

機械構造弾性力学

付録：有限要素プログラムと例題入力 ファイル

(プログラムファイルは別添)

小松敬治

平成 25 年 9 月 10 日

目 次

| | | |
|----------|---------------------------|-----------|
| 1 | はじめに | 1 |
| 1.1 | 本付録の目的 | 1 |
| 1.2 | プログラム言語について | 1 |
| 1.3 | MATLAB のコマンド概要 | 2 |
| 2 | 本書でのプログラムの実行法 | 4 |
| 3 | 2 次元問題 | 4 |
| 3.1 | 平面問題プログラム PLANE6S | 4 |
| 3.2 | 2 次元軸対称問題解析プログラム PLANE2AS | 11 |
| 4 | 板の曲げ問題プログラム SMAT9 | 17 |
| 5 | 3 次元骨組構造 BEAM3S | 24 |
| 5.1 | 使用法 | 24 |
| 5.2 | BEAM3S のプログラム | 27 |
| 6 | 軸対称シェルの有限要素プログラム | 31 |

| プログラム名 | 説明 | 本書での説明箇所 |
|-----------|------------|--------------------|
| TRUSS3S | 立体トラス | 6.2 |
| PLANE6S | 2次元応力解析 | 6.5.1 |
| PLANE2AS | 2次元軸対称問題 | 6.5.2 |
| SMAT9S | 板の曲げ問題 | 6.6 |
| BEAM3S | 立体骨組構造 | 6.4.3 |
| THERM2AXI | 2次元軸対称熱伝導 | 7.7 |
| S8S | 回転シェルの応力解析 | 8.6 (S8SB がディレクトリ) |
| S8B | 回転シェルの座屈 | 8.8 (S8SB がディレクトリ) |

表 1: プログラム一覧

1 はじめに

1.1 本付録の目的

本付録では、「小松敬治著：機械構造弾性力学，2013，森北出版」（以下，本書という）において説明した有限要素法の具体的なプログラムを提供する．これらのプログラムは表 1 に示すようなプログラムである．プログラムと例題入力ファイルはこの付録とは別にテキストファイル（m-ファイル）でそれぞれのディレクトリに格納して読者に提供している．

本付録では本書で十分に説明できていない有限要素プログラムに関して補足する．立体トラス，2次元軸対称熱伝導，シェルの応力解析，座屈解析については本書で説明してあるので，プログラムを提供するのみで説明は行わない．

表 1 のプログラムは `programs.zip` という圧縮ファイルに入っているので，解凍すれば上記サブディレクトリが展開される．

1.2 プログラム言語について

本書ではプログラム言語としては MATLAB を使っている．これは MATLAB が世界的に広く使われている技術者用の言語であることが理由である．さらに，MATLAB が高価で入手できない場合でも MATLAB と互換性（完全互換ではない）のある無料の言語が使える．

MATLAB の互換言語としては

- OCTAVE
- SCILAB
- FreeMat
- SciPy
- MATX

などがある。この互換言語はいずれも無償のソフトウェアで、上記名前で検索すればダウンロードサイトがみつかり、取り扱い説明とともに本体プログラムがダウンロードできる。検索すればわかるようにたくさんの人が解説も投稿しており、出版物としてもいろいろな解説書が出されている。たとえば

上坂吉則著：MATLAB+Scilab プログラム事典，2007，SoftbankCreative
には **MAL**TAB のあるコマンドに相当する Scilab のコマンドが併記されている。以下に簡単に本書で用いる程度の MATLAB 言語の説明をしておく。

1.3 MATLAB のコマンド概要

ここから MATLAB における演算の入力と出力例を示す。

```
>> (ここに MATLAB のコマンドが入る)
      (改行されて結果が示される)
```

という記述となっている。
ベクトルの入力

```
>> a=[1 2 3]
又は
>> a=[1,2,3]
a = 1 2 3
```

行列の入力

```
>>B=[1 2 3;2 0 4;1 1 1]
B =1 2 3
    2 0 4
    1 1 1
```

行列やベクトルの転置

```
>>a1=a'
a1 = 1
    2
    3
```

行列とベクトルの掛け算

```
>>c=B*a1
c = 14
    14
    6
```

逆行列

```
>>B1=inv(B)
B1 =-0.6667 0.1667 1.3333
    0.3333 -0.3333 0.3333
    0.3333 0.1667 -0.6667
```

連立一次方程式

```
>>a1=B\c
a1 = 1
      2
      3
```

行列やベクトルのサイズ

```
>>D=size(B)
D = 3 3
```

行列やベクトルの成分

```
>>B(2,3)
ans = 4
```

その他の演算

| | |
|-------------------------|----------------|
| コメント | %以後の文は無視 |
| π | pi (予約語) |
| 実行結果 | ans = (実行結果) |
| 出力の抑制 | コマンドの後に ; をつける |
| 4×5 のゼロ行列 | zeros(4,5) |
| 4×5 の成分が 1 の行列 | ones(4,5) |
| 1 2 3 4 5 の連続した数の生成 | 1:5 |
| 行列 A の行列式 | det(A) |

For コマンド

```
for I=1:5
    繰り返したいコマンド
end
```

If-Else コマンド

```
if 条件文
    条件が合えばここに書いたコマンドを実行
else
    条件が合わなければここに書いたコマンドを実行
end
```

サブルーチン

a, b, c を引数とするサブルーチンの名前が com1 のとき、結果が A, KEKKA の 2 つの変数で返される場合

```
>>[A,KEKKA]=com1(a,b,c)
```

2 本書でのプログラムの実行法

例として、立体トラス構造の解析プログラム TRUSS3S の実行法を説明する。森北 HP からダウンロードした TRUSS3S のディレクトリを自分のパソコンの

```
D:\TRUSS3S
```

に格納したとする。このディレクトリの中には

```
TRUSS3S.m    INPUT6.m    MODESH.m    PREREA3.m
```

の m-ファイル (MATLAB で実行できるファイル, テキストファイルである) がある。本書の図 6.5 の立体トラスの荷重問題を解析する。本書のプログラム 6.1 のような入力ファイル (INPUT6.m) をエディターで作成しておく。MATLAB のソフトを開始して、TRUSS3S のディレクトリにパスを通しておく。たとえば

```
>>path(path,'D:\TRUSS3S')
```

とコマンドを打てばよい。こうしておいて

```
>>[BUZAI,REACT3,DISP3,XX,YY,ZZ,KAKOM]=TRUSS3S;
```

と入力すれば、解析が実行される。末尾の「;」は出力の抑制であるので、「;」を入れなければ、計算された

```
BUZAI,REACT3,DISP3,XX,YY,ZZ,KAKOM
```

がすべて表示される。ふつう、出力は抑制しておいて、たとえば計算された変形量が必要なら

```
>>DISP3
```

と入力すれば、それらの数値が表示される。

変形前の図と変形後の図を重ね描きしたければ、

```
>>MODESH(1,10000,DISP3,XX,YY,ZZ,KAKOM)
```

とすれば図 6.5 が表示される。最初の引数 1 は変形前と変形後の重ね書き指定 (0 にすれば変形前の図を描く)、次の引数 10000 は寸法通りの変形だと見えないので、変形を拡大表示する数値である。

3 2次元問題

3.1 平面問題プログラム PLANE6S

本書の 6.5.1 項に基づく平面問題のプログラムを以下に示す。入力ファイルは DATAIN.m で、その中で IP=1 とすれば平面応力問題、IP=0 とすれば平面ひずみ問題を解くことになる。

