemente beschrieben. Zur Veranschaulichung betrachte man Bild 2, wo zwei verschiedene Sorten von Atomen durch Punkte und Kreise angedeutet sind. Dreht man die Anordnung der Atome um die Achse senkrecht zur Zeichenebene durch P um  $120^\circ$ , so bleibt

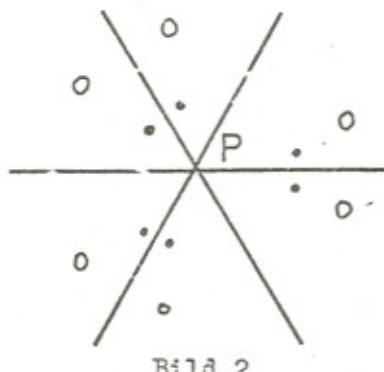


Bild 2

das Bild unverändert. Auch Drehungen um ganzzahlige Vielfache von  $120^\circ$  bringen keine Änderung. Man sagt, daß das Bild eine dreizählige Achse (engl.: three-fold rotation axis oder rotation triad axis) durch den Punkt P senkrecht zur Zeichenebene besitzt. Die drei Geraden im Bild 1 kennzeichnen Spiegelebenen oder Symmetrieebenen senkrecht zur Zeichenebene. Die für den makroskopischen Bereich zur Beschreibung notwendigen Symmetrieelemente werden im Folgenden aufgezählt:

- 1.) Symmetriezentrum: Man wählt einen Koordinatenursprung im Zentrum der Symmetrie und wendet auf die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes die Operation der Inversion an, so daß der Punkt übergeht nach  $-x, -y, -z$ .
- 2.) Spiegelebene: Jeder Punkt wird an den Ort seines Spiegelbildes bezüglich dieser Ebene transformiert.
- 3.) n-zählige Rotationsachse: Eine Rotation von  $\frac{2\pi}{n}$  um eine gegebene Achse, wobei n eine positive ganze Zahl ist.
- 4.) n-zählige Inversionsachse: Eine Rotation von  $\frac{2\pi}{n}$  um eine gegebene Achse, gefolgt von einer Inversion durch einen gegebenen Punkt auf der Achse.

Genaue Betrachtungen ergeben, daß für Kristalle nur  $n = 1, 2, 3, 4$  und

6zählige Achsen möglich sind. Die Kombination irgendwelcher der genannten Elemente kann wieder eine Punktsymmetrie ergeben, aber nicht jede tut dies. Eine mögliche derartige Kombination muß mindestens einen Punkt fest lassen und außerdem die Bedingung erfüllen, daß eine geeignete Wiederholung der in der Kombination enthaltenen Operationen den Raum in die Ausgangslage zurückführt. Insgesamt ist auf Grund dieser beiden Bedingungen nur eine beschränkte Anzahl von Kombinationen von Symmetrieelementen denkbar. Es handelt sich um die 32 Punktsymmetriegruppen, nach denen man die Kristalle in 32 Kristallklassen eingeteilt hat. Die Symmetrieelemente der 32 Punktsymmetriegruppen zeigt Tafel 1 mittels stereographischer Projektionen, welche folgendermaßen definiert sind:

- 1.) Der Ursprung der Punktgruppen wird in das Zentrum der Bezugskugel gelegt.
- 2.) Die Orientierung der Symmetrieelemente ist bestimmt durch ihre Schnittpunkte bzw. Schnittlinien mit der Oberfläche der Bezugskugel.
- 3.) Jedes Diagramm in Tafel 1 stellt die Projektion der einen Hemisphere der Bezugskugel auf die Querschnittsebene bezüglich des entferntesten Punktes P der anderen Hemisphere dar.

Die schraffierte Fläche ist  
die stereographische Pro-  
jektion der oberen Hemisphere  
bezüglich P

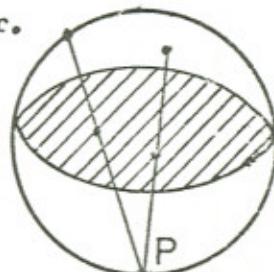


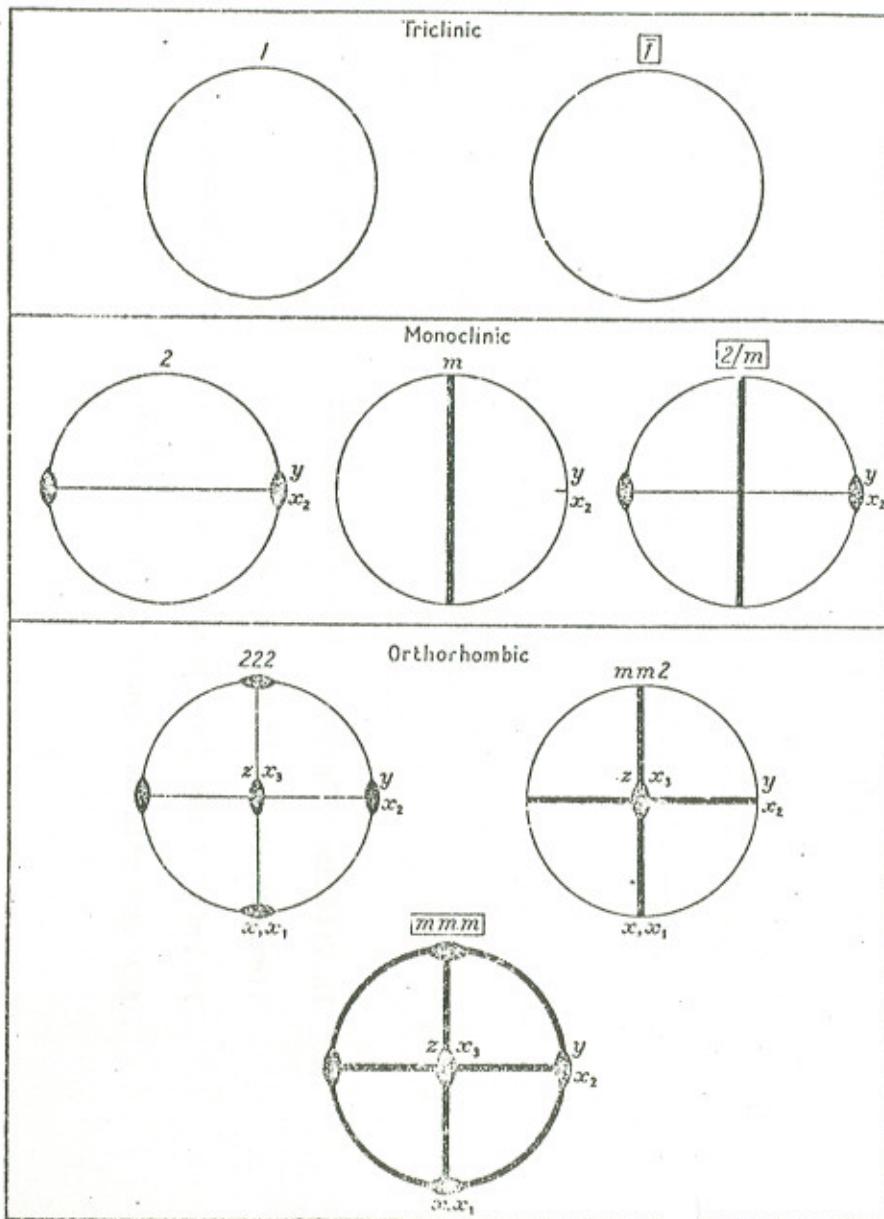
Bild 3

In Tabelle 1 Spalte 2 sind die Symbole aufgeführt, welche die Symmetrieelemente in den Stereogrammen andeuten.

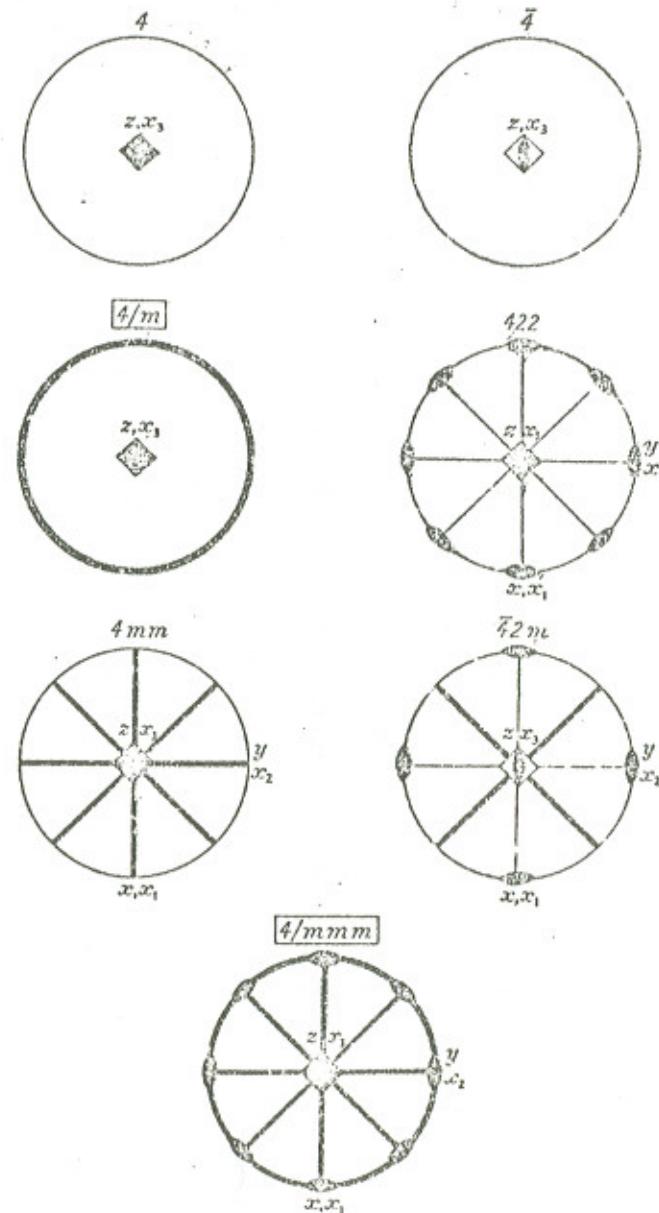
In Tafel 1 hat jede Klasse ein Zeichen über dem Stereogramm, in welchem die wesentlichen Symmetrieelemente gemäß der Bezeichnung in Spalte 3

*Symmetry elements and conventions for the choice of axes in the  
32 crystal classes*

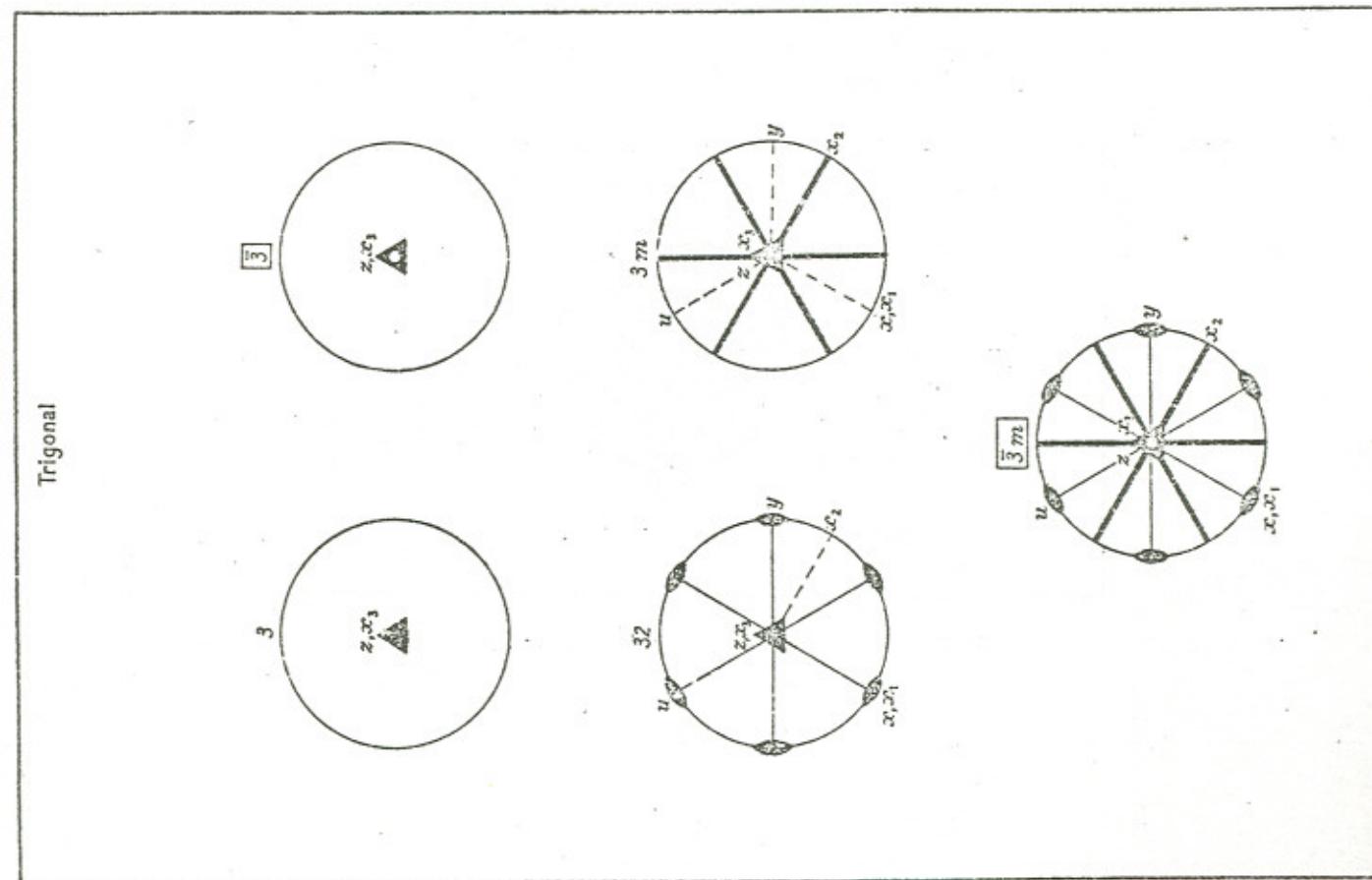
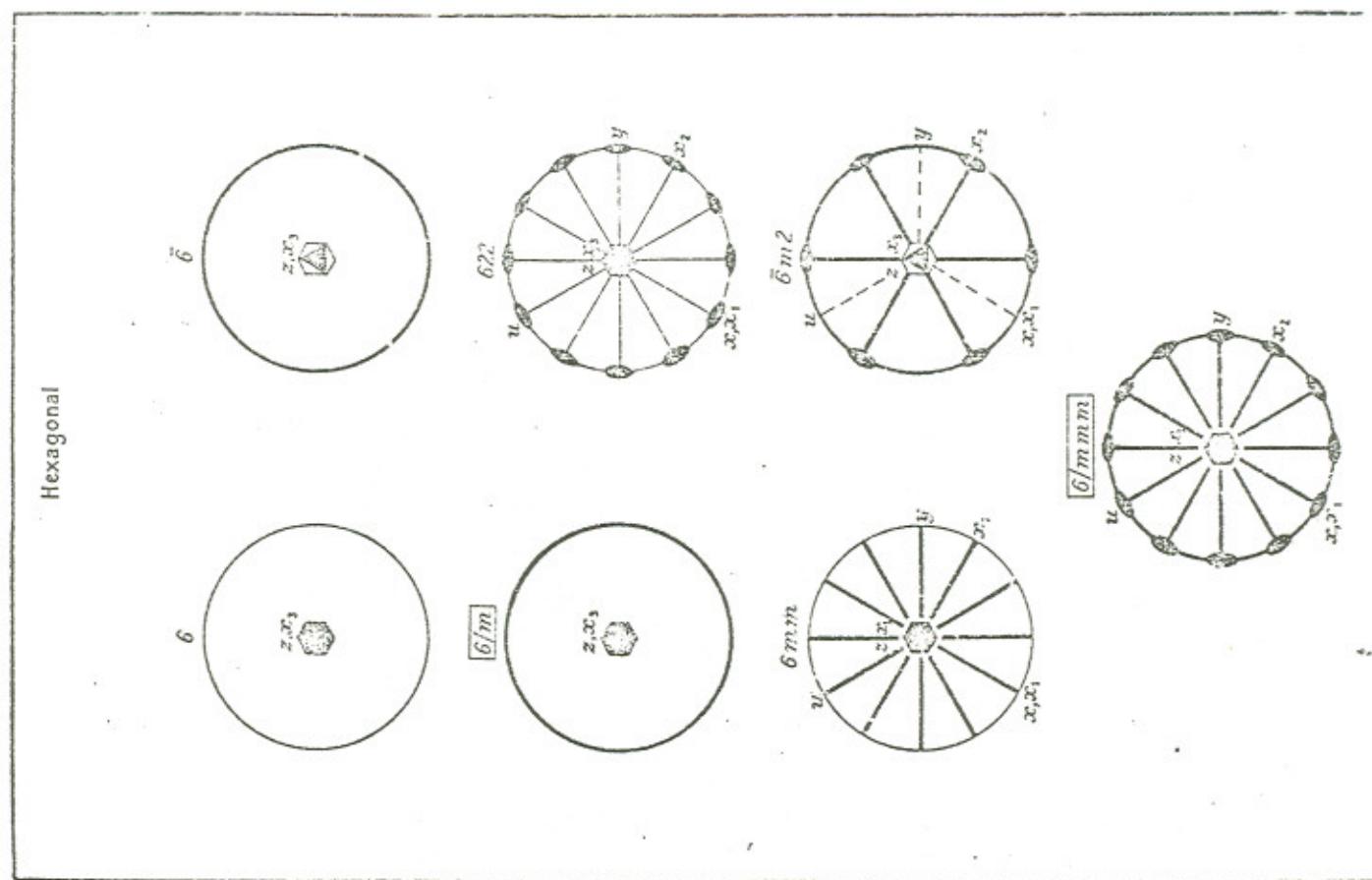
Symbols of centrosymmetrical classes are enclosed in boxes



