技術資料：スピンドル冷却空気の送出系に関する計算

青木翔平

平成 27 年 7 月 23 日

1　スピンドル冷却系

スピンドルの冷却に用いるシステムの構成を図 1 に示した．

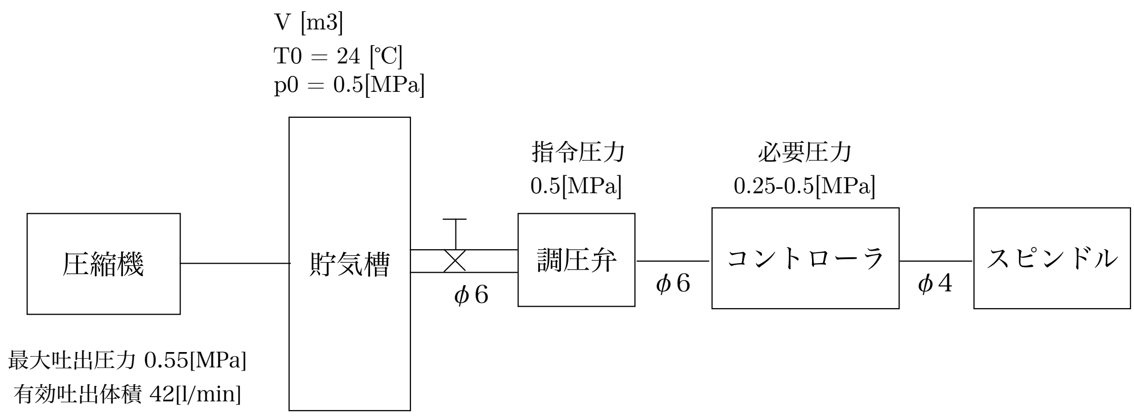

図 1　冷却システム構成図

いま，単位時間あたりに圧縮機からタンクに流入する空気質量を $\dot{m}_c$，タンクからスピンドルコントローラに対して流出する空気質量を $\dot{m}_c$ とおけば，気体の状態方程式及び等エントロピー関係式から以下が成り立つ．

$$\dot{m}_c = \frac{P\dot{V}_{s1}}{RT} \tag{1}$$

$$\dot{m}_d = \frac{p_0 A_e}{\sqrt{RT}}\sigma^* \tag{2}$$

タンク内部の圧力を $p_0(t)$ とおくと，流量に関する連続の式を考慮して以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \frac{RT_0}{V}\left(m_i + \dot{m}_c dt - \dot{m}_d dt\right) \\ &= \frac{RT_0}{V}\left(\frac{p_a V}{RT_0} + \frac{p_a V_{s1}}{RT_0}dt - \frac{p_0(t)A_e}{\sqrt{RT_0}}\sigma^* dt\right) \\ &= k_3 + k_2 dt - k_1 p_0(t) dt \end{aligned} \tag{3}$$

ただし，

$$k_1 = \frac{\sqrt{RT_0}A_e\sigma^*}{V}, k_2 = p_a\frac{V_{s1}}{V}, k_3 = p_a \tag{4}$$