[プログラム] 平面問題プログラム PLANE6S

```
%-----主プログラム-----
function [UV,STRESS]=PLANE6S
[XY,D,FORCE,KOTEI,KAKOM,T]=DATAIN4
[NODT,DIM]=size(XY);
[NELT,KAKU]=size(KAKOM);
[NOFIX,JIYU]=size(KOTEI);
NT=NODT*(JIYU-1);
TK=zeros(NT,NT);
for NE=1:NELT
    K3=KAKOM(NE,1:3);
    X=XY(K3,1);Y=XY(K3,2);
    SM=STIFF(D,X,Y,T);
    TK=ASMAT(TK,SM,KAKOM,NE);
end
%
[TK,FNT,MM,KY]=PREREA(TK,FORCE,NT,KOTEI);
W=TK\FNT';
W=ARRMAT(W,NT,MM,KY);
UV=reshape(W,2,NODT)
%
STRESS=zeros(NELT,6);
for NE=1:NELT
    K3=KAKOM(NE,1:3);
    X=XY(K3,1);Y=XY(K3,2);
    IA=[K3(1)*2-1,K3(1)*2,K3(2)*2-1,K3(2)*2, K3(3)*2-1,K3(3)*2];
    DS=W(IA);
    [STR,HZM]=STRMAT(D,X,Y,T,DS);
    STRESS(NE,:)=STR;
end
'OUTPUT UVWB : u , v '
'OUTPUT STRESS : sig_r, sig_t, tau_rt sig_1 sig_2 theta'
%-----入力サブルーチン-----
function [XY,D,FORCE,KOTEI,KAKOM,T]=DATAIN
IP=1; % IP=1:plane stress, IP=2:plane strain
XY=[0 0; 0 2;1.414 1.414; 2 0;0 3.5;1.75 3.301
    3.301 1.75;3.5 0;0 5;1.913 4.619; 3.536 3.536
    4.619 1.913; 5 0];
KAKOM=[1 3 2;1 4 3;2 6 5;3 6 2;3 7 6
    4 7 3;4 8 7;5 10 9;6 10 5;6 11 10
    7 11 6;7 12 11; 8 12 7; 8 13 12];
KOTEI=[1 1 1;2 1 0;4 0 1; 5 1 0
    8 0 1;9 1 0;13 0 1 ];
FORCE=[9 0 -500];
E=220000;P0=0.2;T=3;
% ---- end data input -----
if IP == 1
    Peq=P0;Eeq=E/(1-P0*P0);P2=(1-P0)/2;
else
    Peq=P0/(1-P0);P2=(1-2*P0)/2/(1-P0);
    Eeq=E*(1-P0)/(1+P0)/(1-2*P0);
end
D=Eeq*[1 Peq 0;Peq 1 0;0 0 P2];
%-----要素剛性行列-----
function [SM]=STIFF(D,X,Y,T)
X1=X(1);X2=X(2);X3=X(3);Y1=Y(1);Y2=Y(2);Y3=Y(3);
A=0.5*(X2*Y3+X1*Y2+X3*Y1-X2*Y1-X3*Y2-X1*Y3);
B=zeros(3,6);
```

```

B(1,1)=Y2-Y3;B(1,3)=Y3-Y1;B(1,5)=Y1-Y2;
B(2,2)=X3-X2;B(2,4)=X1-X3;B(2,6)=X2-X1;
B(3,1)=X3-X2;B(3,2)=Y2-Y3;B(3,3)=X1-X3;
B(3,4)=Y3-Y1;B(3,5)=X2-X1;B(3,6)=Y1-Y2;
B=B/(2*A);
SM=A*T*((B') * D * B);
%-----全体剛性行列の作成-----
function [TK]=ASMAT(TK,SM,KAKOM,NE)
KI=(KAKOM(NE,1)-1)*2+(1:2);
KJ=(KAKOM(NE,2)-1)*2+(1:2);
KK=(KAKOM(NE,3)-1)*2+(1:2);
TK(KI,KI)=TK(KI,KI)+SM(1:2,1:2);
TK(KI,KJ)=TK(KI,KJ)+SM(1:2,3:4);
TK(KI,KK)=TK(KI,KK)+SM(1:2,5:6);
TK(KJ,KI)=TK(KJ,KI)+SM(3:4,1:2);
TK(KJ,KJ)=TK(KJ,KJ)+SM(3:4,3:4);
TK(KJ,KK)=TK(KJ,KK)+SM(3:4,5:6);
TK(KK,KI)=TK(KK,KI)+SM(5:6,1:2);
TK(KK,KJ)=TK(KK,KJ)+SM(5:6,3:4);
TK(KK,KK)=TK(KK,KK)+SM(5:6,5:6);
%-----要素の応力計算-----
function [STR,HZM]=STRMAT(D,X,Y,T,DS)
STR=0*(1:6);
X1=X(1);X2=X(2);X3=X(3);Y1=Y(1);Y2=Y(2);Y3=Y(3);
A=0.5*(X2*Y3+X1*Y2+X3*Y1-X2*Y1-X3*Y2-X1*Y3);
B=zeros(3,6);
B(1,1)=Y2-Y3;B(1,3)=Y3-Y1;B(1,5)=Y1-Y2;
B(2,2)=X3-X2;B(2,4)=X1-X3;B(2,6)=X2-X1;
B(3,1)=X3-X2;B(3,2)=Y2-Y3;B(3,3)=X1-X3;
B(3,4)=Y3-Y1;B(3,5)=X2-X1;B(3,6)=Y1-Y2;
B=B/(2*A);
HZM=B*DS';STR(1:3)=D*HZM;
SX=STR(1);SY=STR(2);TXY=STR(3);
SQ=sqrt((SX-SY)^2+4*TXY^2);
STR(4)=0.5*(SX+SY+SQ);STR(5)=0.5*(SX+SY-SQ);
STR(6)=0.5*atan(2*TXY/(SX-SY));
%-----境界条件と外力の導入-----
function [TK,FNT,MM,KY]=prerea(TK,FORCEN,NT,KOTEI)
[NFIX,K]=size(KOTEI);[NFORCE,K]=size(FORCEN);
III=0;
for N=1:NFIX
    NODE=KOTEI(N,1);
    for JI=2:3
        if KOTEI(N,JI) ~=0
            III=III+1;
            KY(III)=(NODE-1)*2-1+JI;
        else
            end
        end
    end
end
NOFIX=III;
INDEX=1:NT;
INDEX(KY)=zeros(size(KY));
MM=0;
for N=1:NT
    if INDEX(N) ~= 0
        MM=MM+1;
        INDEX(MM)=N;
    else

```

```

    end
end
%
INDEX=INDEX(1:MM);
FNT=0*(1:NT);
for NA=1:NFORCE
    NODE=FORCEN(NA,1);
    NJ3=((NODE-1)*2)+(1:2);
    FNT(NJ3)=FORCEN(NA,2:3);
end
%
INDEX
MM
TK=TK(INDEX,INDEX);
FNT=FNT(INDEX);
%-----解析後拘束自由度に 0 を入れる-----
function [A]=ARRMAT(B,NT,MM,KY)
NS=size(KY);LL=0;
for NI=1:NT
    LL=LL+1;
    if sum(NI==KY)==1
        A(NI)=0;LL=LL-1;
    else
        A(NI)=B(LL);
    end
end
end
NODT=NT/2;
%-----変形表示-----
function MESH2DP(AMP,STRESS)
[XY,D,FORCE,KOTEI,KAKOM,T]=DATAIN4;
[NODT,DIM]=size(XY);
[NELT,KAKU]=size(KAKOM);
[NOFIX,JIYU]=size(KOTEI);
NT=NODT*(JIYU-1);
%
for NE=1:NELT
    K3=KAKOM(NE,1:3);
    X=XY(K3,1);Y=XY(K3,2);
    plot(X,Y),hold on
end
SC2=max(abs(STRESS(:,[4 5])));
SC=max(SC2);
AMAX=max(XY)/sqrt(NELT);A=AMAX*AMP/SC;
for NE=1:NELT
    K3=KAKOM(NE,1:3);
    XG=sum(XY(K3,1))/3;YG=sum(XY(K3,2))/3;
    S1=STRESS(NE,4);S2=STRESS(NE,5);TC=STRESS(NE,6);
    X11=XG-A*S1*cos(TC);X12=XG+A*S1*cos(TC);
    Y11=YG-A*S1*sin(TC);Y12=YG+A*S1*sin(TC);
    plot([X11 X12],[Y11 Y12]),hold on
    TS=TC+0.5*pi;
    X21=XG-A*S2*cos(TS);X22=XG+A*S2*cos(TS);
    Y21=YG-A*S2*sin(TS);Y22=YG+A*S2*sin(TS);
    plot([X21 X22],[Y21 Y22]),hold on
end
hold off
%-----

```

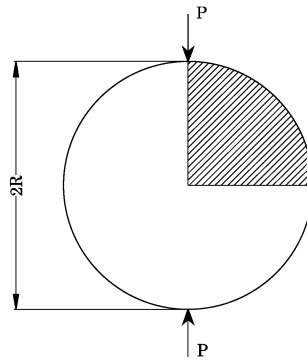



図 1: 円板の圧縮問題

[例題 1] 図 1 のような円板の圧縮問題を平面応力場として解け.

[解] 対称性から 1/4 を取り出して解析する. 数値は

$$E = 220000 \text{ kgf/cm}^2, \nu = 0.2, t = 3 \text{ cm}, R = 5 \text{ cm}, P = 1000 \text{ kg}$$

である. 結果をリストとして示す. u, v は平面内の変位, 応力に関しては

S_x S_y S_xy S_1 S_2 theta

は $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy} \sigma_1 \sigma_2 \theta$ のことである. 主応力を方向 θ を考慮に入れて要素ごとに重心上に描けば (AMP=1 としている) 図 2 のようになる. なお, 入力コマンドは

```
>> [UV,STRESS]=PLANE6S;
>> MESH2DP(1,STRESS)
```

で, 入力ファイルは INPUT4.m である. また, 図を出力する場合, MESH2DP.m の中で入力ファイルの読み出しを行っているので, その部分も例題によってファイル名を書き換えておく.

[出力] 例題 1 の出力例

| node | u | v |
|------|--------|---------------------|
| | | *10 ⁽⁻³⁾ |
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | -0.7031 |
| 3 | 0.1607 | -0.3261 |
| 4 | 0.2274 | 0 |
| 5 | 0 | -1.3464 |
| 6 | 0.1109 | -0.6387 |
| 7 | 0.2526 | -0.1573 |
| 8 | 0.2796 | 0 |
| 9 | 0 | -2.2405 |