Tetragonal



Tafel 1



Tafel 1

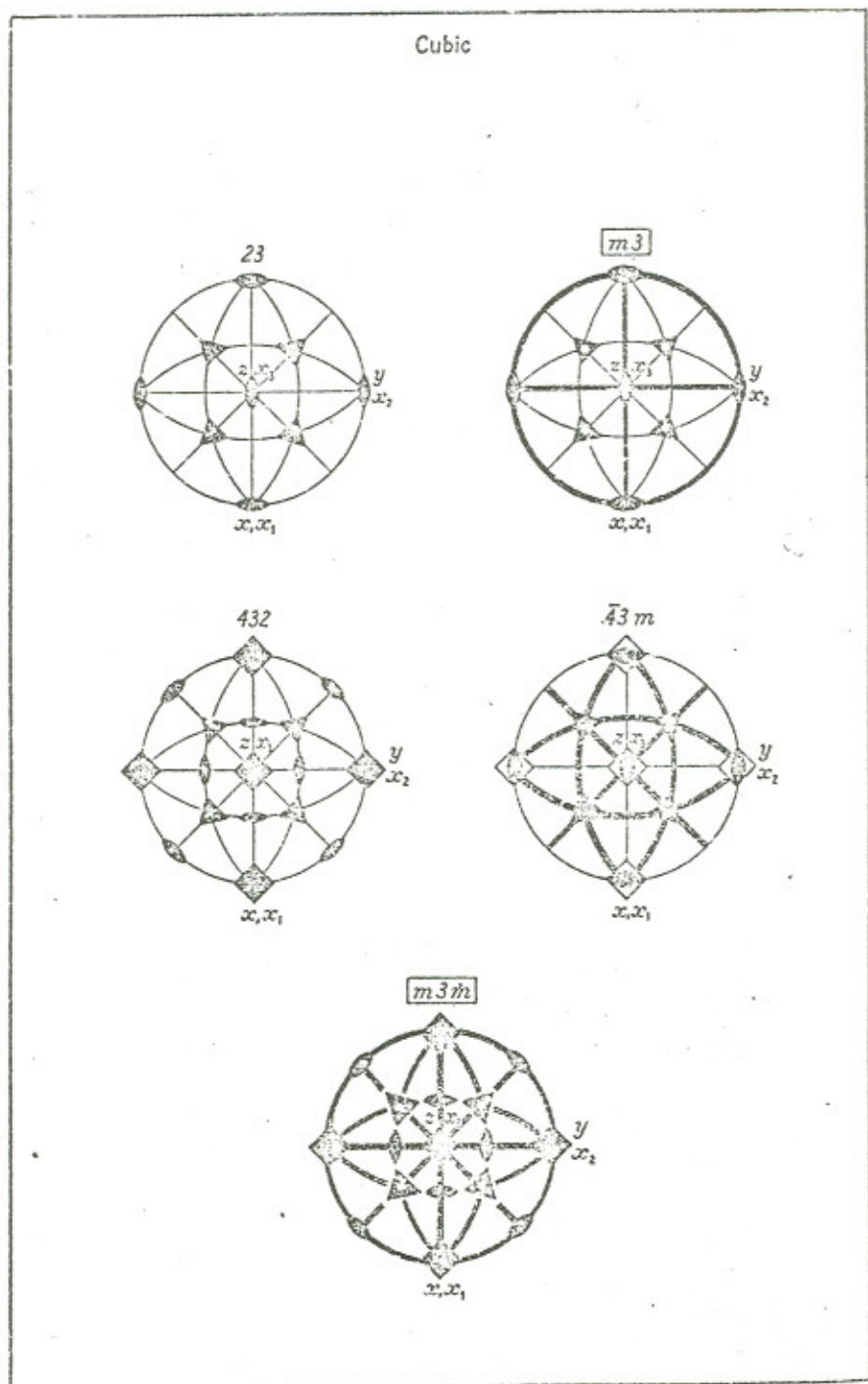


Tabelle 1

*Symbolism for the symmetry elements of the 32 point groups*

Symmetry element	Symbol on stereogram	International symbol
centre of symmetry . . . . .	no symbol	$i$
mirror plane . . . . .	full line (great circle)	$m$
Rotation axes		
1-fold (monad) . . . . .	no symbol	$1$
2-fold (diad) . . . . .		$2$
3-fold (triad) . . . . .		$3$
4-fold (tetrad) . . . . .		$4$
6-fold (hexad) . . . . .		$6$
Inversion axes		
1-fold (inverse monad) = centre of symmetry	no symbol	$\bar{1}$
2-fold (inverse diad) = mirror plane normal to the axis	as for mirror plane	$\bar{2}$ ( $= m$ )
3-fold (inverse triad) = 3-fold rotation axis plus a centre of symmetry		$\bar{3}$
4-fold (inverse tetrad) (includes a rotation diad axis)		$\bar{4}$
6-fold (inverse hexad) = a rotation triad axis plus a plane normal to it		$\bar{6}$ ( $= 3/m$ )

der Tabelle 1 zusammengefaßt sind. Das Zeichen beinhaltet nicht alle Symmetrieelemente der jeweiligen Klasse, aber durch die aufgeführten Elemente sind alle übrigen miteinbezogen. (Oft beinhaltet das Zeichen sogar mehr Information, als für die Definition der Punktgruppe notwendig wäre!) Darüberhinaus sind die Zeichen in Tafel 1 eingeraumt, deren Klassen ein Symmetriezentrum aufweisen.

Die 32 Kristallklassen sind, wie man aus Tafel 1 ersehen kann, in sieben Kristallsysteme eingeteilt. Die Einordnung der verschiedenen Klassen in die einzelnen Kristallsysteme richtet sich nach den charakteristischen Symmetrieeigenschaften. Die Namen der sieben Kristallsysteme sind mit den für die zugehörigen Klassen geforderten Symmetrieeigenschaften und den Relationen zwischen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (wie in Bild 4 definiert) in Tabelle 2 aufgeführt.

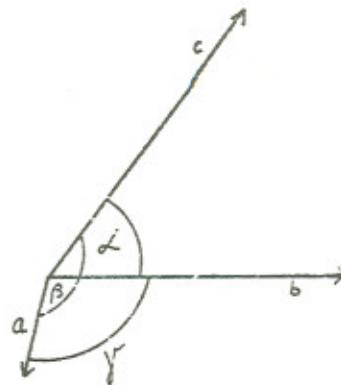


Bild 4

Tabelle 2

Nr.	Krist. System	ch. Symmetrieeigensch.	Achsen und ihre Winkel
1	Triclinic	keine Symm. außer einer einzähnigen Achse	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$
2	Monoclinic	eine zweizählige Rotations- od. Inversionsachse	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$
3	Orthorombic	drei aufeinander senkrecht stehende zweizählige Rotations- oder Inversionsachsen, aber keine Achsen höherer Ordnung	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
4	Tetragonal	Eine vierzählige Rotations- cd. Inversionsachse	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
5	Kubic	vier dreizählige Achsen, die wie die Raumdiagonalen eines Würfels angeordnet sind	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
6	Trigonal	eine dreizählige Rotations- od. Inversionsachse	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$
7	Hexagonal	eine sechszählige Rotations- od. Inversionsachse	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$

### 5. Die Doppelbrechung und das Indexellipsoid

Die Lichtfortpflanzung in Materie kann entweder nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit erfolgen oder in charakteristischer Weise

von der Ausbreitungsrichtung abhängen. Im ersten Fall bezeichnet man das Medium als optisch isotrop, im zweiten als optisch anisotrop. Isotrop sind im allgemeinen die amorphen und die kubisch kristallisierenden Stoffe, anisotrop die Kristalle aller übrigen Systeme. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit in anisotropen Medien ist abhängig von der Polarisierung und von der Ausbreitungsrichtung des Lichtes. Diese Wirkung anisotroper Medien bezeichnet man als Doppelbrechung.

Unter den anisotropen Medien gibt es optisch einachsige und optisch zweiachsige Kristalle. Die einachsigen Kristalle haben eine bevorzugte Richtung, für die ein Lichtstrahl unabhängig von seiner Polarisationsrichtung immer die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit hat. Bei den zweiachsigen Kristallen gibt es zwei solche bevorzugte Richtungen. Um nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Ausbreitungs- und Polarisationsrichtung einfach beschreiben zu können, bedient man sich des von Fresnel eingeführten Indexellipsoides, welches durch die Gleichung:

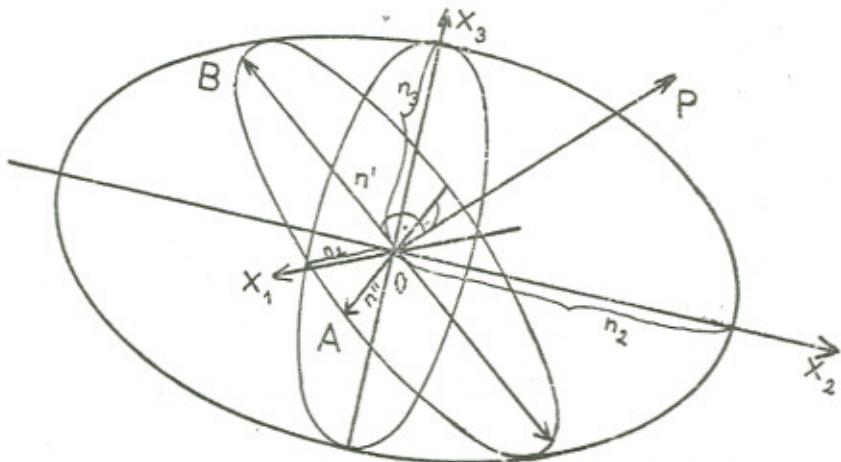
$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (3)$$

dargestellt wird. Dabei liegt ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde mit den Achsen  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , von denen mindestens eine zu den kristallographischen Achsen des Mediums parallel liegt. (Im allgemeinen bilden die kristallographischen Achsen kein rechtwinkliges System).

Die Größen  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  sind die Brechungsindizes des parallel zu  $x_1$ ,  $x_2$  bzw.  $x_3$  linear polarisierten Lichtes und sind wegen  $n = \frac{c}{v}$  ein Maß für die entsprechenden Ausbreitungsgeschwindigkeiten ( $c$  = Lichtgeschw. in Vakuum,  $v$  = Lichtgeschw. in Medium). Interessieren zum Beispiel die Geschwindigkeiten der beiden senkrecht zueinander

schwingenden linear polarisierten Anteile eines unpolarisierten Lichtstrahls in beliebiger Richtung  $\vec{OP}$  (siehe Bild 5), so zeichnet man diese vom Zentrum des Indexellipsoids aus ein. Die Ebene durch das Zentrum des Indexellipsoids senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schneidet das Ellipsoid auf einer Ellipse, deren Halbachsen OA und OB die Richtung der beiden linear polarisierten Anteile anzeigen und deren Längen gerade den Betrag der entsprechenden Brechungsindizes  $n'$  und  $n''$  haben.

Bild 5



Aus  $n'$  und  $n''$  lässt sich auf die Geschwindigkeiten  $v'$  und  $v''$  der beiden Anteile schließen:

$$v' = \frac{c}{n'} \quad \text{und} \quad v'' = \frac{c}{n''}$$

Das Indexellipsoid kann mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen und der Beziehung zwischen dem dielektrischen Verschiebungsvektor  $\vec{D}$  und dem elektrischen Feldstärkevektor  $\vec{E}$  streng hergeleitet werden. In einem isotropen Medium sind die dielektrischen Eigenschaften im Bereich von optischen Frequenzen gegeben durch:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \tag{4}$$

wobei  $\epsilon_r$  die relative Dielektrizitätskonstante ist.

Aus den Maxwell'schen Gleichungen geht hervor, daß, wenn die magnetische relative Permeabilität  $M = \mu / \mu_0$  gleich eins gesetzt werden kann, die Geschwindigkeit der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen

durch das Medium gegeben ist mit:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (5)$$

Der Brechungsindex  $n$  definiert als Quotient aus  $c$  und  $v$  läßt sich damit durch  $\epsilon_r$  ausdrücken:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r} \quad (6)$$

In einem anisotropen Medium muß die Beziehung (4) ersetzt werden durch:

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j \quad (7)$$

Verwendet man diese Beziehung (7) zusammen mit den Maxwell'schen Gleichungen, so führt dies zu dem Ergebnis, daß sich nicht nur eine sondern zwei Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten in der gleichen Richtung im Kristall ausbreiten. Die beiden Wellen sind senkrecht zueinander, linear polarisiert, so wie es schon beschrieben wurde für das Indexellipsoid.

Schreibt man für die reziproken Werte der relativen Hauptdielektrizitätskonstanten

$$B_{11}' = \frac{1}{\epsilon_{11}} = \frac{1}{n_{11}^2}, \quad B_{22}' = \frac{1}{\epsilon_{22}} = \frac{1}{r_{22}^2}, \quad B_{33}' = \frac{1}{\epsilon_{33}} = \frac{1}{n_{33}^2}, \quad (8)$$

so läßt sich das Indexellipsoid in alternativer Schreibweise darstellen durch:

$$B_{11}x_1^2 + B_{22}x_2^2 + B_{33}x_3^2 = 1 \quad (9)$$

Von dieser Schreibweise wird an späterer Stelle Gebrauch gemacht.

#### 4. Der piezoelektrische Effekt

In dem 4., 5., und 6. Abschnitt soll nun auf den piezoelektrischen Effekt und den piezoelektrischen Koeffizienten  $d_{ij}$  eingegangen werden,

weil in der Literatur vorwiegend an ihm die Reduktion der unabhängigen Koeffizienten auf Grund von Kristallsymmetrien demonstriert wird. Die Ergebnisse dieser Reduktion lassen sich leicht mit nur geringen Veränderungen auf den elektrooptischen Koeffizienten übertragen. Außerdem tritt der piezoelektrische Koeffizient im sekundären elektrooptischen Effekt auch wieder in Erscheinung.

Gewisse Kristalle weisen ein elektrisches Moment auf, welches der Größe des auf sie einwirkenden Druckes proportional ist. Diesen Effekt bezeichnet man als den "piezoelektrischen Effekt". Wird zum Beispiel ein Druck  $\sigma$  in nur einer Richtung entlang einer zweizähligen Achse eines Quarzkristalls (Klasse 32) auf diesen ausgeübt, so ist die Größe des elektrischen Moments pro Einheitsvolumen, oder die Polarisationsladung pro Einheitsfläche, gegeben durch  $P = d \cdot \sigma$ .  $d$  wird der piezoelektrische Koeffizient genannt. Diese Gleichung impliziert, daß sich die Richtung der Polarisation umkehrt, wenn der Druck in einen gleichstarken Zug übergeht.

Im allgemeinen wird ein solcher Zustand unter Spannungen (Druck oder Zug) durch einen Tensor zweiter Stufe mit neun Komponenten beschrieben, während die Polarisation des Kristalls, ein Vektor, sich aus drei Komponenten zusammensetzt. Man findet, daß jede Komponente  $P_i$  der Polarisation linear von den Komponenten  $\sigma_{ij}$  einer Spannung  $\sigma$  auf einen piezoelektrischen Kristall abhängt. Folglich läßt sich  $P_1$  schreiben als:

$$\begin{aligned} P_1 &= d_{111}\sigma_{11} + d_{112}\sigma_{12} + d_{113}\sigma_{13} \\ &+ d_{121}\sigma_{21} + d_{122}\sigma_{22} + d_{123}\sigma_{23} \\ &+ d_{131}\sigma_{31} + d_{132}\sigma_{32} + d_{133}\sigma_{33} \end{aligned} \quad (10)$$

wobei die  $d$ 's konstante Koeffizienten sind. Entsprechende Ausdrücke

entstehen für  $P_2$  und  $P_3$ . Das  $P_1$  in (10) kann folgendermaßen abgekürzt geschrieben werden:

$$P_1 = d_{1ij} \sigma_{ij} \quad (11)$$

wobei die  $ij$  entsprechend zu interpretieren sind.

$$\Rightarrow P_2 = d_{2ij} \sigma_{ij} \text{ und } P_3 = d_{3ij} \sigma_{ij}$$

Die  $d_{kij}$  sind die piezoelektrischen Moduln.

Die 27 Koeffizienten  $d_{kij}$  stellen einen Tensor 3. Stufe dar. [Die Transformation eines Tensors dritter Ordnung wird, analog zu der Transformation von Tensoren niedriger Ordnung, durch die Gleichung dargestellt:

$$T'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn} \quad (12) \square$$

Im folgenden wird die Reduktion der Zahl unabhängiger Moduln durchgeführt.