~~$p_0(t)$ を 2 次の項までテーラー展開して数値計算する~~．$p_0(t)$ に関する差分方程式を解く．式 (3) を微分して，

$$p_0{}'(t) = k_2 - k_1 p_0(t) \tag{5}$$

が求まるから，以下の差分方程式から計算すれば良い．

$$p_0(t+1) = p_0(t) + p_0{}'(t) \cdot dt \tag{6}$$

プログラム 1　タンク内全圧の計算 (main.py)

```
from pylab import *
import numpy as np

##### BEGIN PARAMETER AREA ############
gamma = 1.4
pa = 0.1013*(10**6) #[Pa]
p0i = 5*pa #[Pa]
#CHARGE
M = 32 * 0.8 + 14 * 0.2 # O2: 80%, N2: 20%
R0 = 8.314 #(J/mol dot K)
T0 = 24 + 273.15 #[K}
R = R0/M
DISCHARGE_AIR = 42 #[l/min], ref:http://www.airbrush.co.jp/shop/products/detail.php?product_id=1296
Vs1 = DISCHARGE_AIR*0.001/60.0 #[m3/s]
#DISCHARGE
# de = 2 #[mm]
de = 1.7 #[mm]
# de = 6 #[mm]
Ae = pi*(de*0.001/2)*(de*0.001/2)#[m2]
R_kg = 289 # J/(kg dot K)
# V = 1/1000.0 #1L as [m3]
sigma = sqrt(gamma*((2/(gamma+1))**((gamma+1)/(gamma-1)))) # critical flow efficient
##### PARAMETER AREA END ############

dt = 0.01 #[sec]
tTotal = 300 #[sec]
# V = 1/1000.0 #[m3]: 1L
V_array = [1/1000.0,10/1000.0,20/1000.0,30/1000.0,40/1000.0,50/1000.0]
# V_array = [1/1000.0,20/1000.0,50/1000.0]
# V_array = [1/1000.0,50/1000.0]

# V = 1/1000.0
for V in V_array:
    pt = np.array([])
    pt = np.append(pt,p0i)
    ts = np.array([0])
    k1 = ((R*T0)/V) * ((Ae*sigma)/(sqrt(R_kg*T0))) *1000 # x1000 is because of mass unit: kgram or gram
    # k1 = ((R*T0)/V) * ((Ae*sigma)/(sqrt(R_kg*T0))) #working bad, this is default
    k2 = pa * Vs1 / V
    for i in xrange(int(tTotal/dt)):
        p_n = pt[-1]
        if p_n >= p0i:
            p_n_dot =  (-1.0)*k1*p_n
            p_n_dot_dot =  (-1.0)*k1*p_n_dot
            print 'compressor halted: ',i
        else:
            p_n_dot =  (-1.0)*k1*p_n + k2
            p_n_dot_dot =  (-1.0)*k1*p_n_dot
        p_n_1 = p_n + p_n_dot * dt + p_n_dot_dot*dt*dt
        pt = np.append(pt,p_n_1)
        ts = np.append(ts,dt*i)

    plot(ts,pt*(10**-6))

##### VISUALIZATION AREA #########
title('TANK PRESSURE TRANSITION BY AIR DISCHARGE')
legend(('1L','10L','20L','30L','40L','50L'),'upper right')
xlabel('t [sec]')
ylabel('p0 [MPa]')
ylim([0,0.6])
savefig('./image/final_pressure_depends_on_discharge_hole_size.png')
show()
```

上のプログラムは以下の様に実行する．

```
$ python main.py
```

結果を図 2 に示す．

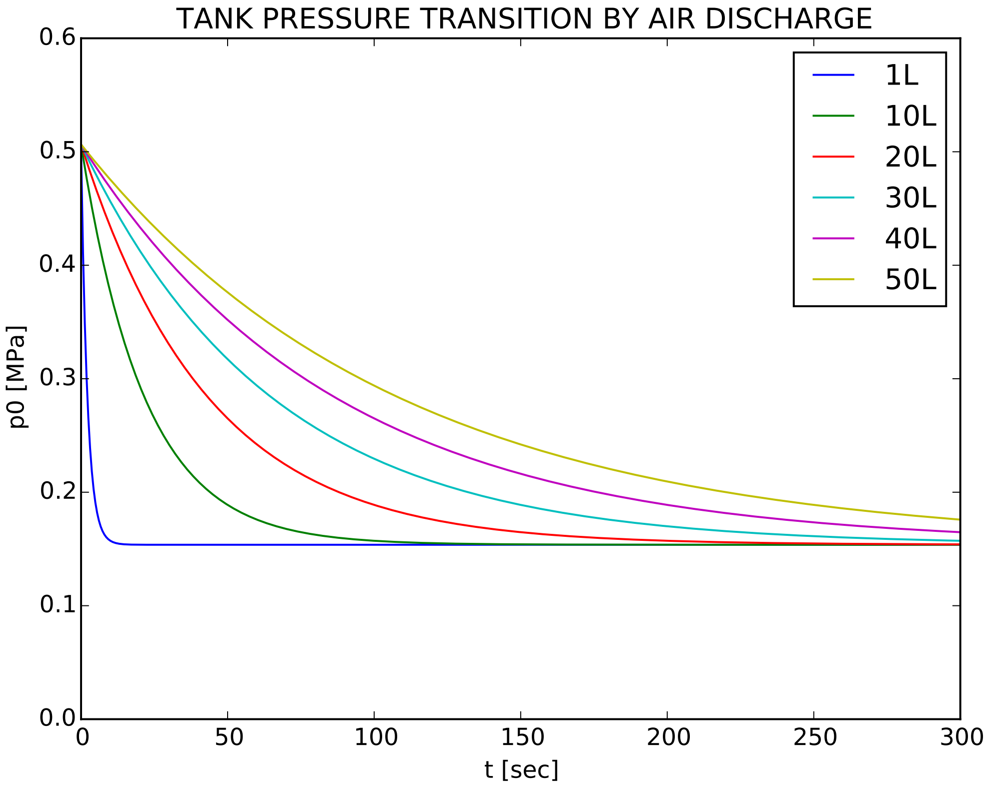

図 2　タンク体積に対するタンク内圧力の時間変化

臨界流れ係数

等エントロピー関係式を用いると，臨界状態（流れのマッハ数＝ 1）となるときの圧力と全圧の関係は次式で表される．

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.528$$

したがって空気（比熱比 $\gamma = 1.4$）が等エントロピー的に膨張するとき，圧力が全圧の 52.8% まで減少したところでマッハ数＝ 1 となり，**チョーク**する．このときの流量は式 (2) で表され，臨界流れ係数 σ^* の大きさは

$$\sigma^* = \sqrt{\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} = 0.685$$

である．

2　参考資料

[1] 松尾 一泰, 「圧縮性流体力学―内部流れの理論と解析」, オーム社, 2013