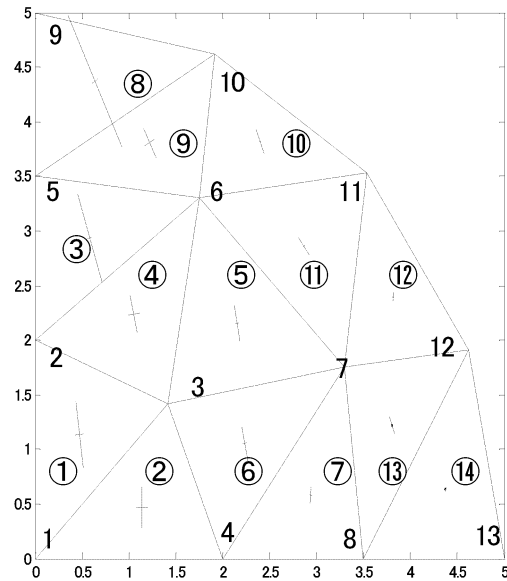


図 2: 主応力分布

| | | |
|----|---------|---------|
| 10 | -0.0864 | -0.7439 |
| 11 | 0.0683 | -0.2178 |
| 12 | 0.2590 | -0.0479 |
| 13 | 0.2829 | 0 |

| element | S_x | S_y | S_xy | S_1 | S_2 | theta |
|---------|----------|-----------|---------|---------|-----------|---------|
| 1 | 9.9378 | -75.3560 | 11.0857 | 11.3551 | -76.7733 | 0.1272 |
| 2 | 15.4889 | -47.6402 | -0.0033 | 15.4889 | -47.6402 | -0.0001 |
| 3 | -5.1346 | -95.3722 | 32.5998 | 5.4103 | -105.9171 | 0.3128 |
| 4 | 12.8270 | -41.1001 | 12.9177 | 15.7617 | -44.0348 | 0.2234 |
| 5 | 4.0430 | -40.4475 | 7.9409 | 5.4178 | -41.8223 | 0.1714 |
| 6 | 3.9233 | -38.8692 | 8.8407 | 5.6778 | -40.6237 | 0.1959 |
| 7 | 3.8578 | -18.9988 | -1.0520 | 3.9061 | -19.0472 | -0.0459 |
| 8 | -37.6688 | -138.6634 | 60.8313 | -9.1065 | -167.2258 | 0.4390 |
| 9 | 4.6053 | -27.2419 | 21.4964 | 15.4335 | -38.0700 | 0.4666 |
| 10 | -6.0445 | -25.5735 | 9.2652 | -2.3483 | -29.2696 | 0.3796 |
| 11 | -5.4223 | -15.6135 | 13.0638 | 3.5045 | -24.5403 | 0.5994 |
| 12 | 2.0045 | -9.6197 | -1.5542 | 2.2087 | -9.8239 | -0.1306 |
| 13 | -2.1189 | -17.8729 | 7.1596 | 0.6487 | -20.6405 | 0.3689 |
| 14 | -0.6481 | -5.6383 | -1.1079 | -0.4132 | -5.8732 | -0.2089 |

次に注意すべき解析対象を紹介する．2次元弾性論であれば，はりの曲げ理論を使わなくても，細長物体の曲げが解析できる．しかし，有限要素法の2次元要素で曲げ問題を扱うには注意が必要である．これを例題によって示す．

[例題 2] 図 3 のような片持ちはりが自由端で荷重が作用している場合のたわみを求めよ．

[解] 横×縦の要素分割を 8×2 , 8×4 , かつその長方形の中を2つの三角形要素で分割した解析, 4×2 分割の高次要素 (8 節点アイソパラメトリック平面要素) (例題終わり) で解析した結果を図に示す. 入力のプログラムは 8×4 (32 要素) の場合の入力データ例である.

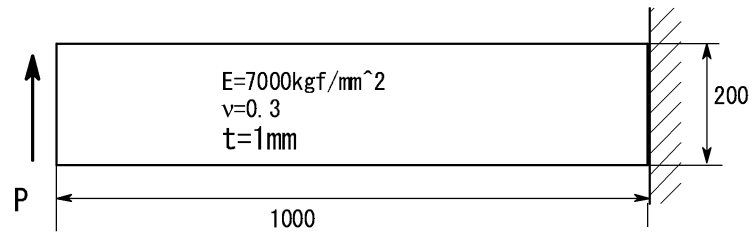


図 3: 曲げを受ける 2 次元体 ($P=1 \text{ kg}$)

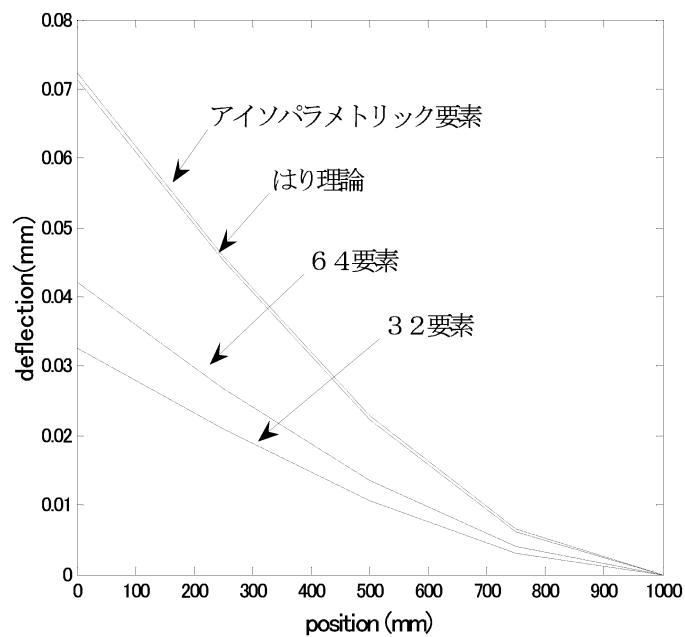


図 4: 変位量の比較

[入力] 片持ちはりを平面要素で解く場合

```
function [XY,D,FORCE,KOTEI,KAKOM,T]=DATAIN3
%example:FEMhandbook,Vol.2,p.430
IP=1; % IP=1:plane stress, IP=2:plane strain
NELT=64;NODT=45;
XY=zeros(NODT,2);
```

```

XY(1:9,1)=[0 125 250 375 500 625 750 875 1000];
XY(10:18,1)=XY(1:9,1);XY(19:27,1)=XY(1:9,1);
XY(28:36,1)=XY(1:9,1);XY(37:45,1)=XY(1:9,1);
XY(1:9,2)=0*(1:9);XY(10:18,2)=0*(1:9)+50;
XY(19:27,2)=0*(1:9)+100;XY(28:36,2)=0*(1:9)+150;
XY(37:45,2)=0*(1:9)+200;
KAKOM=zeros(64,3);
KAKOM(1,:)= [1 2 10];KAKOM(2,:)= [2 11 10];
for IG=1:4
    IP=(IG-1)*9;
    IE=(IG-1)*16;
    for NE=1:8
        N1=2*NE-1+IE;
        N2=2*NE+IE;
        KAKOM(N1,:)= [1 2 10]+(NE-1)+IP;
        KAKOM(N2,:)= [2 11 10]+(NE-1)+IP;
    end
end
KOTEI=[9 1 1;18 1 1; 27 1 1;36 1 1;45 1 1];
FORCE=[1 0 0.2;10 0 0.2;19 0 0.2;28 0 0.2;37 0 0.2];
E=7000;P0=0.3;T=1;
% ---- end data input -----
if IP == 1
    Peq=P0;Eeq=E/(1-P0*P0);P2=(1-P0)/2;
else
    Peq=P0/(1-P0);P2=(1-2*P0)/2/(1-P0);
    Eeq=E*(1-P0)/(1+P0)/(1-2*P0);
end
D=Eeq*[1 Peq 0;Peq 1 0;0 0 P2];

```

この例題からもわかるが、細長物体の曲げ変形に関して、低次の要素を適用すると、剛なモデリングとなる。これは本来生じないせん断変形が要素内部で生じて、せん断ひずみエネルギーが大きくなって剛性が高くなり、変形が実際より小さくなる。この現象を**ロッキング**といい、この現象は要素数を多くしても改善されず、この現象を回避する方法の一つは高次要素を使うことであるが、できれば、はりや板の曲げ問題として解析したほうがよい。

3.2 2次元軸対称問題解析プログラム PLANE2AS

本書 6.5.2 項に基づく軸対称要素による 2 次元応力場のプログラムを示す。データ入力のところで

```

-----
IPLANE=0 : 平面応力
          1 : 平面ひずみ
-----