Wie aus den vorausgegangenen Betrachtungen schon zu erkennen ist, hat ein allgemeiner Tensor 3. Stufe  $3^3 = 27$  unabhängige Komponenten. Wenn man diese Komponenten ausschreibt, bilden sie nicht ein quadratisches Feld, so wie ein Tensor 2. Ordnung, sondern ein Feld von der Gestalt eines Würfels. Bezieht sich der erste Index von  $d_{kij}$  auf die Schicht, in welcher diese Teilkomponente liegt, der zweite auf die Reihe und der dritte auf die Spalte, so sehen die drei Schichten folgendermaßen aus:

erste Schicht $k=1$	zweite Schicht $k=2$	dritte Schicht $k=3$
$d_{111} \ d_{112} \ d_{113}$ $(d_{121}) \ d_{122} \ d_{123}$ $(d_{131})(d_{132})d_{133}$	$d_{211} \ d_{212} \ d_{213}$ $(d_{221}) \ d_{222} \ d_{223}$ $(d_{231})(d_{232})d_{233}$	$d_{311} \ d_{312} \ d_{313}$ $(d_{321}) \ d_{322} \ d_{323}$ $(d_{331})(d_{332})d_{333}$

(13)

Die Tatsache, daß  $d_{kij}$  in  $i$  und  $j$  symmetrisch ist, erlaubt die in Klammer stehenden Komponenten zu eliminieren, so daß nur noch 18 unabhängige

Komponenten übrig bleiben. Dadurch wird eine kürzere Darstellung in Form einer Matrix ermöglicht. Zu diesem Zweck werden zunächst die Indizes von drei auf zwei reduziert. Der erste bleibt unverändert erhalten, während der zweite und dritte durch folgende Zuordnung ersetzt werden:

$$+ \begin{matrix} 11 & 22 & 33 & 23,32 & 31,13 & 12,21 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \quad (14)$$

Damit geht (13), wenn man die in Klammer stehenden Komponenten wegläßt, über in:

$$+ \begin{matrix} d_{11} \frac{1}{2} d_{16} \frac{1}{2} d_{15} & d_{21} \frac{1}{2} d_{26} \frac{1}{2} d_{25} & d_{31} \frac{1}{2} d_{36} \frac{1}{2} d_{35} \\ d_{12} \frac{1}{2} d_{14} & d_{22} \frac{1}{2} d_{24} & d_{32} \frac{1}{2} d_{34} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{matrix} \quad (15)$$

Die letzten zwei Indizes bei  $d_{kij}$  entsprechen denen bei den Spannungskomponenten  $\sigma_{ij}$ . Folglich werden auch diese zu einem Index reduziert:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

In der neuen Schreibweise lässt sich (10) in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} P_1 = & d_{11} \sigma_1 + \frac{1}{2} d_{16} \sigma_6 + \frac{1}{2} d_{15} \sigma_5 + \\ & \frac{1}{2} d_{16} \sigma_6 + d_{12} \sigma_2 + \frac{1}{2} d_{14} \sigma_4 + \\ & \frac{1}{2} d_{15} \sigma_5 + \frac{1}{2} d_{14} \sigma_4 + d_{13} \sigma_3 \end{aligned}$$

$$\text{oder } P_1 = d_{11} \sigma_1 + d_{12} \sigma_2 + d_{13} \sigma_3 + d_{14} \sigma_4 + d_{15} \sigma_5 + d_{16} \sigma_6 \quad (17)$$

Entsprechende Gleichungen entstehen für  $P_2$  und  $P_3$ . Damit in der Gleichung (17) keine Vorfaktoren mehr auftreten, wurde oben entsprechend definiert, zum Beispiel  $d_{14} = 2 d_{123}$  etc.

<sup>+</sup> Der Vorfaktor 1/2 klärt sich im folgenden!

In allgemeiner Schreibweise:  $P_i = d_{ij} \sigma_j$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 6$ ) (18)

Die Komponenten lassen sich nun auch in Form einer Matrix zusammenstellen, in welcher die erste Schicht des Tensors 3. Ordnung gerade der ersten Reihe entspricht, entsprechend für die 2. und 3. Schicht. Die Matrix sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Diese Schreibweise hat den Vorteil größerer Kompaktheit als die Tensor-Schreibweise, und es ist eine zweidimensionale Darstellung. Man darf allerdings nicht vergessen, daß die  $d_{ij}$  trotz der zwei Indizes nicht wie die Komponenten eines Tensors 2. Ordnung transformiert werden können.

### 5. Der umgekehrte piezoelektrische Effekt

Wenn an einen piezoelektrischen Kristall ein elektrisches Feld gelegt wird, ändert sich die Gestalt des Kristalls. Dies wird als der "umgekehrte piezoelektrische Effekt" bezeichnet. Man findet, daß zwischen den Komponenten  $E_i$  des elektrischen Feldes und den Komponenten  $\epsilon_{ij}$  des Verformungstensors, welche die Änderung der Gestalt des Kristalls beschreiben, eine lineare Relation besteht. Darüber hinaus sind die Koeffizienten, die das Feld und die Verformung im umgekehrten Effekt verbinden, dieselben wie die, welche Druck und Polarisation im direkten Effekt miteinander verbinden.

Läßt sich also der direkte Effekt beschreiben durch:

$$P_i = d_{ijk} \sigma_{jk} \quad (11)$$

dann wird der umgekehrte Effekt beschrieben durch:

$$\epsilon_{jk} = d_{ijk} E_i \quad (20)$$

Der Beweis für diese Gleichheit der Koeffizienten basiert auf thermodynamischen Überlegungen. (Beweis siehe Kap. X Nye). Da aus Symmetriegründen

$\epsilon_{jk} = \epsilon_{kj}$  ist, folgt wieder, daß  $d_{ijk}$  symmetrisch ist in  $j$  und  $k$ .

Um (20) in Matrix-Schreibweise zu bringen, verwendet man statt zwei nur einen Index für die Verformungskomponenten. Die Reduktion wird nach der schon angegebenen Zuordnung durchgeführt:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\epsilon_6 & \frac{1}{2}\epsilon_5 \\ \frac{1}{2}\epsilon_6 & \epsilon_2 & \frac{1}{2}\epsilon_4 \\ \frac{1}{2}\epsilon_5 & \frac{1}{2}\epsilon_4 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Wenn (20) für  $\epsilon_{11}$  ausgeschrieben wird, ergibt sich:

$$\epsilon_{11} = d_{111}E_1 + d_{211}E_2 + d_{311}E_3$$

in Matrixschreibweise:

$$\epsilon_1 = d_{11}E_1 + d_{21}E_2 + d_{31}E_3$$

oder z.B.:

$$\begin{aligned} \epsilon_{23} &= d_{123}E_1 + d_{223}E_2 + d_{323}E_3 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\epsilon_4 &= \frac{1}{2}d_{14}E_1 + \frac{1}{2}d_{24}E_2 + \frac{1}{2}d_{34}E_3. \end{aligned}$$

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  kann auf beiden Seiten weggekürzt werden und allgemein erhält man:

$$\epsilon_j = d_{ij}E_i \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 6) \quad (22)$$

Der Faktor  $1/2$  in (21) ist wieder aus dem selben Grund eingeführt worden, wie vorher in (15).

Im folgenden Schema sind die piezoelektrischen Gleichungen in der Matrix-Schreibweise zusammengefaßt:

		$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\epsilon_5$	$\epsilon_6$	
		$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	
$E_1$	$P_1$	$d_{11}$	$d_{12}$	$d_{13}$	$d_{14}$	$d_{15}$	$d_{16}$	(23)
$E_2$	$P_2$	$d_{21}$	$d_{22}$	$d_{23}$	$d_{24}$	$d_{25}$	$d_{26}$	
$E_3$	$P_3$	$d_{31}$	$d_{32}$	$d_{33}$	$d_{34}$	$d_{35}$	$d_{36}$	

Die Pfeile in diesem Schema sind zu lesen als Gleichheitszeichen, wobei links davon die Größe steht, von welcher der Pfeil ausgeht, und rechts davon die Summe der Größen, auf welche der Pfeil zeigt, multipliziert mit den entsprechenden darunter bzw. daneben stehenden Koeffizienten der Matrix. Reihenmäßig gelesen ergibt sich der piezoelektrische Effekt, spaltenmäßig gelesen ergibt sich der umgekehrte piezoelektrische Effekt.

Tabelle 3

Definitionsgleichungen für den direkten und den umgekehrten p. Effekt

	Tensor-Schreibweise (i,j,k = 1,2,3)	Matrix-Schreibweise (i = 1,2,3; j = 1,2,...,6)
Direkter Effekt	$P_i = d_{ijk} \sigma_{jk}$	$P_i = d_{ij} \sigma_j$
Umgekehrter Effekt	$\epsilon_{jk} = d_{ijk} E_i$	$\epsilon_j = d_{ij} E_i$

## 6. Reduktion der Anzahl unabhängiger Koeffizienten infolge von Kristallsymm.

### a) Reine Symmetrieargumente

Am Beispiel eines Kristalls mit Symmetriezentrum lässt sich sehr einfach zeigen, welche Überlegungen für die Reduktion unabh. Koeffizienten gemacht werden. Angenommen, der Kristall sei einem Druck unterworfen und würde dadurch polarisiert werden. Nun denke man sich das ganze System, Kristall und Druck, umgekehrt hinsichtlich des Symmetriezentrums. Der Druck, welcher

zentrosymmetrisch ist, ändert sich nicht, ebensowenig der Kristall. Aber die Polarisation wird ihre Richtung umkehren. Das Ergebnis ist also derselbe Kristall unter dem gleichen Druck wie vor der Umkehrung, aber mit entgegengesetzter Polarisation. Das ist aber nur möglich, wenn die Polarisation Null ist. Daraus folgt, daß ein Kristall mit Symmetriezentrum nicht piezoelektrisch sein kann.

Das Verschwinden und die Gleichheit vieler Moduln in den verschiedenen Kristallklassen kann abgeleitet werden von ähnlichen Symmetrieargumenten ohne Bezug auf analytische Betrachtungen zu nehmen. Man betrachte zum Beispiel den Modul  $d_{36}$  in der Klasse 4.  $d_{36}$  misst die Komponente  $P_3$  für eine Scherspannung um die  $x_3$  Richtung. Angenommen, eine solche Scherspannung wie in Bild 6a an-

gedeutet, würde einen Dipol erzeugen parallel zu  $x_3$  mit dem positiven Ende oben.

Eine Änderung des Vorzeichens der Druckkomponenten würde auch das Vorzeichen des Di-

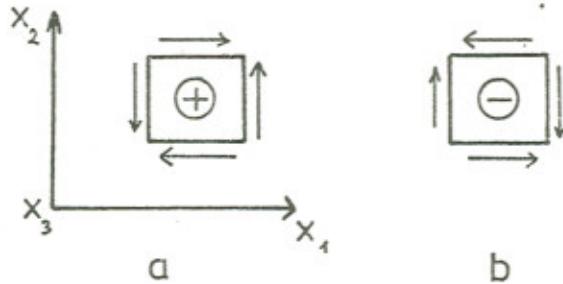


Bild 6

pols ändern, so daß die in Bild 6b gezeigte Situation entsteht. Da der Kristall aber eine vierzählige Achse hat, steht er in b unter dem selben Druck wie in a, der Unterschied besteht lediglich darin, daß der Kristall in b um  $90^\circ$  gedreht ist gegenüber a. Das heißt aber, daß die Polarisation in beiden Fällen dieselbe sein muß und das ist nur möglich, wenn sie Null ist  $\Rightarrow d_{36} = 0$ .

### b) Analytische Methoden

Durch die Symmetriebetrachtungen kann man auf elegante Weise einige Relationen zwischen den Moduln finden, aber man kann schwer sagen, ob diese Methoden erschöpfend sind. Deshalb wird im folgenden eine systematischere

Methode beschrieben. Das Prinzip besteht darin, die Bezugssachsen des Tensors im Einklang mit den Symmetrieelementen zu transformieren, welche der betrachtete Kristall besitzt. Das heißt, wenn der Kristall aus der Klasse 4 ist, also eine vierzählige Achse als Symmetrieelement besitzt, daß dann etwa eine Drehung des Bezugssystems um  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  oder  $270^\circ$  in Bezug auf die vierzählige Achse vorgenommen werden kann. Die Koeffizienten, welche den Effekt beschreiben, müssen dann vor und nach der Transformation dieselben sein. Betrachtungen am Symmetriezentrum:

Die Wirkung des Symmetriezentrums auf die Bezugssachsen ist folgendermaßen:

$$x_1 \rightarrow -x_1, \quad x_2 \rightarrow -x_2, \quad x_3 \rightarrow x_3 \quad (24)$$

" $\rightarrow$ " bedeutet "geht über in". Die Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  eines beliebigen Punktes werden transformiert nach  $(-x_1, -x_2, -x_3)$ . Tensorkomponenten transformieren wie die Produkte der entsprechenden Koordinaten.  $d_{122}$  transformiert zum Beispiel wie das Produkt  $x_1 x_2^2$ , das nach (24) übergeht nach  $-x_1 x_2^2$  also  $d_{122} \rightarrow -d_{122}$ .

Da aber der Kristall ein Symmetriezentrum besitzen soll, ändert die Transformation die Komponenten nicht. Deshalb gilt:  $d_{122} \rightarrow d_{122}$ . Beides zusammen läßt schließen, daß  $d_{122} = 0$  sein muß.

Man sieht leicht, daß für alle anderen Komponenten dasselbe resultiert, so daß alle  $d_{ijk} = 0$  sind, was sich auch bei der reinen Symmetriebetrachtung ergab.

Für einen Kristall mit zweizähler Achse erhält man nach Anwendung des selben Verfahrens folgendes Ergebnis. Zunächst wird wieder die Wirkung festgelegt, die eine zweizählige Achse auf das Bezugssystem hat. Es ergibt sich:

$$x_1 \rightarrow -x_1; \quad x_2 \rightarrow -x_2, \quad x_3 \rightarrow x_3 \quad (25)$$

Die zweizählige Achse habe die Richtung von  $x_3$ .

Für jeden einzelnen Modul  $d_{ijk}$  wird nun geprüft, wie die Transformation auf ihn wirkt. So geht zum Beispiel  $d_{111}$  über in  $-d_{111}$ , aber  $d_{123}$  geht über in  $d_{123}$ . Das heißt, daß die Gleichung  $d_{111} = -d_{111}$  nur dann erfüllt ist, wenn  $d_{111} = 0$ . Für den Wert von  $d_{123}$  hingegen besteht keine Einschränkung. Es ist also zwingend, daß im Indextripel entweder einmal oder dreimal die 3 auftaucht, damit der Modul nicht Null wird. In allen anderen Fällen muß  $d_{ijk} = 0$  sein.

Es ergibt sich also:

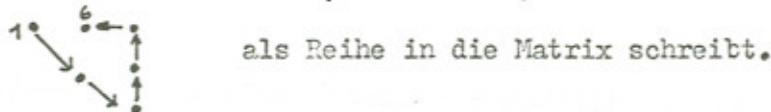
$$\begin{array}{ccccccccc} d_{111} & d_{112} & \textcircled{d_{113}} & d_{211} & d_{212} & \textcircled{d_{213}} & \textcircled{d_{311}} & \textcircled{d_{312}} & d_{313} \\ & d_{122} & \textcircled{d_{123}} & & d_{222} & \textcircled{d_{223}} & & \textcircled{d_{322}} & d_{323} \\ & & d_{133} & & & d_{233} & & & \textcircled{d_{333}} \end{array} \quad (26)$$

Nur die eingekreisten Moduln sind von Null verschieden.

In Matrixschreibweise sieht es so aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Die Matrix entsteht, indem man jede Schicht des Tensors nach dem Schema



### c) Reduktion der piezoelektrischen Moduln für Kristalle der Klasse $\bar{4}2m$

Auf die eben beschriebene Weise sollen nun für die Klasse  $\bar{4}2m$ , zu welcher das Ammonium dihydrogen Phosphat (ADP), das Kalium dihydrogen Phosphat (KDP) und das Kalium dideuterium Phosphat ( $KD^2P$ ) gehören, die von Null verschiedenen Moduln gefunden werden.

$\bar{4}2m$  heißt: Der Kristall hat eine vierzählige Inversionsachse parallel zu  $x_3$  und eine zweizählige Achse parallel zu  $x_1$ .  $m$  weist auf eine Spiegel-ebene parallel zu  $x_3$  und zur Winkelhalbierenden von  $x_1, x_2$  hin. Infolge

der Vierzähligkeit gibt es auch eine zweite Spiegelebene senkrecht zur ersten. Die  $\bar{4}$ -Achse und die 2-Achse liefern aber schon die erforderliche Information. Die  $\bar{4}$ -Achsen parallel zu  $x_3$  schließt die Information einer 2-Achse parallel  $x_3$  ein und für eine solche Achse wurde schon gefunden, daß nur die eingekreisten Moduln in (26) bei der Transformation übrigbleiben. Es müssen folglich nur noch diese berücksichtigt werden.

Die  $\bar{4}$ -Achse transformiert bei einer Drehung von  $90^\circ$  mit gefolgter Inversion die Koordinaten wie folgt:

$$x_1 \rightarrow -x_2, \quad x_2 \rightarrow x_1, \quad x_3 \rightarrow -x_3$$

Das heißt:

$$\begin{array}{lll} d_{113} \rightarrow -d_{223}; & d_{213} \rightarrow d_{123}; & d_{311} \rightarrow -d_{322}; & d_{322} \rightarrow -d_{311} \\ d_{123} \rightarrow d_{213} & d_{223} \rightarrow -d_{113} & d_{312} \rightarrow d_{321}; & d_{333} \rightarrow -d_{333} \\ 1. \text{ Schicht} & 2. \text{ Schicht} & 3. \text{ Schicht} \end{array} \quad (28)$$

$d_{113}$  zum Beispiel wird transformiert in  $-d_{223}$ . Man weiß aber auf Grund der  $\bar{4}$ -Achse des Kristalls, daß  $d_{113}$  in sich selbst übergehen muß. Folglich muss gelten, daß  $d_{113} = -d_{223}$  ist. So kann man zeigen, daß in (28) alle Pfeile durch Gleichheitszeichen ersetzt werden können. Nun soll noch die zweizählige Achse parallel  $x_1$  berücksichtigt werden, was in einer weiteren Reduktion der unabhängigen Moduln führt. Bei der 2-Achse parallel  $x_3$  verschwanden alle Moduln, welche im Indextripel keine oder zwei  $3$ en hatten. Bei der 2-Achse parallel  $x_1$  verschwinden die Moduln, die keine oder zwei  $1$ en im Indextripel aufweisen. Deshalb bleiben schließlich nur noch die Moduln:

$$d_{123} = d_{213} \quad \text{und} \quad d_{312} (= d_{321}) \quad \text{übrig.}$$

In der zwei Index-Schreibweise:

$$d_{14} = d_{25}; \quad d_{36} \quad (29)$$

Das Ergebnis ist eine Matrix mit folgender Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Damit hat man die für ID\*P von Null verschiedenen piezoelektrischen Koeffizienten gefunden. Die unabhängigen Moduln wurden für alle Klassen berechnet und sind in Tabelle 5 aufgeführt (Entnommen aus J.F. Nye, Physical properties of crystals p. 123).

Es gibt mehrere Koeffizienten verschiedener Natur, die je nach Art der Einwirkung auf den Kristall sein Verhalten beschreiben. So gibt es neben den schon betrachteten piezoelektrischen Koeffizienten  $d_{ijk}$  die elastischen Konstanten  $s_{ijkl}$ , die mit diesen eng zusammenhängenden Elastizitätsmoduln  $c_{klrs}$  ( $c = \frac{1}{s}$ ), dann die elastooptischen Koeffizienten  $p_{ijrs}$  und schließlich die elektrooptischen Koeffizienten  $z_{ijk}$ .

In Tabelle 4a sind die Koeffizienten und Moduln zusammengestellt, die zur Beschreibung von Kristallen und ihren Auswirkungen unter der Einwirkung von elastischen Spannungen und elektrischen Feldern benötigt werden. Im Teil b sind die in Verbindung mit diesen Koeffizienten auftretenden Feldgrößen aufgezählt und in Teil c sind ihre Beziehungen untereinander wiedergegeben.

Tabelle 4

a

$p_{ijrs}$	elastooptischer Koeffizient	$\sim 10^{-1}$	dimensionslos
$s_{ijkl}$	piezooptischer Koeffizient	$\sim 10^{-12}$	$\frac{m^2}{N}$
$c_{klrs}$	Elastizitätsmodul	$\sim 10^{11}$	$\frac{N}{m^2}$
$s_{rskl}$	Elastische Konstante	$\sim 10^{-11}$	$\frac{m^2}{N}$
$d_{kij}$	piezoelektrischer Koeffizient	$\sim 3 \cdot 10^{-12}$	$\frac{m}{Volt}$
$z_{ijk}$	elektrooptischer Koeffizient (beinhaltet das Zusammenwirken von primären u. sekundären Effekt)	$\sim 10^{-12}$	$\frac{m}{Volt}$
$\Delta E_{ij}$	$B_{ij} = \frac{1}{\epsilon_{ij}} = \frac{1}{n_{ij}^2}$ wobei $\epsilon_{ij}$ die relative Dielektrizitätskonstante ist.		

b

$\sigma_{kl}$	Spannung (Druck od. Zug) [engl. stress]	$\frac{N}{m^2}$
$P_i$	Polarisation in i-Richtung	$\frac{Cb}{m^2}$
$E_k$	elektrisches Feld in k-Richtung	Volt/m
$\epsilon_{rs}$	Verformung (Längenänderungsverhältnis) [engl. strain]	dimensionslos

c

$$\begin{aligned} c_{klrs} &= \frac{1}{s_{rskl}} & \sigma_{kl} &= c_{klrs} \epsilon_{rs} \\ P_{ijrs} &= \pi_{ijkl} c_{klrs} & \epsilon_{rs} &= d_{krs} E_k \\ \pi_{ijkl} &= P_{ijrs} s_{rskl} & P_i &= d_{ijk} \sigma_{jk} \end{aligned} \quad \left| \quad \Delta B_{ij} = z_{ijk} E_k + \pi_{ijkl} \sigma_{kl} \right.$$

### 7. Wirkung von elektrischem Feld und elastischer Spannung auf das Indexellipsoid

Der Brechungsindex eines Kristalls ist spezifiziert durch sein Indexellipsoid, dessen Koeffizienten die Komponenten von  $B_{ij}$  bei optischen Frequenzen sind, nämlich:

$$\sum_{i,j=1}^3 B_{ij} x_i x_j = 1 \quad (32)$$

(Nach Definition:  $B_{ij} = \epsilon_0 \frac{\partial E_i}{\partial D_j}$ ). Folglich hat eine kleine Änderung des Brechungsindex, hervorgerufen durch ein elektrisches Feld  $E_k$  und eine elastische Spannung  $\sigma_{kl}$ , eine kleine Änderung in Gestalt, Größe und Orientierung des Indexellipsoide zur Folge. Man beschreibt dies durch eine entsprechende Änderung der Koeffizienten  $B_{ij}$ . Diese Änderungen  $\Delta B_{ij}$  der Koeffizienten  $B_{ij}$  sind gegeben durch:

$$\Delta B_{ij} = z_{ijk} E_k + \pi_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (33)$$

wobei die  $z_{ijk}$  und  $\pi_{ijkl}$  Tensoren 3. Stufe für den elektrooptischen Effekt bzw. 4. Stufe für den photoelastischen Effekt darstellen. Die Änderung des Brechungsindex als Folge von elastischen Spannungen nennt man photoelastischen Effekt.



### 8. Primärer und sekundärer elektrooptischer Effekt

In der allgemeinen Beschreibung des elektrooptischen Effektes in der Einleitung wurden die mechanischen Bedingungen nicht berücksichtigt, welchen der zu untersuchende Kristall unterworfen ist. Er kann zum Beispiel frei sein, so daß er keine elastische Spannungen erfährt, oder er kann so gehalten werden, daß er keine Verformung erleidet. Das ist wichtig, weil bei einem freien Kristall ein statisches elektrisches Feld eine Verformung verursacht infolge des umgekehrten piezoelektrischen Effektes und dies wiederum veranlaßt eine Änderung des Brechungsindexes durch den photoelastischen Effekt.

Den elektrooptischen Effekt, den man messen würde, wenn der Kristall auf Grund einer geeigneten Halterung keine Möglichkeit hätte, sich zu verformen (zero strain), nennt man den primären elektrooptischen Effekt.

Den Effekt, der zusätzlich infolge von Piezoelektrizität und Photoelastizität bei einem freien Kristall (zero stress) auftritt, bezeichnet man als sekundären elektrooptischen Effekt.

Der beobachtete Effekt in einem freien Kristall, wie das bei meinen Messungen der Fall ist, ist die Summe von primärem und sekundärem Effekt.

Man wird also ein  $z_{ij}$  messen, welches sich aus einem  $z'_{ij}$  vom primären Effekt und dem Produkt des elastooptischen mit dem piezoelektrischen Koeffizienten zusammensetzt.

$$z_{ij} = z'_{ij} + p_{ik} d_{jk} \quad (34)$$

Eine solche Halterung, die dem Kristall keine Verformung gestattet, läßt sich technisch nicht verwirklichen. Um trotzdem den primären Effekt getrennt messen zu können, legt man an den Kristall ein elektrisches Wechselfeld mit Frequenzen an, denen der Kristall auf Grund seiner Trägheit nicht mehr folgen kann.

Der piezoelektrische Effekt wird dadurch unterdrückt und der sekundäre elektrooptische Effekt tritt nicht mehr auf.

In einem Artikel von Sliker und Burlage<sup>+</sup> wird eine Abschätzung für den Beitrag des sekundären elektrooptischen Koeffizienten bei statischen Feldern gemacht (Wechselfelder mit Frequenzen kleiner als 10 MHz können hier noch als statisch betrachtet werden!) Man findet dort, daß  $z_{63}^*$  um etwa 8 % kleiner ist als  $z_{63}$ .

#### 9. Reduktion der Anzahl unabhängiger elektrooptischer Koeffizienten

Aus der Gleichung für das Indexellipsoid  $\sum B_{ij} x_i x_j = 1$  folgt aus Symmetriegründen, daß  $B_{ij} = B_{ji}$  ist. Folglich ist auch in Gl. (33) für alle  $E_k$  und  $\sigma_{kl}$   $\Delta B_{ij} = \Delta B_{ji}$ . Für die weiteren Betrachtungen sollen nun keine elastischen Spannungen im Spiel sein, so daß  $\sigma_{kl} = 0$  gesetzt werden kann. Dann folgt, daß  $z_{ijk} = z_{jik}$  sein muß. Diese Beziehung reduziert die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten  $z_{ijk}$  von 27 auf 18 und ermöglicht eine abgekürzte Schreibweise, wie sie für die Koeffizienten des piezoelektrischen Tensors vorgenommen wurde. Der Doppelindex  $ij$  wird auf einen reduziert, der dann nach Zuordnung (14) von 1 bis 6 läuft.<sup>1,16</sup>

Die Reduktion der unabhängigen Koeffizienten  $z_{ik}$  auf Grund der Symmetrie des Kristalls verläuft ganz analog wie für die piezoelektrischen Koeffizienten  $d_{ki}$ . Die für  $d_{ki}$  angegebenen Matrizen in Tabelle 5 Seite 26 können deshalb auch für die  $z_{ik}$  verwendet werden mit zwei Änderungen:

- 1.) Bei  $z_{ik}$  läuft der erste Index von 1 bis 6, während bei  $d_{ki}$  der zweite von 1 bis 6 läuft. Deshalb ist das Matrizenfeld für die  $z_{ik}$  richtig, wenn man die  $k$  als Spaltenzahl und die  $i$  als Zeilenzahl liest. Die Matrizen für die  $z_{ik}$  haben also sechs Zeilen und drei Spalten, während es für die  $d_{ki}$  umgekehrt ist.

<sup>+</sup> T.R. Sliker and S.R. Burlage, Journal of appl. physics Vol. 34, 1963  
S. 1839

2.) Bei der Reduktion der Indizes i und j bei  $B_{ij}$  und bei  $z_{ijk}$  auf einen, der von 1 bis 6 läuft, ist es hier nicht erforderlich, zum Zweck einer allgemeinen Schreibweise Vorfaktoren, wie es bei den  $d_{ijk}$  gebraucht wurde, einzuführen. Deshalb ist der doppelte Kreis im Schlüssel der Tabelle 5 Seite 26 mit dem einfachen Kreis gleichzusetzen. Der doppelte Kreis hat also den Wert des mit ihm verbundenen schwarzen Punktes mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Die Matrix  $z_{ij}$  für einen KD\*P Kristall erhält nach den vorausgegangenen Betrachtungen folgende Gestalt:

$$z_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ z_{41} & 0 & 0 \\ 0 & z_{41} & 0 \\ 0 & 0 & z_{63} \end{pmatrix} \quad (35)$$

#### 10. Einfluß eines el. Feldes auf das Indexellipsoid

Die charakteristische Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen erfährt eine Änderung, sobald ein elektrisches Feld an den Kristall angelegt wird. Diese Änderung kann auf verschiedene Weise charakterisiert werden, wie zum Beispiel durch eine spezifische Änderung der Koeffizienten des dielektrischen Tensors  $\epsilon_{kl}$  (dieser ist nicht zu verwechseln mit dem strain Koeffizienten  $\epsilon_{ij}$ ) in der Gleichung  $D_k = \epsilon_{kl} E_l$ . Die gebräuchlichere Art, eine solche Änderung zu beschreiben, besteht darin, daß man die Koeffizienten  $B_{ij}$  bzw.  $\frac{1}{n_{ij}}$  entsprechend ändert. Die Änderung  $\Delta B_{ij}$  lautet nach Gl. (33) für einen freien Kristall, der nur unter dem Einfluß eines beliebigen E-Feldes steht und keinen elastischen Spannungen ausgesetzt ist ( $\sigma_{kl} = 0$ , zero stress):

$$\Delta B_{ij} = \sum_{k=1}^3 z_{ijk} E_k \quad (36)$$

Damit geht das Indexellipsoid aus Gl. (32) für einen Kristall, der unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes  $E$  steht über in:

$$\sum_{i,j=1}^3 (B_{ij} + \Delta B_{ij}) x_i x_j = 1$$

oder  $\sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{1}{n_{ij}^2} + \sum_{k=1}^3 z_{ijk} E_k \right) x_i x_j = 1 \quad (37)$

Dies ist die allgemeine Gleichung des Indexellipsoids eines freien Kristalls unter dem Einfluß eines beliebigen Feldes  $E$ .

### 11. Anwendung der Ergebnisse der Theorie speziell auf den KD\*P Kristall

Im folgenden wird die Gleichung (37) für den Kristall KD\*P und für gewisse Bedingungen spezialisiert.

- 1.) Das Indexellipsoid sei bezogen auf die kristallographischen Hauptachsen, die beim tetragonalen System senkrecht aufeinander stehen.
- 2.) Es soll berücksichtigt werden, daß der Kristall ohne äußeren Einfluß optisch einachsig ist. Das hat zur Folge, daß  $n_{11} = n_{22} = n_1$  und  $n_{33} = n_3$  ist. Dabei hat  $x_3$  die Richtung der optischen Achse. Mit 1.) ergeben sich die  $n_{ik} = 0$  für  $i \neq k$ .
- 3.) Auf Grund des Ergebnisses (35) sind nur die  $z_{41}$  ( $z_{231}$ ) =  $z_{52}$  ( $z_{132}$ ) und  $z_{63}$  ( $z_{123}$ ) von Null verschieden.

Damit reduziert sich das Indexellipsoid auf:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_1^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} + 2 z_{41} (x_2 E_1 + x_1 E_2) x_3 + 2 z_{63} x_1 x_2 E_3 = 1 \quad (38)$$

### 12. Diskussion für zwei spezielle Feldrichtungen

Für zwei verschiedene Feldrichtungen sollen nun die Auswirkungen auf das Indexellipsoid diskutiert werden.

- a) Das äußere  $E$ -Feld hat nur die Komponente  $E_3$  ( $E_1 = E_2 = 0$ ).  $E_3$  liegt also in Richtung der optischen Achse. Unter diesem Einfluß wird der

Drehung um

45°

$$x'_1 = (x_1 + x_2) / \sqrt{2}$$

$$x'_2 = (x_1 - x_2) / \sqrt{2}$$

$$x'_3 = (x_3' + x_2') / \sqrt{2}$$

$$x_2 = (x_3' - x_2') / \sqrt{2}$$

Kristall optisch zweiachsig, was ein  $\beta$ -achsiges Indexellipsoid zur Folge hat. Die Hauptachsenrichtungen sind die  $x_3$ -Achse und die Winkelhalbierenden  $x'_1$  ( $110$ ) und  $x'_2$  ( $1\bar{1}0$ ) der kristallographischen Achsen  $x_1$  und  $x_2$ . (Optisch zweiachsig heißt, daß es zwei Richtungen im Kristall gibt, für die der Kristall keine Doppelbrechung zeigt.) Die optischen Achsen fallen entweder in die  $x'_1, x_3$  oder  $x'_2, x_3$  Ebene, je nach dem Vorzeichen von  $E_3$ . Bezieht man durch eine Hauptachsentransformation die Gleichung des Indexellipsoids auf seine Hauptachsen, so erhält man:

$$\frac{x'_1^2}{n_1^2} (1 + z_{63} E_3 n_1^2) + \frac{x'_2^2}{n_1^2} (1 - z_{63} E_3 n_1^2) + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (39)$$

Dabei bleiben die Achsenabschnitte des deformierten Indexellipsoids auf den kristallographischen Achsen dieselben wie ohne äußeres Feld, nämlich  $n_1, n_1, n_3$ .

- $\alpha)$  Läßt man nun parallel  $x_1$  polarisiertes Licht in Richtung  $x_3$  (longitudinaler Effekt, weil  $E \parallel$  Lichtstrahl) durch den Kristall hindurchtreten, so wird die gesuchte Doppelbrechung, die sich experimentell in einer Phasenverschiebung der beiden in den Hauptachsenrichtungen ( $x'_1, x'_2$ ) schwingenden Wellen äußert,

$$n_{x'_1} - n_{x'_2} = n_1 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + z_{63} E_3 n_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - z_{63} E_3 n_1^2}} \right]. \quad (40)$$

Da  $z_{63} E_3 n_1^2$  in allen Fällen ( $z_{63} \sim 10^{-12}$ ) klein gegen 1 ist, läßt sich der Ausdruck (40) entwickeln und gibt in erster Näherung für die beobachtbare Doppelbrechung:

$$n_{x'_1} - n_{x'_2} = n_1^3 z_{63} E_3 \quad (41)$$

(Bem.: Für parallel  $x'_1$  oder  $x'_2$  polarisiertes Licht ergibt sich keine Doppelbrechung!)

- $\beta)$  Im weiteren handelt es sich um den transversalen Effekt, das heißt die Ausbreitungsrichtung des Lichtes steht senkrecht zur Feldrichtung  $E_3$ .

Wie man anhand des Indexellipsoids Gl. (38) sieht, kann sich für parallel zur Winkelhalbierenden von  $x_2$  und  $x_3$  polarisiertes Licht, welches in Richtung  $x_1$  einfällt, nur die natürliche Doppelbrechung  $n_3 - n_1 = \Delta_0$  ergeben.

Für in Richtung  $x_1'$  (Polarisationsrichtung sei die Winkelhalbierende von  $x_2'$  und  $x_3$ ) einfallendes Licht erhält man wieder durch Entwicklung nach  $n_1^2 z_{63} E_3$ :

$$n_{x_3} - n_{x_1'} = \Delta_0 - \frac{1}{2} n_1^3 z_{63} E_3 , \quad (42)$$

woraus ersichtlich ist, daß nur eine halbsostarke Feldabhängigkeit der Doppelbrechung gegenüber dem Longitudinaleffekt zu erwarten ist. Analog ergibt sich für in Richtung  $x_2'$  einfallendes Licht, welches parallel zur Winkelhalbierenden von  $x_2'$  und  $x_3$  polarisiert ist, die Doppelbrechung zu:

$$n_{x_3} - n_{x_2'} = \Delta_0 + \frac{1}{2} n_1^3 z_{63} E_3 \quad (43)$$

Obwohl der longitudinale Effekt verglichen mit dem transversalen Effekt ein doppelt so große Abhängigkeit vom E-Feld zeigt, ist die Halbwelldspannung unabhängig von der Länge des Kristalls. Die Halbwelldspannung ist die Spannung, die erforderlich ist: für eine Phasenverschiebung  $\lambda/2$ . Beim transversalen Effekt kann man dagegen durch eine Verlängerung des Kristalls die erforderliche Halbwelldspannung reduzieren. Hier hat man jedoch den Nachteil, daß noch eine zusätzliche Phasenverschiebung durch die natürliche Doppelbrechung auftritt.

- b) Äußeres Feld in  $x_1$ -Richtung:  $\vec{E} = E_1, E_2 = E_3 = 0$ . Auch hier bleiben die Achsenabschnitte des Indexellipsoids auf den kristallographischen Achsen  $x_1, x_2$  und  $x_3$  unverändert und der Kristall wird optisch zweiachsig. Die Achsen liegen in der  $x_2, x_3$ -Ebene, wobei die eine identisch

mit der alten optischen Achse (=  $x_3$ ) ist, die andere mit ihr einen Winkel  $2\varphi$  einschließt, der eine Funktion von  $z_{41}, E_1$  und  $n_1$  und  $n_3$  ist. Aus der Gleichung des Indexellipsoids

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_1^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} + 2 z_{41} x_2 x_3 E_1 = 1 \quad (44)$$

lässt sich schließen, daß für einfallendes Licht parallel  $x_3$  keine und für parallel  $x_2$  einfallendes Licht nur die natürliche Doppelbrechung  $\Delta_o$  zu erwarten ist. Die größtmögliche Feldabhängigkeit der Doppelbrechung ergibt sich für parallel  $x_1$  einfallendes Licht. Die Hauptachsen der maßgebenden Schnittellipse ( $x_1 = 0$ ) sind aus ihrer ursprünglichen Lage (parallel  $x_2$  und  $x_3$ ) um den Winkel herausgedreht.