```

とるようにしている。

[プログラム] 2次元軸対称問題 PLANE2AS

```
%-----主プログラム-----
function [UVWB,STRNODE,STRESS]=RUNAXI(NFU)
%+++++++データ入力+++++++
[IPLANE,EYOUNG,PO,NELT,RR,TT,KOTEI,NFORCE,FORCE,NPRESS,PRESS]=DATAINPUT3;
% (... は継続行)
%+++++++ force vector ++++++
NODT=NELT+1;NT=2*NODT;% 1 節点 2 自由度
FNT=zeros(1,NT);% 外力ベクトルの初期化
if NFORCE ~=0% 集中荷重がある場合, その数 NFORCE
    for IFN=1:NFORCE
        IN=(FORCE(1,1)-1)*2+(1:2);
        FNT(IN)=FNT(IN)+FORCE(1,(2:3));
    end
else
end
% ++++++ element assembly ++++++
TK=zeros(NT,NT);% 全体剛性行列の初期化
for NE=1:NELT% 要素行列の計算と重ね合わせ
% 要素ごとのデータ
[DM,AL,R1,R2,TH,P1,P2]=NEDATA(NE,TT,EYOUNG,PO,RR,PRESS,IPLANE);
% 要素の剛性行列の計算
[SM,FP]=SWMAT(NFU,AL,R1,R2,DM,PO,TH,P1,P2,IPLANE,NE);
% 要素行列 [SM] の全体行列 [TK] への組み込み
IJ=2*(NE-1)+(1:4);
TK(IJ,IJ)=TK(IJ,IJ)+SM(1:4,1:4);% 全体剛性行列への組み込み
% FNT: 外力, FP: 分布力
FNT(IJ)=FNT(IJ)+FP;% 分布荷重の外力ベクトルへの組み込み
end
% ++++++ boundary condition and solution ++++++
[TK,FNT,MM,KY]=prerea1(TK,FNT,NT,KOTEI);% 境界 (拘束) 条件の導入
W=TK\FNT';% 連立一次方程式を解く
[W]=arrmat1(W,NT,MM,KY);% 拘束条件の復帰 拘束条件自由度を 0 にして元に戻す
UVWB=reshape(W,2,NODT);% 変位ベクトルの整形 NODT × 2 の表示の変位の計算結果
%+++++++ stress and strain ++++++
STRNE=zeros(NELT,6);% 要素の応力
STRNODE=zeros(NODT,3);% 節点での応力
STRESS=zeros(NELT,3);% 要素中央での応力
for NE=1:NELT% 求められた変位から要素ごとにひずみと応力を計算
    [DM,AL,R1,R2,TH,P1,P2]=NEDATA(NE,TT,EYOUNG,PO,RR,PRESS,IPLANE);
    IA=(NE-1)*2+(1:4);
    DS=W(IA);
    [STR,HZM]=STRMAT(NFU,AL,R1,R2,DM,DS);
    STRNE(NE,:)=STR;
end
I3=1:3;
STRNODE(1,I3)=STRNE(1,I3);
for NE=2:NELT
    STRNODE(NE,I3)=0.5*(STRNE(NE,I3)+STRNE((NE-1),(3+I3)));
end
STRNODE(NODT,I3)=STRNE(NELT,(3+I3));
'OUTPUT UVWB : u , v '
'OUTPUT STRESS : sig_r, sig_t, tau_rt'
for NE=1:NELT
    STRESS(NE,I3)=0.5*(STRNODE(NE,I3)+STRNODE(NE+1,I3));
end

%-----データ入力の再構成-----
```

```

function[DM,AL,R1,R2,TH,P1,P2]=NEDATA(NE,TT,EYOUNG,P0,RR,PRESS,IPLANE)
R1=RR(NE);R2=RR(NE+1);TH=TT(NE);P1=PRESS(NE,:);P2=PRESS(NE+1,:);
AL=(R2-R1);
DM=zeros(3,3);% 2次元の [D] 行列
POE=P0;
EYOUNGE=EYOUNG;
if ((IPLANE == 1) | (IPLANE == 3))%平面ひずみの場合
    POE=P0/(1-P0);
    EYOUNGE=EYOUNG/(1-P0^2);
end
C=EYOUNGE/(1-POE*POE);
DM(1,1)=C;DM(2,2)=C;DM(1,2)=C*POE;DM(2,1)=C*POE;
DM(3,3)=C*0.5*(1-POE);
%-----境界条件と外力の導入-----
function [TK,FNT,MM,KY]=prerea1(TK,FNT,NT,KOTEI)
[NFIX,K]=size(KOTEI);
    III=0;
    for N=1:NFIX
        NODE=KOTEI(N,1);
        for JI=2:3
            if KOTEI(N,JI) ~=0
                III=III+1;
                KY(III)=(N-1)*2-1+JI;
            else
                end
            end
        end
    end
NOFIX=III;
INDEX=1:NT;
    INDEX(KY)=zeros(size(KY));
MM=0;
for N=1:NT
    if INDEX(N) ~= 0
        MM=MM+1;
        INDEX(MM)=N;
    else
        end
    end
end
%
INDEX=INDEX(1:MM);
FNT=FNT(INDEX);
TK=TK(INDEX,INDEX);
%-----要素ごとの剛性行列・外力ベクトルの計算-----
function [SM,FP]=SWMAT(NFU,AL,R1,R2,DM,P0,TH,P1,P2,IPLANE,NE)
%----Gauss integration formula -----
P=[0.9491079 0.7415312 0.4058452 0 -0.4058452 -0.7415312 -0.9491079];
H=[0.129485 0.2797054 0.3818301 0.4179592 0.3818301 0.2797054 0.129485];
% ----- end Gauss -----
%
SM=zeros(4,4);
FP=(1:4)*0;
%--- begin numerical integration ---
for IT=1:7
    S=0.5*(1+P(IT));
    RP=0.5*(R1+R2)+(P(IT)*AL*0.5);
    PP=P1+(P2-P1)*(P(IT)+1)*0.5;
    CONST=RP*AL*H(IT)*3.1415926*0.5;
    CONSTP=RP*AL*H(IT)*3.1415926*0.5*PP;
%

```

```

[BM,FW]=BWMAT(S,AL,RP,NFU);
%
BD=BM'*DM;
SM=SM + (BD * BM) * (CONST*TH);
FP=FP+FW*(CONSTP*TH);%分布力
end
%--- end numerical integration ---
if NFU ==0
    SM=2*SM;
    FP=2*FP;
end
%-----[B] 行列の計算-----
function[BM,FW]=BWMAT(S,AL,RP,NFU)
BM=zeros(3,4);
BM(1,1)=-1/AL;BM(1,3)=1/AL;
BM(2,1)=(1-S)/RP;BM(2,3)=S/RP;
BM(2,2)=NFU*(1-S)/RP;BM(2,4)=NFU*S/RP;
%if NFU >=1
    BM(3,1)=-NFU*(1-S)/RP;BM(3,3)=-NFU*S/RP;
    BM(3,2)=-1/AL-(1-S)/RP;BM(3,4)=1/AL-S/RP;
%end
%
FW=(1:4)*0;
FW(1)=1-S;FW(3)=S;
%-----要素の応力計算-----
function[STR,HZM]=STRMAT(NFU,AL,R1,R2,DM,TT,DS)
STR=zeros(6,1);%応力ベクトル
HZM=zeros(6,1);%ひずみベクトル
%
[BM,QN]=BWMAT(0,AL,R1,NFU);
HZM(1:3,1)=BM*DS';
STR(1:3,1)=DM*HZM(1:3,1);
%
[BM,QN]=BWMAT(1,AL,R2,NFU);
HZM(4:6,1)=BM*DS';
STR(4:6,1)=DM*HZM(4:6,1);
%-----結果の行列に拘束点情報を入れる-----
function [A]=arrmat1(B,NT,MM,KY)
NS=size(KY);
LL=0;
for NI=1:NT
    LL=LL+1;
    if sum(NI==KY)==1
        A(NI)=0;
        LL=LL-1;
    else
        A(NI)=B(LL);
    end
end
end
%-----

```

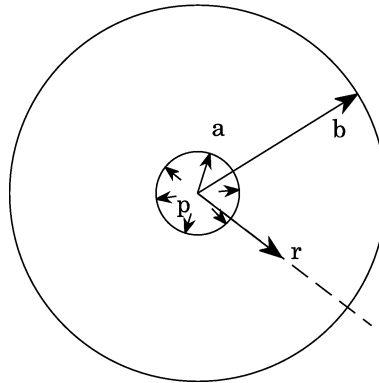


図 5: 内圧を受ける円板

| 要素番号 | σ_r | σ_r | σ_θ | σ_θ |
|------|------------|------------|-----------------|-----------------|
| | 解析解 | FEM | 解析解 | FEM |
| 1 | -0.90 | -0.83 | 1.03 | 1.06 |
| 2 | -0.71 | -0.72 | 0.85 | 0.85 |
| 3 | -0.55 | -0.55 | 0.68 | 0.68 |
| 4 | -0.41 | -0.42 | 0.54 | 0.54 |
| 5 | -0.30 | -0.31 | 0.44 | 0.44 |
| 6 | -0.21 | -0.22 | 0.35 | 0.35 |
| 7 | -0.14 | -0.15 | 0.28 | 0.28 |
| 8 | -0.09 | -0.09 | 0.22 | 0.23 |
| 9 | -0.05 | -0.06 | 0.19 | 0.19 |
| 10 | -0.03 | -0.03 | 0.16 | 0.16 |
| 11 | -0.01 | -0.01 | 0.14 | 0.14 |

表 2: 内圧を受ける円板の応力

[例題 3] 図 5 のような円板の内側に内圧がかかっている場合の応力を求めよ．これは有限要素法ハンドブック（下）p.429 の例題を採用している．

[解] 数値として

$$a = 50\text{mm} , b = 200\text{mm} , h = 1\text{mm} , p = 1\text{kgf/mm}^2 ,$$

$$E = 7000\text{kgf/mm}^2 , \nu = 0.3$$

を使う．境界条件としてはすべての周方向の変位 v を拘束する．結果を表 2 に示す．

[入力] 例題 3 の入力ファイル

```
function[IPLANE,E,PO,NELT,RR,TT,KOTEI,NFORCE,...
FORCE,NPRESS,PRESS]=DATAINPUT3
%有限要素法ハンドブック（下）p.429 の例題
% +++++ data input +++++
NFU=0;%軸対称荷重
E=7000;PO=0.3;%ヤング率とポアソン比
ALH=0;%線膨張係数
IPLANE=0;%0 なら平面応力, 1 なら平面ひずみ
NELT=11;%要素の数
NODT=NELT+1;%以下, 半径方向の節点の r 座標
RR=[50 55 62 70 80 90 105 120 140 160 180 200];
TT=0*(1:NELT)+1;%厚さ
%円周方向変位全部拘束 KOTEI[節点番号 u v]
%u v に対応する数字は 1 なら拘束, 0 なら自由
KOTEI=[1 0 1;2 0 1;3 0 1;4 0 1;5 0 1;6 0 1;
7 0 1;8 0 1;9 0 1;10 0 1;11 0 1;12 0 1];
%すべての節点の v 変位を拘束した
NFORCE=1;%集中荷重あり
FORCE=[1 1*2*pi*50*1 0];%集中荷重, 節点 1 の u 方向
NPRESS=0;%分布荷重なし
PRESS=0*(1:NODT);%節点の分布荷重 (NPRESS=0 なので無視される)
```

[例題 4] 図 5 のような円板が角速度 ω で中心軸周りに回転しているときの応力を有限要素法により求めよ. 解析解は

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \left\{ (a^2 + b^2) - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right\} \rho \omega^2 \quad (1a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \left\{ (a^2 + b^2) + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right\} \rho \omega^2 \quad (1b)$$

で与えられる (Timoshenko: Theory of Elasticity, p.82).

[解] 数値として

$$a = 0.2\text{m}, b = 1.0\text{m}, \rho = 2.7\text{kg/m}^3, \omega = 2\pi/\text{sec}$$

$$h = 0.05\text{m}, E = 2 \times 10^{11}\text{kgf/mm}^2, \nu = 0.3$$

を使う. 入力データをプログラムの中に, 結果を表 3 に示す. この例題は円筒の内側, 外側とも拘束がないので σ_r は両表面でゼロであるが, 内側には遠心力がもつともかかっている, 内側に近い部分は急激に σ_r が変化するので, 内側部分の要素分割を細かくしてある.