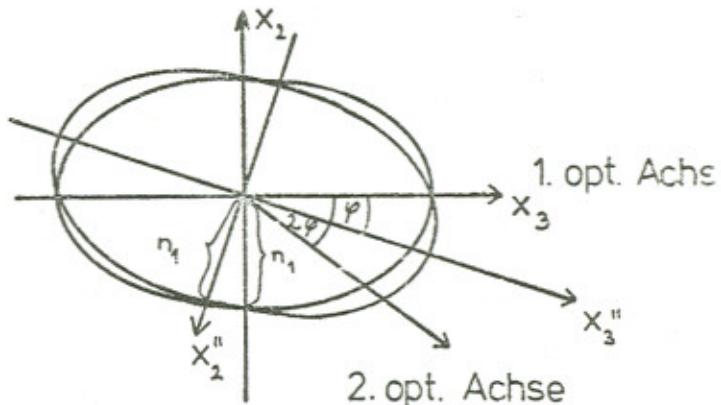
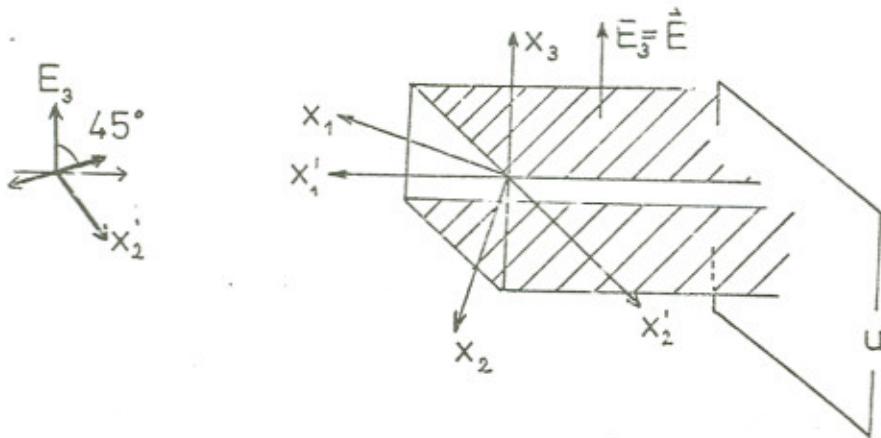


Bild 7

### 13. Anwendung auf die vorliegende Pockelszelle

Für die zur Verfügung stehende Pockelszelle trifft der Fall a) zu, da der Kristall (bzw. die Kristalle) so angeordnet ist, daß der Lichtstrahl senkrecht zu dem in  $x_3$ -Richtung angelegten E-Feld läuft, es handelt sich also um den transversalen Effekt. Der Kristall ist senkrecht zu den Winkelhalbierenden  $x_1'$  und  $x_2'$  der kristallographischen Achsen  $x_1, x_2$  bzw.  $x_2, -x_1$  geschliffen und so in der Zelle angeordnet, daß der Licht-

strahl parallel zu  $x_1'$  durch den Kristall läuft.



$x_1, x_2, x_3$  sind die kristallographischen Achsen des Kristalls  
 $x_1', x_2', x_3'$  sind die Hauptachsen des durch das E-Feld geänderten Indexellipsoids.

Bild 8

Die Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes ist um  $45^\circ$  gegen die Richtung des E-Feldes geneigt.

In der Pockelszelle sind zwei gleichgroße Kristalle hintereinander angeordnet, wobei die Richtung der  $x_3$ -Achse und damit auch das E-Feld des ersten gegen die des zweiten um  $90^\circ$  gedreht ist. Diese Anordnung bietet zwei Vorteile. Erstens wird dadurch die Temperaturabhängigkeit der nat. Doppelbrechung  $\Delta_0$  weitgehend kompensiert und zweitens wird die nat. D. des ersten Kr. durch die des zweiten gerade aufgehoben. Dies wird im folgenden erläutert.

Die Brechungsindizes der Komponente parallel zu  $x_3$  (opt. Achse) und der Komponente parallel zu  $x_1'$  lassen sich aus dem Indexellipsoid des unbeeinflussten Kristalls entnehmen:

$$\frac{x_1'^2}{n_1^2} + \frac{x_2'^2}{n_1^2} + \frac{x_3'^2}{n_3^2} = 1 \quad (45)$$

Die Schnittellipse, welche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $x_1'$  steht,

hat die Halbachsen  $n_1$  und  $n_3$ . Sie liegen in den beiden Kristallen um  $90^\circ$  gegeneinander verdreht und kompensieren sowohl die natürliche Doppelbrechung  $\Delta_0 = n_3 - n_1$  als auch eine durch Temperaturunterschiede hervorgerufene Änderung von  $\Delta_0$ . Folglich hat das austretende Licht die gleiche Polarisationsrichtung wie das eintretende, ist also wieder linear polarisiert. (Bild 9).

Wird nun an den Kristall ein elektrisches Feld  $E_3$  parallel zu  $x_3$  angelegt, so bewirkt dies eine Änderung des Indexellipsoids und seine Gleichung für die oben beschriebene Anordnung lautet nach Gl. (39):

$$\frac{x'_1}{n_1^2} (1 + z_{63} E_3 n_1^2) + \frac{x'_2}{n_1^2} (1 - z_{63} E_3 n_1^2) + \frac{x'_3}{n_3^2} = 1 \quad (39)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich schon ablesen, daß sich die Effekte der geänderten Brechungsindizes gerade aufheben, wenn in beiden Kristallen das E-Feld die Richtung von  $x_3$  hat, und der erwartete Effekt einer Doppelbrechung bleibt aus. Deshalb ist es wichtig, daß in dem einen Kristall das E-Feld die Richtung von  $x_3$  hat, in dem anderen es dem  $x_3$  entgegengerichtet ist. Die Erklärung dafür liefert die Gleichung (39) des Indexellipsoids. Aus ihr lassen sich die Brechungsindizes für die in  $x_3$  und  $x'_2$  Richtung polarisierten Anteile des einfallenden Lichtes ablesen.

Für den Kristall 1 ergibt sich  $n_3$  bzw.  $n'_2 = n_1 \frac{1}{\sqrt{1 - z_{63} E_3 n_1^2}}$ , wobei sich der Ausdruck für  $n'_2$  entwickeln läßt zu:

$$n'_2 = n_1 + \frac{1}{2} z_{63} E_3 n_1^3 =: n'_{12} \quad (46)$$

Für den Kristall 2, bei dem das E-Feld in  $-x_3$  Richtung angelegt ist, ergibt sich für den in  $x_3$  Richtung schwingenden Anteil  $n_3$  und für den in  $x'_2$  Richtung schwingenden Anteil

$$\begin{aligned} n'_2 &= n_1 \frac{1}{\sqrt{1 + z_{63} E_3 n_1^2}} \\ \Rightarrow n'_2 &= n_1 - \frac{1}{2} z_{63} E_3 n_1^3 =: n'_{22} \end{aligned} \quad (47)$$

Der erste Index bei  $n_{12}^t$  weist auf den Kristall hin, auf welchen der Brechungsindex bezogen ist.

$n_3$  und  $n_{12}^t$  sind die Halbachsen der Schnittellipse des Indexellipsoids im Kristall 1 und  $n_3$  und  $n_{22}^t$  die im Kristall 2. Wie in Bild 9 gezeichnet, sind die Ellipsen der beiden Kristalle um  $90^\circ$  gegeneinander verdreht. Beide Komponenten des linear polarisierten Lichtes erfahren in einem der beiden Kristalle den Brechungsindex  $n_3$ , das heißt, sie breiten sich auf der Länge eines Kristalls mit gleicher Geschwindigkeit aus. Die Doppelbrechung kommt nur auf dem Weg durch den anderen Kristall zustande und ergibt sich aus der Differenz von  $n_{12}^t$  und  $n_{22}^t$ :

$$n_{12}^t - n_{22}^t = z_{63} E n_1^3 \quad (48)$$

Die Lichtwellenamplitude A am Ort x wird beschrieben durch:

$$\begin{aligned} A &= A_0 e^{i(\frac{w}{c} nx)} & n &= \text{Brechungsindex} \\ & & c &= \text{Lichtgeschwindigkeit} \\ & & w &= \text{Winkelgeschwindigkeit} = 2\pi\nu \end{aligned} \quad (49)$$

Für die jeweilige Komponente ist nun der entsprechende Brechungsindex einzusetzen. Für die Phasenverschiebung  $\Delta$  am Ende der Zelle ( $x = l$ ) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{w}{c} (n_{12}^t - n_{22}^t) l \\ &= \frac{w}{c} z_{63} E n_1^3 l \end{aligned} \quad (50)$$

Die Kristalle haben quadratischen Querschnitt mit der Seitenlänge d = 3,5 mm. Die angelegte Feldstärke E ist gleich  $\frac{U}{d}$  Spannung durch Abstand der Elektroden.

Misst man die Spannung U  $\gamma_2$ , bei der sich eine Phasenverschiebung  $\Delta = \pi$  ergibt, so kann man den elektrooptischen Koeffizienten  $z_{63}$  bestimmen nach der Formel:

$$z_{63} = \frac{\lambda \cdot d}{2l n_1^3 U \gamma_2} \quad (51)$$

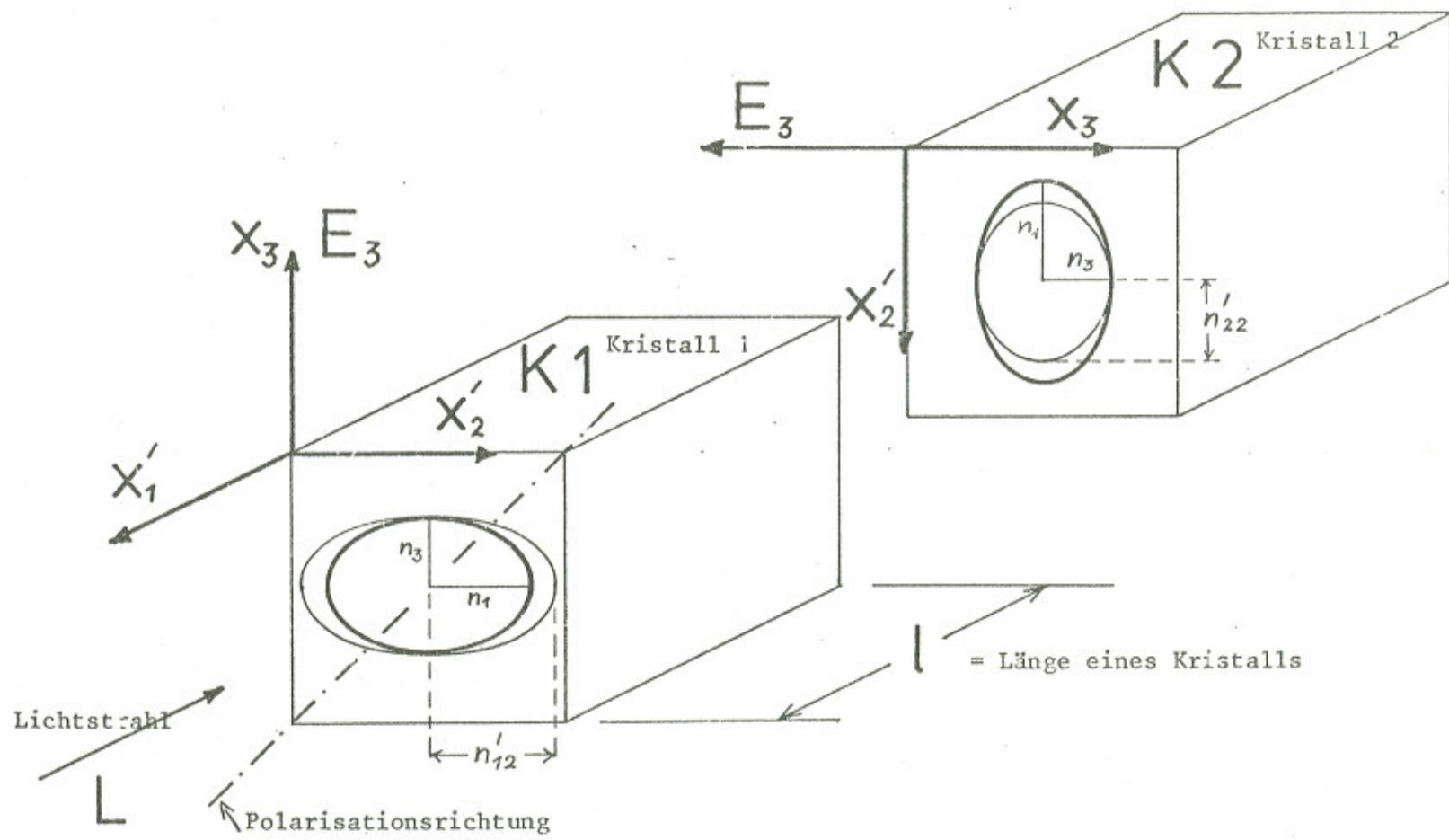


Bild 9



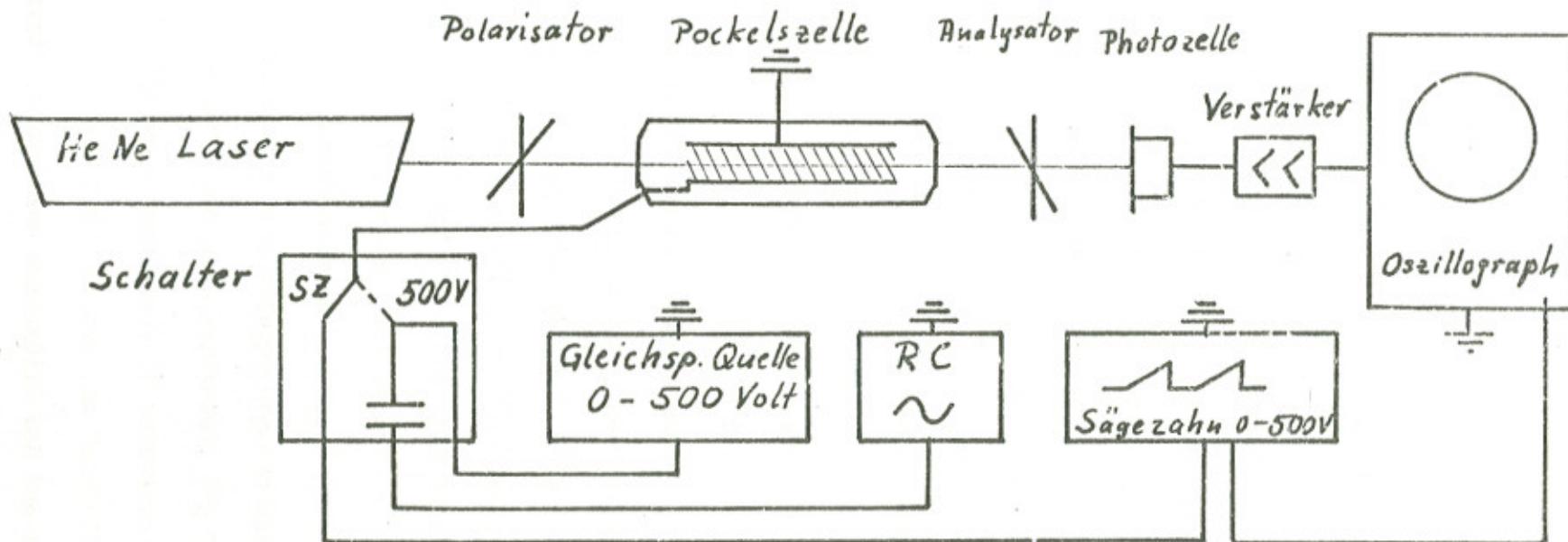
Um den Koeffizienten  $z_{63}^1$  des primären elektrooptischen Effektes zu erhalten, müssen von dem Wert  $z_{63}$  8 % abgezogen werden, wie in I.8 erläutert wurde.

#### 14. Versuchsbeschreibung

Der zur Modulation durch die Pockelszelle verwendete Lichtstrahl wird durch einen Helium Neon Laser erzeugt und durch einen Polarisator linear polarisiert. Die schon beschriebene Pockelszelle wird hinter dem Polarisator derart angeordnet, daß das elektrische Feld bezüglich beider Kristalle gegen die Polarisationsrichtung des Lichtstrahls um  $45^\circ$  gedreht ist. Nach der Pockelszelle wird ein zweiter Polarisator als Analysator in den Lichtweg gebracht, dessen Polarisationsrichtung gegen die des ersten gekreuzt ( $90^\circ$  gedreht) ist. Zur Messung der Intensität des den Analysator verlassenden Lichtstrahls dient eine Photozelle, die über einen Verstärker mit den vertikalen Ablenkplatten eines Oszillographen verbunden ist.

Mittels eines Umschalters kann nun alternativ ein Sägezahn, welcher mit einer Frequenz von circa 30 Hz eine Spannung von 0 bis 500 Volt durchläuft, oder eine Gleichspannung mit überlagerter Sinusspannung an die Elektroden der KDP Kristalle gelegt werden. Die Gleichspannung ist wählbar im Bereich von - 500 Volt bis + 500 Volt. Die überlagerte Sinusspannung von etwa 40 Volt hat eine von 8 kHz aufwärts regelbare Frequenz. Für die Versuchszwecke ist eine Frequenz um 8 kHz am günstigsten. Zwischen Gleichspannungsquelle und Sinusgenerator wurde ein Kondensator ( $c = 0,47 \mu F$ ) geschaltet, um einen Kurzschluß der Gleichspannungsquelle über den Generator zu vermeiden. Verwendet man den Sägezahn, so wird der Oszillograph mit dem gleichen Sägezahn extern getriggert und es erscheint auf dem Bildschirm der Intensitätsverlauf des modulierten Lichtstrahls.