[入力] 例題 4 の入力ファイル

```
function[IPLANE,EYOUNG,PO,NELT,RR,TT,KOTEI, ... (継続行)
NFORCE,FORCE,NPRESS,PRESS]=DATAINPUT2
%Timoshenko の例題 (Theory of Elasticity, p.82)
% +++++ data input +++++
```

| r | σ_r 解析解 | σ_r FEM | σ_θ 解析解 | σ_θ FEM |
|------|-------------------|-------------------|------------------------|------------------------|
| 0.20 | 0 | 2.93 | 88.68 | 89.52 |
| 0.21 | 3.91 | 3.80 | 84.49 | 84.42 |
| 0.22 | 7.26 | 8.18 | 80.84 | 81.08 |
| 0.24 | 12.66 | 13.11 | 74.80 | 74.91 |
| 0.27 | 18.40 | 18.03 | 68.01 | 67.88 |
| 0.30 | 22.23 | 22.61 | 62.99 | 63.10 |
| 0.35 | 25.98 | 25.61 | 56.98 | 56.88 |
| 0.40 | 27.70 | 27.74 | 52.67 | 52.69 |
| 0.50 | 27.70 | 27.20 | 46.43 | 46.31 |
| 0.60 | 25.01 | 24.68 | 41.50 | 41.42 |
| 0.70 | 20.59 | 20.33 | 36.91 | 36.85 |
| 0.80 | 14.84 | 14.61 | 32.27 | 32.21 |
| 0.90 | 7.94 | 7.72 | 27.39 | 27.33 |
| 1.00 | 0 | 3.53 | 22.17 | 23.22 |

表 3: 回転する円板の応力

```

EYOUNG=2E11;PO=0.3;RHO=2.7;OMEGA=2*pi;ALH=0;
IPLANE=0;%0 なら平面応力, 1 なら平面ひずみ
NODT=14;NELT=13;
RR=[0.2 0.21 0.22 0.24 0.27 0.3 0.35 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0];%半径
TT=0*(1:13)+0.05;%板厚
KOTEI=zeros(NODT,3);%拘束条件行列の初期化
for I=1:NODT
    KOTEI(I,:)= [I 0 1];%円周方向固定
end
NFORCE=0;%集中荷重なし
FORCE=[5 500 0];%NFORCE=0 なので無視される
NPRESS=1;%分布荷重あり
PRESS=zeros(NODT,2);
PRESS(:,1)=RHO*OMEGA^2*RR;%遠心力

```

4 板の曲げ問題プログラム SMAT9

板の有限要素は定番が無く、それゆえ多くの要素が提案されているが、ここでは汎用性のある三角形要素を説明する。変位法で精度のよい板の曲げ要素を作り出すのは困難なので、ここではハイブリッド応力法による定式化を行なっている。理論の詳細についてはオリジナル論文（プログラム中に記述）または機械構造振動学（小松著，森北，2009，プログラムの解説も含む）を参照されたい。

[例題 5] 例題は 4 辺単純支持の正方形板の中央点集中荷重問題である。

[解] この例題では対称性から 1/4 を解析する。図 6 のように節点数 9 で要素分割

をし,

$$E = 7 \times 10^9 \text{kgf/m}^2, \nu = 0.3, h = 0.001\text{m}, L = 1.0\text{m}, P = 1\text{kgf}$$

として計算する入力ファイルは datain.m である. 注意点としては, (1) 要素を構成する三角形の節点番号付は反時計回りに行う. (2) 要素の自由度は

$$w, w_x = \frac{\partial w}{\partial y}, w_y = \frac{\partial w}{\partial x}$$

である. 入力で荷重を $P = 0.25$ としているのは, $1/4$ の対称性が理由である. 境界条件も対称性を考慮して設定する.

```
[W]=main;
```

として実行すると

W =

| | | |
|--------|---------|---------|
| 0.0170 | 0 | 0 |
| 0.0110 | -0.0405 | 0 |
| 0 | -0.0474 | 0 |
| 0.0110 | 0 | -0.0405 |
| 0.0074 | -0.0262 | -0.0262 |
| 0 | -0.0314 | 0 |
| 0 | 0 | -0.0474 |
| 0 | 0 | -0.0314 |
| 0 | 0.0000 | 0.0000 |

と計算結果が示される. 節点 1 の w 方向変位は 0.017 と計算される (荷重が上方向なので, 変位も $+z$ 方向). これと比較すべき理論解は Timoshenko: Theory of Plates and Shells, p.143 より

$$w_{max} = \frac{0.01160 PL^2}{D} = \frac{0.01160 \times 1 \times 1^2}{0.641} = 0.018$$

である.

ハイブリッド応力法による板曲げ要素
SMAT-9 (三角形要素)

原典

R.J.Allwood and G.M.M.Cornes: A Polygonal
Finite Element for Plate Bending Problems
Using the Assumed Stress Approach,
Int.J.for Numerical Methods in Engineering,
Vol.1 (1969) pp.135-149.

function [W]=MAIN

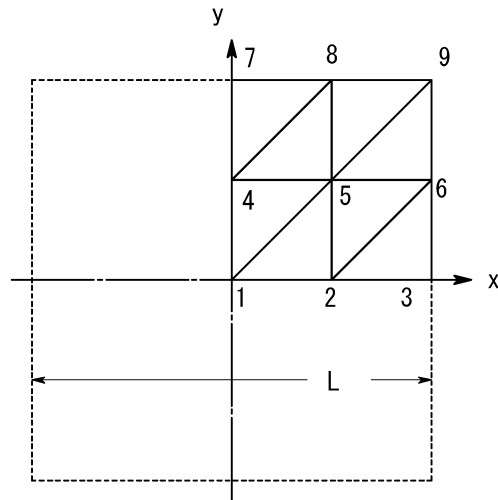


図 6: 正方形板の要素分割

```
[XYZ,D,FORCE,KOTEI,KAKOM,T]=DATAIN;
[NODT,DIM]=size(XYZ);
[NELT,KAKU]=size(KAKOM);
[NOFIX,JIYU]=size(KOTEI);
NT=NODT*(JIYU-1);
TK=zeros(NT,NT);
for NE=1:NELT
    K3=KAKOM(NE,1:3);
    X=XYZ(K3,1);
    Y=XYZ(K3,2);
    SM=stiff(D,X,Y,T);
    TK=ASMAT(TK,SM,KAKOM,NE);
end
%
[TK,FNT,MM,KY]=PREREA(TK,FORCE,NT,KOTEI);
W=TK\FNT';
W=ARRMAT(W,NT,MM,KY);
*****
function [XYZ,D,FORCE,KOTEI,KAKOM,T]=DATAIN
XYZ=[0 0 0
    0.25 0 0
    0.5 0 0
    0 0.25 0
    0.25 0.25 0
    0.5 0.25 0
    0 0.5 0
    0.25 0.5 0
    0.5 0.5 0];
KAKOM=[1 5 4
    1 2 5
    2 6 5
    2 3 6
    4 8 7
    4 5 8
    5 9 8
    5 6 9];
```

```

KOTEI=[1 0 1 1
        2 0 0 1
        3 1 0 1
        4 0 1 0
        6 1 0 1
        7 1 1 0
        8 1 1 0
        9 1 0 0];
FORCE=[1 0.25 0 0];
E=7E9;
PO=0.3;
T=0.001;
D1=1.0/E;D3=-PO*D1;D4=2*(1+PO)/E;
D=[D1 D1 D3 D4 D4 D4];
*****
function [A]=ARRMAT(B,NT,MM,KY)
NS=size(KY);
LL=0;
for NI=1:NT
    LL=LL+1;
    if sum(NI==KY)==1
        A(NI)=0;
        LL=LL-1;
    else
        A(NI)=B(LL);
    end
end
NODT=NT/3;
A=reshape(A,3,NODT);
A=A';
*****
function [TK,FNT,MM,KY]=PREREA(TK,FORCEN,NT,KOTEI)
[NFIX,K]=size(KOTEI);
[NFORCE,K]=size(FORCEN);
III=0;
for N=1:NFIX
    NODE=KOTEI(N,1);
    for JI=2:4
        if KOTEI(N,JI) ~=0
            III=III+1;
            KY(III)=((NODE-1)*3-1)+JI;
        else
            end
        end
    end
end
NOFIX=III;
INDEX=1:NT;
INDEX(KY)=zeros(size(KY));
MM=0;
for N=1:NT
    if INDEX(N) ~= 0
        MM=MM+1;
        INDEX(MM)=N;
    else
        end
    end
end
%
INDEX=INDEX(1:MM);
FNT=0*(1:NT);