# Versuchsaufbau zum Pockels-Effekt



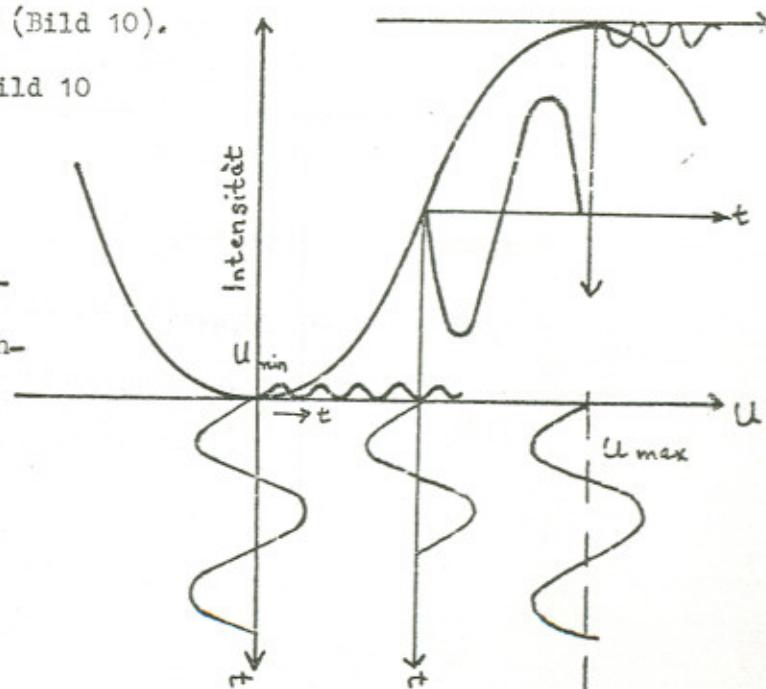
Im zweiten Fall wird intern getriggert und das erfordert füters eine Nachstellung (Oszilloskop ist sehr empfindlich). Die Verwendung von Laserlicht bei diesem Versuch ist dadurch begründet, dass es auf Grund der kleinen Öffnung für den Lichteintritt ( $\varnothing 3,5$  mm) in der Pockelszelle erforderlich ist, einen gut gebündelten Lichtstrahl zu haben, der gleichzeitig ausreichend große Intensität besitzt.

Zwei Methoden zur experimentellen Bestimmung von  $U_{\lambda/2}$ :

Die eine Methode besteht darin, daß an die Pockelszelle der Sägezahn 0 - 500 Volt angelegt wird. Durch das externe Triggern des Oszillosgraphen mittels desselben Sägezahns wird auf dem Bildschirm die Intensität des Lichtstrahls als Funktion der Spannung aufgezeichnet. Der Graph durchläuft dabei ein Minimum und ein Maximum, deren horizontaler Abstand ein Maß für die Spannungsdifferenz dieser Extrema ist, da die Gesamtbreite des Graphen gerade 500 Volt entspricht. Diese Spannungsdifferenz ist gerade die Halbwellenspannung  $U_{\lambda/2}$ .

Die andere Methode wird mit Hilfe der Gleichspannungsquelle und der überlagerten Sinusspannung durchgeführt. Anhand des Intensitätsverlaufes in Abhängigkeit von der Spannung kann man die Modulation einer überlagerten Sinusspannung ablesen (Bild 10).

Man erkennt, daß sich die Frequenz  $v$  der überlagerten Sinusspannung im Bereich der minimalen und der maximalen Intensität gerade verdoppelt, während in dem dazwischen liegenden Bereich die Intensität des Lichtstrahls mit der Frequenz  $v$  moduliert wird.  $U_{\min}$  und



$U_{\max}$ , für die sich auf dem Oszilloskop die Frequenz des sinusmodulierten Lichtstrahls verdoppelt, ermöglichen wieder die Bestimmung von

$$U_{\lambda/2} = U_{\max} - U_{\min}$$

Diese beiden Methoden sind nicht geeignet, exakte Meßwerte für  $U_{\lambda/2}$  zu liefern, weil eine genaue Eichung des Oszilloskopfes einerseits und des Sägezähngenerators andererseits nicht möglich ist. Der Zweck dieses Versuches liegt vielmehr auf qualitativer Ebene und soll darin bestehen, Kenntnisse über die Zusammenhänge zwischen Materialkonstanten und äußeren Einwirkungen bei Kristallen zu vermitteln.

Aus der Formel (51)

$$z_{63} = \frac{\lambda \cdot d}{2 \ell \cdot n_1^3 U_{\lambda/2}},$$

die das Resultat der dargestellten Theorie ist, lässt sich mit dem gemessenen Wert für  $U_{\lambda/2}$  der elektrooptische Koeffizient  $z_{63}$  für KD\*P bestimmen. In folgender Tabelle sind Literaturwerte für  $n_1$ ,  $z_{63}$  und  $n_1^3 z_{63}$  zusammen mit dem gemessenen Wert für  $z_{63}$  und  $z_{63}^t$  aufgeführt.

Tabelle der charakteristischen Größen  $n_1$  und  $z_{63}$  für KD\*P ( $KD_2PO_4$ )

aus verschiedenen Literaturstellen

Brechungsindex $n_1$	elektroopt. Koeff. $z_{63}$ $\left[ \frac{m}{V} \right]$	rel. Dielektri- zitätskonst.	$n_1^3 z_{63}$	Literatur
1,51	$26,4 \cdot 10^{-12}$	48	$90 \cdot 10^{-12}$	Kleen/Müller 441
$\sim 1,50$	$23,6 \cdot 10^{-12}$	$\sim 50$ ( $24^\circ C$ )	$80 \cdot 10^{-12}$	Yariv 302
1,52	$26,4 \cdot 10^{-12}$	-	-	Laser Focus Magazine Fetr. 1968
1,51	$25,6 \cdot 10^{-12} \pm 4\%$	$z_{63}^t = 23,55 \cdot 10^{-12} \frac{m}{V} \pm 4\%$		nach den ei- genen Meßer- gebnissen

### 15. Messungen und Meßergebnis

Messungen zur Bestimmung der Halbwelldenspannung:

Die Spannung an der Photozelle wurde mit einem elektronischen Millivoltmeter gemessen.

Spannung an der Pockels- zelle in Volt	1. Messung mV	2. M. mV	3. M. mV	4. M. mV	5. M. mV	6. M. mV	7. M. mV	8. M. mV
230	46,0	40,0	40,0	40,6	43,7	44,5	44,7	44,0
270	47,6	41,8	41,9	42,5	46,0	46,6	47,4	46,3
260	48,3	43,0	43,0	43,8	47,3	48,2	48,8	48,1
250	48,6	43,5	43,6	44,6	48,2	49,0	50,0	49,1
240	48,3	43,6	43,7	45,0	48,6	49,3	50,6	49,9
230	47,7	43,3	43,4	44,9	48,5	49,3	50,8	50,1
220	46,7	42,6	42,8	44,4	48,0	48,8	50,6	50,0
210	-	-	-	-	-	-	49,9	49,4
50	5,3	5,3	5,5	6,2	6,7	7,2	8,2	8,7
40	3,7	3,8	4,0	4,5	4,6	5,2	5,8	6,5
30	2,7	2,9	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2	4,8
20	2,0	2,1	2,2	2,5	2,6	2,8	3,0	3,6
10	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,6
0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0
-10	2,4	2,1	2,1	2,1	2,0	2,5	1,9	1,9
-20	3,1	2,9	2,6	2,7	2,5	3,2	2,1	2,0
-30	-	3,9	3,6	-	3,3	4,4	2,7	2,5

Die zu dem jeweiligen Intensitätsmaximum bzw. Minimum gehörenden Spannungen an der Pockelszelle wurden aus den entsprechenden Graphen ermittelt.

Aus der Differenz der entsprechenden Werte ergaben sich die folgenden Halbwelldenspannungen  $U_{\lambda/2}$ :

1. 240 Volt

2. 238 Volt

3. 238 Volt

4. 236 Volt

5. 237 Volt

6. 232 Volt

7. 239 Volt

8. 238 Volt

mit dem Mittelwert  $U_{\lambda/2} = 237 \pm 0,4 \%$

Länge und Dicke der Kristalle konnten nur mit einer Genauigkeit von  $\pm 0,1$  mm bestimmt werden, um nicht eventuell die aufgedampften Elektroden zu verletzen.

Länge eines Kristalls:  $l = 5,3 \text{ mm} \pm 2 \%$

Dicke eines Kristalls:  $d = 3,5 \text{ mm} \pm 3 \%$

Wellenlänge des Lichtes:  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$

Für den Brechungsindex wird der Wert

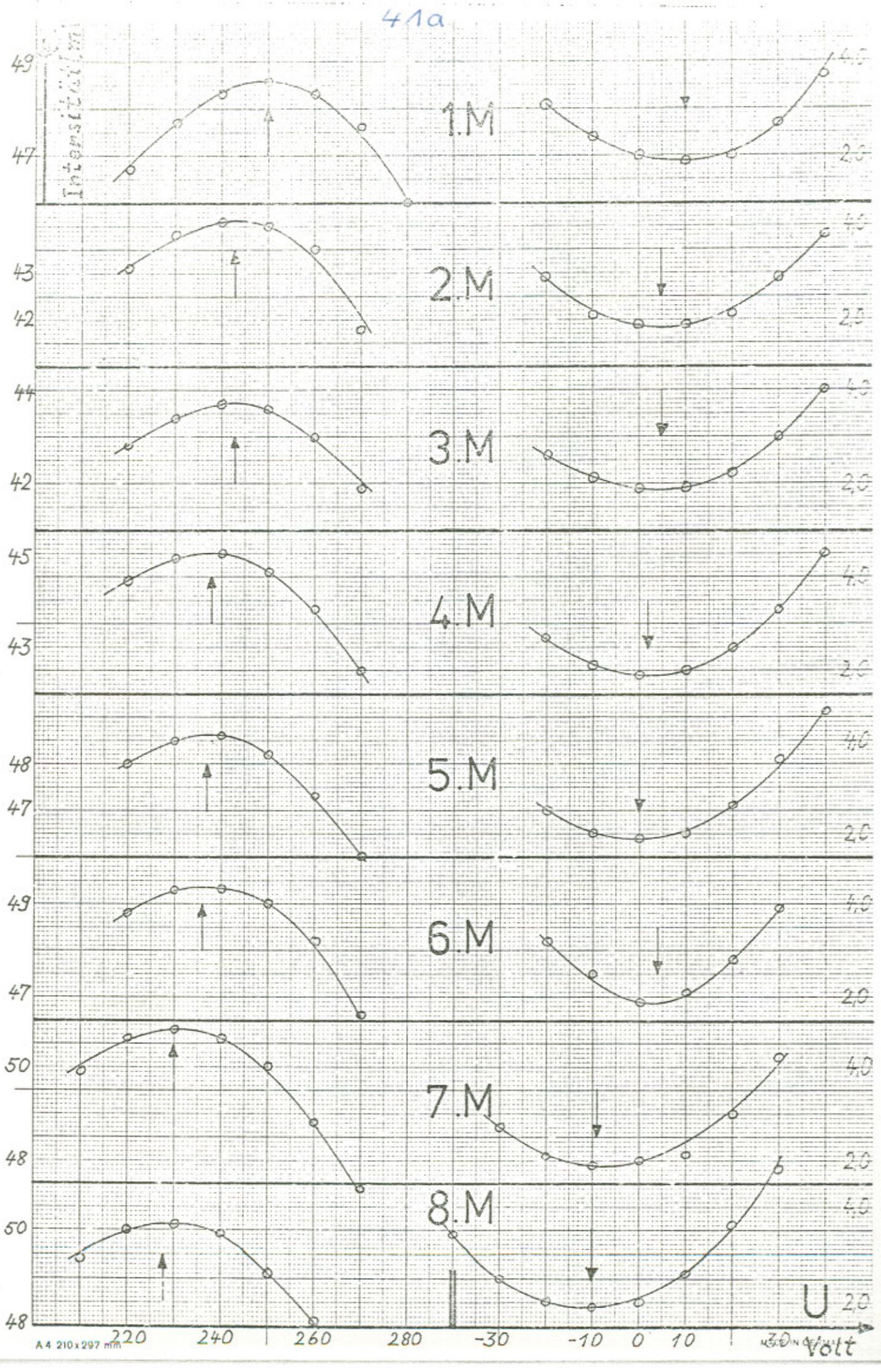
$n_1 = 1,51 \pm 0,01$  aus Kleen/Müller: Laser verwendet.

Damit ergibt sich für den elektrooptischen Koeffizienten:

$$z_{63} = \frac{\lambda \cdot d}{2 l \cdot n_1^3 \cdot U_{\lambda/2}} = 25,6 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{V}} \pm 4 \%$$

Der um 8 % kleinere primäre elektrooptische Koeffizient  $z_{63}'$  ergibt sich zu:

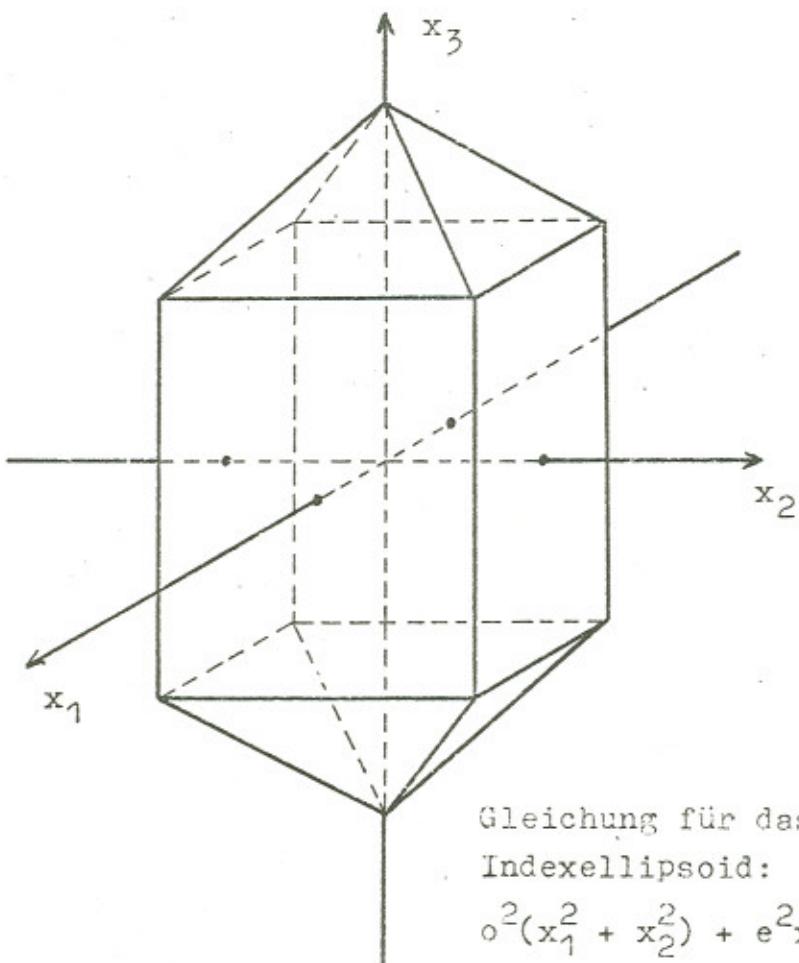
$$z_{63}' = 23,55 \frac{\text{m}}{\text{V}} \pm 4 \text{ %}.$$



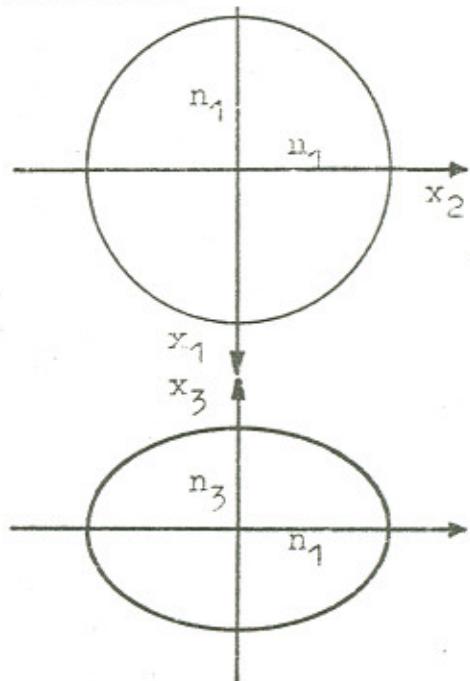


Kalium dideuterium Phosphat  $KD^+P$  (=  $KD_2PO_4$ )

Gestalt dieses Kristalls:



$KD^+P$  ist ein optisch  
einachsig negativer  
Kristall.



Gleichung für das  
Indexellipsoid:

$$o^2(x_1^2 + x_2^2) + e^2x_3^2 = 1 ; o^2 = \frac{1}{n_1^2} ; e^2 = \frac{1}{n_3^2}$$



Teil B

1. Einleitung zum Faradayeffekt

Bereits im Jahre 1846 hat M. Faraday die magnetische Einwirkung auf die Lichtfortpflanzung in isotropen Medien gefunden. Sie ruft eine künstliche zirkulare Doppelbrechung hervor und wird allgemein als Faradayeffekt oder Magnetorotation bezeichnet. Wenn man ein durchsichtiges isotropes Material in ein starkes longitudinales Magnetfeld bringt und längs der Feldrichtung linear polarisiertes Licht durch das Material schickt, so wird die Schwingungsebene des Lichtes gedreht. Der Drehsinn hängt ab von der Umlaufrichtung des magnetisierenden Stromes. Damit ist die Größe des Drehwinkels  $\alpha$ , um welchen die Schwingungsebene gedreht wird, proportional zu der ersten (oder zumindest einer ungeraden) Potenz der Feldstärke. Ebenso ergibt sich schon aus geometrischen Gründen eine Proportionalität zu der Weglänge  $l$  des Lichtes im betrachteten Medium. Damit lautet das entsprechende Gesetz:

$$\alpha = V \cdot l \cdot H \quad (1)$$

Die Stoffkonstante  $V$  wird als Verdetkonstante bezeichnet, und ist unabhängig von der Feldstärke  $H$  und der Schichtlänge  $l$ . Sie hängt aber von der Wellenlänge des verwendeten Lichtes ab.