```

```

for NA=1:NFORCE
    NODE=FORCEN(NA,1);
    NJ3=(NODE-1)*3+(1:3);
    FNT(NJ3)=FORCEN(NA,2:4);
end
%
TK=TK(INDEX,INDEX);
FNT=FNT(INDEX);
*****
function [TK]=ASMAT(TK,SM,KAKOM,NE)
KI=(KAKOM(NE,1)-1)*3+(1:3);
KJ=(KAKOM(NE,2)-1)*3+(1:3);
KK=(KAKOM(NE,3)-1)*3+(1:3);
TK(KI,KI)=TK(KI,KI)+SM(1:3,1:3);
TK(KI,KJ)=TK(KI,KJ)+SM(1:3,4:6);
TK(KI,KK)=TK(KI,KK)+SM(1:3,7:9);
TK(KJ,KI)=TK(KJ,KI)+SM(4:6,1:3);
TK(KJ,KJ)=TK(KJ,KJ)+SM(4:6,4:6);
TK(KJ,KK)=TK(KJ,KK)+SM(4:6,7:9);
TK(KK,KI)=TK(KK,KI)+SM(7:9,1:3);
TK(KK,KJ)=TK(KK,KJ)+SM(7:9,4:6);
TK(KK,KK)=TK(KK,KK)+SM(7:9,7:9);
*****
function [SM]=STIFF(D,X,Y,T)
H=HMAT(D,X,Y,T);
HI=inv(H);
TM=TMATR(X,Y,T);
SM=(TM') * real(HI') * TM;
*****
function [H]=HMAT(D,X,Y,T)
H=zeros(9,9);
AA=16/3*T;
BB=8/15*(T*T*T);
A=0;XS=0;YS=0;XX=0;YY=0;XY=0;
%
for I=1:3
    J=I+1;
    if(I == 3)
        J=1;
    else
        end
    XI=X(I);XJ=X(J);YI=Y(I);YJ=Y(J);
    if((XJ-XI) == 0)
        S=0;R=0;
    else
        S=(YJ-YI)/(XJ-XI);
        R=(XI*YJ-XJ*YI)/(XI-XJ);
    end
    Z1=XJ-XI;
    Z2=XJ*XJ-XI*XI;
    Z3=XJ^3-XI^3;
    Z4=XJ^4-XI^4;
    A=A-0.5*S*Z2-R*Z1;
    XS=XS-S*Z3/3-0.5*R*Z2;
    YS=YS-S*S*Z3/6-S*R*0.5*Z2-0.5*R*R*Z1;
    XX=XX-0.25*S*Z4-R*Z3/3;
    XY=XY-S*S*Z4/8-S*R*Z3/3-R*R*Z2/4;
    YY=YY-S*S*Z4/12-S*S*R*Z3/3-S*R*R*Z2*0.5-R*R*R*Z1/3;
end

```

```

%
H(1,1)=D(1)*AA*A;
H(2,1)=D(1)*AA*XS;
H(1,2)=H(2,1);
H(3,1)=D(1)*AA*YS;
H(1,3)=H(3,1);
H(4,1)=D(3)*AA*A;
H(1,4)=H(4,1);
H(5,1)=D(3)*AA*XS;
H(1,5)=H(5,1);
H(6,1)=D(3)*AA*YS;
H(1,6)=H(6,1);
H(2,2)=D(1)*AA*XX+D(5)*BB*A;
H(3,2)=D(1)*AA*XY;
H(2,3)=H(3,2);
H(4,2)=D(3)*AA*XS;
H(2,4)=H(4,2);
H(5,2)=D(3)*AA*XX;
H(2,5)=H(5,2);
H(6,2)=D(3)*AA*XY;
H(2,6)=H(6,2);
H(9,2)=D(5)*BB*A;
H(2,9)=H(9,2);
H(3,3)=D(1)*AA*YY;
H(4,3)=D(3)*AA*YS;
H(3,4)=H(4,3);
H(5,3)=D(3)*AA*XY;
H(3,5)=H(5,3);
H(6,3)=D(3)*AA*YY;
H(3,6)=H(6,3);
H(4,4)=D(2)*AA*A;
H(5,4)=D(2)*AA*XS;
H(4,5)=H(5,4);
H(6,4)=D(2)*AA*YS;
H(4,6)=H(6,4);
H(5,5)=D(2)*AA*XX;
H(6,5)=D(2)*AA*XY;
H(5,6)=H(6,5);
H(6,6)=D(2)*AA*YY+D(6)*BB*A;
H(8,6)=D(6)*BB*A;
H(6,8)=H(8,6);
H(7,7)=D(4)*AA*A;
H(8,7)=D(4)*AA*XS;
H(7,8)=H(8,7);
H(9,7)=D(4)*AA*YS;
H(7,9)=H(9,7);
H(8,8)=D(4)*AA*XX+D(6)*BB*A;
H(9,8)=D(4)*AA*XY;
H(8,9)=H(9,8);
H(9,9)=D(4)*AA*YY+D(5)*BB*A;
*****
function [TM]=TMATR(X,Y,TT)
TM=zeros(9,9);
for IVIP=1:3
X1=X(IVIP);
Y1=Y(IVIP);
J=IVIP+1;
if (J == 4)
J=1;

```

```

else
end
X2=X(J);
Y2=Y(J);
TI=TIMAT(X1,X2,Y1,Y2,IVIP,TT);
TM=TM+TI;
end
*****
function [TI]=TIMAT(X1,X2,Y1,Y2,IVIP,TT)
R=sqrt((X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2);
CS=(X2-X1)/R;
SN=(Y2-Y1)/R;
PA=[1 0 0 0 0
    X1 0 0 1 0
    Y1 0 0 0 0
    0 1 0 0 0
    0 X1 0 0 0
    0 Y1 0 0 1
    0 0 1 0 0
    0 0 X1 0 1
    0 0 Y1 1 0];
PB=[0 0 0 0 0
    CS 0 0 0 0
    SN 0 0 0 0
    0 0 0 0 0
    0 CS 0 0 0
    0 SN 0 0 0
    0 0 0 0 0
    0 0 CS 0 0
    0 0 SN 0 0];
TR=[0 CS*SN -SN^2
    0 -SN*CS -CS^2
    0 SN^2-CS^2 2*SN*CS
    -SN 0 0
    CS 0 0];
EA=[0.5 R/12 0 0.5 -R/12 0
    -1/R 0 0 1/R 0 0
    0 0 0.5 0 0 0.5];
EB=[0.15 R/30 0 0.35 -R/20 0
    -0.5/R -1/12 0 0.5/R 1/12 0
    0 0 1/6 0 0 1/3];
SEKI=SEKIBUN(CS,SN,IVIP);
E1=EA * SEKI;
E2=EB * SEKI;
W=PA * TR;
V=PB * TR;
T1=W * E1;
T2=V * E2;
TI=T1+T2*R;
BUS=R*TT*TI*2/3;
TI=BUS*TI;
*****
function [SEKI]=SEKIBUN(CS,SN,IVIP)
W=[1 0 0 0 0 0
    0 CS SN 0 0 0
    0 -SN CS 0 0 0
    0 0 0 1 0 0
    0 0 0 0 CS SN
    0 0 0 0 -SN CS];

```



```

A=0;B=0;C=0;
if (IVIP == 1)
  A=1;
else
  if(IVIP == 2)
    B=1;
  else
    C=1;
  end
end
end
ABC=[A 0 0 B 0 0 C 0 0
      0 A 0 0 B 0 0 C 0
      0 0 A 0 0 B 0 0 C
      C 0 0 A 0 0 B 0 0
      0 C 0 0 A 0 0 B 0
      0 0 C 0 0 A 0 0 B];
SEKI=W * ABC;
*****

```

5 3次元骨組構造 BEAM3S

本書の6.3.2項では、結合点がピン結合のトラス構造（曲げモーメントは節点で伝えず、軸力のみを伝達する）のプログラムリストを示したが、ここでは、結合が溶接あるいは複数ボルトの曲げモーメントも伝えるラーメン構造（骨組構造, frame structure）についてのプログラム (BEAM3S) を示す。なお、軸方向の回転を定義するコードアングルの入力を省略するため、本プログラムではコードアングルは0°としている。非対称性の断面をもつ3次元骨組みの場合には注意されたい（小松：機械構造振動学，森北，2009, p.42 参照）。

5.1 使用法

関数の説明

BEAM3SMAIN メインプログラム

この中の **datainput** の部分を変更して入力データを作成する。
入力データの説明は以下のとおり。

NODT: 節点数

NELT: 要素数

(**NT**: 全体の解析自由度 **NODT*6**)

XX,YY,ZZ : それぞれ **1*NODT** のベクトル
節点の **x,y,z** 座標

KAKOM : **NELT*2** の行列で、要素のつながり情報
たとえば3行目の **3 5** は第3要素は節点3と5
とをつないでできる要素であることを示す。

KOTEI:NOFIX*7 の境界条件行列

各行は 節点番号, **u,v,w,bu,bv,bw** の7成分からなり、
拘束されて入る場合 **1**, 自由な場合 **0** を入れる。

例えば **10 1 1 1 1 1 1** の場合、第10節点が固定であることを示し、

11 0 0 1 0 0 0 の場合、第11節点の **z** 方向に
単純支持であることを示す。

座標系は全体座標である。

EA,EIY,EIZ,RA,GJ,RI: 要素の断面特性

これを実行すると

HENI : 節点での変形量

TIKARA : 節点での反力

FLOCAL : 各部材で生じた応力 (軸力と曲げモーメント)

が計算されてくる.

(以下, サブルーチンの機能説明)

SKMAT 局所座標系で作った 12*12 の 3 次元梁要素の剛性行列

HENKA1 要素行列を全体座標系に変換する 12*12 の行列

PREREA 境界条件を導入して全体剛性行列と外力ベクトルを小さくする.

ARRMAT 解析結果の変位に境界条件を入れて拡張する.

MODESH 解析結果の図形表示 (例題 6 参照)

[例題 6] 図 7 のような骨組構造に点 5,6 に下方向にそれぞれ $P = 20\text{ton}$ の荷重がかかっているときの变形, 反力, 内部応力を求めよ. ただし, 土台の節点 11,12,13,14 は固定で, 側面の節点 1,2,9,10 も固定である. 節点の座標, および骨組の剛性は DATAINPUT1.m を参照されたい. なお, 本例題の単位は m, ton である.

[解] この後で示す入力ファイル DATAINPUT1.m を用意して

```
[HENI,TIKARA,FLOCAL,XX,YY,ZZ,KAKOM]=BEAM3SMMAIN;
```

と実行すると

HENI : 節点での変形量

TIKARA : 節点での反力

FLOCAL : 各部材で生じた応力 (軸力と曲げモーメント)

が計算される. この出力例もあとで示す. 図形出力は

```
MODESH(1,70,HENI,XX,YY,ZZ,KAKOM)
```

とすれば, 点線で变形前, 実線で变形後が表示される. 最初の 1 は NM で

NM : 0 であれば变形前図, 1 であれば变形ごとの重ね書きとなる. 次の 70 は AMPP で表示の時の変形量の大きさをこの数値でコントロールする.

例題 6 の入力ファイル

```
function [NELT,NODT,KAKOM,KOTEI,XX,YY,ZZ,FORCEN...  
    ,EA,EIY,EIZ,GJ]=DATAIN1  
%例題: 小堀, 吉田: 構造解析プログラム, 丸善, 1980,p65  
NELT=14;%要素数  
NODT=14;%節点数  
XX=[8 16 8 16 8 16 8 16 0 0 8 8 16 16];%節点の x 座標  
YY=[0 0 8 8 12 12 16 16 8 16 8 16 8 16];%節点の y 座標  
ZZ=[8 8 8 8 8 8 8 8 0 0 0 0];%節点の z 座標  
KAKOM=[1 3;2 4;3 5;4 6;5 7;6 8;3 9;7 10;3 4  
    7 8;11 3;12 7;13 4;14 8];%要素を構成する節点  
KOTEI=[1 1 1 1 1 1 1  
    2 1 1 1 1 1 1  
    9 1 1 1 1 1 1
```

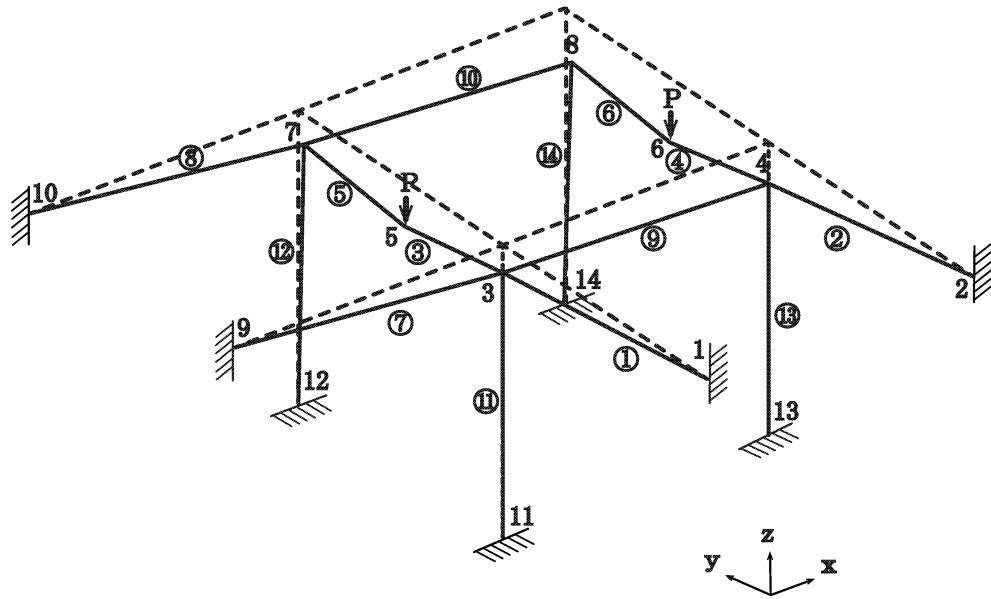


図 7: 骨組構造の節点番号付と変形図

```

10 1 1 1 1 1 1
11 1 1 1 1 1 1
12 1 1 1 1 1 1
13 1 1 1 1 1 1
14 1 1 1 1 1 1];%拘束点と u,v,w,bu,bv,bw
FORCEN=[5 0 0 -20 0 0 0
        6 0 0 -20 0 0 0];%外力の節点, Fx,Fy,Fz,Mx,My,Mz
E=21000000;
EA=zeros(1,14)+E*0.003;%伸び剛性
EIY=zeros(1,10)+E*0.01428571;%y 軸周りの曲げ剛性
EIY(11:14)=(1:4)*0+0.00714286*E;
EIZ=zeros(1,10)+E*0.00476190;%z 軸周りの曲げ剛性
EIZ(11:14)=EIY(11:14);
GJ=zeros(1,14)+100000;%x 軸周りのねじり剛性
%-----

```

例題 6 の解析結果は以下になる。

```

displacement
node    u        v        w        bu        bv        bw
1        0        0        0        0        0        0
2        0        0        0        0        0        0
3  0.000075  0.000061 -0.000721 -0.000138  0.000075  0.000000
4  0.000070  0.000081 -0.001043 -0.000176  0.000019 -0.000005
5  0.000087 -0.000015 -0.001205 -0.000013  0.000084 -0.000005
6  0.000097 -0.000011 -0.001639 -0.000031  0.000027 -0.000007
7  0.000115 -0.000091 -0.000813  0.000122  0.000093 -0.000008
8  0.000118 -0.000103 -0.001279  0.000124  0.000034 -0.000005
9        0        0        0        0        0        0
10       0        0        0        0        0        0
11       0        0        0        0        0        0

```

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

reaction force

| node | Fx | Fy | Fz | Mx | My | Mz |
|------|---------|---------|----------|---------|----------|---------|
| 1 | -0.1770 | -0.4803 | 1.1943 | 9.9415 | -0.9410 | 0.7072 |
| 2 | -0.1136 | -0.6402 | 2.3871 | 16.1456 | -0.2414 | 0.5206 |
| 3 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5 | 0.0000 | 0.0000 | -20.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6 | 0.0000 | 0.0000 | -20.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9 | -0.5924 | -0.1422 | 2.9504 | 1.7215 | -14.6245 | -0.5699 |
| 10 | -0.9042 | 0.1388 | 3.1019 | -1.5287 | -15.8909 | 0.6542 |
| 11 | 0.7941 | 1.7222 | 5.6757 | -4.3067 | 1.7650 | -0.0010 |
| 12 | 0.9027 | -1.4002 | 6.4002 | 3.3077 | 1.8689 | 0.0990 |
| 13 | 0.0266 | 2.1882 | 8.2153 | -5.4541 | -0.2555 | 0.0663 |
| 14 | 0.0638 | -1.3863 | 10.0752 | 3.2139 | -0.3804 | 0.0257 |

local stress

| element | node | Fx | Fy | Fz | Mx | My | Mz |
|---------|------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|
| 1 | 1 | -0.4803 | 0.1770 | 1.1943 | -0.9410 | -9.9415 | 0.7072 |
| 1 | 3 | 0.4803 | -0.1770 | -1.1943 | 0.9410 | 0.3873 | 0.7091 |
| 2 | 2 | -0.6402 | 0.1136 | 2.3871 | -0.2414 | -16.1456 | 0.5206 |
| 2 | 4 | 0.6402 | -0.1136 | -2.3871 | 0.2414 | -2.9509 | 0.3880 |
| 3 | 3 | 1.1962 | 0.0192 | 10.2132 | -0.2202 | -11.1022 | 0.1769 |
| 3 | 5 | -1.1962 | -0.0192 | -10.2132 | 0.2202 | -29.7505 | -0.1000 |
| 4 | 4 | 1.4514 | 0.0431 | 10.2095 | -0.1824 | -9.5783 | 0.1317 |
| 4 | 6 | -1.4514 | -0.0431 | -10.2095 | 0.1824 | -31.2599 | 0.0406 |
| 5 | 5 | 1.1962 | 0.0192 | -9.7868 | -0.2202 | 29.7505 | 0.1000 |
| 5 | 7 | -1.1962 | -0.0192 | 9.7868 | 0.2202 | 9.3969 | -0.0231 |
| 6 | 6 | 1.4514 | 0.0431 | -9.7905 | -0.1824 | 31.2599 | -0.0406 |
| 6 | 8 | -1.4514 | -0.0431 | 9.7905 | 0.1824 | 7.9019 | 0.2129 |
| 7 | 3 | -0.5924 | -0.1422 | -2.9504 | 1.7215 | 8.9786 | -0.5680 |
| 7 | 9 | 0.5924 | 0.1422 | 2.9504 | -1.7215 | 14.6245 | -0.5699 |
| 8 | 7 | -0.9042 | 0.1388 | -3.1019 | -1.5287 | 8.9239 | 0.4561 |
| 8 | 10 | 0.9042 | -0.1388 | 3.1019 | 1.5287 | 15.8909 | 0.6542 |
| 9 | 3 | 0.0439 | -0.0966 | -0.3928 | 0.4777 | 3.6699 | -0.3190 |
| 9 | 4 | -0.0439 | 0.0966 | 0.3928 | -0.4777 | -0.5276 | -0.4534 |
| 10 | 7 | -0.0207 | -0.0651 | -0.2848 | -0.0255 | 3.3514 | -0.3340 |
| 10 | 8 | 0.0207 | 0.0651 | 0.2848 | 0.0255 | -1.0732 | -0.1872 |
| 11 | 11 | 5.6757 | 0.7941 | 1.7222 | -0.0010 | -4.3067 | 1.7650 |
| 11 | 3 | -5.6757 | -0.7941 | -1.7222 | 0.0010 | -9.4711 | 4.5879 |
| 12 | 12 | 6.4002 | 0.9027 | -1.4002 | 0.0990 | 3.3077 | 1.8689 |
| 12 | 7 | -6.4002 | -0.9027 | 1.4002 | -0.0990 | 7.8937 | 5.3524 |
| 13 | 13 | 8.2153 | 0.0266 | 2.1882 | 0.0663 | -5.4541 | -0.2555 |
| 13 | 4 | -8.2153 | -0.0266 | -2.1882 | -0.0663 | -12.0515 | 0.4686 |
| 14 | 14 | 10.0752 | 0.0638 | -1.3863 | 0.0257 | 3.2139 | -0.3804 |
| 14 | 8 | -10.0752 | -0.0638 | 1.3863 | -0.0257 | 7.8764 | 0.8908 |