Aus der Gleichung (1) ist zu ersehen, daß durch eine Umkehrung des  $H$ -Feldes, indem man die felderzeugende Spule umpolt, das Vorzeichen von  $\alpha$  unter sonst gleichen Bedingungen geändert wird. Das heißt, die Polarisationsrichtung wird im entgegengesetzten Sinne gedreht. Das gleiche Resultat beobachtet man, wenn das Licht in umgekehrter Richtung durch den Stoff geschickt wird und die übrigen Bedingungen unverändert bleiben, denn die Drehung der Schwingungsebene folgt stets dem Stromlauf in der Magnetspule. Dies ermöglicht eine Vervielfachung des Drehwinkels, indem man den Lichtstrahl mit Hilfe von Spiegeln mehrmals durch das im

Magnetfeld befindliche Material laufen läßt. In diesem Verhalten magnetisch drehender Körper äußert sich ein tiefgehender Unterschied gegenüber den natürlich drehenden Substanzen. Dort gibt es nur eine genau festgelegte Drehrichtung unabhängig von der Ausbreitungsrichtung des Lichtes, so daß die Polarisationsebene eines reflektierten Strahles wieder in die Ausgangsrichtung zurückgedreht wird und sich die Gesamtdrehung null ergibt.

#### Theorie zum Faradayeffekt

##### 2. Theorie der Magnetorotation (magnetoopt. Drehung)

Die Magnetorotation findet ihre Erklärung durch eine Zurückführung der Drehung der Polarisationsebene des einfallenden Lichtstrahles auf eine zirkulare Doppelbrechung. Das heißt, das linear polarisierte Licht des einfallenden Strahles wird in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen zerlegt, die innerhalb eines im Magnetfeld befindlichen Mediums unterschiedliche Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zeigen. Dabei hat die im Sinne des magnetisierenden Stromes rotierende Welle im allgemeinen die größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Anhand einer analytischen Darstellung einer linear polarisierten Welle, die längs einer bestimmten Richtung eine dem durchlaufenen Wege proportionale Drehung erfährt, läßt sich die Äquivalenz zu zwei entgegengesetzt zirkular polarisierten Wellen, die sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit fortpflanzen, erkennen.

Eine ebene linear polarisierte Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet, an der Stelle  $z = 0$  in das magnetooptische Medium eintritt und dort in Richtung der x-Achse polarisiert ist, kann innerhalb des Mediums durch die x- und y-Komponente der Schwingungsbewegung beschrieben werden,

wenn sich ihre Polarisationsrichtung am Ort z um den Winkel  $\alpha = \chi z$  dreht:

$$\begin{aligned}x &= F \cos \chi z \cos w(t - \frac{z}{v}) \\y &= F \sin \chi z \cos w(t - \frac{z}{v})\end{aligned}\quad (2)$$

Dabei bedeuten w die Winkelgeschwindigkeit der Welle, v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem betrachteten Medium und  $\chi$  den Drehwinkel der Polarisationsebene pro Längeneinheit des Mediums.

Durch trigonometrische Umformungen erhält man folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} F \{ \cos [w(t - \frac{z}{v}) + \chi z] + \cos [w(t - \frac{z}{v}) - \chi z] \} \\y &= \frac{1}{2} F \{ \sin [w(t - \frac{z}{v}) + \chi z] - \sin [w(t - \frac{z}{v}) - \chi z] \}\end{aligned}\quad (3)$$

Die Zusammenfassung der ersten Glieder in beiden geschweiften Klammern ergibt die Darstellung einer positiv- oder linkszirkular polarisierten Welle, wobei die Drehung der Zirkularpolarisation in einem rechtshändigen Koordinatensystem einer Drehung von der positiven x-Achse nach der positiven y-Achse bei Fortschreiten in positiver z-Richtung entspricht. Diese Welle hat die Geschwindigkeit  $v_+$  mit

$$\frac{w}{v_+} = \frac{w}{v} - \chi \quad (4a)$$

Entsprechend erhält man die Darstellung einer negativ- oder rechtszirkular polarisierten Welle durch Zusammenfassen der zweiten Glieder in den geschweiften Klammern, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_-$  aus:

$$\frac{w}{v_-} = \frac{w}{v} + \chi \quad (4b)$$

abzulesen ist.

Daraus resultiert  $2\chi$  zu  $\frac{w}{v_-} - \frac{w}{v_+}$  und man erhält für die Drehung der Polarisationsebene auf dem Weg  $\ell$  den Wert:

$$\alpha = \chi \cdot \ell = \frac{w\ell}{2} \left( \frac{1}{v_-} - \frac{1}{v_+} \right) = \frac{w\ell}{2c} (n_- - n_+), \quad (5)$$

wenn  $n_+ = \frac{c}{v_+}$  bzw.  $n_- = \frac{c}{v_-}$  den Brechungsindex der positiv- bzw. nega-

tiv-rotierenden Welle darstellt. Auf Grund einer Näherung ist nach dem Vorausgehenden

$$v_{\pm} = v \left( 1 \pm \frac{\chi v}{w} \right) \quad (6)$$

da erfahrungsgemäß  $\chi$  sehr klein gegen  $\frac{w}{v}$  ist.

Aus der Zurückführung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene auf eine zirkulare Doppelbrechung erkennt man den engen Zusammenhang mit dem Brechungsindex und mit der Dispersion des Lichtes. Ein Unterschied zwischen den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten positiv und negativ rotierender Wellen kann offenbar nur zustande kommen, wenn diese und damit der Brechungsindex von der Frequenz der Wellen abhängen.

Die Erklärung für das Zustandekommen unterschiedlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeiten folgt aus dem Larmorschen Satz, der besagt, wie sich ein Magnetfeld auf die Elektronensysteme einzelner Atome auswirkt. Bei einzelnen Atomen wird der schwere Kern von einer Zahl gleicher Elektronen unter dem Einfluß der Coulombschen Anziehungs- und Abstoßungskräfte umlaufen. Die Wirkung eines Magnetfeldes auf ein solches System kann in erster Näherung durch eine gleichförmige Rotation beschrieben werden, die die Elektronenbahnen um die Achse des Magnetfeldes ausführen. Diese Deutung wurde von Larmor in folgender Gleichung formuliert:

$$\omega_L = - \frac{1}{2} \frac{e}{mc} H \quad (7)$$

Das Magnetfeld  $H$  läßt in erster Näherung die Form einer beliebigen Bahn eines symmetrisch zur Feldachse gebundenen Elektrons unverändert und erzeugt lediglich eine Präzession um die Feldachse von der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_L$  im Sinne des magnetisierenden Stromes.  $\frac{e}{mc}$  ist das in absoluten elektromagnetischen Einheiten gemessene Verhältnis von Ladung zur Masse eines Elektrons ( $1,77 \cdot 10^7$  cgs). Die Elektronen beschreiben also im

Magnetfeld dieselben Bahnen wie ohne Feld, nur bezogen auf ein Koordinatensystem, das mit der Geschwindigkeit  $w_L$  um die Feldachse rotiert.

Voraussetzung dabei ist, daß die Gleichgewichtslagen der Elektronen auf einer der Feldrichtung parallelen Geraden liegen, daß alle gleiche Ladung und Masse haben und daß die auf die Elektronen wirkenden Kräfte symmetrisch zur Feldachse sind. Die Bedingung, daß die durch die Larmorrotation allein hervorgerufene Geschwindigkeit der Elektronen klein gegen ihre ursprüngliche Geschwindigkeit ist, ist auch noch bei den höchsten erreichbaren Feldstärken erfüllt und macht somit bei den Berechnungen keine Schwierigkeiten.

Aus dem Larmorschen Satz läßt sich nun in elementarer Weise die magnetische Drehung der Polarisationsebene und die sogenannte Becquerelsche Formel ableiten, die den wichtigsten Zusammenhang zwischen Magnetrotation und Dispersion gibt. Ausgangsgleichung sei also der Larmorsche Satz [Gl. (7)], wobei angenommen wird, daß die einzigen beweglichen Teile symmetrisch zur Feldachse gebundene Elektronen sind. Beim Faradayeffekt pflanzt sich eine linear polarisierte Welle parallel den Kraftlinien eines Magnetfeldes in der untersuchten Substanz fort. Nach Fresnel läßt sich diese Welle in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen zerlegen mit der Umlaufgeschwindigkeit  $w$ . Relativ zu dem mit der Geschwindigkeit  $w_L$  rotierenden Koordinatensystem haben die beiden Wellen die Frequenzen  $w + w_L$  und  $w - w_L$ . Läuft das Licht speziell in Richtung des magnetischen Feldes, so hat die positiv rotierende Welle relativ zu dem gleichsinnig rotierenden Koordinatensystem die Frequenz  $w - w_L$ , die negativ rotierende Welle die Frequenz  $w + w_L$  und es folgt aus der schon gegebenen Darstellung des Drehwinkels der Polarisationsebene

$$\alpha = \frac{w^2}{2c} (n_- - n_+) = \frac{wL}{2c} [n(w + w_L) - n(w - w_L)] \quad (8)$$

Hierin steckt die Annahme, daß in allen Teilen der von der Frequenz abhängigen Funktion  $n(w)$  die Größe  $w$  durch  $w \pm w_L$  ersetzt werden kann.

Ist  $w_L$  klein gegen  $w$  und befindet man sich mit  $w$  nicht in unmittelbarer Nähe einer Eigenfrequenz der Substanz, dann kann die Näherung

$$n(w \pm w_L) \approx n(w) \pm w_L \frac{\partial n}{\partial w} \quad (9)$$

gemacht werden.

Setzt man dies in Gleichung (8) ein und benutzt man, daß  $w \frac{\partial n}{\partial w} = -\lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda}$  ist, so erhält man die Becquerelsche Formel:

$$\alpha = -\frac{w_L \ell}{c} \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} = \frac{\ell e}{2mc^2} H \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \quad (10)$$

die das quantitative Gesetz des Faradayeffektes und die Abhängigkeit dieses Effektes von der Wellenlänge (die Dispersion der Magnetorotation) liefert.

Da die elektrische Ladung  $e$  des Elektrons ein negatives Vorzeichen hat und bei normaler Dispersion  $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$  kleiner als Null ist, erhält man einen Drehwinkel  $\alpha$  der Polarisationsebene, der größer als null ist. Das heißt, die Drehung der Polarisationsebene erfolgt im Sinne der magnetisierenden Ströme als positive Drehung, wie es auch im allgemeinen beobachtet wird.

### 3. Versuchsaufbau und Versuchsbeschreibung

Der Aufbau des Versuches für den Faradayeffekt wurde im wesentlichen in der ursprünglichen Form belassen.

Die Spule, welche zur Erzeugung eines H-Feldes von etwa 500 Oersted bei 5 Ampère dient, wurde restauriert und die eingebaute Wasserkühlung für das zu untersuchende Material neu abgedichtet. Die Spule dient gleichzeitig als Halterung für die zu untersuchende Probe, die bisher aus einer Wasserküvette bestand und nun gegen einen Schwer-Flint Glasstab von 150 mm Länge ausgetauscht wurde. Da die Verdetkonstante von Schwer-Flint etwa dreieinhalbmal größer ist als die von Wasser, wurde dadurch

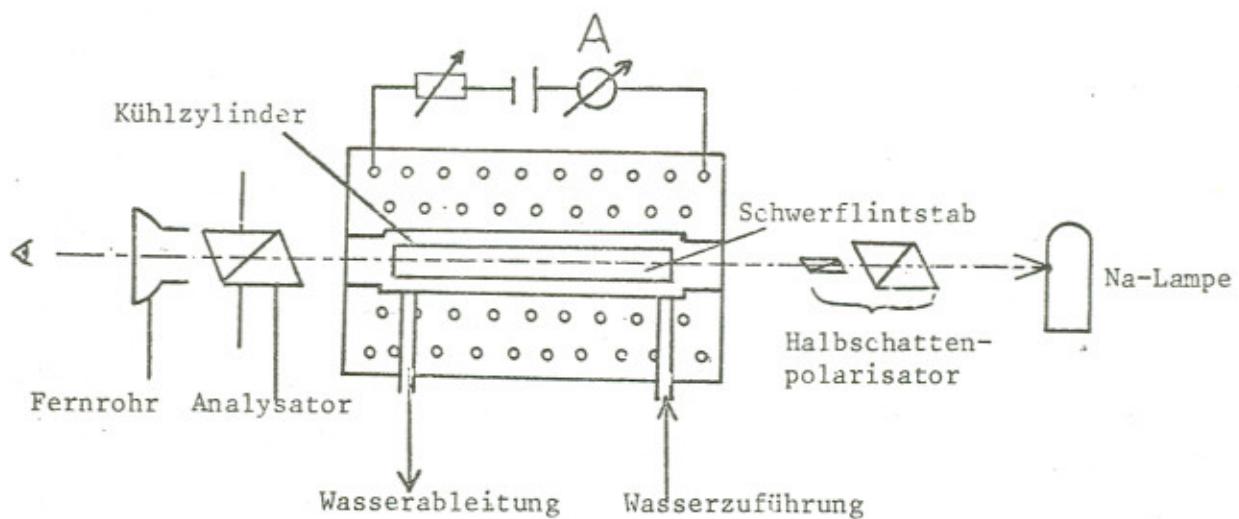


Bild 1 Versuchsaufbau

der Effekt um das dreieinhalbache vergrößert. Die Natriumlampe als ursprüngliche Lichtquelle wurde wieder verwendet. Zwischen Lichtquelle und Spule befindet sich ein Halbschattenpolarisator, welcher im wesentlichen das unpolarisierte Licht der Na-Lampe linear polarisiert. Das aus dem magnetooptischen Material austretende Licht wird durch ein Fernrohr und einen davor geschalteten Analysator mit dem Auge beobachtet. Der Analysator ist drehbar und hat eine Ableseskala für den zu messenden Drehwinkel. Das zur Verfügung stehende Stromversorgungsgerät ermöglicht Ströme kontinuierlich regelbar von 0 bis 5 Ampère.

#### 4. Methode der Winkelbestimmung

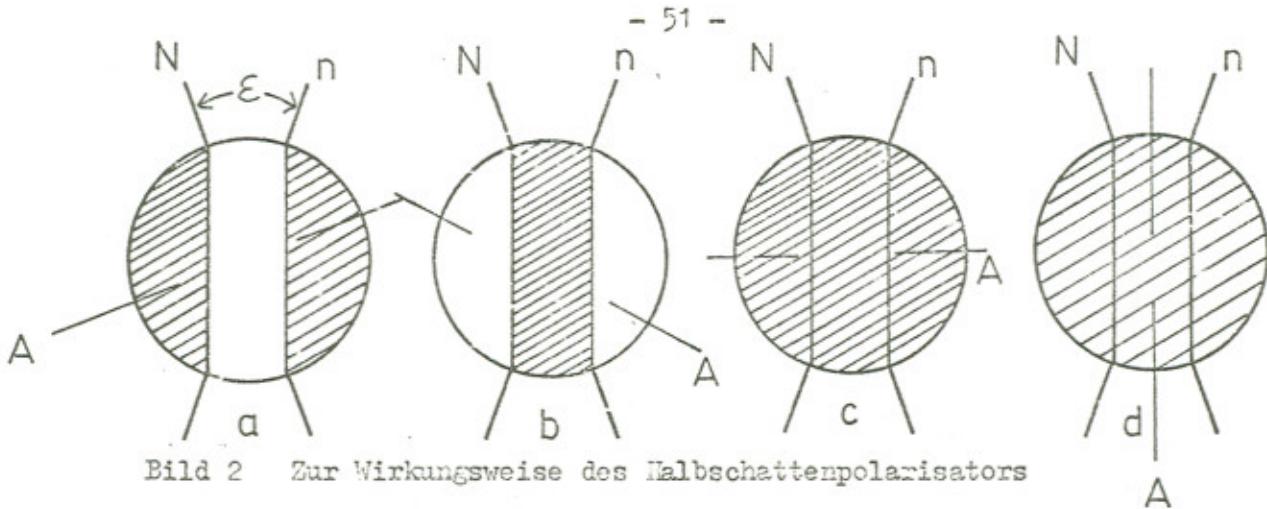
Zur Messung des Winkels, um den sich die Polarisationsebene des linear polarisierten Lichtes in Abhängigkeit vom Strom dreht, wird ein Halbschattenpolarisator in Verbindung mit einem zweiten Polarisator benutzt,

der als Analysator dient. Zwischen beiden befindet sich der optisch aktive Stoff.

Ein Halbschattenpolarisator besteht aus einem großen und einem kleinen Nicol. Während das große Nicol das gesamte Gesichtsfeld ausfüllt und das einfallende Licht der Na-Lampe linear polarisiert, dreht das kleine Nicol die Schwingungsebene des linear polarisierten Lichtes eines Teiles des Gesichtsfeldes um einen kleinen Winkel  $\alpha$ . Deshalb beobachtet man im Fernrohr hinter dem Analysator verschiedene Helligkeitsbereiche, die durch Drehung des Analysators nicht gleichzeitig ausgelöscht werden können, aber auch nicht gleichzeitig maximale Helligkeit haben können.

Es gibt allerdings Einstellungen (siehe Darstellung in Bild 2), für die die Bereiche gleich hell beziehungsweise gleich dunkel gemacht werden können. Den letzteren Fall nutzt man aus, um eine relative Polarisationsrichtung festzulegen, da das Auge bei dunklen Feldern eine bessere Entscheidungsfähigkeit für gleichmäßige Intensität besitzt.

Im Experiment nimmt man bei ausgeschaltetem H-Feld die beschriebene Einstellung des Analysators auf gleichmäßige Dunkelheit vor. Wird das H-Feld nun eingeschaltet, so hat dies eine Drehung der Polarisationsebene zur Folge und der Analysator muß entsprechend nachgedreht werden, um wieder gleichmäßige Dunkelheit zu haben. Die Differenz der Analysatoreinstellungen vor und nach dem Einschalten des H-Feldes ergibt den Drehwinkel  $\alpha$  der Polarisationsebene zu dem entsprechenden Spulenstrom. Aus  $\alpha$ , dem Strom  $I$  und der Länge  $l$  des magnetooptischen Materials kann nach der Formel (1) die Verdetkonstante  $V$  berechnet werden, sofern  $H$  als Funktion von  $I$  bekannt ist. Diese Funktion  $H(I)$  wird im folgenden berechnet.