5.2 BEAM3S のプログラム

 BEAM3S プログラムリスト

```

*****
function [HENI,TIKARA,FLOCAL,XX,YY,ZZ,KAKOM]=BEAM3SMMAIN
%
% ++++++ data input ++++++
[NELT,NODT,KAKOM,KOTEI,XX,YY,ZZ,FORCEN...
,EA,EIY,EIZ,GJ]=DATAIN1;
% ----- end (data input) -----
NT=NODT*6;
TK=zeros(NT,NT);
%
% ++++++ element assembly ++++++
for NE=1:NELT
    IN=KAKOM(NE,1);
    XI=XX(IN);YI=YY(IN);ZI=ZZ(IN);
    JN=KAKOM(NE,2);
    XJ=XX(JN);YJ=YY(JN);ZJ=ZZ(JN);
    [HEN,FL]=henka1(XI,XJ,YI,YJ,ZI,ZJ);
    [SK]=skmat(FL,EA(NE),EIZ(NE),EIY(NE),GJ(NE));
    SK=HEN' * SK * HEN;
    K1=((IN-1)*6)+(1:6);
    K2=((JN-1)*6)+(1:6);
    TK(K1,K1)=TK(K1,K1)+SK(1:6,1:6);
    TK(K1,K2)=TK(K1,K2)+SK(1:6,7:12);
    TK(K2,K2)=TK(K2,K2)+SK(7:12,7:12);
    TK(K2,K1)=TK(K2,K1)+SK(7:12,1:6);
end
% ----- end (assembly) -----
TKK=TK;
%
% ++++++ boundary condition ++++++
[TK,FNT,MM,KY]=prerea(TK,FORCEN,NT,KOTEI);
% ----- end (boundary) -----
%
% ++++++ solver ++++++
HENI=TKK\FNT';
% ----- end (solve) -----
% ++++++ rearrangement ++++++
[HENI]=arrmat(HENI,NT,MM,KY);
TIKARA=TKK * HENI';
WD=zeros(12,1);
FLOCAL=zeros((2*NELT),8);
% ++++ stress resultant for each element ++
for NE=1:NELT
    IN=KAKOM(NE,1);
    XI=XX(IN);YI=YY(IN);ZI=ZZ(IN);
    JN=KAKOM(NE,2);
    XJ=XX(JN);YJ=YY(JN);ZJ=ZZ(JN);
    [HEN,FL]=henka1(XI,XJ,YI,YJ,ZI,ZJ);
    [SK]=skmat(FL,EA(NE),EIZ(NE),EIY(NE),GJ(NE));
    SK=HEN' * SK * HEN;
    IG=((IN-1)*6)+(1:6);
    JG=((JN-1)*6)+(1:6);
    WD(1:6)=HENI(IG);
    WD(7:12)=HENI(JG)';
    WS=HEN * SK * WD;
    FLOCAL((NE*2-1),:)= [NE IN WS(1:6)'];
    FLOCAL((NE*2),:)= [NE JN WS(7:12)'];
end
% ++++++ print of the result ++++++

```

```

HENI=reshape(HENI,6,NODT);
HENI=HENI';
'displacement'
'node u v w bu bv bw'
[(1:NODT)' HENI]
TIKARA=reshape(TIKARA,6,NODT);
TIKARA=TIKARA';
'reaction force'
'node Fx Fy Fz Mx My Mz'
[(1:NODT)' TIKARA]
'local stress'
'element node Fx Fy Fz Mx My Mz'
FLOCAL

% -----
*****
function [SK]=SKMAT(L,EA,EIZ,EIY,GJ)
L2=L*L;
L3=L2*L;
SK=zeros(12,12);
SK(1,1)=EA/L;
SK(1,7)=-EA/L;
    SK(7,1)=SK(1,7);
SK(2,2)=12*EIZ/L3;
SK(2,6)=6*EIZ/L2;
    SK(6,2)=SK(2,6);
SK(2,8)=-12*EIZ/L3;
    SK(8,2)=SK(2,8);
SK(2,12)=6*EIZ/L2;
    SK(12,2)=SK(2,12);
SK(3,3)=12*EIY/L3;
SK(3,5)=-6*EIY/L2;
    SK(5,3)=SK(3,5);
SK(3,9)=-12*EIY/L3;
    SK(9,3)=SK(3,9);
SK(3,11)=-6*EIY/L2;
    SK(11,3)=SK(3,11);
SK(4,4)=GJ/L;
SK(4,10)=-GJ/L;
    SK(10,4)=SK(4,10);
SK(5,5)=4*EIY/L;
SK(5,9)=6*EIY/L2;
    SK(9,5)=SK(5,9);
SK(5,11)=2*EIY/L;
    SK(11,5)=SK(5,11);
SK(6,6)=4*EIZ/L;
SK(6,8)=-6*EIZ/L2;
    SK(8,6)=SK(6,8);
SK(6,12)=2*EIZ/L;
    SK(12,6)=SK(6,12);
SK(7,7)=EA/L;
SK(8,8)=12*EIZ/L3;
SK(8,12)=-6*EIZ/L2;
    SK(12,8)=SK(8,12);
SK(9,9)=12*EIY/L3;
SK(9,11)=6*EIY/L2;
    SK(11,9)=SK(9,11);
SK(10,10)=GJ/L;
SK(11,11)=4*EIY/L;

```

```

SK(12,12)=4*EIZ/L;
*****
function [h,fl]=HENKA1(xi,xj,yi,yj,zi,zj)
h=zeros(12,12);
fl=sqrt((xj-xi)^2+(yj-yi)^2+(zj-zi)^2);
if xi ~= xj | yi ~= yj
    h(1,1)=(xj-xi)/fl;
    h(1,2)=(yj-yi)/fl;
    h(1,3)=(zj-zi)/fl;
    ff2=sqrt(h(1,2)^2+h(1,1)^2);
    h(2,1)=-h(1,2)/ff2;
    h(2,2)=h(1,1)/ff2;
    h(3,1)=-h(1,3)*h(2,2);
    h(3,2)=h(1,3)*h(2,1);
    h(3,3)=ff2;
else
    h(1,3)=1.0;
    h(2,1)=1.0;
    h(3,2)=1.0;
end
for ni=1:3
    for nj=1:3
        i3=ni+3;
        j3=nj+3;
        i6=ni+6;
        j6=nj+6;
        i9=ni+9;
        j9=nj+9;
        h(i3,j3)=h(ni,nj);
        h(i6,j6)=h(ni,nj);
        h(i9,j9)=h(ni,nj);
    end
end
*****
function [TK,FNT,MM,KY]=PREREA(TK,FORCEN,NT,KOTEI)
[NFIX,K]=size(KOTEI);
[NFORCE,K]=size(FORCEN);
III=0;
for N=1:NFIX
    NODE=KOTEI(N,1);
    for JI=2:7
        if KOTEI(N,JI) ~=0
            III=III+1;
            KY(III)=(NODE-1)*6-1+JI;
        else
            end
        end
    end
    end
NOFIX=III;
INDEX=1:NT;
INDEX(KY)=zeros(size(KY));
MM=0;
for N=1:NT
    if INDEX(N) ~= 0
        MM=MM+1;
        INDEX(MM)=N;
    else
        end
    end

```

```

end
%
INDEX=INDEX(1:MM);
FNT=0*(1:NT);
for NA=1:NFORCE
    NODE=FORCEN(NA,1);
    NJ6=(NODE-1)*6+(1:6);
    FNT(NJ6)=FORCEN(NA,2:7);
end
%
TK=TK(INDEX,INDEX);
FNT=FNT(INDEX);
*****
function [A]=ARRMAT(B,NT,MM,KY)
NS=size(KY);
LL=0;
for NI=1:NT
    LL=LL+1;
    if sum(NI==KY)==1
        A(NI)=0;
        LL=LL-1;
    else
        A(NI)=B(LL);
    end
end
end
*****

```

6 軸対称シェルの有限要素プログラム

静的荷重問題 (S8S) と座屈問題 (S8B) を本書第 8 章にて説明した。座屈問題では座屈前応力計算として S8S を使うので、両者は同じディレクトリー (S8SB) に入れておく。解析した例題は以下のとおりである。理論と例題の解説、結果については第 8 章に示した。プログラムの実行は、例えば DATAINPUT2.m の球形シェルの引張座屈であれば

```
[STRESS]=RUNS8B(38,41);
```

とすれば、 $n = 38, 39, 40, 41$ に対応した座屈値が座屈モードとともに計算される。

———例題入力ファイル———

[静的荷重問題]

DATAIN1S 水圧のかかる円筒タンク

DATAIN4S ミラーの例題（水平置き、PRESS で入力） 部分球形シェルの中心を固定して重力によるシェルの変形を計算

DATAIN5S ミラーの例題（縦置き、PRESS で入力）

DATAIN6S 飛行船の応力解析（内圧一定）

—————
[座屈問題]

DATAIN1B 円筒シェルの軸圧縮座屈

DATAIN2B 球形シェルの引張座屈

(Rao:AIAAJ.12-1,1974,pp.100-101)

DATAIN3B 変厚円筒シェルの軸圧縮座屈

(Rao:AIAAJ.12-1,1974,pp.100-101)

DATAIN4B 浅い球形シェルの分岐座屈

(頂角 40 度, 半径 500)

DATAIN5B 加速度を受ける円筒シェル (ロケットをモデリング)