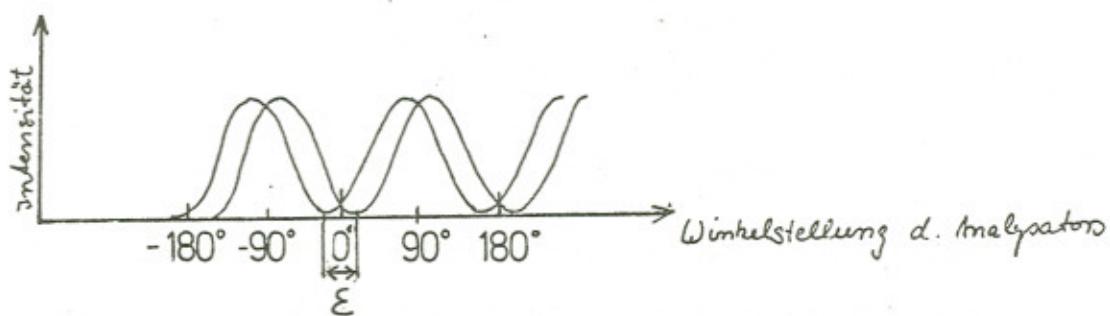


N = Polarisationsrichtung des großen Nicols

n = Polarisationsrichtung des kleinen Nicols

A = Polarisationsrichtung des Analysators

Intensitätsverlauf für die beiden Nicols in Abhängigkeit von der Stellung des Analysators:



### 5. Berechnung des Magnetfeldes der Spule als Funktion der Koordinate der Spulenachse

Ausgangspunkt ist das Biot-Savartsche Gesetz

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I \cdot dl}{r^2} \sin \varphi \quad \text{mit den Bezeichnungen nach Bild 3.}$$

Daraus ergibt sich für die

Feldstärke H auf der Achse eines Kreisstromes mit Radius 2x in Punkt P mit

Abstand l' vom Kreismittel-

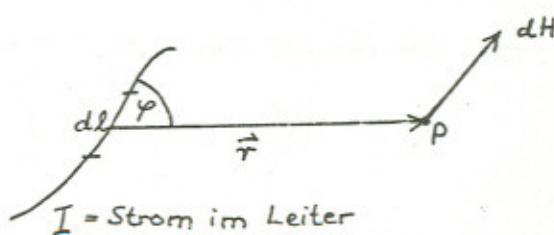


Bild 3

punkt ( $\sin \rho = 1$ ):

$$H = \frac{I}{2} \cdot \frac{x^2}{(x^2 + l^2)^{3/2}} \quad (11)$$

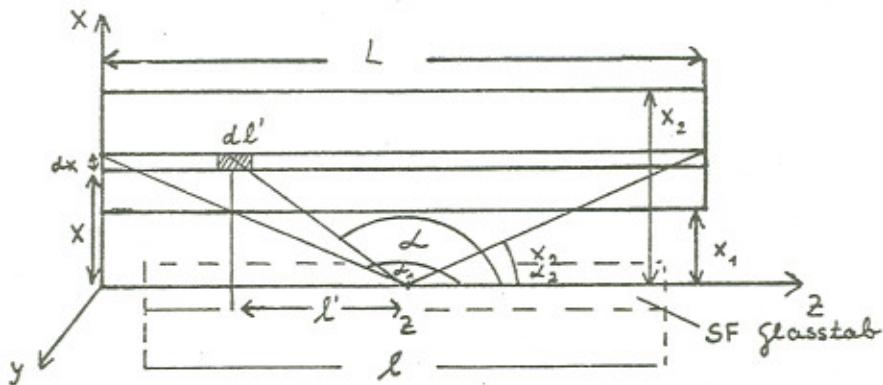


Bild 4 Daten:

Länge des SF Stabes:  $l = 150 \text{ mm}$

Länge der Spule  $L = 175 \text{ mm}$

Durchmesser der Spule:

$$\text{innen } 2x_1 = 20 \text{ mm}$$

$$\text{außen } 2x_2 = 150 \text{ mm}$$

Gesamtzahl der WD  $N = 3600$

Betrachtet man nun als Kreisstrom den Strom  $dI$  durch die differenzielle Fläche  $dL' dx$  (Bild 4), so ergibt sich der Betrag von  $dI$  durch  $dL' dx$  zum gesamten H-Feld der Spule zu:

$$dH = \frac{dI}{2} \cdot \frac{x^2}{(x^2 + l^2)^{3/2}} \quad (12)$$

wobei  $dI$  errechnet wird aus  $\frac{NI dx dL'}{L(x_2 - x_1)} = dI$

$I$  ist der Spulenstrom.

$dI$  in (12) eingesetzt und über Länge und Dicke der Spule integriert ergibt das gesamte H-Feld  $H(z)$  der Spule am Ort  $z$  auf der Spulenachse.

$$H(z) = \frac{N \cdot I}{2L(x_2 - x_1)} \int_{-z}^{L-z} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{(x^2 + l^2)^{3/2}} dx dL' \quad \left| \begin{array}{l} \text{zur Substitution:} \\ \cos \theta = \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{NI}{2L(x_2 - x_1)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{x_1}^{x_2} dx (-\sin \alpha) d\alpha \\
 &= \frac{NI}{2L(x_2 - x_1)} \int_{x_1}^{x_2} dx (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \\
 &= \frac{NI}{2L(x_2 - x_1)} \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{L-z}{(x^2 + (L-z)^2)^{1/2}} + \frac{z}{(x^2 + z^2)^{1/2}} \right\} \\
 H(z) &= \frac{NI}{2L(x_2 - x_1)} \left\{ (L-z) \ln \frac{x_2 + \sqrt{(L-z)^2 + x_2^2}}{x_1 + \sqrt{(L-z)^2 + x_1^2}} + z \ln \frac{x_2 + \sqrt{z^2 + x_2^2}}{x_1 + \sqrt{z^2 + x_1^2}} \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Für das Feld in der Mitte der Spule ( $z = \frac{L}{2}$ ) ergibt sich damit:

$$H\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{NI}{2L(x_2 - x_1)} \left\{ L \ln \frac{x_2 + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x_2^2}}{x_1 + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x_1^2}} \right\}$$

Für die angegebenen Daten der Spule und einen Strom  $I = 10$  Amp. errechnet sich  $H\left(\frac{L}{2}\right)$  zu 1032 Oe.

#### 6. Berechnung des Drehwinkels $\alpha$

$$\begin{aligned}
 d\alpha &= V H(z) dz \Rightarrow \alpha = V \int_{\frac{L-\ell}{2}}^{\frac{L+\ell}{2}} H(z) dz \\
 \alpha &= \underbrace{\frac{VNI}{2L(x_2 - x_1)}}_{= A} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\frac{L-\ell}{2}}^{\frac{L+\ell}{2}} \frac{z}{\{x^2 + z^2\}^{1/2}} + \frac{L-z}{\{x^2 + (L-z)^2\}^{1/2}} dz dx \\
 &= A \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \sqrt{x^2 + \left(\frac{L+\ell}{2}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(\frac{L-\ell}{2}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(\frac{L-\ell}{2}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{L+\ell}{2}\right)^2} \right\} \\
 &= 2A \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \sqrt{x^2 + \left(\frac{L+\ell}{2}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(\frac{L-\ell}{2}\right)^2} \right\} \\
 &= 2A \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sqrt{x^2 + \left(\frac{L+\ell}{2}\right)^2} + \left(\frac{L+\ell}{2}\right)^2 \ln \left( x + \sqrt{x^2 + \left(\frac{L+\ell}{2}\right)^2} \right) \right] \right\}_{x_1}^{x_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \left[ x \sqrt{x^2 + (\frac{L+l}{2})^2} + (\frac{L+l}{2})^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + (\frac{L+l}{2})^2}) \right]_{x_1}^{x_2} \\
 & = A \{ x_2 (\sqrt{x_2^2 + (\frac{L+l}{2})^2} - \sqrt{x_1^2 + (\frac{L+l}{2})^2}) - x_1 (\sqrt{x_1^2 + (\frac{L+l}{2})^2} - \sqrt{x_2^2 + (\frac{L+l}{2})^2}) \\
 & \quad + (\frac{L+l}{2})^2 \ln \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + (\frac{L+l}{2})^2}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + (\frac{L+l}{2})^2}} - (\frac{L+l}{2})^2 \ln \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + (\frac{L+l}{2})^2}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + (\frac{L+l}{2})^2}} \}
 \end{aligned}$$

mit den Daten für  $L$ ,  $l$ ,  $x_1$  und  $x_2$  folgt:

$$\underline{\underline{\alpha}} = A \cdot 16157 = \underline{\underline{VI \cdot 2556}} \quad (14)$$

Wird jetzt der Drehwinkel  $\alpha$  zu dem entsprechenden Strom gemessen, so lässt sich mit (14) sofort die Verdetkonstante berechnen.

#### 7. Meßwerte und Meßergebnis

Etwa fünfzehn Minuten vor Beginn der Messung wurde die Wasserkühlung für das magnetooptische Material aus Schwer Flint Glas in der Spule eingeschaltet, um den Glasstab auf möglichst gleichmäßiger Temperatur zu halten. Die Messungen wurden bei einem Strom von - 5 Amp. begonnen und in 0,5 Amp. Schritten bis + 5 Amp. wiederholt. Die Meßwerte sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Strom I (Amp.)	abgelesene Winkelstellung des Analysators					Mittelwert der Meßwerte zum Strom I
- 5,0	166,8	166,65	166,8	166,75	166,75	166,75
- 4,5	168,1	168,1	168,15	168,15	168,2	168,14
- 4,0	169,5	169,55	169,55	169,5	169,55	169,53
- 3,5	170,85	170,75	170,8	170,9	170,8	170,82
- 3,0	172,25	172,15	172,15	172,1	172,1	172,15
- 2,5	173,5	173,45	173,5	173,55	173,5	173,47
- 2,0	174,95	174,95	174,9	174,95	174,95	174,94
- 1,5	176,25	176,4	176,35	176,3	176,3	176,32
- 1,0	177,75	177,7	177,75	177,8	177,75	177,75
- 0,5	179,05	179,0	179,15	179,1	179,05	179,07
0,0	0,4	0,5	0,45	0,45	0,45	0,45

0,5	1,8	1,8	1,85	1,9	1,8	1,83
1,0	3,2	3,2	3,25	3,25	3,2	3,22
1,5	4,55	4,55	4,6	4,65	4,6	4,59
2,0	5,95	5,95	6,0	6,0	6,0	5,98
2,5	7,4	7,35	7,35	7,35	7,35	7,36
3,0	8,75	8,725	8,65	8,7	8,65	8,695
3,5	10,225	10,15	10,1	10,15	10,1	10,145
4,0	11,4	11,4	11,35	11,4	11,4	11,39
4,5	12,75	12,75	12,75	12,75	12,75	12,75
5,0	14,2	14,25	14,25	14,15	14,2	14,21

Der gesamte Drehwinkel pro 10 Amp. beträgt  $27,46^\circ$ .

Das sind 1647,6 Min/10 Amp.

Mit Gleichung (14) berechnet sich die Verdetkonstante von Schwer Flint

Glas  $V_{SF}$  zu:

$$V_{SF} = \frac{\alpha}{I \cdot 2556} = 1,074 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Grad}}{\text{Amp.}} = 0,0513 \frac{\text{Min}}{\text{Oe cm}}$$

$$1 \text{ Amp} \hat{=} \frac{100}{79,59} \text{ Oe cm}; \quad 1 \text{ Grad} \hat{=} 60 \text{ Min.}$$

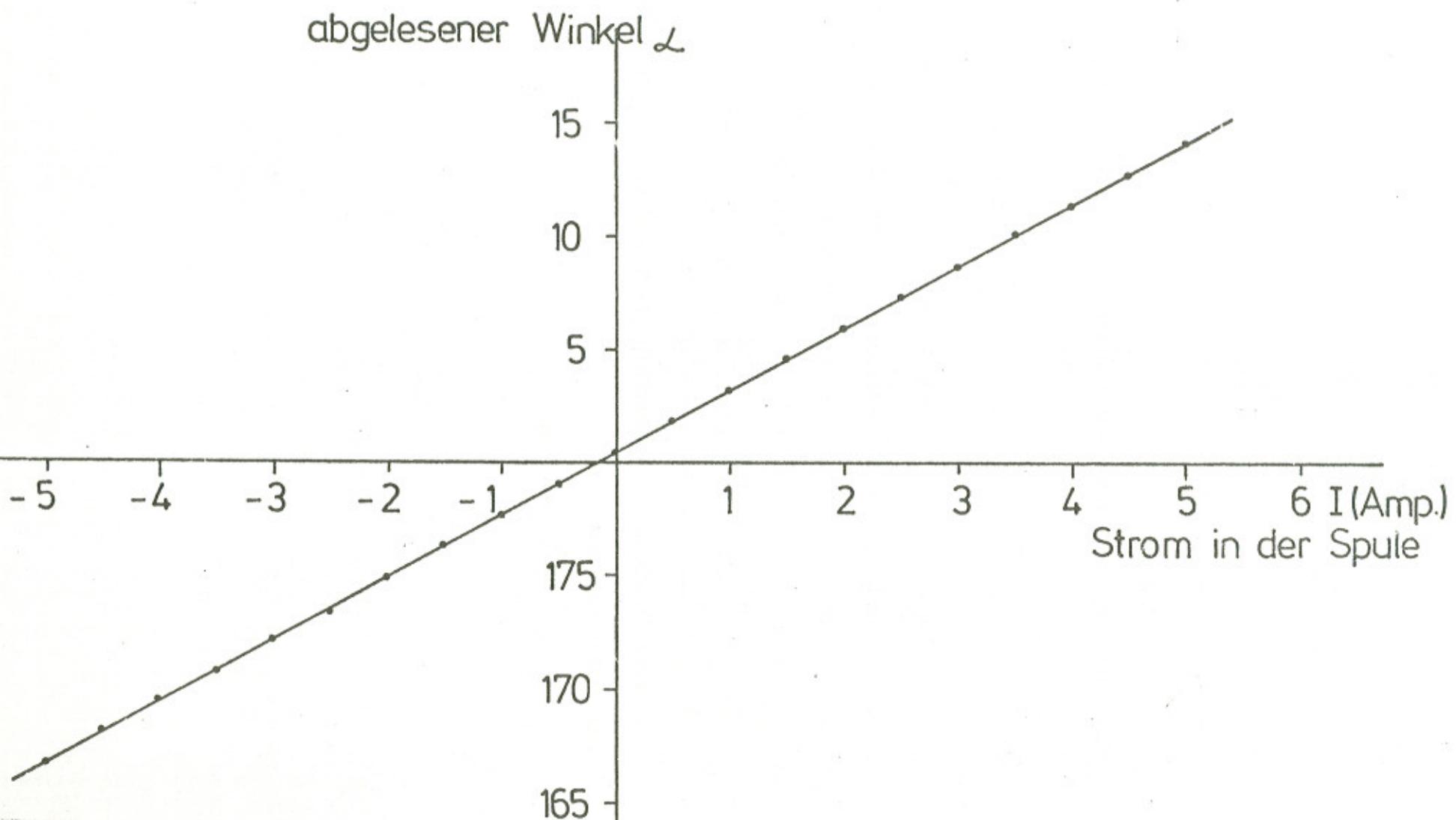
Da die Verdetkonstante zusätzlich von der Wellenlänge des verwendeten Lichtes abhängt, muß diese zur Vervollständigung hinzugefügt werden.

$$\lambda_{\text{NaD}} = 5890 \text{ \AA}$$

$$V_{SF}(5890 \text{ \AA}) = 0,0513 \frac{\text{Min}}{\text{Oe cm}}$$

Die Herstellerfirma des Schwerflintglasstabes gibt  $V_{SF}$  ohne Hinweis auf die Wellenlänge mit

$$V_{SF} = 0,05 \frac{\text{Min}}{\text{Oe cm}} \quad \text{an.}$$



Die Gerade geht nicht durch den Nullpunkt. Das liegt daran, weil die Winkelablesevorrichtung bei gleichmäßiger Dunkelheit ohne Feld nicht auf den Winkel 0 einjustiert ist.

Literatur:

1.) Zum Faraday-Effekt:

- a) Müller-Pouillet: Lehrbuch d. Physik, Bd. II, 2 II  
Seite 2119 ff., 2136 ff. (Hb4)
- b) Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XVI  
Seite 58 ff. u. S. 80 ff (Hb1)
- c) Becker, Sauter: Theorie d. Elektrizität, Bd. III  
S. 180 ff (ED11a)
- d) Walcher: Praktikum der Physik S. 202 ff.
- e) Flügge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd. III  
S. 248 ff. (ThA57)

2.) Zum Pockels-Effekt: (zusätzlich zu c) und e) von oben)

- f) J.F. Nye: Physical Properties of Crystals  
S. 110-124, 235-259, 276-288, 305-309 (FA12)
- g) A. Yariv: Quantum Electronics  
S. 296-315 (L4)
- h) B. Zwicker and P. Scherrer: Helv. Phys. Acta 17, 1944  
S. 346-352 (ZH 100)
- i) Kleen/Müller: Laser (L7)
- j) Kaminov I.P. Turner Proc. IEEE 54 (1966) p. 1374-1390
- k) T.R. Sliker a. S.R. Burlage, J. Appl. Phys. vol. 34 pp.  
1837-1840, July 1963
- l) B.H. Billings, J. Opt. Soc. Am. 39 p. 797 (1949)

Anmerkung: Der elektrooptische Koeffizient wird

in f) mit  $z_{ij}$

in g) mit  $r_{ij}$

in h) mit  $f_{ij}$  (elektrooptischer Modul erster Ordnung) bezeichnet.

Herrn Dr. Baumgartner möchte ich danken für die Betreuung dieser  
Arbeit und die hilfreichen Anregungen bei der Durchführung.